ಗಣಿತ ಭಾಗ - II

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆ

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಭಾಗ 4 ಕ

ನಾಗರಿಕರ ಮೂಲಭೂತ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು

ಅನುಚ್ಛೇದ 51 ಕ

ಮೂಲಭೂತ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು- ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಭಾರತೀಯ ನಾಗರಿಕನ ಈ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು ಇರುತ್ತವೆಯೆಂದರೆ ಅವನು-

(ಕ) ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ನಾಗರಿಕನು ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಪಾಲಿಸಬೇಕು. ಸಂವಿಧಾನದಲ್ಲಿಯ ಆದರ್ಶಗಳು ರಾಷ್ಟ್ರಧ್ವಜ ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆಗಳನ್ನು ಗೌರವಿಸಬೇಕು.

(ಖ) ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ನಡೆದ ಹೋರಾಟಕ್ಕೆ ಸ್ಫೂರ್ತಿ ನೀಡಿದ ಆದರ್ಶಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸಬೇಕು.

(ಗ) ದೇಶದ ಸಾರ್ವಭೌಮತ್ವ, ಐಕ್ಯತೆ ಮತ್ತು ಸಮಗ್ರತೆಯನ್ನು ಸುರಕ್ಷಿತವಾಗಿಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಪ್ರಯತ್ನಶೀಲರಾಗಿರಬೇಕು.

(ಘ) ನಮ್ಮ ದೇಶದ ರಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಬೇಕು. ದೇಶದ ಸೇವೆ ಮಾಡಬೇಕು.

(ಙ) ಎಲ್ಲ ಪ್ರಕಾರದ ಭೇದಭಾವಗಳನ್ನು ಮರೆತು ಒಗ್ಗಟ್ಟನ್ನು ಬೆಳೆಸಬೇಕು ಹಾಗೂ ಸಹೋದರ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಉತ್ತೇಜಿಸಬೇಕು. ಸ್ತ್ರೀಯರ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಚ್ಯುತಿ ತರುವಂತಹ ರೂಢಿಗಳನ್ನು ತ್ಯಜಿಸಬೇಕು.

(ಚ) ನಮ್ಮ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಪರಂಪರೆಯನ್ನು ಕಾಪಾಡಬೇಕು.

(ಛ) ನೈಸರ್ಗಿಕ ಪರಿಸರವನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಸಜೀವ ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಮೇಲೆ ದಯೆ ತೋರಿಸಿರಿ.

(ಜ) ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಮನೋಭಾವನೆ, ಮಾನವೀಯತೆ ಮತ್ತು ಜಿಜ್ಞಾಸು ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

(ಝ) ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಆಸ್ತಿ-ಪಾಸ್ತಿಗಳನ್ನು ರಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಹಿಂಸಾಚಾರವನ್ನು ತ್ಯಜಿಸಬೇಕು.

(ಞ) ರಾಷ್ಟ್ರದ ಉತ್ತರೋತ್ತರ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ವೈಯಕ್ತಿಕ ಹಾಗೂ ಸಾಮೂಹಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಬೇಕು.

(ಟ) 6 ರಿಂದ 14 ವರ್ಷ ವಯೋಮಾನದಲ್ಲಿಯ ತಮ್ಮ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಪೋಷಕರು ಶಿಕ್ಷಣದ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಡಬೇಕು.

ಸರಕಾರ ನಿರ್ಣಯ ಕ್ರಮಾಂಕ: ಅಭ್ಯಾಸ-2116 /ಪ್ರ.ಕ್ರ.43 /16) ಎಸ್‌ಡಿ-4 ದಿನಾಂಕ 25.04.2016ರ
ಅನ್ವಯ ಸ್ಥಾಪಿತವಾದ ಸಮನ್ವಯ ಸಮಿತಿಯು ದಿ. 3.3.2017 ರಂದು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ ಮಾನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಗಣಿತ

ಭಾಗ-II

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆ

ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳ, ಪುಣೆ.

ತಮ್ಮ ಸ್ಮಾರ್ಟಫೋನದ ಮೇಲೆ DIKSHA App ಮೂಲಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಮೊದಲನೆಯ ಪುಟದ ಮೇಲಿರುವ Q.R. Codeದ ಮೂಲಕ ಡಿಜಿಟಲ್ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾಠದಲ್ಲಿರುವ Q.R. Codeದ ಮೂಲಕ ಆ ಪಾಠಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅಧ್ಯಯನ-ಅಧ್ಯಾಪನದ ಸಲುವಾಗಿ ಉಪಯುಕ್ತ ದೃಕ್-ಶ್ರಾವ್ಯ ಸಾಹಿತ್ಯ ಉಪಲಬ್ಧವಾಗುವುದು.

ಪ್ರಥಮಾವೃತ್ತಿ 2017
ಮೂರನೆಯ ಪುನರ್ಮುದ್ರಣ: 2022

ಗಣಿತ ವಿಷಯ ತಜ್ಞಸಮಿತಿ

ಡಾ. ಮಂಗಲಾ ನಾರಳೀಕರ	(ಅಧ್ಯಕ್ಷ)
ಡಾ. ಜಯಶ್ರೀ ಅತ್ರೆ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀ. ರಮಾಕಾಂತ ಸರೋದೆ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀ. ದಾದಾಸೊ ಸರಡೆ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀ. ಸಂದಿಪ ಪಂಚಭಾಯಿ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀಮತಿ. ಲತಾ ಟಿಳೆಕರ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀಮತಿ. ಉಜ್ವಲಾ ಗೋಡಬೋಲೆ	(ಸದಸ್ಯ-ಸಚಿವ)

ಗಣಿತ ವಿಷಯ - ರಾಜ್ಯ ಅಭ್ಯಾಸಗಟ ಸದಸ್ಯರು

ಶ್ರೀಮತಿ. ಪೂಜಾ ಜಾಧವ
ಶ್ರೀ. ಪ್ರಮೋದ ಠೊಂಬರೆ
ಶ್ರೀ. ರಾಜೇಂದ್ರ ಚೌಧರಿ
ಶ್ರೀ. ಅಣ್ಣಪ್ಪಾ ಪರೀಟ
ಶ್ರೀ. ಶ್ರೀಪಾದ ದೇಶಪಾಂಡೆ
ಶ್ರೀ. ಬನ್ಸಿ ಹಾವಳೆ
ಶ್ರೀ. ಉಮೇಶ ರೇಳೆ
ಶ್ರೀ. ಚಂದನ ಕುಲಕರ್ಣಿ
ಶ್ರೀಮತಿ. ಅನಿತಾ ಜಾವೆ
ಶ್ರೀಮತಿ. ಭಾಗಶ್ರೀ ಚವ್ಹಾಣ
ಶ್ರೀ. ಕಲ್ಯಾಣ ಕಡೆಕರ
ಶ್ರೀ. ಸಂದೇಶ ಸೋನವಣೆ
ಶ್ರೀ. ಸುಜಿತ ಶಿಂದೆ
ಶ್ರೀ. ಹನುಮಂತ ಜಗತಾಪ
ಶ್ರೀ. ಪ್ರತಾಪ ಕಾಶಿದ
ಶ್ರೀ. ಕಾಶಿರಾಮ ಬಾವಿಸಾನೆ
ಶ್ರೀ. ಪಪ್ಪು ಗಾಡೆ
ಶ್ರೀಮತಿ. ರೋಹಿಣಿ ಶಿರ್ಕೆ
ಶ್ರೀ. ರಾಮ ವ್ಹನ್ಯಾಳಕರ
ಶ್ರೀ. ಅನ್ಸಾರ ಶೇಖ
ಶ್ರೀಮತಿ. ಸುವರ್ಣಾ ದೇಶಪಾಂಡೆ
ಶ್ರೀ. ಗಣೇಶ ಕೋಲತೆ
ಶ್ರೀ. ಸುರೇಶ ದಾತೆ
ಶ್ರೀ. ಪ್ರಕಾಶ ಝೆಂಡೆ
ಶ್ರೀ. ಶ್ರೀಕಾಂತ ರತ್ನಪಾರಖೀ
ಶ್ರೀ. ಸೂರ್ಯಕಾಂತ ಶಹಾನೆ
ಶ್ರೀ. ಪ್ರಕಾಶ ಕಾಪಸೆ
ಶ್ರೀ. ಸಲೀಮ ಹಾಶ್ಮಿ
ಶ್ರೀ. ಆರ್ಯಾ ಭಿಡೆ
ಶ್ರೀ. ಮಿಲಿಂದ ಭಾಕರೆ
ಶ್ರೀ. ಜ್ಞಾನೇಶ್ವರ ಮಾಶಾಳಕರ
ಶ್ರೀ. ಲಕ್ಷ್ಮಣ ದಾವಣಕರ
ಶ್ರೀ. ಸುಧೀರ ಪಾಟೀಲ
ಶ್ರೀ. ರಾಜಾರಾಮ ಬಂಡಗರ
ಶ್ರೀ. ಪ್ರದೀಪ ಗೋಡಸೆ
ಶ್ರೀ. ರವೀಂದ್ರ ಖಂದಾರೆ
ಶ್ರೀ. ಸಾಗರ ಸಕುಡೆ

ಶ್ರೀಮತಿ. ಪ್ರಾಜಕ್ತಿ ಗೋಖಲೆ (ನಿಮಂತ್ರಿತ ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀ. ಎ. ದಿ. ಗೋಡಬೋಲೆ (ನಿಮಂತ್ರಿತ ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀಮತಿ. ತರೂಬೇನ ಪೋಪಟ (ನಿಮಂತ್ರಿತ ಸದಸ್ಯ)

ಕನ್ನಡ ಸಂಯೋಜನೆ : **ಡಾ. ಸದಾನಂದ ಎಂ. ಬಿಳ್ಳೂರ**
ವಿಶೇಷಾಧಿಕಾರಿ ಕನ್ನಡ
: **ಶ್ರೀ. ಆರ್.ಎಮ್. ಗಣಾಚಾರಿ**
ವಿಷಯ ಸಹಾಯಕ ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಮಂಡಳ ಪುಣೆ

ಭಾಷಾಂತರಕಾರರು : **ಶ್ರೀ. ವಾಯ್ ಪಿ. ತಿಕೋಟಿ**
ಶ್ರೀ. ಡಿ.ಎಮ್. ಬಗಲಿ
ಶ್ರೀ. ಎಸ್.ಸಿ. ದಸಮಾನೆ

ಸಮೀಕ್ಷೆ : **ಶ್ರೀಮತಿ. ಸುನೀತಾ ಹೆಚ್. ಶಿರಗುಪ್ಪಿ**

ಅಕ್ಷರಜೋಡಣೆ : Quitext Graphics. Mumbai.

ಮುಖಪುಟ ಮತ್ತು
ಅಲಂಕಾರ : ಧನಶ್ರೀ ಮೋಕಾಶಿ, ಪುಣೆ

ಸಂಗಣಕದ ಆಲೇಖನ : ಸಂದೀಪ ಕೋಳಿ, ಮುಂಬಯಿ

ಚಿತ್ರಕಾರ : ಧನಶ್ರೀ ಮೋಕಾಶಿ.

ನಿರ್ಮಿತಿ : **ಸಚ್ಚಿತಾನಂದ ಆಫಳೆ**
ಮುಖ್ಯ ನಿರ್ಮಿತಿ ಅಧಿಕಾರಿ
ಸಂಜಯ ಕಾಂಬಳೆ
ನಿರ್ಮಿತಿ ಅಧಿಕಾರಿ
ಪ್ರಶಾಂತ ಹರಣೆ
ಸಹಾಯಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಅಧಿಕಾರಿ

ಕಾಗದ : 70 ಜಿ.ಎಸ್.ಎಮ್ ಕ್ರಿಮವ್ಹೋವ್ಹ

ಮುದ್ರಣಾದೇಶ :

ಮುದ್ರಕ :

ಪ್ರಕಾಶಕ

ವಿವೇಕ ಉತ್ತಮ ಗೋಸಾವಿ, ನಿಯಂತ್ರಕ
ಪಾಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮಂಡಳ,
ಪ್ರಭಾದೇವಿ, ಮುಂಬಯಿ - 25

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಪೀಠಿಕೆ

ಭಾರತದ ಪ್ರಜೆಗಳಾದ ನಾವು, ಭಾರತವನ್ನು ಒಂದು ಸಾರ್ವಭೌಮ
ಸಮಾಜವಾದಿ ಧರ್ಮನಿರಪೇಕ್ಷ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ಗಣರಾಜ್ಯವನ್ನಾಗಿ ನಿರ್ಮಿಸಲು
ಹಾಗೂ ಅದರ ಸಮಸ್ತ ನಾಗರಿಕರಿಗೆ :

ಸಾಮಾಜಿಕ, ಆರ್ಥಿಕ ಮತ್ತು ರಾಜಕೀಯ **ನ್ಯಾಯ;**
ವಿಚಾರ, ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ, ವಿಶ್ವಾಸ, ಶ್ರದ್ಧೆ
ಮತ್ತು ಉಪಾಸನಾ **ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ;**
ಸ್ಥಾನಮಾನ ಹಾಗೂ ಅವಕಾಶ **ಸಮಾನತೆಯು;**

ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ದೊರೆಯುವಂತೆ ಮಾಡಲು
ಮತ್ತು ವ್ಯಕ್ತಿಗೌರವವನ್ನು

ಹಾಗೂ ರಾಷ್ಟ್ರದ ಐಕ್ಯತೆ ಮತ್ತು ಏಕಾತ್ಮತೆಯನ್ನು
ಆಶ್ವಾಸನೆ ನೀಡುವ **ಬಂಧುತ್ವವನ್ನು**
ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲು ದೃಢಸಂಕಲ್ಪದ ನಿರ್ಧಾರ ಮಾಡಿ ;

ನಮ್ಮ ಸಂವಿಧಾನ ಸಭೆಯಲ್ಲಿ
ಇಂದು ದಿನಾಂಕ ಇಪ್ಪತ್ತಾರನೆಯ ನವ್ಹೆಂಬರ, ೧೯೪೯ ನೆಯ ಇಸವಿ
ಈ ಮೂಲಕ ಈ ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿ ಮತ್ತು ಅಧಿನಿಯಮಿತ
ಗೊಳಿಸಿ ಸ್ವತ: ಅರ್ಪಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

ಜನಗಣಮನ-ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯ ಹೇ
ಭಾರತ-ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ ।

ಪಂಜಾಬ, ಸಿಂಧು, ಗುಜರಾತ, ಮರಾಠಾ,
ದ್ರಾವಿಡ, ಉತ್ಕಲ, ಬಂಗ,

ವಿಂಧ್ಯ, ಹಿಮಾಚಲ, ಯಮುನಾ, ಗಂಗಾ,
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿತರಂಗ,

ತವ ಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ, ತವ ಶುಭ ಆಶಿಸ ಮಾಗೇ,
ಗಾಹೇ ತವ ಜಯಗಾಥಾ,

ಜನಗಣ ಮಂಗಲದಾಯಕ ಜಯ ಹೇ,
ಭಾರತ-ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ ।

ಜಯ ಹೇ, ಜಯ ಹೇ, ಜಯ ಹೇ,
ಜಯ ಜಯ ಜಯ, ಜಯ ಹೇ ॥

ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

ಭಾರತ ನನ್ನ ದೇಶ. ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ ಬಂಧು-ಭಗಿನಿಯರು.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ನನಗೆ ನನ್ನ ದೇಶದ ಸಮೃದ್ಧವಾದ ಹಾಗೂ ಬಹುವಿಧವಾದ ಪರಂಪರೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಅಭಿಮಾನವಿದೆ. ಈ ಪರಂಪರೆಗೆ ತಕ್ಕವನಾಗಿರಲು ನಾನು ಯಾವಾಗಲೂ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ತಾಯಿ-ತಂದೆ, ಗುರು-ಹಿರಿಯರನ್ನು ಆದರಿಸುತ್ತೇನೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರೊಡನೆ ಸೌಜನ್ಯದಿಂದ ನಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶ ಹಾಗೂ ನನ್ನ ದೇಶ ಬಾಂಧವರಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಠೆ ಇಡುವೆನೆಂದು ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಮಾಡುತ್ತೇನೆ. ಅವರ ಕಲ್ಯಾಣ ಹಾಗೂ ಉತ್ಕರ್ಷ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯೇ ನನ್ನ ಸುಖವುಂಟು.

ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮಿತ್ರರೆ,

ಒಂಬತ್ತನೆ ಇಯತ್ತೆಯ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ಸ್ವಾಗತವಿದೆ.

ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಿಕ್ಷಣದ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ ನೀವು ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಮಟ್ಟದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವವರಿದ್ದೀರಿ. ಎಂಟನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯವರೆಗಿನ ಅಭ್ಯಾಸದ ಸಲುವಾಗಿ ಒಂದೇ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವಿತ್ತು. ಈಗ ಗಣಿತ ಭಾಗ-I ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಭಾಗ-II ಹೀಗೆ ಎರಡು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಗಣಿತ ಎಂಟನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯವರೆಗಿನ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರೇಷೆ, ತ್ರಿಕೋನ, ಚೌಕೋನ, ವರ್ತುಳ ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ತಾಳೆ ಹಾಕುವುದಿತ್ತು. ಈಗ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ನೀವು ತರ್ಕಶುದ್ಧ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿ ಕಲಿಯುವವರಿದ್ದೀರಿ. ತರ್ಕಶುದ್ಧ ಮಂಡನೆ ಮಾಡುವ ಈ ಕೌಶಲ್ಯವು ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಮಹತ್ವದ್ದಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಈ ಕೌಶಲ್ಯಗಳು ಸಾವಕಾಶವಾಗಿ ಕಲಿಯಲು ಅವಕಾಶವಿದೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾದ ಕೃತಿ ವಿಷಯಗಳು ಶಿಕ್ಷಕರೊಂದಿಗೆ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಗೆಳೆಯ/ಗೆಳತಿರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಿರಿ, ಮತ್ತು ಆ ಕೃತಿಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿರಿ. ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಕಾರಣಗಳ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಿರಿ, ಮತ್ತು ಆ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಉಚ್ಚ ಗಣಿತದ ಅಭ್ಯಾಸದ ಸಲುವಾಗಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿ ಮತ್ತು ನಿರ್ದೇಶಕ ಭೂಮಿತಿ ಇವುಗಳಂತಹ ಘಟಕಗಳ ಸಮಾವೇಶ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರಂತೆ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಉಪಯುಕ್ತ ಇಂಥ ಪೃಷ್ಠಫಲ ಮತ್ತು ಘನಫಲ ಈ ಘಟಕಗಳ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ನೀವು ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡುವವರಿದ್ದೀರಿ.

ಇಂಟರನೆಟದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಅನೇಕ ಕೃತಿಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಆಳವಾದ ಅಭ್ಯಾಸ, ಕೃತಿಯುಕ್ತ ಅಧ್ಯಯನ ಮತ್ತು ರೂಢಿ ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಗಣಿತಯಾತ್ರೆಯನ್ನು ನೀವು ಆನಂದದಿಂದ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಶಯವೂ ಇಲ್ಲ, ನಡೆಯಿರಿ, ಆದರೆ! ಈಗ ಶಿಕ್ಷಕ, ಪಾಲಕ, ಗೆಳೆಯ/ಗೆಳತಿಯರ ಇಂಟರನೆಟ ಇವೆಲ್ಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಗಣಿತದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೋಣ. ಈ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ನಿಮಗೆಲ್ಲರಿಗೂ ಅನೇಕ ಶುಭೇಚ್ಛೆಗಳು.

(ಡಾ. ಸುನಿಲ ಮಗರ)
ಸಂಚಾಲಕ
ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಹಾಗೂ
ಅಭ್ಯಾಸ ಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳ, ಪುಣೆ.

ಪುಣೆ
ದಿನಾಂಕ : 28 ಎಪ್ರಿಲ 2017, ಅಕ್ಷಯತೃತೀಯಾ
ಭಾರತೀಯ ಸೌರ ದಿನಾಂಕ: 8 ವೈಶಾಖ 1939

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಭಾಗ II ರ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮದಲ್ಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಕ್ಷಮತೆಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ವಿಕಸಿತ ವಾಗುವವು.

ಕ್ಷೇತ್ರ	ಘಟಕ	ಕ್ಷಮತೆ ವಿಧಾನಗಳು
1. ಭೂಮಿತಿ	1.1 ಯುಕ್ಲಿಡನ ಭೂಮಿತಿ	• ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವಂತಹ ಉಪಲಬ್ಧ ಮಾಹಿತಿ (ಪಕ್ಷ) ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ಸಿದ್ಧಮಾಡ ಬೇಕಾದ ವಿಧಾನ (ಸಾಧ್ಯ) ಇದನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ನಮೂದಿಸಲು ಬರಬೇಕು. • ಗೃಹಿತ ಸಂಗತಿ ಮಂಡಿಸಿ, ಸಾಧ್ಯವಿಧಾನ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವ ಕ್ಷಮತೆ ವಿಕಸಿತಗೊಳಿಸುವುದು.
	1.2 ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳು	• ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆ ಮತ್ತು ಛೇದಿಕೆ ಇವುಗಳಿಂದ ತಯಾರಾಗುವ ವಿವಿಧ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಬರುವುದು. • ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳ ಗುಣಧರ್ಮ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು.
	1.3 ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನ ಮತ್ತು ಭುಜ ಇವುಗಳ ಪ್ರಮೇಯ	• ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪಕ್ಷ ಮತ್ತು ಸಾಧ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಸಿದ್ಧತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು.
	1.4 ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನ	• ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನ ಗುರುತಿಸಿ ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು.
	1.5 ವರ್ತುಳ	• ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವರ್ತುಳದ ಗುಣಧರ್ಮ ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವುದು. • ಅಂತರ ವರ್ತುಳ, ಪರಿವರ್ತುಳ ರಚಿಸಲು ಬರುವುದು.
	1.6 ಭೌಮಿತಿಕ ರಚನೆ	• ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಶಿಷ್ಟ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಲು ಬರುವುದು.
	1.7 ಚೌಕೋನ	• ವಿಶಿಷ್ಟ ಚೌಕೋನದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳ ಸಿದ್ಧತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು. • ICT Tools ಇದರ ಸಹಾಯದಿಂದ ತ್ರಿಕೋನ, ಚೌಕೋನ, ವರ್ತುಳ ಇವುಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳ ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಲು ಬರುವುದು.
2. ನಿರ್ದೇಶಕ ಭೂಮಿತಿ	2.1 ನಿರ್ದೇಶಕ ಭೂಮಿತಿ	• ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿತ ನಿರ್ದೇಶಕದ ಜೋಡಿಯ ಅರ್ಥ ಹೇಳಲು ಬರುವುದು. • ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ವಿಶಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನ ವರ್ಣನ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು. • ICT Tools ಇದರ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬರುವುದು.
3. ಮಹತ್ವ ಮಾಪನ	3.1 ಪೃಷ್ಠಫಲ ಮತ್ತು ಘನಫಲ	• ಗೋಲ ಮತ್ತು ಶಂಕು ಇವುಗಳ ಪೃಷ್ಠಫಲ ಮತ್ತು ಘನಫಲ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವುದು.
4. ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿ	4.1 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ	• ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಪಾಯಥಾಗೋರಸ ಪ್ರಮೇಯ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರ ಹೇಳಲು ಬರುವುದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು.

ಶಿಕ್ಷಕರಿಗಾಗಿ ಸೂಚನೆಗಳು

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆ ಭಾಗ-II ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಶಿಕ್ಷಕರು ಪ್ರಥಮ ಓದಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಅದರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಎಲ್ಲ ಕೃತಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಕೃತಿಗಳು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಸಿದ್ಧತೆಯ ಲೇಖನ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದು ಗುಣಧರ್ಮ ಮತ್ತು ಕಲಿತ ನಿಷ್ಕರ್ಷದ ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ತಾಳೆಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ. ಈ ಕೃತಿ ಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಮತ್ತು ಪುಸ್ತಕವು ಹೆಚ್ಚು ಉದ್ಬೋಧಕವಾಗುವ ಸಲುವಾಗಿ, ಚರ್ಚೆ, ಪ್ರಶ್ನೋತ್ತರಗಳು, ಸಾಮೂಹಿಕ ಉಪಕ್ರಮ ಹೀಗೆ ವಿವಿಧ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಶಿಕ್ಷಕರು ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ ಅಪೇಕ್ಷೆವಿದೆ. ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿಯ ಕೃತಿಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮಾಡಬೇಕು ಮತ್ತು ಇವುಗಳಂತಹ ಅನೇಕ ಕೃತಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ ಮಾಡಬೇಕು.

ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸಿದ್ಧತೆಗಳ ಬಾಯಿಪಾಠ ಮಾಡುವುದಕ್ಕಿಂತ ಅದರ ತರ್ಕಸಂಗತ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿ ಅವುಗಳ ಮಂಡನೆ ಮಾಡುವುದು ಹೆಚ್ಚು ಮಹತ್ವದ್ದಾಗಿದೆ. ಈ ತರ್ಕಸಂಗತ ವಿಚಾರಶಕ್ತಿಗೆ ಚಾಲನೆ ಕೊಡುವ ವಿವಿಧ ಉದಾಹಣೆಗಳನ್ನು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸಮಾವೇಶಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಶಿಕ್ಷಕ ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕೂಡಿಕೊಂಡು ತಯಾರಿಸಬೇಕು. ಆವ್ಹಾನಾತ್ಮಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಧೋರೇಖಿತ ಮಾಡಿಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಬೇರೆ ವಿಚಾರಮಾಡಿ, ತರ್ಕಶುದ್ಧ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಿದ್ಧತೆ ಕೊಟ್ಟರೆ ಕೃತಿ ಮಾಡಿದರೆ ಅಥವಾ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದ್ದರೆ ಆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಶಿಕ್ಷಕರು ಪ್ರಸಂಶೆ ಮಾಡಬೇಕು.

ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡುವಾಗ ಮುಕ್ತ ಪ್ರಶ್ನೆ ಮತ್ತು ಕೃತಿಪತ್ರಿಕೆಗಳ ಇವುಗಳ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿ ಶಿಕ್ಷಕರು ಮಾಡುವುದು ಅಪೇಕ್ಷಿತವಿದೆ. ಹೀಗೆ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಪದ್ಧತಿ ವಿಕಸಿತಗೊಳಿಸಲು ಶಿಕ್ಷಕರು ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಇದರೊಂದಿಗೆ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಮಾದರಿಗಳ ಕೂಡಾ ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆಗಳ ಯಾದಿಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಹೊರತಾಗಿ ಉಪಲಬ್ಧ ಸಾಹಿತ್ಯಗಳಿಂದ ನೀವು ಸ್ವತ: ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು, ಅದರಂತೆ ಸಾಹಿತ್ಯ ನಿರ್ಮಿತಿಯೂ ಮಾಡಬಹುದು. ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿಯ ವಿವಿಧ ಕೃತಿ ಅಥವಾ ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಭೂತಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಆಧಾರಿತ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಪದ್ಧತಿಯ ಉಪಯೋಗವು ಮುಂದಿನ ಇಯತ್ತೆಯ ಕ್ಷಮತೆಗಳು ವಿಕಸಿತ ಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ನಿಶ್ಚಿತ ಆಗಬಹುದು. ಹೀಗೆ ನಮ್ಮ ಆಶೆ ಇದೆ.

ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆಗಳ ಮಾದರಿಗಳ ಯಾದಿ

(1) ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಅಂತರ ತೆಗೆಯುವುದು.

(2) ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆ ಮತ್ತು ಛೇದಿಕೆ ಇವುಗಳಿಂದಾಗುವ ಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮ ಸಾಹಿತ್ಯದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು.

(3) ವಿವಿಧ ಸಾಹಿತ್ಯಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು.

(4) ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇವುಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳ ತಾಳೆಹಾಕಿ ತೆಗೆಯುವುದು.

(5) ತ್ರಿಕೋನ ರಚನೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಎಲ್ಲ ಪ್ರಕಾರದ ಭೌಮಿತಿಕ ರಚನೆ ಮಾಡುವುದು.

(6) ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲದ ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಒಂದು ಕೃತಿಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆ ಕೃತಿ 'r' ಈ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಸಲುವಾಗಿ ಮಾಡಬೇಕು ಮತ್ತು ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ πr^2 ಇದೆ ಇದರ ತಾಳೆಹಾಕಿ ನೋಡುವುದು.

(7) ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಕೋಣೆ ಅದರಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ವಸ್ತುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರಮಾಣಬದ್ಧವಾದ ನಕಾಶೆ, ಆಲೇಖವನ್ನು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಬಿಡಿಸುವುದು.

(8) ಶಾಲೆಯ ಮೈದಾನದಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷ ರಚಿಸಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸ್ಥಳದ ನಿರ್ದೇಶಕ ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸುವ ಕೃತಿ ಮಾಡುವುದು.

(9) ವೃತ್ತಚಿತಿ ಆಕಾರದ ಡಬ್ಬಿಯ ಘನಫಲ ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ತೆಗೆಯುವುದು ಮತ್ತು ಅದರ ಡಬ್ಬಿಯ ಅಂಚಿನವರೆಗೆ ನೀರು ತುಂಬಿ ನೀರಿನ ಘನಫಲ ಅಳೆಯುವುದು. ಎರಡೂ ಉತ್ತರಗಳ ತುಲನೆ ಮಾಡುವುದು ಮತ್ತು ಇದರಂತೆ ಅನೇಕ ತ್ರಿಮಿತೀಯ ಆಕಾರದ ವಸ್ತುಗಳ ಘನಫಲದ ತಾಳೆಹಾಕುವುದು.

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

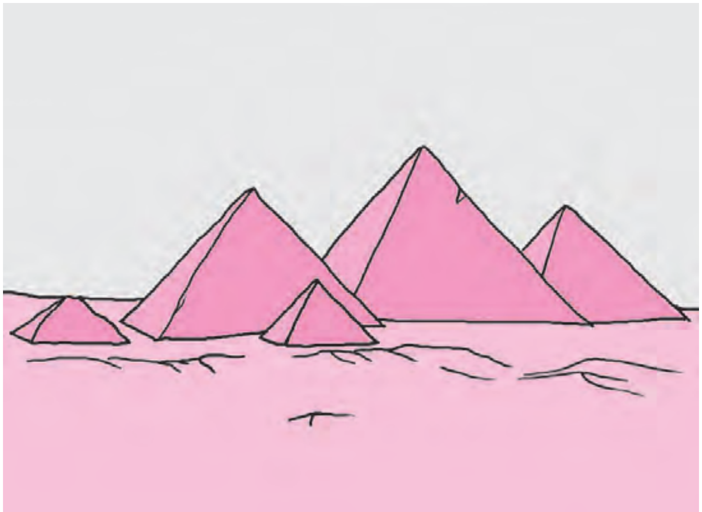
	ಪಾಠ	ಪುಟ ಸಂಖ್ಯೆ
1.	ಭೂಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯ ಮೂಲಭೂತ ಸಂಕಲ್ಪನೆಗಳು	1 – 12
2.	ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳು	13 – 23
3.	ತ್ರಿಕೋನ	24 – 50
4.	ತ್ರಿಕೋನದ ರಚನೆಗಳು	51 – 56
5.	ಚೌಕೋನಗಳು	57 – 75
6.	ವರ್ತುಳ	76 – 87
7.	ನಿರ್ದೇಶಕ ಭೂಮಿತಿ	88 – 99
8.	ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿ	100 – 113
9.	ಪೃಷ್ಠಫಲ ಹಾಗೂ ಘನಫಲ	114 – 123
•	ಉತ್ತರ ಸೂಚಿ	124 – 128

1 ಭೂಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯ ಮೂಲಭೂತ ಸಂಕಲ್ಪನೆಗಳು

EM7F9N

ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ

- ಬಿಂದು, ರೇಷೆ ಹಾಗೂ ಸಮತಲ
- ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ಹಾಗೂ ಅಂತರ
- ಮಧ್ಯತೆ
- ಸಶರ್ತ ವಿಧಾನಗಳು
- ಸಿದ್ಧತೆ



ಬದಿಯ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತೀರಾ? ಇಜಿಪ್ತದಲ್ಲಿಯ ಪಿರ್‍ಯಾಮಿಡ್‌ದ ಚಿತ್ರ ಇದಾಗಿದೆ. ಇ.ಸ. ಪೂರ್ವ 3000 ರಲ್ಲಿ ಭವ್ಯ ಈ ಕಟ್ಟಡವನ್ನು ಮೊದಲಿನ ಜನರು ಹೇಗೆ ಮಾಡಿರಬಹುದು ? ವಾಸ್ತುಶಿಲ್ಪ ಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಭೂಮಿತಿ ಈ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ವಿಕಾಸ ಆಗಲಾರದೇ ಈ ರೀತಿಯ ಕಟ್ಟಡ ನಿರ್ಮಾಣ ಸಾಧ್ಯ ಇಲ್ಲ.

ಭೂಮಿತಿ ಈ ಹೆಸರಿನ ಮೇಲಿಂದ ಆ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಉಗಮ ತಿಳಿಯುವದು. 'ಭೂ' ಎಂದರೆ ಭೂಮಿ ಮತ್ತು 'ಮಿತಿ' ಅಂದರೆ ಅಳೆಯುವದು. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಭೂಮಿಯನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿಂದಾಗಿ ಈ ವಿಷಯದ ನಿರ್ಮಿತಿ ಆಗಿರಬಹುದು ಎಂದು ತರ್ಕ ಮಾಡಲಾಗುವದು.

ಅನೇಕ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಭೂಮಿತಿಯ ವಿಕಾಸ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರಚನೆಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಆಯಿತು. ಥೇಲ್ಸ ಈ ಪ್ರಥಮ ಗ್ರೀಕ ಗಣಿತಜ್ಞನು ಇಜಿಪ್ತಗೆ ಹೋಗಿದ್ದನು. ಆ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಅವನು ಪಿರ್‍ಯಾಮಿಡ್‌ದ ನೆರಳನ್ನು ಅಳೆದು ಹಾಗೂ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಪಿರ್‍ಯಾಮಿಡ್‌ದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಅಳೆದನು ಎಂಬ ಕಥೆ ಇದೆ. ಪಾಯಥಾಗೋರಸನು ಥೇಲ್ಸನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಆಗಿದ್ದನು ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುವದು.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತೀಯರಿಗೆ ಸಹ ಭೂಮಿತಿಯ ಆಳವಾದ ಜ್ಞಾನ ಇತ್ತು. ವೇದಿಕ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಭಾರತೀಯ ಜನರು ಯಜ್ಞಕುಂಡದ ರಚನೆ ಮಾಡಲು ಭೂಮಿತಿಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರು. ದಾರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕು ಹಾಗೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತಯಾರಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದರ ಉಲ್ಲೇಖ ಶುಲ್ಬಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವದು. ಆನಂತರದ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಆರ್ಯಭಟ, ವರಾಹಮಿಹಿರ, ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ, ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯ ಇತ್ಯಾದಿ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಈ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಅಮೂಲ್ಯವಾದ ಯೋಗದಾನ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ.

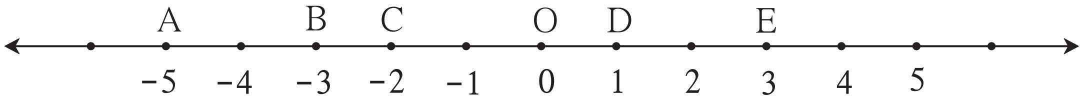
ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಭೂಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯ ಮೂಲಭೂತ ಸಂಕಲ್ಪನೆಗಳು: ಬಿಂದು, ರೇಷೆ ಹಾಗೂ ಸಮತಲ (Basic concepts in geometry: point, line and plane)

ಹೇಗೆ ನಾವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾಡುವದಿಲ್ಲವೋ ಅದೇರೀತಿ ಬಿಂದು, ರೇಷೆ ಹಾಗೂ ಸಮತಲ ಇವುಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮಾಡುವದಿಲ್ಲ. ಇವು ಭೂಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯ ಮೂಲಭೂತ ಸಂಕಲ್ಪನೆ ಗಳಾಗಿವೆ. ರೇಷೆ ಹಾಗೂ ಸಮತಲ ಇವು ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ ಇವೆ. ರೇಷೆ ಅಂದರೆ ಸರಳ ರೇಷೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತರ (Co-ordinates of points and distance)

ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಷೆಯನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 1.1

ಇಲ್ಲಿ D ಬಿಂದು ರೇಷೇಯ ಮೇಲಿನ 1 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವದು. ಅಂದರೆ 1 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ D ಬಿಂದುವಿನ **ನಿರ್ದೇಶಕ** ಇದೆ ಎಂದು ಎನ್ನುವರು. ಬಿಂದು B ಇದು ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ −3 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ತೋರಿಸುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ B ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ −3 ಇದೆ. ಆದರಂತೆ A ದ ನಿರ್ದೇಶಕ −5 ಹಾಗೂ E ದ ನಿರ್ದೇಶಕ 3 ಇದೆ.

D ಬಿಂದು ಇದು E ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 2 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿದೆ. ಅಂದರೆ E ಹಾಗೂ D ಈ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 2 ಮೂಲಮಾನ ಇದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಮೂಲಮಾನಗಳನ್ನು ಅಳೆದು ನಾವು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈ ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ A ಹಾಗೂ B ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ 2 ಮೂಲಮಾನ ಇದೆ.

ಈಗ ನಾವು ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಂತರ ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ತೆಗೆಯುವದು ಅಂದರೆ ಆ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿಯ ದೊಡ್ಡ ನಿರ್ದೇಶಕದಿಂದ ಚಿಕ್ಕ ನಿರ್ದೇಶಕವನ್ನು ವಜಾಭಾಕಿ ಮಾಡುವದು.

D ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ 1 ಇದೆ, E ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ 3 ಇದೆ ಮತ್ತು $3 > 1$ ಇದು ನಮ್ಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

ಬಿಂದು E ಹಾಗೂ D ಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ $3-1$ ಅಂದರೆ 2 ಇದೆ.

ಬಿಂದು E ಹಾಗೂ D ಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ಇದನ್ನು d (E,D) ಎಂದು ಬರೆಯುವರು. ಈ ಅಂತರ ಎಂದರೆ l(ED), ಇದು ರೇಖೆ ED ದ ಉದ್ದಳತೆ ಆಗಿದೆ.

$d\,(E, D) = 3 - 1 = 2$

$\therefore\ l(ED) = 2$

$d\,(E, D) = l(ED) = 2$

ಅಂದರೆ $d\,(D, E) = 2$

$d\,(C, D) = 1 - (-2)$

$= 1 + 2 = 3$

$\therefore\ d\,(C, D) = l(CD) = 3$

ಅಂದರೆ $d\,(D, C) = 3$

d(A,B) ತೆಗೆಯೋಣ. A ದ ನಿರ್ದೇಶಕ −5 ಇದೆ, B ದ ನಿರ್ದೇಶಕ −3 ಇದೆ ಮತ್ತು $-3 > -5$

$\therefore\ d\,(A, B) = -3 - (-5) = -3+5 = 2$ ಇದು ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಎರಡು ಬೇರೆಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ಇದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಆದರಂತೆ P, Q ಒಂದೇ ಬಿಂದುಗಳಿದ್ದರೆ d(P, Q) = 0, ಇದು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡೋಣ.

- ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ಅವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿಯ ದೊಡ್ಡ ನಿರ್ದೇಶಕದಿಂದ ಚಿಕ್ಕ ನಿರ್ದೇಶಕ ಕಳೆದಾಗ (ವಜಾಬಾಕಿ) ದೊರೆಯುವದು.
- ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ಋಣೇತ್ತರ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವದು.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಮಧ್ಯತೆ (Betweenness)

ಒಂದುವೇಳೆ P, Q, R ಇವು ಏಕರೇಷೇಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿದರೆ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಹಾಗೆ ಮೂರು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ್ನು ದೊರೆಯುವವು.

ಆಕೃತಿ 1.2

(i) ಬಿಂದು Q ಇದು P ಮತ್ತು R ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವದು.

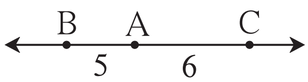
(ii) ಬಿಂದು R ಇದು P ಮತ್ತು Q ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವದು.

(iii) ಬಿಂದು P ಇದು R ಮತ್ತು Q ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವದು.

ಒಂದುವೇಳೆ d (P, Q) + d (Q, R) = d (P, R) ಇದ್ದರೆ Q ಇದು ಬಿಂದು P ಮತ್ತು Rಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಇದೆ ಎನ್ನುವರು. ಆದರ ಈ ಮಧ್ಯತೆ P - Q - R ಹೀಗೆ ತೋರಿಸುವರು.

ಉದಾ. (1) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೇಯ ಮೇಲೆ A, B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು d (A, B) = 5, d (B,C) = 11 ಮತ್ತು d (A, C) = 6, ಈ ರೀತಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಯಾವ ಬಿಂದು ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಇರುವದು ?

ಉತ್ತರ : ಇಲ್ಲಿ A, B ಮತ್ತು C ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬಿಂದು ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಬಹುದು.



ಆಕೃತಿ 1.3

d(B,C) = 11 . . . . (I)

d(A,B) + d(A,C)= 5+6 = 11 . . . . (II)

$\therefore$ d (B, C) = d (A, B) + d (A, C) . . . . (I) ಮತ್ತು (II)ರ ಮೇಲಿಂದ

ಅಂದರೆ ಬಿಂದು A ಇದು ಬಿಂದು B ಹಾಗೂ ಬಿಂದು C ಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಇದೆ.

ಉದಾ (2) ಒಂದು ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲೆ ಸರಳ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿ U, V ಹಾಗೂ A ಈ ಪಟ್ಟಣಗಳಿವೆ. U ಹಾಗೂ A ಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ 215 ಕಿ.ಮೀ. V ಹಾಗೂ A ಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 140 ಕಿ.ಮೀ., ಮತ್ತು U ಹಾಗೂ V ಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 75 ಕಿ.ಮೀ. ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಯಾವ ಪಟ್ಟಣ ಯಾವ ಎರಡು ಪಟ್ಟಣಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿದೆ.

ಉತ್ತರ : d (U,A) = 215; d (V,A) = 140; d (U,V) = 75

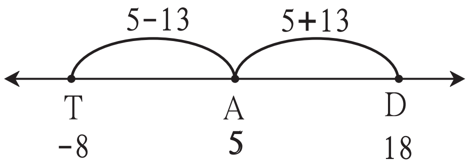
d (U,V) + d (V,A) = 75 + 140 = 215; d (U,A) = 215

$\therefore$ d (U,A) = d (U,V) + d (V,A)

$\therefore$ V ಈ ಪಟ್ಟಣ U ಹಾಗೂ A ಈ ಪಟ್ಟಣಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿದೆ.

ಉದಾ. (3) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ 5 ಇದೆ. ಆದರೆ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ A ದಿಂದ 13 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ A ದಿಂದ 13 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತದರಲ್ಲಿ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ Aದ ಎಡಗಡೆ T ಹಾಗೂ ಬಲಗಡೆ D ಎರಡು ಬಿಂದು ತೇಗೆದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.



ಆಕೃತಿ 1.4

ಬಿಂದು Aದ ಎಡಗಡೆಯ ಬಿಂದು Tದ ನಿರ್ದೇಶಕ $5 - 13 = -8$ ಇರುವದು.

ಬಿಂದು A ಬಲಗಡೆಯ ಬಿಂದು Dದ ನಿರ್ದೇಶಕ $5 + 13 = 18$ ಇರುವದು.

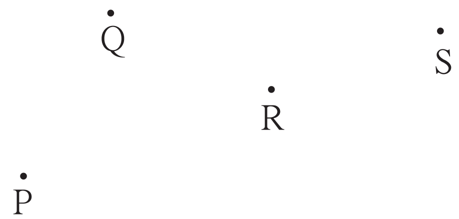
$\therefore$ ಬಿಂದು A ದಿಂದ 13 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ −8 ಮತ್ತು 18 ಇರುತ್ತವೆ.

ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ : $d(A,D) = d(A,T) = 13$

ಕೃತಿ :

(1) ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ A, B, C ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕ ರೇಷೆಯ ಇವೆಯೇ ಇದನ್ನು ದಾರವನ್ನು ಎಳೆದು ಹಿಡಿದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ. ಅವು ಒಂದೇ ರೇಷೇಯಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ ಯಾವ ಬಿಂದು ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(2) ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ P, Q, R, S ಈ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದಾರೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕ ರೇಷೀಯ ಇವೆ ಹಾಗೂ ಯಾವ ಮೂರು ಬಿಂದು ಏಕರೇಷೀಯ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ. ಏಕರೇಷೇಯ ಇರುವ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಮಧ್ಯತೆ ಬರೆಯಿರಿ.

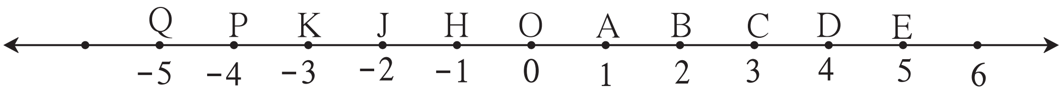


(3) ಕವಾಯಿತದ ಸಲುವಾಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ನೇರ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಲು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರಳ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾರೆಯೇ? ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಗೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸುವಿರಿ ?

(4) ಪ್ರಕಾಶಕಿರಣ ಒಂದೇ ಸರಳ ರೇಷೇಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದಿರಿ? ಹಿಂದಿನ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿಯ ಮಾಡಿದ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪ್ರಯೋಗ ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.1

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಅಂತರಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 1.5

(i) d(B,E) (ii) d(J, A) (iii) d(P, C) (iv) d(J, H)

(v) d(K, O) (vi) d(O, E) (vii) d(P, J) (viii) d(Q, B)

2. ಬಿಂದು A ದ ನಿರ್ದೇಶಕ x, ಮತ್ತು ಬಿಂದು B ದ ನಿರ್ದೇಶಕ y ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ d(A, B) ತೆಗೆಯಿರಿ.

(i) $x = 1, y = 7$ (ii) $x = 6, y = -2$ (iii) $x = -3, y = 7$

(iv) $x = -4, y = -5$ (v) $x = -3, y = -6$ (vi) $x = 4, y = -8$

3. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ ಯಾವ ಬಿಂದು ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ. ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದು ಏಕರೇಷೀಯ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಹಾಗೆ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) d(P, R) = 7, d(P, Q) = 10, d(Q, R) = 3

(ii) d(R, S) = 8, d(S, T) = 6, d(R, T) = 4

(iii) d(A, B) = 16, d(C, A) = 9, d(B, C) = 7

(iv) d(L, M) = 11, d(M, N) = 12, d(N, L) = 8

(v) d(X, Y) = 15, d(Y, Z) = 7, d(X, Z) = 8

(vi) d(D, E) = 5, d(E, F) = 8, d(D, F) = 6

4. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೇಯ ಮೇಲೆ A, B, C ಈ ಬಿಂದುಗಳು, d(A,C) = 10, d(C,B) = 8 ಹೀಗೆ ಇದ್ದರೆ d(A, B) ತೆಗೆಯಿರಿ. ಎಲ್ಲ ಪರ್ಯಾಯಗಳ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿರಿ.

5. X, Y, Z ಇವು ಏಕರೇಷೀಯ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ, d(X,Y) = 17, d(Y,Z) = 8 ಇದ್ದರೆ. d(X,Z) ತೆಗೆಯಿರಿ.

6. ಆಕೃತಿ ತೆಗೆದು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) A-B-C ಮತ್ತು l(AC) = 11, l(BC) = 6.5, ಇದ್ದರೆ l(AB) = ?

(ii) R-S-T ಮತ್ತು l(ST) = 3.7, l(RS) = 2.5, ಇದ್ದರೆ l(RT) = ?

(iii) X-Y-Z ಮತ್ತು l(XZ) = $3\sqrt{7}$, l(XY) = $\sqrt{7}$, ಇದ್ದರೆ l(YZ) = ?

7. ಏಕ ರೇಷೀಯ ಇಲ್ಲದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸುವುವು ?

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

9ನೇ ಇಯತ್ತೆಯ ಗಣಿತ ಭಾಗ-I ರಲ್ಲಿ ಗಣ ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಂಯೋಗಗಣ, ಛೇದ ಗಣ ಇವುಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಕೊಂಡು ರೇಖಾಖಂಡ, ಕಿರಣ, ರೇಷೇ ಇವುಗಳ ವರ್ಣನೆಯನ್ನು ಬಿಂದುಗಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮಾಡೋಣ.

(1) **ರೇಷಾಖಂಡ (Line segment) :**

ಬಿಂದು A, ಬಿಂದು B ಮತ್ತು ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ಇವುಗಳ ಸಂಯೋಗಗಣ ರೇಷಾಖಂಡ AB ಇರುತ್ತದೆ. ರೇಷಾಖಂಡ AB ಇದು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ರೇಖ AB ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವರು. ರೇಖ AB ಎಂದರೆ ರೇಖ BA.

ಆಕೃತಿ 1.6

ಬಿಂದು A ಹಾಗೂ ಬಿಂದು B ಇವು ರೇಖ ABಯ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ.

ರೇಷಾಖಂಡದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಆ ರೇಷಾಖಂಡದ ಉದ್ದಳತೆ ಎನ್ನುವರು. $l(AB) = d(A,B)$

$l(AB) = 5$ ಇದನ್ನು $AB = 5$ ಎಂದು ಸಹಬರೆಯುವರು.

(2) **ಕಿರಣ AB (Ray AB) :**

A ಮತ್ತು B ಇವು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ರೇಖ ABಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು ಮತ್ತು A-B-P ಹೀಗೆ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದು P ಇವುಗಳ ಸಂಯೋಗ ಗಣ ಎಂದರೆ ಕಿರಣ AB ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಬಿಂದು A ಗೆ ಕಿರಣದ ಆರಂಭ ಬಿಂದು ಎನ್ನುವರು.

ಆಕೃತಿ 1.7

(3) **ರೇಷೆ AB (Line AB) :**

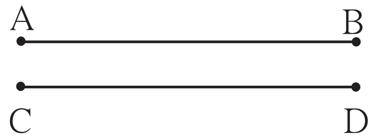
ಕಿರಣ ABಯ ಬಿಂದು ಗಣ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ಕಿರಣದ ಬಿಂದು ಗಣ ಕೂಡಿ ತಯಾರಾಗುವ ಸಂಯೋಗಗಣ ಎಂದರೆ ರೇಷೆ AB ಆಗಿದೆ.

ರೇಖ AB ಯ ಬಿಂದುಗಣ ಇದು. ರೇಷೆ ABಯ ಬಿಂದುಗಣದ ಉಪಗಣ ಇರುವದು.

(4) **ಏಕರೂಪ ರೇಷಾಖಂಡ (Congruent segments) :**

ಒಂದುವೇಳೆ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ರೇಷಾಖಂಡಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಸಮಾನ ವಿದ್ದರೆ ಆ ರೇಷಾಖಂಡಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುವವು.

ಒಂದುವೇಳೆ $l(AB) = l(CD)$ ಇದ್ದರೆ ರೇಖ AB $\cong$ ರೇಖ CD



ಆಕೃತಿ 1.8

(5) **ರೇಷಾಖಂಡಗಳ ಏಕರೂಪತೆಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು (Properties of congruent segements) :**

(i) ಪರಾವರ್ತನೀಯತೆ (Reflexivity) ರೇಖ AB $\cong$ ರೇಖ AB

(ii) ಸಮಮಿತಿ (Symmetry) ಒಂದುವೇಳೆ ರೇಖ AB $\cong$ ರೇಖ CD ಇದ್ದರೆ ರೇಖ CD $\cong$ ರೇಖ AB

(iii) ಸಂಕ್ರಮಕತೆ (Transitivity) ಒಂದುವೇಳೆ ರೇಖ AB $\cong$ ರೇಖ CD ಹಾಗೂ ರೇಖ CD $\cong$ ರೇಖ EF ಇದ್ದರೆ AB $\cong$ ರೇಖ EF

(6) **ರೇಷಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು (Midpoint of a segment) :**

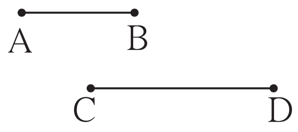
ಒಂದುವೇಳೆ A-M-B ಮತ್ತು ರೇಖ AM $\cong$ ರೇಖ MB ಇದ್ದರೆ, ಬಿಂದು M ಇದು ರೇಖ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ ಎನ್ನುವರು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಷಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮಧ್ಯಬಿಂದು ವಿರುತ್ತದೆ.

ಆಕೃತಿ 1.9

(7) **ರೇಷಾಖಂಡಗಳ ಹೋಲಿಕೆ (Comparison of segments) :**

ರೇಖ ABದ ಉದ್ದಳತೆ ರೇಖ CD ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ಅಂದರೆ l(AB) < l(CD) ಇದ್ದರೆ ರೇಖ AB < ರೇಖ CD ಅಥವಾ ರೇಖ CD > ರೇಖ AB ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವದು.

ರೇಷಾಖಂಡದ ಚಿಕ್ಕದು ದೊಡ್ಡದು ಇದು ಅದರ ಉದ್ದತೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ.



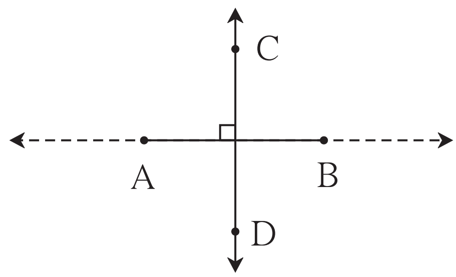
ಆಕೃತಿ 1.10

(8) **ರೇಷಾಖಂಡ ಅಥವಾ ಕಿರಣಗಳ ಲಂಬತ್ವ (Perpendicularity of segments or rays) :**

ಎರಡು ರೇಷಾಖಂಡಗಳು, ಎರಡು ಕಿರಣಗಳು ಅಥವಾ ಒಂದು ಕಿರಣ ಹಾಗೂ ಒಂದು ರೇಷಾಖಂಡ ಇವುಗಳನ್ನು ಸಮಾವಿಷ್ಟಗೊಳಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ರೇಷಾಖಂಡಗಳು, ಆ ಎರಡು ಕಿರಣಗಳು ಅಥವಾ ಒಂದು ಕಿರಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ರೇಷಾಖಂಡ ಇವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎನ್ನುವರು.

ಆಕೃತಿ 1.11 ರಲ್ಲಿ ರೇಖ AB ⊥ ರೇಖ CD,

ರೇಖ AB ⊥ ಕಿರಣ CD.

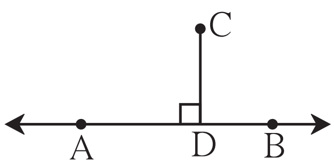


ಆಕೃತಿ 1.11

(9) **ಬಿಂದುವಿನ ರೇಖೆಯಿಂದ ಅಂತರ (Distance of a point from a line) :**

ಒಂದುವೇಳೆ ರೇಖ CD ⊥ ರೇಷೆ AB ಮತ್ತು ಬಿಂದು D ಇದು ರೇಷೆ AB ಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ ರೇಖ CD ದ ಉದ್ದಳತೆಗೆ ಬಿಂದು C ದ ರೇಷೆ AB ದಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರ ಎನ್ನುವರು.

ಬಿಂದು D ಗೆ CD **ಲಂಬಪಾದ** ಎನ್ನುವರು



ಆಕೃತಿ 1.12

ಒಂದುವೇಳೆ l(CD) = a, ಇದ್ದರೆ C ಬಿಂದು ರೇಷೆ AB ದಿಂದ a ಅಂತರದ ಮೇಲಿದೆ ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ರೇಷಾಖಂಡಗಳು ಏಕರೂಪ ಇವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

ಬಿಂದು	A	B	C	D	E
ನಿರ್ದೇಶಕ	–3	5	2	–7	9

(i) ರೇಖ DE ಹಾಗೂ ರೇಖ AB (ii) ರೇಖ BC ಹಾಗೂ ರೇಖ AD (iii) ರೇಖ BE ಹಾಗೂ ರೇಖ AD

2. ಬಿಂದು M ಇದು ರೇಖ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ ಮತ್ತು AB = 8 ಇದ್ದರೆ AM = ಎಷ್ಟು ?

3. ಬಿಂದು P ಇದು ರೇಖ CD ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ ಮತ್ತು CP = 2.5 ಇದ್ದರೆ ರೇಖ CD ಯ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

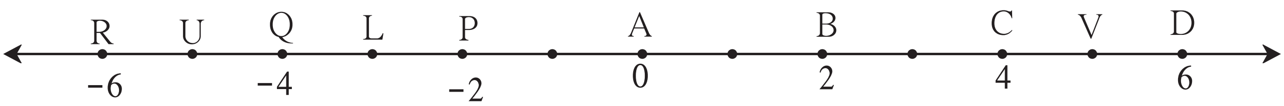
4. ಒಂದುವೇಳೆ AB = 5 ಸೆಮೀ, BP = 2 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು AP = 3.4 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ರೇಷಾಖಂಡದ ಚಿಕ್ಕತನ ದೊಡ್ಡತನ ನಿಶ್ಚಿಯಿಸಿರಿ.

5. ಆಕೃತಿ 1.13 ದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ.

ಆಕೃತಿ 1.13

(i) ಕಿರಣ RP ದ ವಿರುದ್ಧ ಕಿರಣದ ಹೆಸರು ಬರೆಯಿರಿ.
(ii) ಕಿರಣ PQ ಹಾಗೂ ಕಿರಣ RP ಗಳ ಛೇದನಗಣ ಬರೆಯಿರಿ.
(iii) ರೇಖ PQ ಹಾಗೂ ರೇಖ QR ದ ಸಂಯೋಗಗಣ ಬರೆಯಿರಿ.
(iv) ರೇಖ QR ಇದು ಯಾವಯಾವ ಕಿರಣಗಳ ಉಪಗಣ ಇದೆ ?
(v) R ಇದು ಆರಂಭ ಬಿಂದು ಇರುವ ವಿರುದ್ಧ ಕಿರಣಗಳ ಜೋಡಿ ಬರೆಯಿರಿ.
(vi) S ಇದು ಆರಂಭ ಬಿಂದುವಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕಿರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
(vii) ಕಿರಣ SP ಮತ್ತು ಕಿರಣ ST ಗಳ ಛೇಧಗಣ ಬರೆಯಿರಿ.

6. ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿ 1.14 ಈ ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 1.14

(i) ಬಿಂದು B ದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವವು ?
(ii) ಬಿಂದು Q ದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಬರೆಯಿರಿ.
(iii) d (U,V), d (P,C), d (V,B), d (U, L) ತೆಗೆಯಿರಿ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಸಶರ್ತ ವಿಧಾನಗಳು ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸ (Conditional statements and converse)

ಯಾವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಇದ್ದರೆ- ಆಗಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವದೋ, ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಶರ್ತ ವಿಧಾನಗಳು ಎನ್ನುವರು ಸಶರ್ತ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿಯ 'ಇದ್ದರೆ' ದಿಂದ ಆರಂಭವಾಗುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ 'ಪೂರ್ವಾರ್ಧ' ಅಥವಾ 'ಪಕ್ಷ' ಮತ್ತು 'ಆಗ' ದಿಂದ ಆರಂಭವಾಗುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ 'ಉತ್ತರಾರ್ಧ' ಅಥವಾ ಸಾಧ್ಯ ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾಹರಣಾರ್ಥ: ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇರುತ್ತವೆ.

ಸಶರ್ತ ವಿಧಾನ : ಒಂದುವೇಳೆ ಕೊಟ್ಟ ಚೌಕೋನ ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ಇರುತ್ತವೆ. ಯಾವುದೇಸಶರ್ತ ವಿಧಾನಕೊಟ್ಟರೆಮತ್ತುಅದರಲ್ಲಿಯಪೂರ್ವಾರ್ಧ ಹಾಗೂಉತ್ತರಾರ್ಧ ಇವುಗಳಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ತಯಾರಾಗುವ ಹೊಸ ವಿಧಾನ ಇದು ಮೂಲ ವಿಧಾನದ **ವ್ಯತ್ಯಾಸ** (Converse) ಎನ್ನುವರು.

ಯಾವುದೇ ಸರ್ಶತ ವಿಧಾನ ಸತ್ಯ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇದು ಸತ್ಯ ಇರುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ, ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆ ನೋಡಿರಿ.

ಸಶರ್ತ ವಿಧಾನ : ಯಾವುದೇ ಚೌಕೋನ ಸಮಭುಜ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ಇರುತ್ತವೆ.

ವ್ಯತ್ಯಾಸ : ಯಾವುದೇ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇದ್ದರೆ ಆ ಚೌಕೋನ ಸಮಭುಜ ಇರುತ್ತದೆ.
ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮೂಲವಿಧಾನ ಹಾಗೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇವು ಎರಡೂ ಸತ್ಯ ಇವೆ.

ಸಶತವಿಧಾನ : ಯಾವದೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ ಅದು ಸಮ ಅಥವಾ ವಿಷಮ ಇರುತ್ತದೆ.

ವ್ಯತ್ಯಾಸ : ಯಾವದೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮ ಅಥವಾ ವಿಷಯ ಇದ್ದರೆ ಅದು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ.
ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮೂಲ ವಿಧಾನ ಸತ್ಯ ಇದೆ ಆದರೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಅಸತ್ಯ ಇದೆ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಸಿದ್ಧತೆಗಳು (Proofs)

ನಾವು ಕೋನ, ತ್ರಿಕೋನ, ಚೌಕೋನ ಈ ಆಕೃತಿಗಳ ಅನೇಕ ಗುಣಧರ್ಮಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ನಾವು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಭೂಮಿತಿ ಈ ವಿಷಯದವನ್ನು ಬೇರೆ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಿಂಧ ನೋಡುವವರಿದ್ದೇವೆ. ಈ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದ ಕ್ರಿ.ಶ. ಇ.ಸ. ಪೂರ್ವ ಮೂರನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿಯ ಗ್ರೀಕ ಗಣಿತಜ್ಞ ಯುಕ್ಲಿಡನ ಕಡೆಗೆ ಹೋಗುವದು. ಆ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಭೂಮಿತಿ ವಿಷಯದ ಲಭ್ಯವಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು, ಸುವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿ ಒಟ್ಟು ಗೂಡಿಸಿದನು. ಅದರಲ್ಲಿ ಸುಸುತ್ರತೆ ತಂದನು. ಕೆಲವು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ ಹಾಗೂ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು **ಗೃಹಿತಗಳು** (Postulates) ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ, ಅವುಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ತರ್ಕಬದ್ಧವಾಗಿ ಮಂಡಿಸುವದರಿಂದ ಹೊಸ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಎಂಬುದನ್ನು ಆತನು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ತೋರಿಸಿದನು. ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರುವ ಗುಣಧರ್ಮಗಳಿಗೆ **ಪ್ರಮೇಯ** (Theorems) ಎನ್ನುವರು.

ಯುಕ್ಲಿಡ್

ಯುಕ್ಲಿಡನು ಮಂಡಿಸಿದ ಗೃಹತಕಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೇಲವು ಗೃಹಿತಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

(1) ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಅಸಂಖ್ಯೆ ರೇಷೆಗಳಿವರು.

(2) ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಷೆ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವದು.

(3) ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವನ್ನಾಗಿರಿಸಿ ಕೊಟ್ಟಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.

(4) ಎಲ್ಲ ಕಾಟಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

(5) ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳಿಗೆ ಛೇದಿಕೆ ತೆಗೆಯಲಾಗಿ, ಒಂದು ಬದಿಗೆ ತಯಾರಾಗುವ ಅಂತರ ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು ಎರಡು ಕಾಟಕೋನಗಳ ಅಳತೆಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ಆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಸಿದಾಗ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಛೇದಿಸುವವು.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೆಲವು ಗೃಹಿತಕಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೃತಿಯಿಂದ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಗುಣಧರ್ಮದ ತರ್ಕಬದ್ಧ ಸಿದ್ಧತೆ ಕೊಡಲು ಬರುತ್ತಿದರೆ, ಆ ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನು ಸತ್ಯವೆಂದು ತಿಳಿಯಲಾಗುವದು. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಮಾಡಿರುವ ತರ್ಕಬದ್ಧ ಮಂಡನೆಗೆ ಆ ಗುಣಧರ್ಮದ, ಅಂದರೆ ಆ ಪ್ರಮೇಯದ **ಸಿದ್ಧತೆ** (Proof) ಎನ್ನುವರು.

ಯಾವುದೇ ಸಶರ್ತ ವಿಧಾನ ಸತ್ಯ ಇದೆ ಎಂದು ನಮ್ಮಗೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು. ಆಗ ಅದರಲ್ಲಿಯ ಪೂರ್ವಾರ್ಧಕ್ಕೆ **ಪಕ್ಷ** ಮತ್ತು ಉತ್ತರಾರ್ಧಕ್ಕೆ **ಸಾಧ್ಯ** ಎನ್ನುವರು.

ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿ **ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ** ಸಿದ್ಧತೆ ಮತ್ತು **ಅಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ** ಸಿದ್ಧತೆ ಎಂಬ ಎರಡು ಪ್ರಕಾರಗಳಿವೆ.

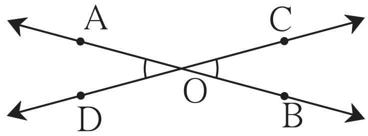
ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮದ **ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಸಿದ್ಧತೆ** ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ– ಎರಡು ರೇಷೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ; ಉಂಟಾದ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ವಿರುತ್ತವೆ.

ಪಕ್ಷ : ರೇಖೆ AB ಮತ್ತು ರೇಖೆ CD ಗಳು ಪರಸ್ಪರ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. A – O – B, C – O – D

ಸಾಧ್ಯ : (i) $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) $\angle BOC = \angle AOD$



ಆಕೃತಿ 1.15

ಸಿದ್ಧತೆ : $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ . . . . (I) ರೇಷೀಯ ಜೋಡಿ ಕೋನಗಳು

$\angle BOC + \angle BOD = 180^\circ$ . . . . (II) ರೇಷೀಯ ಜೋಡಿ ಕೋನಗಳು

$\angle AOC + \angle BOC = \angle BOC + \angle BOD$ . . . . ವಿಧಾನ (I) ಹಾಗೂ (II)ರ ಮೇಲಿಂದ

$\therefore \angle AOC = \angle BOD$. . . . . . . $\angle BOC$ ನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿ

ಅದರಂತೆ $\angle BOC = \angle AOD$ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷಸಿದ್ಧತೆ (Indirect proof) :

ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವನ್ನು ಅಸತ್ಯವೆಂದು ತಿಳಿಯುವದು. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೇವಲ ತರ್ಕ ಮತ್ತು ಮೊದಲು ಮಾನ್ಯ ಮಾಡಿದ ಸತ್ಯಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ಹಂತ ಹಂತವಾಗಿ ನಿಷ್ಕರ್ಷೆಯ ವರೆಗೆ ತಲುಪುವರು. ಈ ನಿಷ್ಕರ್ಷ ಗೊತ್ತಿರುವ ಸತ್ಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ಅಥವಾ ಪಕ್ಷ, ಅಂದರೆ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಗೆ ವಿಸಂಗತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಧ್ಯ ಅಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವದು ತಪ್ಪಾಗುವದೆಂದು ನಿಷ್ಕರ್ಷೆ ತೆಗೆಯಲಾಗುವದು. ಅಂದರೆ ಸಾಧ್ಯ ಸತ್ಯ ಇದೆ ಎಂದು ಸ್ವೀಕರಿಸುವರು. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆ ನೋಡಿರಿ.

ವಿಧಾನ : ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡವಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ವಿಷಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಶರ್ತ ವಿಧಾನ : ಒಂದುವೇಳೆ p ಇದು 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ p ಇದು ವಿಷಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : p ಇದು 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ. ಅಂದರೆ p ದ 1 ಹಾಗೂ p ಇವು ಎರಡೇ ವಿಭಾಜಕಗಳಿವೆ.

ಸಾಧ್ಯ : p ಇದು ವಿಷಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

ಸಿದ್ಧಾತೆ : p ಇದು ವಿಷಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಅಂದರೆ p ಇದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

$\therefore$ 2 ಇದು p ದ ವಿಭಾಜಕ ಇದೆ. ..... (I)

ಆದರೆ p ಇದು 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ, ಎಂಧು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ....(ಪಕ್ಷ)

$\therefore$ p ದ 1 ಹಾಗೂ p ಈ ಎರಡೇ ವಿಭಾಜಕಗಳಿವೆ. ..... (II)

ವಿಧಾನ (I) ಹಾಗೂ (II) ರ ಮೇಲಿಂದ ಪಕ್ಷ ದೊಂದಿಗೆ ವಿಸಂಗತಿ ದೊರೆಯುವದು.

ಆದ್ದರಿಂಧ ನಾವು ತಿಳಿದ ವಿಧಾನ ತಪ್ಪಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ p ಇದು 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ ಅದು ವಿಷಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಗುವದು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.3

1. ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಇದ್ದರೆ ಆಗ, ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
   (i) ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೊಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪವಿರುತ್ತವೆ.
   (ii) ಆಯತದ ಕರ್ಣಗಳು ಏಕರೂಪ ವಿರುತ್ತವೆ.
   (iii) ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದು ಹಾಗೂ ತಳದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡ ತಳಕ್ಕೆ ಲಂಬವಿರುತ್ತದೆ.

2. ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನಗಳು ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಬರೆಯಿರಿ.
   (i) ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳು ಒಂದು ಛೇದಿಕೆ ಛೇದಿಸಿದ ಉಂಟಾಗುವ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ವಿರುತ್ತವೆ.
   (ii) ಎರಡು ರೇಷೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಛೇದಿಕೆ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಅಂತರ ಕೋನಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿಪೂರಕ ಇದ್ದರೆ ಆ ರೇಷೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಇರುತ್ತವೆ.
   (iii) ಆಯತದ ಕರ್ಣಗಳು ಏಕರೂಪವಿರುತ್ತವೆ.

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ 1

1. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪರ್ಯಾಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಕೊಟ್ಟ ಉತ್ತರಗಳಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ.

   (i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಷಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಇರುತ್ತವೆ ?
   (A) ಒಂದೇ (B) ಎರಡು (C) ಮೂರು (D) ಅನೇಕ

   (ii) ಎರಡು ಭಿನ್ನ ರೇಷೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸಿದ್ದಾಗ ಅವುಗಳ ಛೇದಗಣದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಬಿಂದುಗಳಿರುವವು ?
   (A) ಅನಂತ (B) ಎರಡು (C) ಒಂದು (D) ಒಂದು ಇಲ್ಲ

   (iii) ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಮಾವಿಷ್ಟಗೊಳಿಸುವ ಎಷ್ಟು ರೇಷೆಗಳಿರುವವು ?
   (A) ಎರಡು (B) ಮೂರು (C) ಒಂದು ಅಥವಾ ಮೂರು (D) ಆರು

   (iv) ಬಿಂದು A ದ ನಿರ್ದೇಶಕ -2 ಹಾಗೂ B ದ ನಿರ್ದೇಶಕ 5 ಇದ್ದರೆ, $d(A,B) =$ ಎಷ್ಟು ?
   (A) -2 (B) 5 (C) 7 (D) 3

   (v) ಒಂದುವೇಳೆ P-Q-R ಮತ್ತು $d(P,Q) = 2$, $d(P,R) = 10$, ಇದ್ದರೆ $d(Q,R) =$ ಎಷ್ಟು ?
   (A) 12 (B) 8 (C) $\sqrt{96}$ (D) 20

2. ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ P,Q,R ಈ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $3, -5$ ಹಾಗೂ 6 ಇವೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನಗಳು ಸತ್ಯವಾಗಿವೆ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ ಕೊಡಿರಿ.
   (i) $d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$ (ii) $d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)$
   (iii) $d(R,P) + d(P,Q) = d(R,Q)$ (iv) $d(P,Q) - d(P,R) = d(Q,R)$

3. ಕೆಳಗೆ ಕೇಲವು ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಿಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ತೆಗೆಯಿರಿ.
   (i) 3, 6 (ii) $-9, -1$ (iii) $-4, 5$ (iv) $0, -2$
   (v) $x + 3, x - 3$ (vi) $-25, -47$ (vii) $80, -85$

4. ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ -7 ಇದ್ದರೆ P ದಿಂದ 8 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತರ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

5. ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.
   (i) ಒಂದುವೇಳೆ A-B-C ಹಾಗೂ d(A,C) = 17, d(B,C) = 6.5 ಇದ್ದರೆ d (A,B) = ?
   (ii) ಒಂದುವೇಳೆ P-Q-R ಹಾಗೂ d(P,Q) = 3.4, d(Q,R)= 5.7 ಇದ್ದರೆ d(P,R) = ?

6. ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ 1 ಇದೆ. A ದಿಂದ 7 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

7. ಮುಂದಿನ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಸಶರ್ತ (ಇದ್ದರೆ-ಅಗ) ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
   (i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇದು ಚೌರಸವಿರುತ್ತವೆ.
   (ii) ರೇಷೆಯ ಜೋಡಿಯ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪೂರಕ ವಿರುತ್ತವೆ.
   (iii) ತ್ರಿಕೋನ ಇದು ಮೂರು ರೇಷಾಖಂಡಗಳಿಂದ ತಯಾರಾದ ಆಕೃತಿ ಇರುತ್ತದೆ.
   (iv) ಕೇವಲ ಎರಡೇ ವಿಭಾಜಕ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯಾ ಎನ್ನುವರು.

8. ಮುಂದಿನ ವಿಧಾನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಬರೆಯಿರಿ.
   (i) ಯಾವುದೊಂದು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು 180^0 ಇದ್ದರೆ ಆ ಆಕೃತಿ ತ್ರಿಕೋನವಿರುತ್ತದೆ.
   (ii) ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು 90^0 ಇದ್ದರೆ ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳಿರುತ್ತವೆ.
   (iii) ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳಿಗೆ ಛೇದಿಕೆ ಛೇದಿಸಿದ್ದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ವಿರುತ್ತವೆ.
   (iv) ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜುಗೆ 3 ರಿಂಧ ಭಾಗ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 3 ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವದು.

9. ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿಯ ಪಕ್ಷ ಹಾಗೂ ಸಾಧ್ಯ ಬರೆಯಿರಿ.
   (i) ಒಂದುವೇಳೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಏಕರೂಪವಿದ್ದರೆ ಅದರ ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪವಿರುತ್ತವೆ.
   (ii) ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ.

10*. ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನಗಳಿಗಾಗಿ ಹೆಸರಿಸಿದ ಆಕೃತಿ ತೆಗೆದು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಪಕ್ಷ, ಸಾಧ್ಯ ಬರೆಯಿರಿ.
   (i) ಎರಡು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳು, ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿರುತ್ತವೆ.
   (ii) ರೇಷೀಯ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪವಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನ ಕಾಟಕೋನವಿರುತ್ತದೆ.
   (iii) ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆ ಶಿರೋಬಿಂದುವಿನ ಎದುರಿನ ಭುಜದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಶಿರೋಲಂಬಗಳು ಏಕರೂಪವಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ಎದುರಿನ ಭುಜಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

2 ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳು

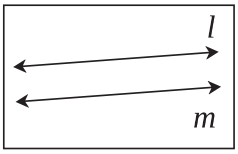
EMGBBB

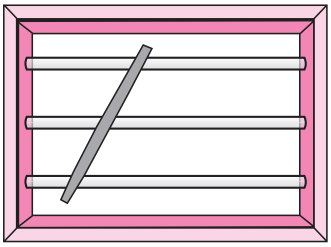
ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

- ಸಮಾಂಂತರ ರೇಷೆ ಮತ್ತು ಛೇದಿಕೆಯಿಂದ ಆಗುವ ಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮ
- ರೇಷೆಗಳ ಸಮಾಂತರತೆಯ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು
- ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳ ಉಪಯೋಗ

ಜ್ಞಾಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ.

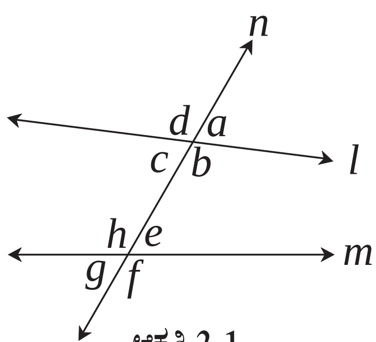
ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆ : ಒಂದೇ ಸಮತಲ್ಲಿರುವ ಆದರೆ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸದೇ ಇರುವ ರೇಷೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.





ಬದಿಯ ಚಿತ್ರ ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ. ಅಡ್ಡ ಸಮಾಂತರ ಕಬಿಣ ಸಲಾಕೆ ಇರುವ ಕಿಡಕಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋಲುನ್ನು ಓರೆಯಾಗಿ ಹಿಡಿದು ನೋಡಿರಿ ಏನು ಕಾಣಿಸುವದು ? ಎಷ್ಟು ಕೋನಗಳು ಆದದ್ದು ಕಾಣಿಸುವವು ?

- ಎರಡು ರೇಷೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಛೇದಿಕೆಯಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ನೆನಪಿಗೆ ಬರುತ್ತವೆಯೇ?
  ಆಕೃತಿ 2.1 ರಲ್ಲಿ ರೇಷೆ l ಮತ್ತು ರೇಷೆ m ಇವುಗಳ ಛೇದಿಕೆ n ಇದೆ ಇಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 8 ಕೋನಗಳು ತಯಾರಾಗುತ್ತವೆ. ಅದರಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.



ಆಕೃತಿ 2.1

ಸಂಗತ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳು

(i) $\angle d$, $\angle h$

(ii) $\angle a$, $\boxed{}$

(iii) $\angle c$, $\boxed{}$

(iv) $\angle b$, $\boxed{}$

ಅಂತರವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳು

(i) $\angle c$, $\angle e$

(ii) $\angle b$, $\angle h$

ಬಾಹ್ಯವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳು

(i) $\angle d$, $\angle f$

(ii) $\angle a$, $\angle g$

ಛೇದಿಕೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯ ಅಂತರ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳು

(i) $\angle c$, $\angle h$

(ii) $\angle b$, $\angle e$

ಮಹತ್ವದ ಕೆಲವು ಗುಣಧರ್ಮಗಳು :

(1) ಎರಡು ರೇಷೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಅಳತೆಯದ್ದು ಇರುತ್ತವೆ.

(2) ರೇಷೀಯ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪೂರಕ ಇರುತ್ತವೆ.

(3) ಸಂಗತ ಕೋನಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿಯು ಏಕರೂಪ ವಿದ್ದರ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳ ಉಳಿದ ಎಲ್ಲ ಜೋಡಿಗಳು ಏಕರೂಪ ವಿರುತ್ತವೆ.

(4) ವ್ಯತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಏಕರೂಪ ಇದ್ದರೆ ಆಗ ವ್ಯತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಇತರ ಎಲ್ಲ ಜೋಡಿಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

(5) ಛೇದಿಕೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯ ಅಂತರಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು 180° ಇದ್ದರೆ ಅಂತರಕೋನಗಳ ಎರಡನೆಯ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು 180° ಇರುತ್ತದೆ.

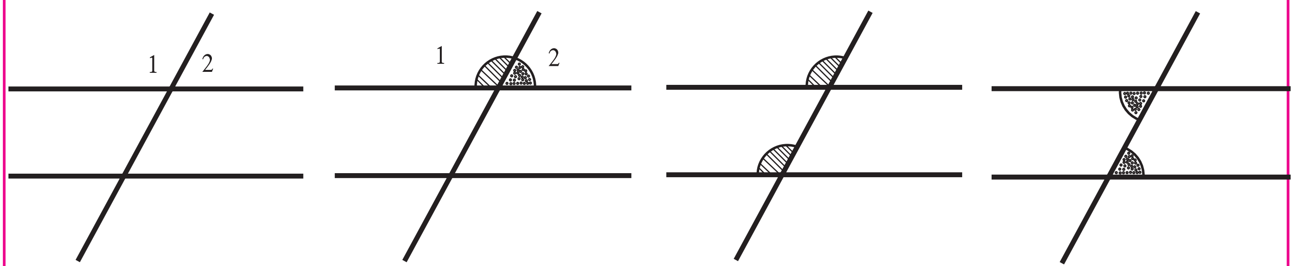

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು (Properties of parallel lines)

ಕೃತಿ :

ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಛೇದಿಕೆಯಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳ ತಾಳೆ ಹಾಕುವದು.

ದಪ್ಪ ಬಣ್ಣದಕಾಗದದ ಒಂದು ತುಣುಕು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಒಂದು ಛೇದಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ಮೂರು ರೇಷೆಗಳ ಮೇಲೆ ಸರಳ ಕಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಅಂಟಿನಿಂದ ಅಂಟಿಸಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ತಯಾರಾದ ಎಂಟು ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನ 1 ಮತ್ತು ಕೋನ 2ರ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳಷ್ಟು ಬಣ್ಣದ ಪತ್ರಿಕೆಗಳ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿರಿ (ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ) ಈ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿತ, ಸಂಗತಕೋನ, ವ್ಯತ್ಕ್ರಮ ಕೋನ ಮತ್ತು ಅಂತರಕೋನಗಳ ಹತ್ತಿರ ಇಟ್ಟು ಗುಣಧರ್ಮದ ತಾಳೆ ಹಾಕಿರಿ.

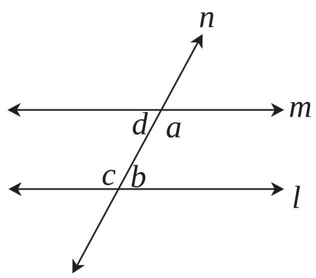


ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳ ಛೇದಿಕೆಯಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳ ಕೃತಿಯಿಂದ ತಾಳೆ ಹಾಕಿದ ಗುಣಧರ್ಮ ಈ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡೋಣ. ಈ ಗುಣಧರ್ಮ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ನಾವು ಯುಕ್ಲಿಡನ ಮೇಲಿನ ಗೃಹಿತಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವವರಿದ್ದೇವೆ.

ಎರಡು ರೇಷೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಛೇದಿಕೆ ತೆಗೆದಾಗ ಒಂದು ಬದಿಗೆ ತಯಾರಾದ ಅಂತರಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು ಎರಡು ಕಾಟಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ಆ ಸರಳ ರೇಷೆ ಅದೇ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಮುಂದೆ ಬೆಳೆಸಿದಾಗ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

ಅಂತರಕೋನಗಳ ಪ್ರಮೇಯ (Interior angle theorem

ಪ್ರಮೇಯ: ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಿಕೆಯು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಛೇದಿಕೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಗೆ ಉಂಟಾಗುವ ಅಂತರಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪೂರಕ ಇರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 2.2

ಪಕ್ಷ : ರೇಷೆ $l \parallel$ ರೇಷೆ m ಮತ್ತು ರೇಷೆ n ಇದು ಛೇದಿಕೆ ಇದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ $\angle a$, $\angle \mathrm{b}$ ಹಾಗೂ $\angle \mathrm{c}$, $\angle \mathrm{d}$ ಇವು ಅಂತರಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಧ್ಯ : $\angle a + \angle \mathrm{b} = 180^\circ$

$\angle \mathrm{d} + \angle \mathrm{c} = 180^\circ$

ಸಿದ್ಧತ : $\angle a$ ಮತ್ತು $\angle \mathrm{b}$ ಇವುಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಸಲುವಾಗಿ ಮೂರು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ.

(i) $\angle a + \angle \mathrm{b} < 180^\circ$ (ii) $\angle a + \angle \mathrm{b} > 180^\circ$ (iii) $\angle a + \angle \mathrm{b} = 180^\circ$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ (i) $\angle a + \angle \mathrm{b} < 180^\circ$ ಸತ್ಯ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ

ರೇಷೆ l ಮತ್ತು ರೇಷೆ m ಇವುಗಳನ್ನು ಛೇದಿಕೆಯ $\angle a$ ಮತ್ತು $\angle \mathrm{b}$ ಗಳ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಸಲಾಗಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ...(ಯುಕ್ಲಿಡನ ಗೃಹಿತಕದ ಅನುಸಾರ)

ಆದರೆ, ರೇಷೆ l ಮತ್ತು ರೇಷೆ m ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳಿವೆ. ....ಪಕ್ಷ

$\therefore \angle a + \angle \mathrm{b} < 180^\circ$ ಇದು ಅಶಕ್ಯವಿದೆ . . . .(I)

ಈಗ $\angle a + \angle \mathrm{b} > 180^\circ$ ಸತ್ಯ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ

$\therefore \angle a + \angle \mathrm{b} > 180^\circ$

ಆದರೆ $\angle a + \angle \mathrm{d} = 180^\circ$

ಮತ್ತು $\angle \mathrm{c} + \angle \mathrm{b} = 180^\circ$ . . . . . ರೇಷೀಯ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳು

$\therefore \angle a + \angle \mathrm{d} + \angle \mathrm{b} + \angle \mathrm{c} = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

$\therefore \angle \mathrm{c} + \angle \mathrm{d} = 360^\circ - (\angle a + \angle \mathrm{b})$

ಒಂದುವೇಳೆ $\angle a + \angle \mathrm{b} > 180^\circ$ ಇದ್ದರೆ ಆಗ $[360^\circ - (\angle a + \angle \mathrm{b})] < 180^\circ$

$\therefore \angle \mathrm{c} + \angle \mathrm{d} < 180^\circ$

$\therefore$ ಹಾಗೆ ಇದ್ದರೆ ಛೇದಿಕೆಯ $\angle c$ ಮತ್ತು $\angle d$ ಇರುವ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಸಿದಾಗ ರೇಷೆ l ಮತ್ತು ರೇಷ m ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

$\therefore \angle c + \angle d < 180$ ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ

ಅಂದರೆ $\angle a + \angle b > 180^\circ$ ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ. ...... (II)

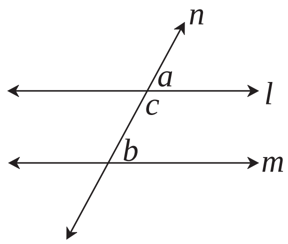
$\therefore \angle a + \angle b = 180^\circ$ ಈ ಒಂದೇ ಸಾಧ್ಯತೆ ಉಳಿಯುವದು. ......(I) ಮತ್ತು (II) ರ ಮೇಲಿಂದ

$\therefore \angle a + \angle b = 180^\circ$ ಅದರಂತೆ $\angle c + \angle d = 180^\circ$

ಈ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು $\angle a + \angle b > 180^\circ$, $\angle a + \angle b < 180^\circ$ ಈ ಎರಡೂ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ವಿಸಂಗತಿಯಿಂದಾಗಿ ಅಲ್ಲಗಳೆದೆವು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ ಇದು ಅಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಸಿದ್ಧತೆ ಇದೆ ಎಂದಾಯಿತು.

ಸಂಗತ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮ
(Corresponding angle and alternate angle theorem)

ಪ್ರಮೇಯ: ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಛೇದಿಕೆಯು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಸಂಗತಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನ ಇರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 2.3

ಪಕ್ಷ : ರೇಷೆ $l \parallel$ ರೇಷೆ m
ರೇಷೆ n ಇದು ಛೇದಿಕೆ ಇದೆ

ಸಾಧ್ಯ : $\angle a = \angle b$

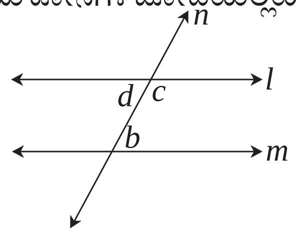
ಸಿದ್ಧತೆ : $\angle a + \angle c = 180^\circ$ . . . . . . (I) ರೇಷೀಯ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳು

$\angle b + \angle c = 180^\circ$ . . . . . . (II) ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳ ಅಂತರ ಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮ

$\angle a + \angle c = \angle b + \angle c$ . . . ವಿಧಾನ (I) ಮತ್ತು (II) ಮೇಲಿಂದ

$\therefore \angle a = \angle b$

ಪ್ರಮೇಯ: ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಿಕೆಯು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ವ್ಯತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನ ಇರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 2.4

ಪಕ್ಷ : ರೇಷೆ $l \parallel$ ರೇಷೆ m
ರೇಷೆ n ಇದು ಛೇದಿಕೆ ಇದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : $\angle d = \angle b$

ಸಿದ್ಧತೆ : $\angle d + \angle c = 180^\circ$ . . . . (I) ರೇಷೀಯ ಜೋಡಿ ಕೋನಗಳು

$\angle c + \angle b = 180^\circ$ . . . . (II) ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳ ಅಂತರಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮ

$\angle d + \angle c = \angle c + \angle b$ . . . . ವಿಧಾನ (I) ಮತ್ತು (II) ಮೇಲಿಂದ

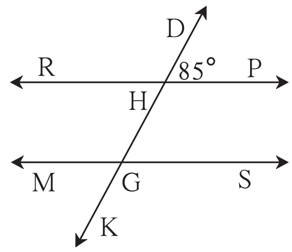
$\therefore \angle d = \angle b$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.1

1. ಆಕೃತಿ 2.5 ರಲ್ಲಿ ರೇಷೆ RP || ರೇಖೆ MS ಮತ್ತು ರೇಷೆ DK ಅವುಗಳ ಛೇದಿಕೆ ಇದೆ. $\angle DHP = 85^\circ$ ಇದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

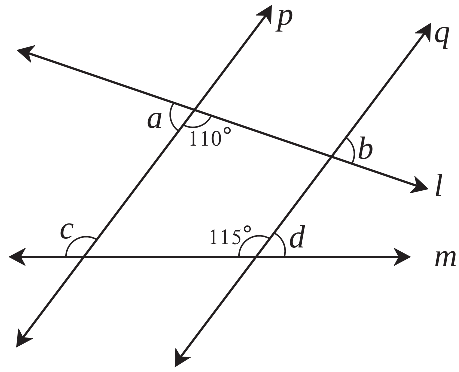
   (i) $\angle RHD$ (ii) $\angle PHG$

   (iii) $\angle HGS$ (iv) $\angle MGK$

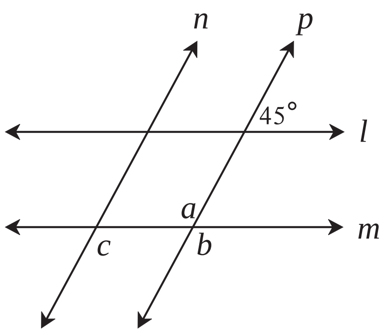


ಆಕೃತಿ 2.5

2. ಆಕೃತಿ 2.6 ರಲ್ಲಿ ರೇಷೆ p || ರೇಷೆ q ಮತ್ತು ರೇಷೆ l ಮತ್ತು ರೇಷೆ m ಛೇದಿಕೆಗಳಿವೆ. ಕೆಲವು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$ ಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



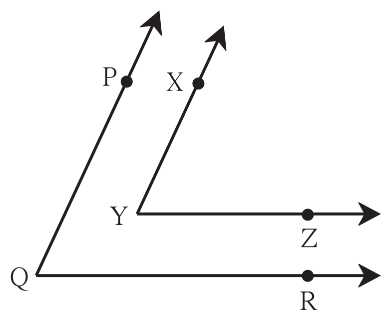
ಆಕೃತಿ 2.6



ಆಕೃತಿ 2.7

3. ಆಕೃತಿ 2.7 ರಲ್ಲಿ ರೇಷೆ l || ರೇಷೆ m ಮತ್ತು ರೇಷೆ n || ರೇಷೆ p ಒಂದು ಕೋನದ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಯ ಮೇಲಿಂದ $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$ ಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4*. ಆಕೃತಿ 2.8 ರಲ್ಲಿ $\angle PQR$ ಮತ್ತು $\angle XYZ$ ಇವುಗಳ ಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರ ಇವೆ ಹಾಗಾದರೆ $\angle PQR \cong \angle XYZ$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ

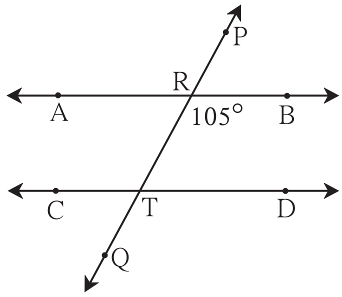


ಆಕೃತಿ 2.8

5. ಆಕೃತಿ 2.9 ರಲ್ಲಿ ರೇಷೆ AB || ರೇಷೆ CD ಮತ್ತು ರೇಷೆ PQ ಇದು ಛೇದಿಕೆ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\angle ART$ (ii) $\angle CTQ$

(iii) $\angle DTQ$ (iv) $\angle PRB$



ಆಕೃತಿ 2.9


ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

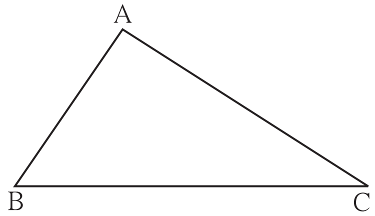
ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳ ಗುಣಧರ್ಮದ ಉಪಯೋಗ

ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಛೇದಿಕೆ ಇವುಗಳಿಂದ ಆಗುವ ಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಕೊಂಡು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ: ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು 180° ಇರುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : Δ ABC ಇದು ಯಾವುದೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$



ಆಕೃತಿ 2.10

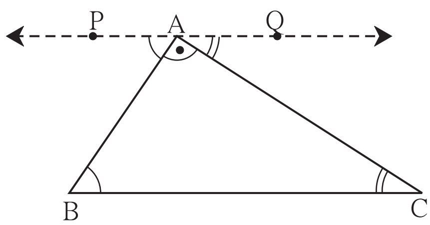
ರಚನ : A ಬಿಂದು ವಿನಲ್ಲಿಂದ ರೇಖ BC ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆ l ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲೆ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳನ್ನು P–A–Q ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ : ರೇಷೆ PQ || ರೇಷೆ BC ಮತ್ತು ರೇಷೆ AB ಇದು ಛೇದಿಕೆ

$\therefore\ \angle ABC = \angle PAB$.......(ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳು).....I

ರೇಷ PQ || ರೇಖ BC ಮತ್ತು ರೇಷ AC ಛೇದಿಕೆ

$\therefore\ \angle ACB = \angle QAC$.......(ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳು).....II



ಆಕೃತಿ 2.11

ವಿಧಾನ I ಮತ್ತು II ಮೇಲಿಂದ,

$\angle ABC + \angle ACB = \angle PAB + \angle QAC$ . . . III

ಸಮೀಕರಣ III ರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ $\angle BAC$ ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ

$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \angle PAB + \angle QAC + \angle BAC$

$= \angle PAB + \angle BAC + \angle QAC$

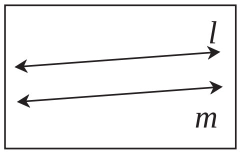
$= \angle PAC + \angle QAC$ ...($\because \angle PAB + \angle BAC = \angle PAC$)

$= 180^\circ$ ...(ರೇಷೀಯ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೋನ)

ಅಂದರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು 180° ಇರುತ್ತದೆ.

ಬನ್ನಿ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡೋಣ.

ಬದಿಯ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ರೇಷೆ l ಮತ್ತು ರೇಷೆ m ಇವು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರ ಇವೆಯೇ? ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸುವಿರಿ ?



ಆಕೃತಿ 2.12

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ರೇಷೆಗಳ ಸಮಾಂತರತೆಯ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು (Tests for parallel lines)

ಎರಡು ರೇಷೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಛೇದಿಕೆಯಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನಾವು ಆ ಎರಡು ರೇಷೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಇವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

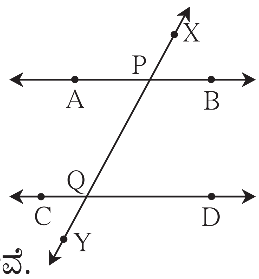
(1) ಛೇದಿಕೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯ ಅಂತರಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಯು ಪೂರಕಕೋನಗಳದ್ದು ಇದ್ದರೆ ಆಗ ಆ ರೇಷೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಇರುತ್ತವೆ.

(2) ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿಯು ಸಮಾನವಿದ್ದರೆ ಆ ರೇಷೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ವಿರುತ್ತವೆ.

(3) ಸಂಗತ ಕೋನಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿಯು ಸಮಾನವಿದ್ದರೆ ಆ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತವಿರುತ್ತವೆ.

ಸಮಾಂತ ರೇಷೆಗಳ ಅಂತರಕೋನಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ (Interior angles test)

ಪ್ರಮೇಯ : ಎರಡು ಭಿನ್ನ ರೇಷೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಿಕೆಯು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಛೇದಿಕೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿಯ ಅಂತರಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು 180° ಇದ್ದರೆ. ಆ ರೇಷೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಇರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 2.13

ಪಕ್ಷ : ರೇಷೆ AB ಮತ್ತು ರೇಖೆ CD ಇವುಗಳ ಛೇದಿಕೆ ರೇಷೆ XY ಇದೆ.

$\angle BPQ + \angle PQD = 180^\circ$

ಸಾಧ್ಯ : ರೇಷೆ AB || ರೇಷೆ CD

ಸಿದ್ಧತೆ : ಈ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಾವು ಅಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಸಿದ್ಧಮಾಡುವವರಿದ್ದೇವೆ.

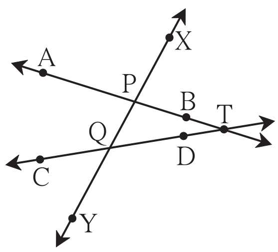
ಸಾಧ್ಯದಲ್ಲಿ ವಿಧಾನ ತಪ್ಪು ಇದೆ ಎಂದ ತಿಳಿಯುವಾ

$\therefore$ ರೇಷೆ AB ಮತ್ತು ರೇಷೆ CD ಸಮಾಂತರವಿಲ್ಲ

ಈ ವಿಧಾನ ಸತ್ಯ ಎಂಧು ತಿಳಿಯುವಾ

ರೇಷೆ AB ಮತ್ತು CD ಮತ್ತು T ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

ಅದರಿಂದ Δ PQT ತಯಾರಾಗುವದು



ಆಕೃತಿ 2.14

$\angle TPQ + \angle PQT + \angle PTQ = 180^\circ$ . . . . . . ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು

ಅದರೆ $\angle TPQ + \angle PQT = 180^\circ$ ಕೊಟ್ಟದೆ. . . . . ಪಕ್ಷ

ಇದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು 180° ಇದೆ.

ಆದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ತಿಳಿತೆಗಳ ಬೇರೀಜು 180° ಇರುತ್ತದೆ.

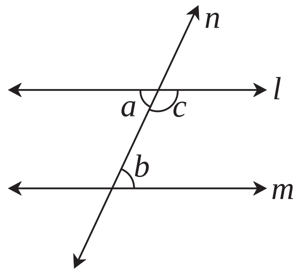
$\therefore$ $\angle PTQ = 0^\circ$ ಸಿಗುವದು.

∴ PT ಮತ್ತು QT ಈ ರೇಷೆಗಳು ಅಂದರೆ ರೇಷೆ AB ಮತ್ತು ರೇಷೆ CD ಇವು ಭಿನ್ನ
ಇರಲಾರವು ನಮಗೆ ರೇಷೆ AB ಮತ್ತು ರೇಷೆ CD ಇವು ಭಿನ್ನ ರೇಷೆಗಳು ಇವೆ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.
ಅಂದರೆ, ಇದು ಪಕ್ಷಕ್ಕೆದಲ್ಲಿ ಕೊಡ್ಡಿ ಸಂಗತಿಗೆ ವಿಸಂಗತ ವಾಗುದದು.
∴ ನಾವು ಗೃಹಿತ ಹಿಡಿದ ವಿಧಾನವು ತಪ್ಪು ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಷೆ AB ಮತ್ತು ರೇಷೆ CD ಇವು ಸಮಾಂತರ ಇದೆ.
ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಎರಡು ರೇಷೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಿಕೆಯು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಒಂದು ಬದಿಯ ಅಂತರ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಯು ಪೂರಕ ವಿದ್ದರೆ ಆ ರೇಷೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ವಿರುತ್ತವೆ. ಇದು ಸಿದ್ಧವಾಗುವದು. ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳ **ಅಂತರಕೋನ ಪರೀಕ್ಷೆ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಈ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಗೃಹಿತ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಇತರ ಎರಡು ಪರೀಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡುವಾ.

ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ (Alternate angles test)

ಪ್ರಮೇಯ : ಎರಡು ರೇಷೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಿಕೆಯು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಏಕರೂಪ ವಿದ್ದರೆ ಆ ರೇಷೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಇರುತ್ತವೆ.

ಪಕ್ಷ : ರೇಷೆ l ಮತ್ತು ರೇಷೆ m ಇವುಗಳ ಛೇದಿಕೆ ರೇಷೆ n ಇದೆ.
$\angle a$ ಮತ್ತು $\angle b$ ಇದು ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಆಗಿವೆ.
$\therefore \angle a = \angle b$



ಆಕೃತಿ 2.15

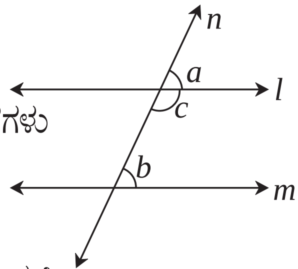
ಸಾಧ್ಯ : ರೇಷೆ $l \parallel$ ರೇಷೆ m

ಸಿದ್ಧತೆ : $\angle a + \angle c = 180^\circ$ . . . . . ರೇಷೀಯ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೋನ
$\angle a = \angle b$ . . . . ಪಕ್ಷ
$\therefore \angle b + \angle c = 180^\circ$
ಆದರೆ $\angle b$ ಮತ್ತು $\angle c$ ಇವು ಛೇದಿಗೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ಕೋನಗಳಿವೆ.
∴ ರೇಷಿ $l \parallel$ ರೇಷಿ m . . . . ಅಂತರಕೋನಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ ಮೇಲಿಂದ.
ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಷಿಗಳ **ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಸಂಗತ ಕೋನ ಪರೀಕ್ಷೆ (Corresponding angles Test)

ಪ್ರಮೇಯ : ಎರಡು ರೇಷೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಿಕೆಯು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿಯು ಏಕರೂಪವಿದ್ದರೆ ಆ ರೇಷೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ವಿರುತ್ತವೆ.

ಪಕ್ಷ : ರೇಷೆ l ಮತ್ತು ರೇಷೆ m ಇವುಗಳ ಛೇದಿಕೆ ರೇಷೆ n
$\angle a$ ಮತ್ತು $\angle b$ ಇವು ಸಂಗತ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿ ಆಗಿವೆ.
$\therefore \angle a = \angle b$

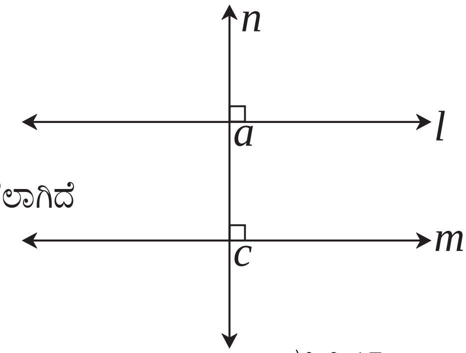


ಆಕೃತಿ 2.16

ಸಾಧ್ಯ : ರೇಷೆ $l \parallel$ ರೇಷೆ m

ಸಿದ್ಧತೆ : $\angle a + \angle c = 180^\circ$ . . . . ರೇಷೀಯ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳು
$\angle a = \angle b$ . . . . ಪಕ್ಷ
$\therefore \angle b + \angle c = 180^\circ$
ಅಂದರೆ ಛೇದಿಕೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿಯ ಅಂತರಕೋನಗಳು ಪೂರಕ ಇರುತ್ತವೆ.
∴ ರೇಷ $l \parallel$ ರೇಷ m . . . . ಅಂತರಕೋನಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ.
ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳ **ಸಂಗತಕೋನ ಪರೀಕ್ಷೆ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉಪಪ್ರಮೇಯ I: ಒಂದು ರೇಷೆಯು ಅದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ರೇಷೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬ ವಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ರೇಷೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರ ವಿರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 2.17

ಪಕ್ಷ : ರೇಷೆ $n \perp$ ರೇಷೆ l ಮತ್ತು ರೇಷೆ $n \perp$ ರೇಷೆ m

ಸಾಧ್ಯ : ರೇಷೆ $l \parallel$ ರೇಷೆ m

ಸಿದ್ಧತೆ : ರೇಷೆ $n \perp$ ರೇಷೆ l ಮತ್ತು ರೇಷೆ $n \perp$ ರೇಷೆ m ಇದನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ

$\therefore \quad \angle a = \angle c = 90^\circ$

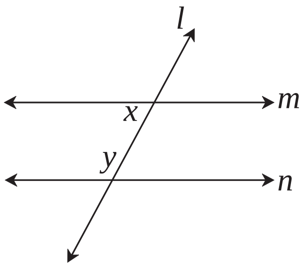
$\angle a$ ಮತ್ತು $\angle c$ ಇದು ರೇಷೆ l ಮತ್ತು ರೇಷೆ m ಇವುಗಳ ರೇಷೆ n ಭೇದಿಕೆಯಿಂದ ತಯಾರಾದ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳಿವೆ.

$\therefore$ ರೇಷೆ $l \parallel$ ರೇಷೆ m . . . . ರೇಷಗಳ ಸಮಾಂತರತೆಯ ಸಂಗತಕೋನಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ.

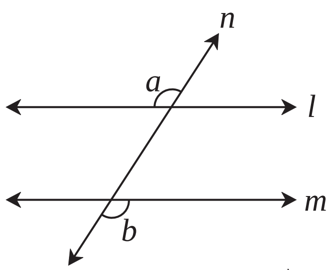
ಉಪಕ್ರಮೇಣ II ಎರಡು ರೇಷೆಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ರೇಷೆಗೆ ಸಮಾಂತರ ವಿದ್ದರೆ ಆ ರೇಷೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರ ವಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.2

1. ಆಕೃತಿ 2.18 ರಲ್ಲಿ $y = 108^\circ$ ಮತ್ತು $x = 71^\circ$ ಇದ್ದರೆ ರೇಷೆ m ಮತ್ತು n ಇವು ಸಮಾಂತರ ಆಗುತ್ತವೆಯೇ? ಕಾರಣ ಸಹಿತ ಬರೆಯಿರಿ.



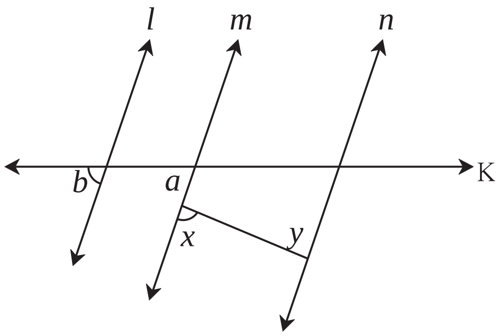
ಆಕೃತಿ 2.18



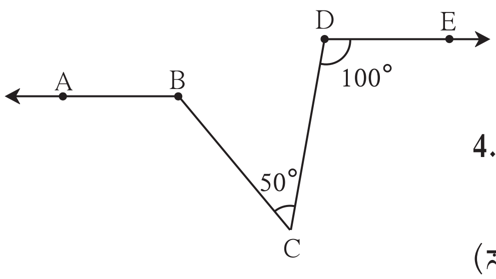
ಆಕೃತಿ 2.19

2. ಆಕೃತಿ 2.19 ರಲ್ಲಿ $\angle a \cong \angle b$ ಇದ್ದರೆ ರೇಷೆ $l \parallel$ ರೇಷ m ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

3. ಆಕೃತಿ 2.20 ಮತ್ತು $\angle a \cong \angle b$ ಮತ್ತು $\angle x \cong \angle y$ ಇದ್ದರೆ ರೇಷೆ $l \parallel$ ರೇಷ n ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



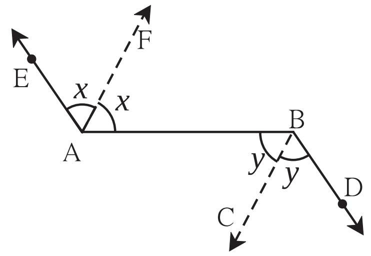
ಆಕೃತಿ 2.20



ಆಕೃತಿ 2.21

4. ಆಕೃತಿ 2.21 ರಲ್ಲಿ ಕಿರಣ BA $\parallel$ ಕಿರಣ DE, $\angle C = 50^\circ$ ಕಿರಣ $\angle D = 100^\circ$, ಇದ್ದರೆ $\angle ABC$ಯ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

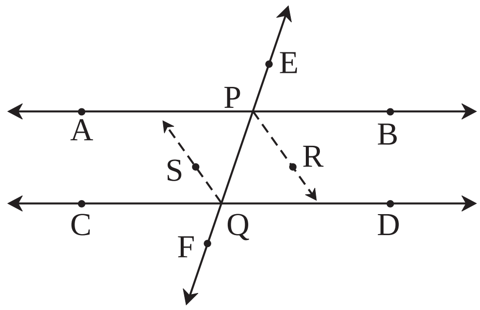
(ಸೂಚನೆ: ಬಿಂದು C ದಲ್ಲಿಂದ ರೇಷೆ ABಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆ ತೆಗೆಯಿರಿ)

5. 

ಆಕೃತಿ 2.22

ಆಕೃತಿ 2.22 ರಲ್ಲಿ ಕಿರಣ AE || ಕಿರಣ BD ಕಿರಣ AF ಇದು $\angle EAB$ ಮತ್ತು ಕಿರಣ BC ಇದು $\angle ABD$ ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕ ವಿದ್ದರೆ, ರೇಷೆ AF || ರೇಷೆ BC ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

6. ರೇಷೆ AB ಮತ್ತು ರೇಷೆ CD ಈ ರೇಷೆಗಳಿಗೆ ರೇಷೆ EF ಇದು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಕಿರಣ PR ಮತ್ತು ಕಿರಣ QS ಇವು ಸಮಾಂತರ ಕಿರಣಗಳಿದ್ದು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle BPQ$ ಮತ್ತು $\angle PQC$ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಗಳಿದ್ದರೆ, ರೇಷೆ AB || ರೇಷೆ CD ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 2.23

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ 2

1. ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿಯ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಪರ್ಯಾಯಪೈಕಿ ಸರಿಯಾದ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ.

(i) ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಷಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಿಕೆಯು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಛೇದಿಕೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು . . . . . . ಇರುತ್ತದೆ.
(A) 0° (B) 90° (C) 180° (D) 360°

(ii) ಎರಡು ರೇಷೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಛೇದಿಕೆಯು ಛೇದಿಸಿದಾಗ . . . . ಕೋನಗಳು ತಯಾರಾಗುತ್ತವೆ.
(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

(iii) ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಛೇದಿಕೆಯು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ತಯಾರಾಗುವ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ 40° ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಸಂಗತ ಕೋನದ ಅಳತೆ . . . . ಇರುತ್ತದೆ.
(A) 40° (B) 140° (C) 50° (D) 180°

(iv) Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle A = 76^\circ$, $\angle B = 48^\circ$, ಇದ್ದರೆ $\angle C$ ದ ಅಳತೆ . . . . ಇದೆ.
(A) 66° (B) 56° (C) 124° (D) 28°

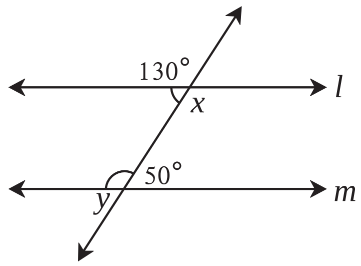
(v) ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಿಕೆಯು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ 75° ಇದ್ದರೆ ಎರಡನೆಯ ಕೋನದ ಅಳತೆ . . . . ಇರುತ್ತದೆ.
(A) 105° (B) 15° (C) 75° (D) 45°

2*. ಕಿರಣ PQ ಮತ್ತು ಕಿರಣ PR ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬ ಇದೆ. ಬಿಂದು B ಇದು $\angle QPR$ ದ ಅಂತರ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಬಿಂದು A ಇದು $\angle RPQ$ ದ ಬಾಹ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇದೆ ಕಿರಣ PB ಮತ್ತು ಕಿರಣ PA ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬ ಇವೆ ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಆಕೃತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

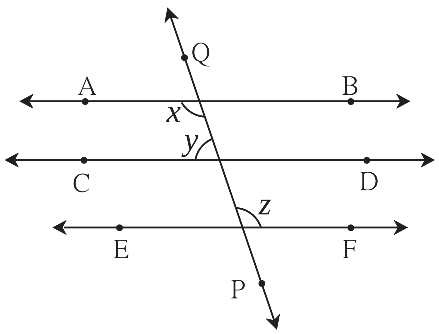
(i) ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನ (ii) ಪೂರಕ ಕೋನ (iii) ಏಕರೂಪ ಕೋನ

3. ಒಂದು ರೇಷೆಯು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೇಷೆಗೆ ಲಂಬವಿದ್ದರೆ ಅದು ಎರಡನೆಯ ರೇಷೆಗೂ ಲಂಬ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

4. ಆಕೃತಿ 2.24 ರಲ್ಲಿ ಕೊ ತೋರಿಸಿದ ಕೇಣಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಮೇಲಿಂದ $\angle x$ ಮತ್ತು $\angle y$ ದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮತ್ತು ರೇಷೆ $l \parallel$ ರೇಷೆ m ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.



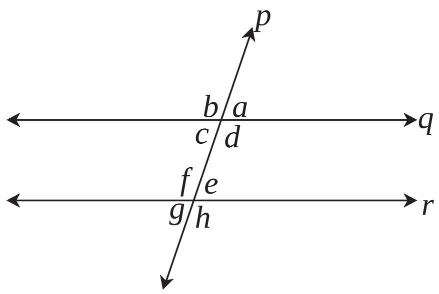
ಆಕೃತಿ 2.24



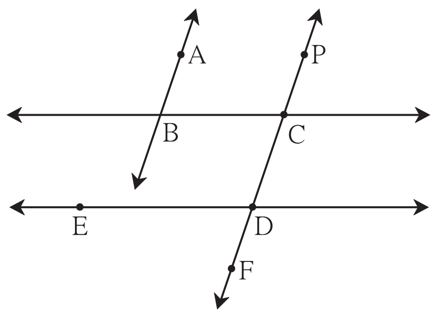
ಆಕೃತಿ 2.25

5. ರೇಷೆ AB $\parallel$ ರೇಷೆ CD $\parallel$ ರೇಷೆ EF ಮತ್ತು ರೇಷೆ QP ಇದು ಅವುಗಳ ಛೇದಿಕೆ. ಇದೆ ಒಂದುವೇಳೆ $y : z = 3 : 7$ ಇದ್ದರೆ x ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಆಕೃತಿ 2.25 ನೋಡಿರಿ.)

6. ಆಕೃತಿ 2.26 ರಲ್ಲಿ ಒಂದುವೇಳೆ ರೇಷೆ $q \parallel$ ರೇಷೆ r ರೇಷೆ p ಇದು ಅವುಗಳ ಛೇದಿಕೆ ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು $a = 80^\circ$ ಇದ್ದರೆ f ಮತ್ತು g ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



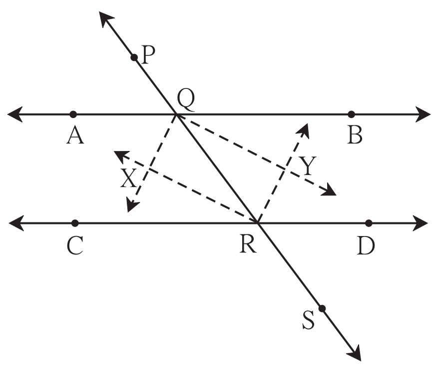
ಆಕೃತಿ 2.26



ಆಕೃತಿ 2.27

7. ಆಕೃತಿ 2.27 ರಲ್ಲಿ ರೇಷೆ AB $\parallel$ ರೇಷೆ CF ಮತ್ತು ರೇಷೆ BC $\parallel$ ರೇಷೆ ED ಇದ್ದರೆ $\angle ABC = \angle FDE$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

8. ಆಕೃತಿ 2.28 ರಲ್ಲಿ ರೇಷೆ AB $\parallel$ ರೇಷೆ CD ಮತ್ತು ರೇಷೆ PS ಇದು ಅದರ ಛೇದಿಕೆ ಇದೆ. ಕಿರಣ QX, ಕಿರಣ QY, ಕಿರಣ RX, ಕಿರಣ RY ಇವು ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳಿವೆ ಹಾಗಾದರೆ □ QXRY ಇದು ಆಯತ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 2.28

3 ತ್ರಿಕೋನ

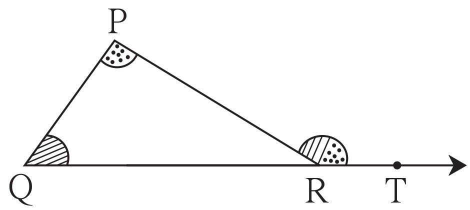
EMQ7CY

ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

- ತ್ರಿಕೋನದ ದೂರಸ್ಥ ಅಂತರ ಕೋನಗಳ ಪ್ರಮೇಯ
- ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಏಕರೂಪತೆ
- ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ
- $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ ಅಳತೆಯ ತ್ರಿಕೋನದ ಗುಣಧರ್ಮ
- ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ
- ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ಮಧ್ಯಗಾಮಿಯ ಗುಣಧರ್ಮ
- ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಗುಣಧರ್ಮ
- ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಪ್ರಮೇಯ
- ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನ

ಕೃತಿ

ಒಂದು ದಪ್ಪ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಅಳತೆಯ Δ PQR ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕಿರಣ QR ದ ಮೇಲೆ T ಈ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಬಣ್ಣದ ದಪ್ಪ ಕಾಗದದ $\angle$P ಮತ್ತು $\angle$Q ಗಳ ಅಳತೆಯ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. ಆ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಇಡುವುದರಿಂದ $\angle$PRTಯು ಪೂರ್ಣ ಮುಚ್ಚಲ್ಪಡುವದು ಇದನ್ನು ಅನುಭವಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.1

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

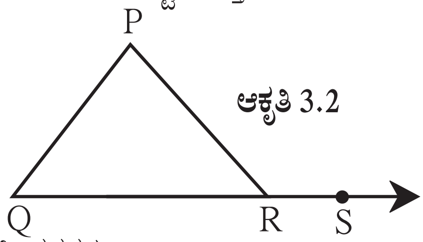
ದೂರಸ್ಥ ಅಂತರ ಕೋನಗಳ ಪ್ರಮೇಯ (Theorem of remote interior angles of a triangle)

ಪ್ರಮೇಯ : ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಹ್ಯಕೋನದ ಅಳತೆಯು ಅದರ ದೂರಸ್ಥ ಅಂತರಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : Δ PQR ಇದು $\angle$PRS ದ ಬಾಹ್ಯಕೋನ ವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : $\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$

ಸಿದ್ಧತೆ : ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಅಂತರ ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು 180° ಇರುವುದು.



ಆಕೃತಿ 3.2

$\therefore \angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = 180^\circ$---(I)

$\angle PRQ + \angle PRS = 180^\circ$---(II). . . . (ರೇಷೀಯ ಜೋಡಿಕೊನಗಳು)

$\therefore$ ವಿಧಾನ I ಮತ್ತು II ರಿಂದ

$\angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle PRS$

$\therefore \angle PQR + \angle QPR = \angle PRS$ ---------($\angle$PRQ ಲೋಪಮಾಡಿ.)

$\therefore$ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಹ್ಯಕೋನದ ಅಳತೆಯು ಅದರ ದೂರಸ್ಥ ಅಂತರ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗ ಬೇರೀಜಿ ನಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಯೋಚಿಸಿರಿ.

ಆಕೃತಿ 3.3 ರಲ್ಲಿ ಬಿಂದು R ದಲ್ಲಿಂದ ರೇಖ PQ ಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆ ತೆಗೆದು ಅದೇ ಪ್ರಮೇಯದ ಬೇರೆ ರೀತಿಯ ಸಿದ್ಧತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದೆ?

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಹ್ಯಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ (Property of an exterior angle of triangle)

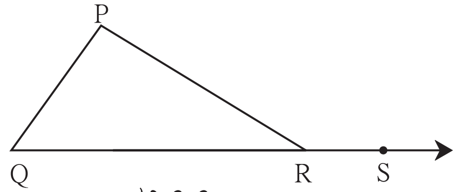
a ಮತ್ತು b ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು $(a + b)$ ಇದು a ಮತ್ತು b ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡ ದಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $a + b > a, a + b > b$

ಇದರ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಹ್ಯಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಧರ್ಮ ದೊರೆಯುವುದು.

Δ PQR ದಲ್ಲಿ $\angle$PRS ಇದು ಬಾಹ್ಯಕೋನವಿದ್ದರೆ

$\angle PRS > \angle P$, $\angle PRS > \angle Q$



ಆಕೃತಿ 3.3

$\therefore$ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಹ್ಯಕೋನ ಇದು ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದೂರಸ್ಥ ಅಂತರ ಕೊನಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿರುತ್ತದೆ.

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

ಉದಾ (1) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು 5 : 6 : 7 ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಆ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು $5x$, $6x$, $7x$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ

$5x + 6x + 7x = 180^\circ$

$18x = 180^\circ$

$x = 10^\circ$

$5x = 5 \times 10 = 50^\circ$, $6x = 6 \times 10 = 60^\circ$, $7x = 7 \times 10 = 70^\circ$

ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು 50°, 60°, 70° ಇರುತ್ತವೆ.

ಉದಾ (2) ಬದಿಯ ಆಕೃತಿ 3.4 ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿ $\angle$PRS ಮತ್ತು $\angle$RTS ಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

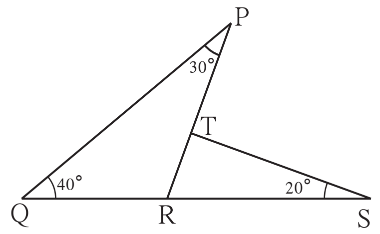
ಉತ್ತರ : Δ PQR ದ $\angle$PRS ಇದು ಬಾಹ್ಯಕೋನವಿದೆ.

ದೂರಸ್ಥ ಅಂತರ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯದ ಮೇಲಿಂದ

$\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$

$= 40^\circ + 30^\circ$

$\angle PRS = 70^\circ$



ಆಕೃತಿ 3.4

Δ RTS ದಲ್ಲಿ

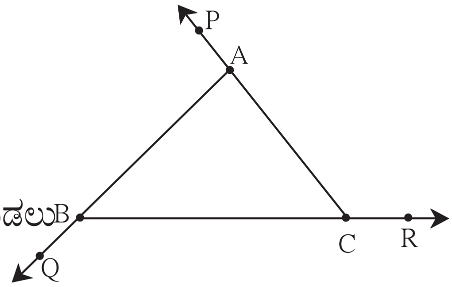
$\angle TRS + \angle RTS + \angle TSR = \boxed{}$ .... ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು

$\therefore \boxed{} + \angle RTS + \boxed{} = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS = \boxed{}$

ಉದಾ (3) ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ, ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳವು ಒಂದೇ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಸಲಾಗಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬಾಹ್ಯಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು 360° ಇರುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ 3.5

ಪಕ್ಷ : $\angle PAB$, $\angle QBC$ ಮತ್ತು $\angle ACR$ ಇವುಗಳು Δ ABC ಯ ಬಾಹ್ಯಕೋನಗಳಿವೆ.

ಸಾಧ್ಯ : $\angle PAB + \angle QBC + \angle ACR = 360^\circ$.

ಸಿದ್ಧತೆ : ಈ ಉದಾಹರಣೆಯ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು

ರೀತಿ I

Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle PAB$ ಬಾಹ್ಯಕೋನದ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದಾಗ

$\angle ABC$ ಮತ್ತು $\angle ACB$ ಇವುಗಳು ಅದರ ದೂರಸ್ಥ ಅಂತರ ಕೋನಗಳಿವೆ, ಅಂದರೆ

$\angle BAP = \angle ABC + \angle ACB$ ---- (I)

ಅದೇ ರೀತಿ $\angle ACR = \angle ABC + \angle BAC$ ---- (II) . . . . ದೂರಸ್ಥ ಅಂತರಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯದ ಅನುಸಾರ

ಮತ್ತು $\angle CBQ = \angle BAC + \angle ACB$ ---- (III)

ವಿಧಾನ (I), (II), (III) ಇವುಗಳ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಲಾಗಿ

$\angle BAP + \angle ACR + \angle CBQ$

$= \angle ABC + \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC + \angle BAC + \angle ACB$

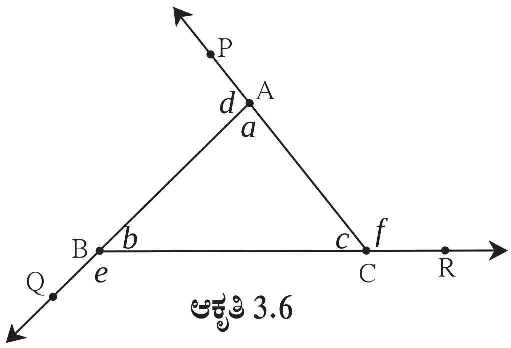
$= 2\angle ABC + 2\angle ACB + 2\angle BAC$

$= 2(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$

$= 2 \times 180^\circ$ . . . . . (ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು)

$= 360^\circ$.

ರೀತಿ II



ಆಕೃತಿ 3.6

$\angle c + \angle f = 180^\circ$ . . . . ರೇಷೀಯ ಜೋಡಿ ಕೋನಗಳು

ಅದೇರೀತಿ $\angle a + \angle d = 180^\circ$

ಮತ್ತು $\angle b + \angle e = 180^\circ$

$\therefore \angle c + \angle f + \angle a + \angle d + \angle b + \angle e = 180^\circ \times 3 = 540^\circ$

$\angle f + \angle d + \angle e + (\angle a + \angle b + \angle c) = 540^\circ$

$\therefore \angle f + \angle d + \angle e + 180^\circ = 540^\circ$

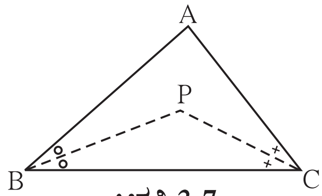
$\therefore f + d + e = 540^\circ - 180^\circ$

$= 360^\circ$

ಉದಾ (4) ಆಕೃತಿ 3.7 ರಲ್ಲಿ Δ ABC ಯ $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ

$\angle BPC = 90 + \frac{1}{2}\angle BAC$

ಬಿಟ್ಟಸ್ಥಳ ತುಂಬಿ ಸಿದ್ಧತೆ ಪೂರ್ಣಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.7

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ ABC ಯಲ್ಲಿ

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \boxed{}$ ...... (ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು)

$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2} \times \boxed{}$ ..... (ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದಕ್ಕೆ $\frac{1}{2}$ ದಿಂದ ಗುಣಿಲಾಗಿ)

$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ$

$\therefore \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ ......(I)

Δ BPC ದಲ್ಲಿ

$\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180^\circ$ ...... (ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ ಕೊನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು)

$\therefore \angle BPC + \boxed{} = 180^\circ$ ...... (ವಿಧಾನ I ರಿಂದ)

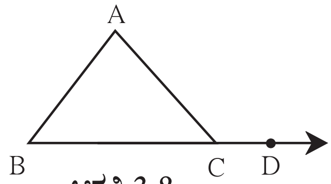
$\therefore \angle BPC = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC)$

$\therefore = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

$= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.1

1. ಆಕೃತಿ 3.8 ರಲ್ಲಿ Δ ABC ಯ $\angle ACD$ ಇದು ಬಾಹ್ಯ ಕೋನವಿದೆ. $\angle B = 40^\circ$, $\angle A = 70^\circ$ ಇದ್ದಾಗ m $\angle ACD$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



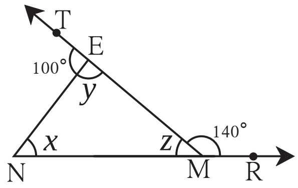
ಆಕೃತಿ 3.8

2. Δ PQR ದಲ್ಲಿ $\angle P = 70^\circ$, $\angle Q = 65^\circ$ ಹಾಗಾದರೆ $\angle R$ ದ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನದ ಅಳತೆಗಳು x°, $(x-20)^\circ$, $(x-40)^\circ$ ಇದ್ದಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

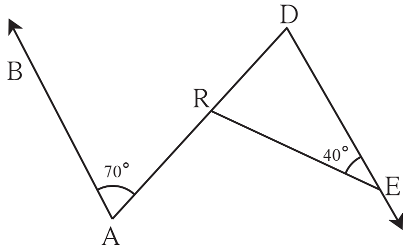
4. ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಕೋನವು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕ ಇರುವ ಕೋನದ ಎರಡು ಪಟ್ಟು, ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಕೋನವು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕ ಇರುವ ಕೋನದ ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಇದ್ದರೆ, ಆ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಆಕೃತಿ 3.9 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳಿಂದ x, y, z ರ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.9

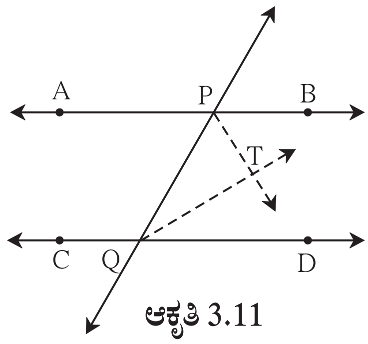
6. ಆಕೃತಿ 3.10 ರಲ್ಲಿ ರೇಷೆ AB || ರೇಷೆ DE ಇದೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಯಿಂದ $\angle$DRE ಮತ್ತು $\angle$ARE ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.10

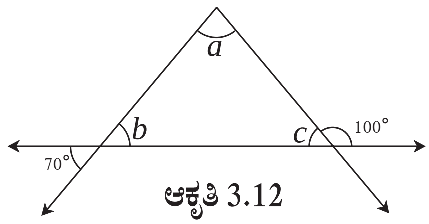
7. Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle$A ಮತ್ತು $\angle$B ಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. $\angle C = 70^\circ$ ಇದ್ದರೆ $\angle$AOB ಯ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಆಕೃತಿ 3.11 ರಲ್ಲಿ ರೇಷೆ AB || ರೇಷೆ CD ಮತ್ತು ರೇಷೆ PQ ಇದು ಛೇದಿಕೆ ಇದೆ. ಕಿರಣ PT ಮತ್ತು ಕಿರಣ QT ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle$BPQ ಮತ್ತು $\angle$PQD ಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ $\angle PTQ = 90^\circ$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



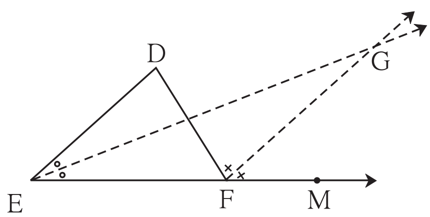
ಆಕೃತಿ 3.11

9. ಆಕೃತಿ 3.12 ರಲ್ಲಿಯ ಮಾಹಿತಿಯ ಆಧಾರದಿಂದ $\angle a$, $\angle b$ ಮತ್ತು $\angle c$ ಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.12

10*. ಆಕೃತಿ 3.13 ರಲ್ಲಿ ರೇಖ DE || ರೇಖ GF ಇದೆ. ಕಿರಣ EG ಮತ್ತು ಕಿರಣ FG ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle$DEF ಮತ್ತು $\angle$DFM ಈ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ,
(i) $\angle DEF = \angle EDF$ (ii) EF = FG ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

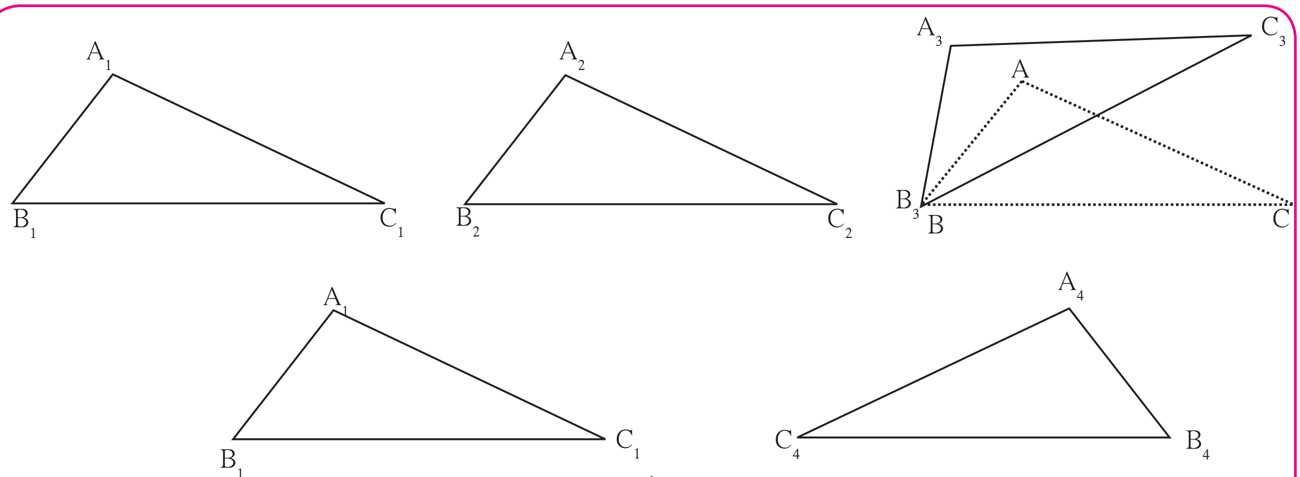


ಆಕೃತಿ 3.13

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಏಕರೂಪತೆ (Congruence of triangles)

ಒಂದು ರೇಷಾಖಂಡವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೇಷಾಖಂಡದ ಮೇಲೆ ಇಡಲಾಗಿ ಅವುಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದರೆ. ಆ ರೇಷಾಖಂಡಗಳಿಗೆ ಏಕರೂಪ ರೇಷಾಖಂಡ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದು ಕೋನದ ಮೇಲೆ ಇಡಲಾಗಿ ಅವುಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಏಕರೂಪ ಕೋನಗಳು ಎನ್ನುವರು. ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ, ಅದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲೆ ಇಡಲಾಗಿ ಅವುಗಳು ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಆಗುತ್ತಿದ್ದರೆ. ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಹೇಳುವರು. Δ ABC ಮತ್ತು Δ PQR ಇವುಗಳು ಏಕರೂಪ ಇದ್ದರೆ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ಹೀಗೆ ತೋರಿಸುವರು.



ಆಕೃತಿ 3.14

ಕೃತಿ : ಯಾವುದೇಅಳತೆಯ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ Δ ABC ಯನ್ನು ದಪ್ಪ ಕಾಗದದಿಂದ ತಯಾರಿಸಿ ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಆ ದಪ್ಪಕಾಗದದಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನ ಇನ್ನೊಂದು ದಪ್ಪ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಇಟ್ಟು ಅದರ ಸುತ್ತಲೂ ಪೆನ್ಸಿಲಿನಿಂದ ತೀಡಿ ಅದರ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರತಿ ತಯಾರಿಸಿ ಆ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ $\Delta A_1B_1C_1$ ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.

ಈಗ ಅದನ್ನು ಬದಿಗೆ ಸರಿಸಿ ಅದರ ಎರಡನೆಯ ಪ್ರತಿ ತಯಾರಿಸಿ

ಅದಕ್ಕೆ $\Delta A_2B_2C_2$ ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿ ಇದೇ ರೀತಿ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸದಂತೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ವಲ್ಪ ತಿರುಗಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರತಿ ತಯಾರಿಸಿರಿ. ಅದಕ್ಕೆ $\Delta A_3B_3C_3$ ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ. ಈಗ ಆ ಕಾಗದದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತಿರುವು ಹಾಕಿ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರತಿ ತಯಾರಿಸಿರಿ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ $\Delta A_4B_4C_4$ ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.

$\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$, $\Delta A_3B_3C_3$ ಮತ್ತು $\Delta A_4B_4C_4$ ಇವುಗಳು Δ ABC ಗೆ ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತಾಯಿತಲ್ಲವೆ? ಕಾರಣ Δ ABC ಇದು ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಜೊತೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. $\Delta A_3B_3C_3$ ದೊಂದಿಗೆ ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡೋಣ, ಈಗ $\angle A$ ಇದು $\angle A_3$ ಮತ್ತು $\angle B$ ಇದು $\angle B_3$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಇದು $\angle C_3$ ಮೇಲೆ ಸರಿ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಆದಾಗ $\Delta ABC \cong \Delta A_3B_3C_3$ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುವುದು.

ಆಗ $AB = A_3B_3$, $BC = B_3C_3$, $CA = C_3A_3$ ಇದು ಸಹ ದೊರೆಯುವುದು.

ಇದರ ಮೇಲಿಂಥ ಎರಡು ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡುವಾಗ ಅವುಗಳ ಕೋನ ಮತ್ತು ಭುಜ ವಿಶಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಿಂದ ಅಂದರೆ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಆಗುವ ಹಾಗೆ ಬರೆಯ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡ ಬೇಕು.

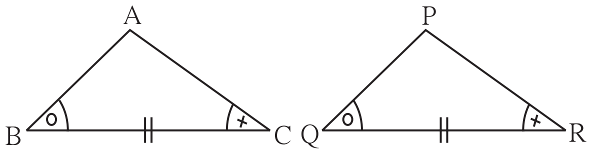
$\Delta ABC \cong \Delta PQR$, ಇದ್ದರೆ $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ . . . . (I)

ಮತ್ತು $AB = PQ$, $BC = QR$, $CA = RP$ . . . . . . (II) ಹೀಗೆ ಆರು ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವವು

ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಭುಜಗಳು ಒಂದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಂದ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, ಆ ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವುದು ಎಂದು ಅರ್ಥವಾಗುವುದು.

ಮೇಲಿನ ಆರು ಸಮೀಕರಣಗಳು ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಸತ್ಯ ಇರುವವು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಮೂರು ವಿಶಿಷ್ಟ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಮಾನ ಇವೆ ಎಂದು ಕಂಡುಬಂದರೆ ಆರು ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸತ್ಯವಾಗಿ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆಯೇ ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳುವಾ.

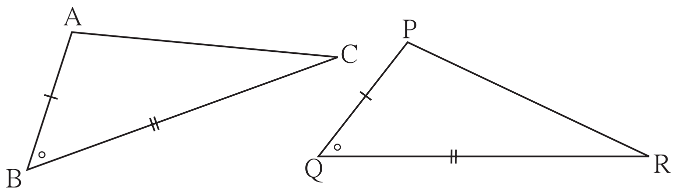
(1) ಕೊಟ್ಟ ಒಂದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಗ ಅನುಸಾರ ΔABC ಯ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ΔPQR ದ ಎರಡು ಕೋನಗಳಷ್ಟು ಇದ್ದು, ಆ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 3.15

ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಕೋನ-ಭುಜ-ಕೋನ ಪರೀಕ್ಷೆ ಎನ್ನುವರು. ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ **ಕೊ-ಭು-ಕೋ ಪರೀಕ್ಷೆ** ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

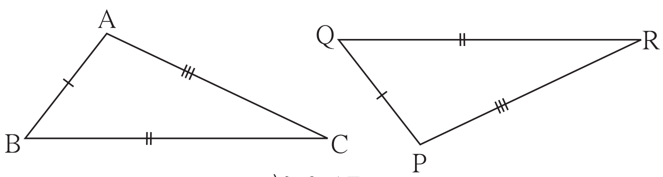
(2) ಕೊಟ್ಟ ಒಂದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಪ್ರಕಾರ Δ ABC ಯಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಭುಜಗಳು Δ PQR ದಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಭುಜಗಳಷ್ಟು ಇದ್ದು,ಮತ್ತು Δ ABC ಯ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯದ ಕೋನ ಇದು Δ PQR ದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯದ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 3.16

ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಭುಜ-ಕೋನ-ಭುಜ ಪರೀಕ್ಷೆ ಎನ್ನುವರು. ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ **ಭು-ಕೋ-ಭು ಪರೀಕ್ಷೆ** ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

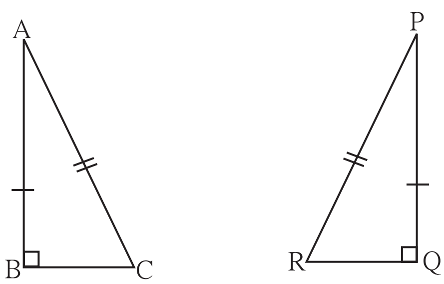
(3) Δ ABC ಯ ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಕೊಟ್ಟ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯ ಪ್ರಕಾರ Δ PQR ದ ಮೂರು ಭುಜಗಳಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 3.17

ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಭುಜ-ಭುಜ-ಭುಜ ಪರೀಕ್ಷೆ ಎನ್ನುವರು. ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ **ಭು-ಭು-ಭು ಪರೀಕ್ಷೆ** ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

(4) Δ ABC, Δ PQR ಈ ಎರಡು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ $\angle B$, $\angle Q$ ಇವು ಕಾಟಕೋನಗಳಿದ್ದು ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕರ್ಣಗಳು ಸಮಾನ ಮತ್ತು AB = PQ ಇದ್ದಾಗ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 3.18

ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ **ಕರ್ಣ ಭುಜ ಪರೀಕ್ಷೆ** ಎನ್ನುವರು

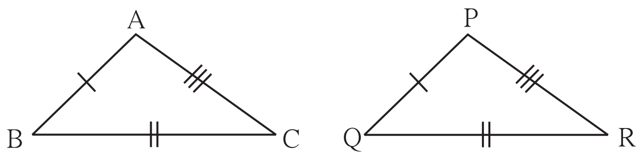
ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

ನಾವು ಕೊಟ್ಟ ಸಂಗತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಿದ್ದೇವೆ (ಉದಾ- ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಭುಜ, ಮೂರು ಭುಜ, ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಕೋನ) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಮಾಹಿತಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಲು ಬರುವುದು. ಇದನ್ನು ನಾವು ಅನುಭವಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಹೊಂದಣಿಕೆ ಪ್ರಕಾರ ಮೂರು ಸಂಗತಿಗಳು ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ. ಇದರಿಂದ ಒಂದುವೇಳೆ ಒಂದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಂತೆ ಅವುಗಳ ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬರುವುದು. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ವಿದ್ದರೆ ಒಂದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಪ್ರಕಾರ ಆ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವವು ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬರುವುದು. ಇದರ ಉಪಯೋಗ ಭೂಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯ ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಆಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.2

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ತೋರಿಸಿದ ಭಾಗ ಏಕರೂಪವಿದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ತ್ರಿಕೋನ ಯಾವ ಪರೀಕ್ಷೆ ಅನುಸಾರ ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

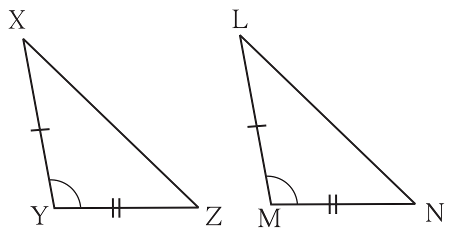
(i)



. . . . ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಪ್ರಕಾರ

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

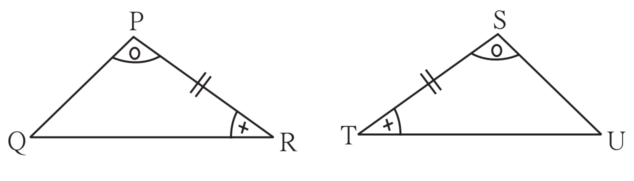
(ii)



. . . . ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಪ್ರಕಾರ

$\Delta XYZ \cong \Delta LMN$

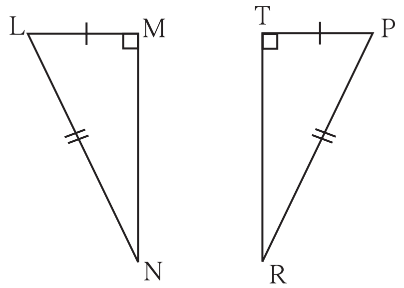
(iii)



. . . . ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಪ್ರಕಾರ

$\Delta PRQ \cong \Delta STU$

(iv)



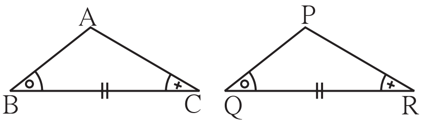
. . . . ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಪ್ರಕಾರ

$\Delta LMN \cong \Delta PTR$

ಆಕೃತಿ 3.19

2. ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿ ಆ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಯಾವ ಪರೀಕ್ಷೆಗನುಸಾರ ಏಕರೂಪ ಇವೆ. ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಏಕರೂಪ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i)



ಆಕೃತಿ 3.20

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ,

Δ ABC ಮತ್ತು Δ PQR ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle ABC \cong \angle PQR$

ರೇಖ BC $\cong$ ರೇಖ QR

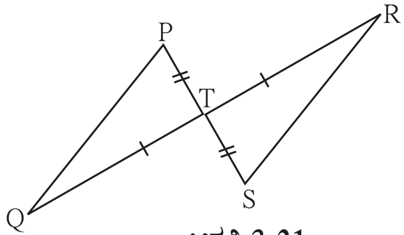
$\angle ACB \cong \angle PRQ$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ .... $\boxed{}$ ಪರೀಕ್ಷೆ

$\therefore \angle BAC \cong$ $\boxed{}$ ....ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳು

ರೇಖAB $\cong$ $\boxed{}$ ಮತ್ತು $\boxed{}$ $\cong$ ರೇಖ PR ..... ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು

(ii)



ಆಕೃತಿ 3.21

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ,

Δ PTQ ಮತ್ತು Δ STR ಗಳಲ್ಲಿ

ರೇಖ PT $\cong$ ರೇಖ ST

$\angle PTQ \cong \angle STR$ .... ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳು

ರೇಖ TQ $\cong$ ರೇಖ TR

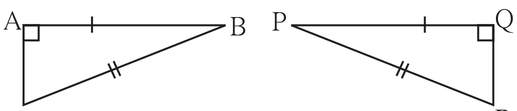
$\therefore \Delta PTQ \cong \Delta STR$ .... $\boxed{}$ ಪರೀಕ್ಷೆ ಪ್ರಕಾರ

$\therefore \angle TPQ \cong$ $\boxed{}$

ಮತ್ತು $\boxed{}$ $\cong \angle TRS$ } ..... ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳು

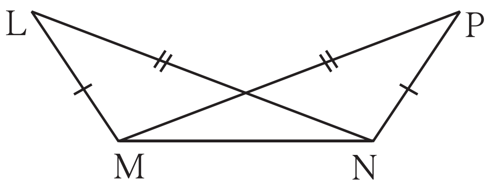
ರೇಖ PQ $\cong$ $\boxed{}$ ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು

3. ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿಯ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ Δ ABC ಮತ್ತು Δ PQR ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಏಕರೂಪತೆ ಪರೀಕ್ಷೆ ಬರೆದು ಉಳಿದ ಏಕರೂಪ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



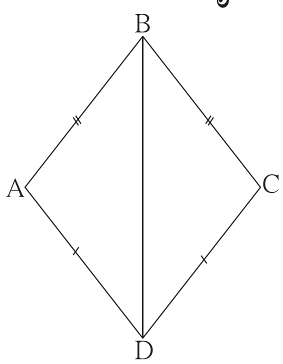
ಆಕೃತಿ 3.22

4. ಕೆಳಗೆ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ Δ LMN ಮತ್ತು Δ PNM ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ LM = PN, LN = PM ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಏಕರೂಪತೆಯ ಪರೀಕ್ಷೆ ಬರೆದು ಉಳಿದ ಏಕರೂಪ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



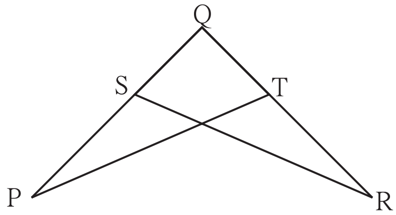
ಆಕೃತಿ 3.23

5. ಆಕೃತಿ 3.24 ದಲ್ಲಿ ರೇಖ AB $\cong$ ರೇಖ BC ಮತ್ತು ರೇಖ AD $\cong$ ರೇಖ CD ಇದ್ದರೆ $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ



ಆಕೃತಿ 3.24

6. ಆಕೃತಿ 3.25 ರಲ್ಲಿ $\angle P \cong \angle R$
ರೇಖ PQ ≅ ರೇಖ QR ಇದ್ದರೆ
Δ PQT ≅ Δ RQS
ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.25


ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

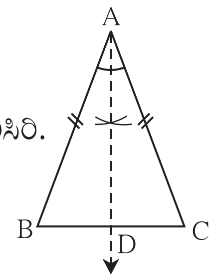
ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ (Isosceles triangle theorem)

ಪ್ರಮೇಯ: ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಏಕರೂಪ ಇದ್ದರೆ ಆ ಭುಜಗಳ ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

ಪಕ್ಷ : Δ ABC ದಲ್ಲಿ AB ≅ ಭುಜ AC

ಸಾಧ್ಯ : $\angle ABC \cong \angle ACB$

ರಚನೆ : Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle BAC$ ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆಯಿರಿ, ಆ ಭುಜ BC ಯನ್ನು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದೂ ಆ ಬಿಂದುವಿಗೆ D ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.26

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ ABD ಮತ್ತು Δ ACD ಗಳಲ್ಲಿ

ರೇಖ AB ≅ ರೇಖ AC .... ಪಕ್ಷ

$\angle BAD \cong \angle CAD$........ ರಚನೆ

ರೇಖ AD ≅ ರೇಖ AD .... ಸಾಮಾನ್ಯ ಭುಜ

$\therefore$ Δ ABD ≅ Δ ACD ...... $\boxed{}$

$\therefore \angle ABD \cong$ $\boxed{}$ ....ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳು

$\therefore \angle ABC \cong \angle ACB$ $\because$ B - D - C

ಉಪಪ್ರಮೇಯ: ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಏಕರೂಪ ಇದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುವವು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ 60° ಇರುವುದು (ಈ ಉಪ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆ ಬರೆಯಿರಿ).

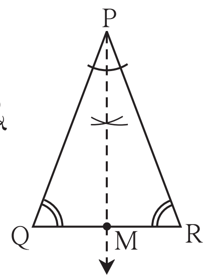
ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ (Converse of an isosceles triangle theorem)

ಪ್ರಮೇಯ: ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪವಿದ್ದರೆ, ಆ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿನ ಭುಜಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

ಪಕ್ಷ : Δ PQR ದಲ್ಲಿ $\angle PQR \cong \angle PRQ$

ಸಾಧ್ಯ : ಭುಜ PQ ≅ ಭುಜ PR

ರಚನೆ : $\angle P$ ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದು QR ನ್ನು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಭುಜವನ್ನು ಛೇದಿಸುವುದು. ಅದಕ್ಕೆ M ಎಂದು ಹೆಸರು ಕೊಡಿರಿ



ಆಕೃತಿ 3.27

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ PQM ಮತ್ತು Δ PRM ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle PQM \cong$ $\boxed{}$........ ಪಕ್ಷ

$\angle QPM \cong \angle RPM$........$\boxed{}$

ರೇಖ PM ≅ $\boxed{}$ .... ಸಾಮಾನ್ಯ ಭುಜ

$\therefore$ Δ PQM ≅ Δ PRM ...... $\boxed{}$ ಪರೀಕ್ಷೆ

$\therefore$ ರೇಖ PQ ≅ ರೇಖ PR....... ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು

ಉಪಪ್ರಮೇಯ : ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪವಿದ್ದರೆ ಅದರ ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ. (ಈ ಉಪಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ).

ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ವಿಧಾನಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇವೆ.

ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಉಪಪ್ರಮೇಯಗಳ ವಿಧಾನಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇವೆ.

ಯೋಚನೆ ಮಾಡೋಣ.

(1) ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರಚನೆ ಮಾಡಿ ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವುದೆ ?

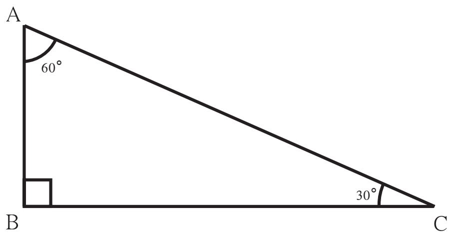
(2) ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಯಾವುದೇ ರಚನೆ ಮಾಡದೇ ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವುದೆ ?

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ ಅಳತೆಯ ತ್ರಿಕೋನದ ಗುಣಧರ್ಮ (Property of $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ triangle)

ಕೃತಿ I

ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು, ಒಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ 30°. ಇರುವ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಿರಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು 39 ಅಳತೆಯ ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜದ ಮತ್ತು ಕರ್ಣದ ಅಳಎತ ಅಳೆಯಿರಿ. ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿಯ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಎಲ್ಲರೂ ರಚಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಮುಂದಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಬೇಕು.



ಆಕೃತಿ 3.28

ತ್ರಿಕೋನ	1	2	3	4
30° ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜದ ಉದ್ದಳತೆ				
ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಳತೆ				

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಕೋನದ ಅಳತೆ 30°, 60° ಮತ್ತು 90° ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಲವು ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆಯೇ?

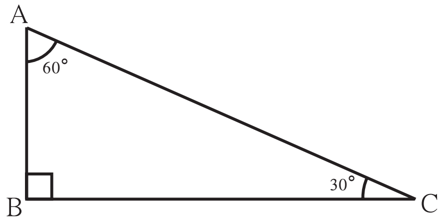
ಕೃತಿ II

ಕಂಪಾಸ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಪಟ್ಟಿಯ ಕೋನ 30°,60° ಮತ್ತು 90° ಇರುವವು ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಈ ಗುಣಧರ್ಮ ದೊರೆಯುತ್ತದೆಯೆ ? ಈ ಕುರಿತು ತಾಳೆ ಹಾಕಿರಿ.

ಈ ಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ದೊರೆತ ಒಂದು ಮಹತ್ವದ ಗುಣಧರ್ಮ ಈಗ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ: ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಘುಕೋನಗಳು 30° ಮತ್ತು 60° ಇದ್ದರೆ 30° ಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಭುಜವು ಕರ್ಣದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುವುದು.

(ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿಯ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ)



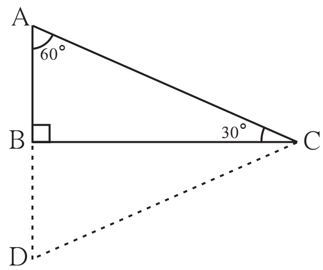
ಆಕೃತಿ 3.29

ಪಕ್ಷ : ಕಾಟಕೋನ Δ ABC ಯಲ್ಲಿ

$\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $\angle A = 60^\circ$

ಸಾಧ್ಯ : $AB = \frac{1}{2} AC$

ರಚನೆ : AB ರೇಷಾಖಂಡವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿ ಅದರ ಮೇಲೆ D ಬಿಂದುವನ್ನು AB = BD, ನಂತರ DC ರೇಷಾಖಂಡ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.30

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ ABC ಮತ್ತು Δ DBC ಯಲ್ಲಿ

ರೇಖ $AB \cong$ ರೇಖ DB .... $\boxed{}$

$\angle ABC \cong \angle DBC$ .... $\boxed{}$

ರೇಖ $BC \cong$ ರೇಖ BC .... $\boxed{}$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DBC$ ..... $\boxed{}$

$\therefore \angle BAC \cong \angle BDC$ .... ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳ

Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle BAC = 60^\circ$ $\therefore \angle BDC = 60^\circ$

ಈಗ Δ ADC ಯಲ್ಲಿ,

$\angle DAC = \angle ADC = \angle ACD = 60^\circ$ ... ($\because$ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು 180°)

$\therefore \Delta$ ADC ಇದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವುದು

$\therefore AC = AD = DC$ .... ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಉಪಪ್ರಮೇಯ.

ಆದರೆ $AB = \frac{1}{2}$ AD........ ರಚನೆ $\therefore AB = \frac{1}{2}$ AC .... ($\because$ AD = AC)

ಕೃತಿ

ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿ 3.29 ದ ಆಧಾರದಿಂಧ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳಲ್ಲಿಯ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಕೋನಗಳು 30°, 60° ಇದ್ದರೆ 60° ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜ ಇದು $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ ಕರ್ಣ ದಷ್ಟು ಇರುವುದು.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ $AB = \frac{1}{2}$ AC ಇದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

$AB^2 + BC^2 = \boxed{}$ . . . . . ಪಾಯಥಾಗೋರಸ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗಮಾಡಿ,

$\frac{1}{4} AC^2 + BC^2 = \boxed{}$

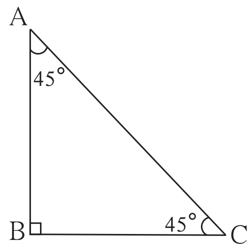
$\therefore BC^2 = AC^2 - \frac{1}{4} AC^2$

$\therefore BC^2 = \boxed{}$

$\therefore BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

ಕೃತಿ

ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು 45°, 45°, 90° ಇದ್ದಾಗ ಕಾಟಕೋನ ಮಾಡುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜಗಳು $\frac{1}{\sqrt{2}}$ × ಕರ್ಣ ದಷ್ಟು ಇರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 3.31

Δ ABC ದಲ್ಲಿ, $\angle B = 90^\circ$ ಮತ್ತು $\angle A = \angle C = 45^\circ$

$\therefore$ BC = AB

ಪಾಯಥಾಗೋರಸ್ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ

$AB^2 + BC^2 = \boxed{}$

$AB^2 + \boxed{} = AC^2$ ... ($\because$ BC = AB)

$\therefore\ 2AB^2 = \boxed{}$

$\therefore\ AB^2 = \boxed{}$

$\therefore\ AB = \frac{1}{\sqrt{2}}\ AC$

ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ ದ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ ಎನ್ನುವರು

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

(1) ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು 30°, 60° ಮತ್ತು 90° ಇದ್ದಾಗ 30° ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜವು $\frac{\text{ಕರ್ಣ}}{2}$ ದಷ್ಟು ಇರುವುದು ಮತ್ತು 60° ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜವು $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ಕರ್ಣ ದಷ್ಟು ಇರುವುದು.
ಈ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ ದ ಪ್ರಮೇಯ ಎನ್ನುವರು.

(2) ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು 45°, 45° ಮತ್ತು 90° ಇದ್ದರೆ ಕಾಟಕೋನ ಮಾಡುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವು $\frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\sqrt{2}}$ ದಷ್ಟು ಇರುತ್ತವೆ, ಈ ಪ್ರಮೆಯಕ್ಕೆ $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ ರ ಪ್ರಮೇಯ ಎನ್ನುವರು.

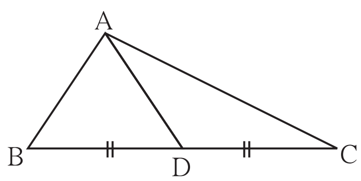
ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ

ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದು ಮತ್ತು ಸಂಮುಖ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಷಾಖಂಡವು ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇರುವುದು.

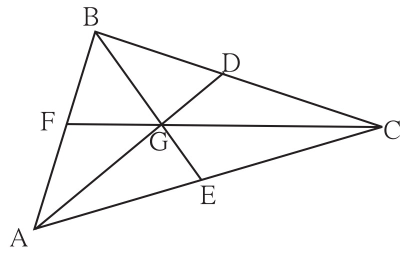
ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ D ಇದು BC ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ.

$\therefore$ ರೇಖ AD ಇದು Δ ABC ಯ ಒಂದು ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇದೆ.



ಆಕೃತಿ 3.32

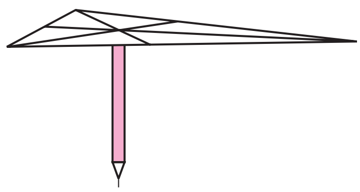
ಕೃತಿ I: ಯಾವುದಾದರೊಂದು ತ್ರಿಕೋನ ABC ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ AD, BE, ಮತ್ತು CF, ಮಧ್ಯಗಾಮಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುವಿಗೆ G ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ. AG ಮತ್ತು GD ಇವುಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳ ಹೋಲಿಕೆ ಕರ್ಕಟಿನ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಾಡಿರಿ. AG ಯ ಉದ್ದಳತೆಯು GD ಯ ಉದ್ದಳತೆಯ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಇರುವುದು. ಅದರ ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ. ಇದೇ ರೀತಿ BG ಯ ಉದ್ದಳತೆ GE ಯ ಉದ್ದಳತೆಯ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಮತ್ತು CG ಯ ಉದ್ದಲತೆ GF ದ ಉದ್ದಳತೆಯ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಇರುವುದು ಇದನ್ನೂ ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.33

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿಯ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಧ್ಯಗಾಮಿಯನ್ನು 2:1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು ಎಂಬ ಈ ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

ಕೃತಿ II : Δ ABC ಈ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ದಪ್ಪ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ರಚಿಸಿ ಅದನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಅದರ ಮೂರು ಮಧ್ಯಗಾಮಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ ಅವುಗಳ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುವಿಗೆ G ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ. ಈಗ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಮೊಳೆ ಅಥವಾ ಪೃಷ್ಠಭಾಗ ಸಪಾಟ ಇರುವ ಪೆನ್ಸಿಲ್ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ತುದಿಯ ಮೇಲೆ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಅಡ್ಡವಾಗಿ ಇರಿಸಿ ಸಮತೋಲವಾಗಿ ನಿಲ್ಲುವಂತೆ ಇಡಿರಿ. ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಅಥವಾ ಮೊಳೆಯ ತುದಿ G ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಇದ್ದಾಗ ಆ ತ್ರಿಕೋನ ಸಮತೋಲದಿಂದ ನಿಲ್ಲುವುದು ಇದರ ಮೇಲಿಂದ G ಬಿಂದುವಿನ ಅಂದರೆ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುವಿನ ಒಂದು ಮಹತ್ವದ ಗುಣಧರ್ಮ ತಿಳಿದು ಬರುವುದು.



ಆಕೃತಿ 3.34

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

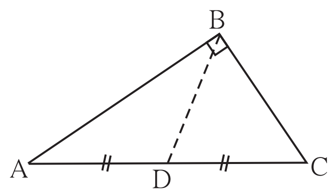
ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿಯ ಗುಣಧರ್ಮ

ಕೃತಿ : ಆಕೃತಿ 3.35 ರಲ್ಲಿ Δ ABC ಇದು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಇದೆ. ರೇಖ BD ಇದು ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇದೆ. ಕೆಳಗಿನ ರೇಷಾಖಂಡಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

l(AD) =......... l(DC) =............ l(BD) = ...

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ (BD) = $\frac{1}{2}$ (AC) ಈ ಗುಣಧರ್ಮ ದೊರೆಯುವುದು

ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಈ ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡೋಣ.



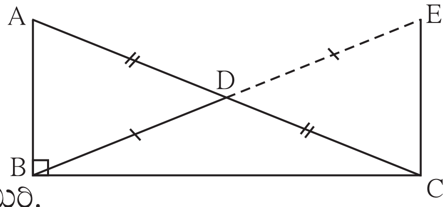
ಆಕೃತಿ 3.35

ಪ್ರಮೇಯ: ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿಯ ಉದ್ದಳತೆಯು ಕರ್ಣದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : ಕಾಟಕೋನ Δ ABC ಯಲ್ಲಿ ರೇಖ BD ಇದು ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : $BD = \frac{1}{2} AC$

ರಚನೆ : ಕಿರಣ BD ಯ ಮೇಲೆ E ಬಿಂದು B - D - E ಮತ್ತು $l(BD) = l(DE)$. ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ರೇಖ EC ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.36

ಸಿದ್ಧತೆ : (ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿಯ ಮುಖ್ಯ ಹಂತಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿಯ ಹಂತ, ವಿಧಾನ, ಕಾರಣ ಬರೆದು ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ)

$\Delta ADB \cong \Delta CDE$ ...... ಭು ಕೋ ಭು ಪರೀಕ್ಷೆ

ರೇಷೆ AB $||$ ರೇಷೆ EC .... ವ್ಯತ್ಕ್ರಮ ಕೋನದ ಪರೀಕ್ಷೆ

$\Delta ABC \cong \Delta ECB$ ...... ಭು ಕೋ ಭು ಪರೀಕ್ಷೆ

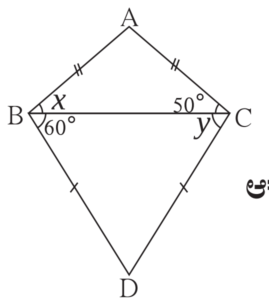
$BD = \frac{1}{2} (AC)$

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

ಯಾವುದೇ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿಯ ಉದ್ದಳತೆಯು ಕರ್ಣದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುವುದು.

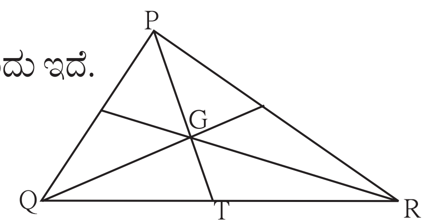
ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.3

1. ಆಕೃತಿ 3.37 ದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ. x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮತ್ತು $\angle ABD$ ಮತ್ತು $\angle ACD$ ಯ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ



ಆಕೃತಿ 3.37

2. ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ 15 ಇದ್ದಾಗ ಆದರ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿಯ ಉದ್ದಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಕಾಟಕೋನ Δ PQR ದಲ್ಲಿ $\angle Q = 90^\circ$, PQ = 12, QR = 5 ಮತ್ತು QS ಇದು PR ದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇದ್ದರೆ QS ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಆಕೃತಿ 3.38 ಯಲ್ಲಿ Δ PQR ಇದರ G ಇದು ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದು ಇದೆ. GT = 2.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದರೆ PG ಮತ್ತು PT ಇವುಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

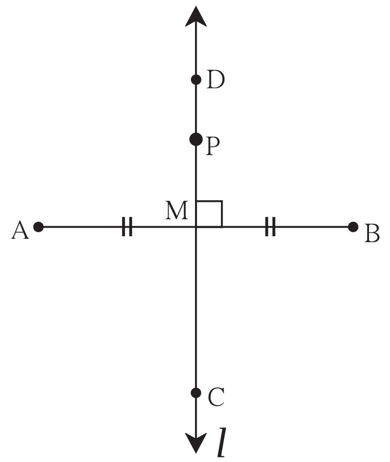


ಆಕೃತಿ 3.38

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಕೃತಿ : ಯೋಗ್ಯ ವಾದ ಅಳತೆಯ ರೇಖ AB ರಚಿಸಿರಿ, ಆದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿಗೆ M ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ. ಬಿಂದು M ದಲ್ಲಿಂದ ರೇಖ AB ಗೆ ಲಂಬ ಇರುವ ರೇಷೆ l ಎಳೆಯಿರಿ. ರೇಷೆ l ಇದು AB ಯ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇರುವುದು. ಇದು ಗಮನಕ್ಕೆ ಬಂದಿತೆ ? ರೇಷೆ l ದ ಮೇಲೆ ಯಾವದೇ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ P ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. PA ಮತ್ತು PB ಯ ಅಂತರದ ಹೋಲಿಕೆ ಕರ್ಕಟಿನಿಂದ ನೋಡಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಏನು ತಿಳಿದು ಬರುವುದು ? PA = PB ಕಂಡುಬಂದಿತಲ್ಲವೆ? ಇದರಿಂದ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವುದೇನೆಂದರೆ, ರೇಷಾಖಂಡದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ಆ ರೇಷಾಖಂಡದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಕಂಪಾಸಿನ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬಿಂದು A ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ C ಮತ್ತು D ಯ ಹಾಗೆ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ, ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು l ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆಯೇ ಇರುವುವೆ? ಇದರಿಂದ ನಿಮಗೆ ಏನು ತಿಳಿದು ಬರುವುದು ? ರೇಷಾ ಖಂಡದಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು ಈ ರೇಷಾಖಂಡದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ಎರಡು ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಪ್ರಮೇಯದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿವೆ. ಅದನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಸಿದ್ಧಮಾಡುವಾ.



ಆಕೃತಿ 3.39

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಪ್ರಮೇಯ (Perpendicular bisector theorem)

ಭಾಗ I : ರೇಷಾಖಂಡದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು ಆ ರೇಷಾಖಂಡದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಪಕ್ಷ : ರೇಷೆ l ಇದು ರೇಖ AB ಯ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ರೇಷೆವಿದೆ.

ರೇಖ AB ಗೆ M ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು

ಬಿಂದು P ಇದು ರೇಷೆ l ದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಇದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : l (PA) = l (PB)

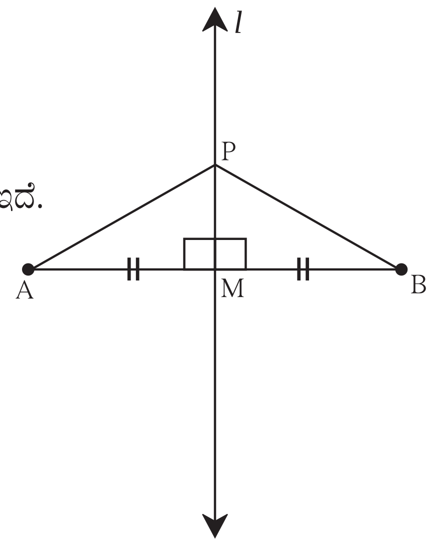
ರಚನೆ : ರೇಖ AP ಮತ್ತು ರೇಖ BP ರಚಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ PMA ಮತ್ತು Δ PMB ಗಳಲ್ಲಿ

ರೇಖ PM $\cong$ ರೇಖ PM .... ಸಾಮಾನ್ಯ ಭುಜ

$\angle$PMA $\cong$ $\angle$PMB .... ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನ ಕಾಟಕೋನ

ರೇಖ AM $\cong$ ರೇಖ BM .... M ಇದು ಮಧ್ಯಬಿಂದು



ಆಕೃತಿ 3.40

$\therefore \Delta PMA \cong \Delta PMB$ ...... ಭು ಕೋ ಭು ಪರೀಕ್ಷೆ

$\therefore$ ರೇಖ PA $\cong$ ರೇಖ PB....... ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು

$\therefore l(PA) = l(PB)$

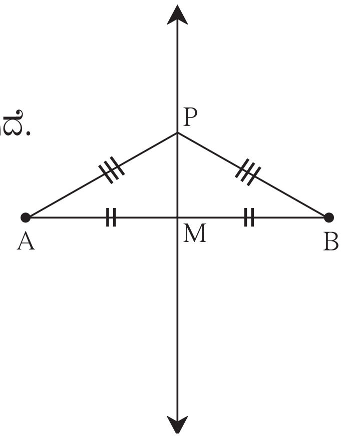
ಇದರಿಂದ ರೇಷಾಖಂಡದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು ಇದು ಅದರ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಭಾಗ II : ರೇಷಾಖಂಡದ ಅತ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ಆ ರೇಷಾಖಂಡದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : ಬಿಂದು P ಇದು ರೇಷಾಖಂಡ AB ಯ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಇದೆ. ಅಂದರೆ PA = PB.

ಸಾಧ್ಯ : P ಇದು ರೇಖ AB ಯ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಇದೆ.

ರಚನೆ : ರೇಖ AB ಯ M ಇದು ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಗುವಂತೆ ರೇಷೆ PM ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಆಕೃತಿ 3.41

ಸಿದ್ಧತೆ : ΔPAM ಮತ್ತು ΔPBM ಗಳಲ್ಲಿ

ರೇಖ PA $\cong$ ರೇಖ PB .... $\boxed{}$

ರೇಖ AM $\cong$ ರೇಖ BM .... $\boxed{}$

ರೇಖ PM $\cong$ $\boxed{}$ .... ಸಾಮಾನ್ಯ ಭುಜ

$\therefore \Delta PAM \cong \Delta PBM$ ...... $\boxed{}$ ಪರೀಕ್ಷೆ

$\therefore \angle PMA \cong \angle PMB$....... ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳು

ಆದರೆ $\angle PMA + \boxed{} = 180^\circ$

$\angle PMA + \angle PMA = 180^\circ$ .... $(\because \angle PMB = \angle PMA)$

$2 \angle PMA = \boxed{}$

$\therefore \angle PMA = 90^\circ$

$\therefore$ ರೇಖ PM $\perp$ ರೇಖ AB ......(1)

ಹಾಗೆಯೇ M ಬಿಂದುವು ರೇಖ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ ......(2) (ರಚನೆ)

$\therefore$ ರೇಷೆ PM ಇದು ರೇಖ AB ಯ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ರೇಷೆ ಇದೆ. ಅಂದರೆ P ಇದು AB ಯ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಇದೆ.

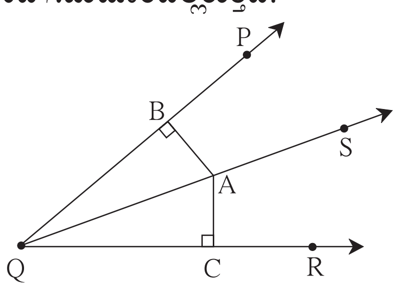
ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಪ್ರಮೇಯ (Angle bisector theorem)

ಭಾಗ I : ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು ಆ ಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : ಕಿರಣ QS ಇದು $\angle PQR$ ದ ದ್ವಿಭಾಜಕವಿದೆ.
A ಇದು ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಇದೆ.
ರೇಖ AB $\perp$ ಕಿರಣ QP   ರೇಖ AC $\perp$ ಕಿರಣ QR

ಸಾಧ್ಯ : ರೇಖ AB $\cong$ ರೇಖ AC

ಸಿದ್ಧತೆ : ತ್ರಿಕೋನದ ಏಕರೂಪತೆಯ ಯೋಗ್ಯ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.42

ಭಾಗ II : ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ಆ ಕೋನದ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : $\angle PQR$ ದ ಅಂತರ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು A ಇದನ್ನು

ರೇಖ $AC \perp$ ರೇಖ QR

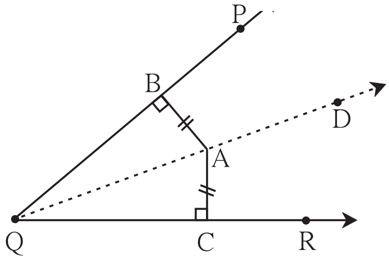
ರೇಖ $AB \perp$ ಕಿರಣ QP

$AB = AC$

ಸಾಧ್ಯ : ಕಿರಣ QA ಇದು $\angle PQR$ ದ ದ್ವಿಭಾಜಕವಿದೆ.

ಅಂದರೆ $\angle BQA = \angle CQA$

ಸಿದ್ಧತೆ : ತ್ರಿಕೋನದ ಏಕರೂಪತೆಯ ಯೋಗ್ಯ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಿದ್ಧತೆ ಬರೆಯಿರಿ.



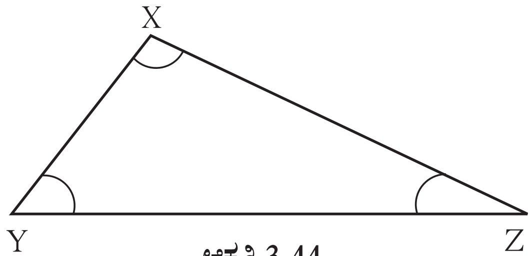
ಆಕೃತಿ 3.43


ಸ್ವಲ್ಪ ಯೋಚಿಸೋಣ.

ಕೃತಿ

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿದ ಹಾಗೆ ಭುಜ $XZ >$ ಭುಜ XY ಆಗುವಂತೆ ΔXYZ ತೆಗೆಯಿರಿ.

$\angle Z$ ಮತ್ತು $\angle Y$ ಅಳೆಯಿರಿ. ಯಾವ ಕೋನವು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ ?



ಆಕೃತಿ 3.44


ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯ ಭುಜಗಳು ಹಾಗೂ ಕೋನಗಳ ಅಸಮಾನತೆಯ ಗುಣಧರ್ಮ

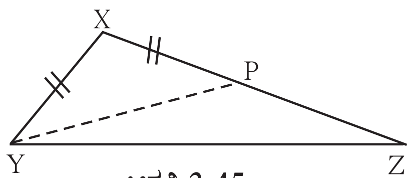
ಪ್ರಮೇಯ : ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭುಜ ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿದ್ದರೆ ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಸಂಮುಖ ಕೋನವು ಚಿಕ್ಕ ಭುಜದ ಸಂಮುಖ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿರುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : ΔXYZ ದಲ್ಲಿ $XZ >$ ಭುಜ XY

ಸಾಧ್ಯ : $\angle XYZ > \angle XZY$

ರಚನೆ : ಭುಜ XZ ದ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದು ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

$l(XY) = l(XP)$, ರೇಖ YP ರಚಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.45

ಸಿದ್ಧತೆ : ΔXYP ಯಲ್ಲಿ

$XY = XP$ .... ರಚನೆ

$\therefore$ $\angle XYP = \angle XPY$.....ಸಮಾನ ಭುಜಗಳ ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನ .....(I)

$\angle XPY$ ಇದು ΔYPZ ಇದರ ಬಾಹ್ಯಕೋನ

$\therefore$ $\angle XPY > \angle PZY$ .... ಬಾಹ್ಯಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ

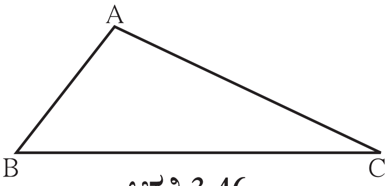
$\angle XYP > \angle PZY$ .... ವಿಧಾನ (I) ಮೇಲಿಂದ

$\angle XYP + \angle PYZ > \angle PZY$ ($a > b$ ಮತ್ತು $c > 0$ ಇದ್ದರೆ $a + c > b$ ಇರುವುದು)

$\angle XYZ > \angle PZY$ ಅಂದರೆ $\angle XYZ > \angle XZY$

ಪ್ರಮೇಯ : ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು ಅಸಮಾನ ಅಳತೆಯು ಇದ್ದರೆ ದೊಡ್ಡ ಕೋನದ ಸಮ್ಮುಖ ಭುಜವು ಚಿಕ್ಕ ಕೋನದ ಸಮ್ಮುಖ ಭುಜಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಅಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿಯ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ, ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.46

ಪಕ್ಷ : ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B > \angle C$

ಸಾಧ್ಯ : $AC > AB$

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ ABC ಯಲ್ಲಿ ಭುಜ AB ಮತ್ತು ಭುಜ AC ಗಳ ಉದ್ದಳತೆಯ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದೇ ಹಾಗೂ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಧ್ಯತೆ ಇರುತ್ತದೆ.

(i) $AC < AB$ (ii) $\boxed{\quad\quad}$ (iii) $\boxed{\quad\quad}$

(i) $AC < AB$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಅಸಮಾನ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿಯ ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಕೋನ ಚಿಕ್ಕ ಭುಜದ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ $\boxed{\quad\quad}$ ಇರುವುದು.

$\therefore \angle C > \boxed{\quad\quad}$

ಆದರೆ $\angle C < \angle B$ .... ಪಕ್ಷ.

ಆದರೆ ಇದು ವಿಸಂಗತ ಆಗುವದು.

$\therefore \boxed{\quad\quad} < \boxed{\quad\quad}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು ಅಸತ್ಯವಿದೆ.

(ii) $AC = AB$ ಇದ್ದರೆ.

ಆಗ $\angle B = \angle C$

ಆದರೆ $\boxed{\quad\quad} > \boxed{\quad\quad}$ ...... ಪಕ್ಷ.

ಅಂದರೆ ಮತ್ತು ವಿಸಂಗತ ವಾಗುವದು.

$\therefore \boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. ಅಸತ್ಯವಿದೆ.

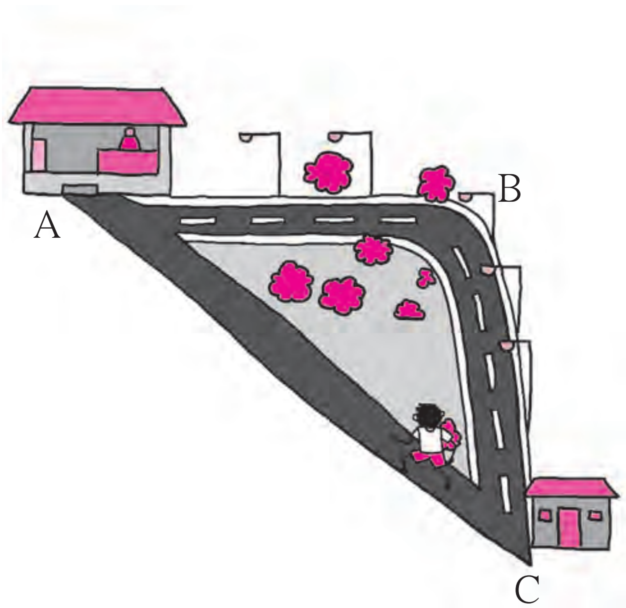
$\therefore AC > AB$ ಈ ಒಂದೇ ಪರ್ಯಾಯ ಉಳಿಯುವುದು.

$\therefore AC > AB$

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೃತಿ ಮಾಡಿದ್ದೇವು, ಅದರಿಂದ ಭೂಮಿತಿಯ ಒಂದು ಗುಣಧರ್ಮ ನೋಡಿದ್ದೇವು ಅದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಬದಿಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ A ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಗಡಿ ಇದೆ. ಸಮೀರನು C ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ ಅಂಗಡಿಗೆ ತಲುಪಬೇಕಾದರೆ ಅವನು $C \rightarrow B \rightarrow A$ ಈ ಮುಖ್ಯ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಹೋಗುವ ಬದಲು ಅತನ $C \rightarrow A$ ಈ ಮಾರ್ಗ ಹೋಗಿದ, ಕಾರಣ ಈ ರಸ್ತೆ ಕಡಿಮೆ ಅಂತರವುಳ್ಳದ್ದು ಎಂದು ಅವನ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬಂದಿತ್ತು. ಅಂದರೆ ಆತನಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವ ಗುಣಧರ್ಮ ತಿಳಿದು ಬಂದಿತ್ತು? ಈಗ ನಾವು ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಬೇರೀಜು ಮೂರನೇ ಭುಜಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿರುತ್ತದೆ, ಈ ಗುಣಧರ್ಮ ಸಿದ್ಧಮಾಡುವಾ.



ಪ್ರಮೇಯ : ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಬೇರೀಜು ಇದು ಮೂರನೆಯ ಭುಜಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿರುತ್ತದೆ.

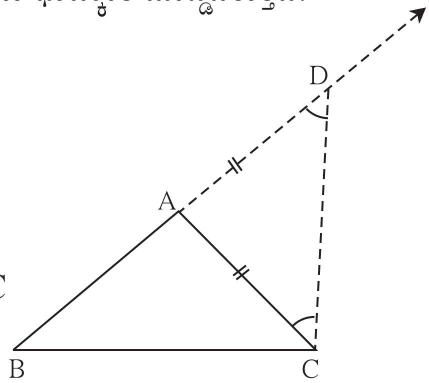
ಪಕ್ಷ : Δ ABC ಇದು ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : AB + AC > BC

AB + BC > AC

AC + BC > AB

ರಚನೆ : ಕಿರಣ BA ಯನ್ನು ಬೆಳಸಿ, ಅದರ ಮೇಲೆ D ಬಿಂದುವನ್ನು AD = AC ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.47

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ ACD ದಲ್ಲಿ, AC = AD ..... ರಚನೆ

$\therefore \angle ACD = \angle ADC$ ...... (ಏಕರೂಪ ಭುಜಗಳ ಎದುರಿನ ಕೋನ)

$\therefore \angle ACD + \angle ACB > \angle ADC$

$\therefore \angle BCD > \angle ADC$

$\therefore$ ಭುಜ BD > ಭುಜ BC ....(ತ್ರಿಕೋನದ ದೊಡ್ಡ ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜ ದೊಡ್ಡದು)

$\therefore$ BA + AD > BC ....($\because$ BD = BA + AD)

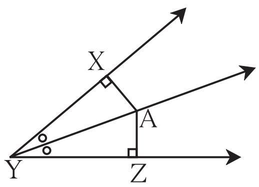
BA + AC > BC .... ($\because$ AD = AC)

ಹಾಗೆಯೇ AB + BC > AC

ಮತ್ತು BC + AC > AB ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವುದು.

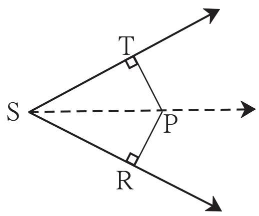
ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.4

1. ಆಕೃತಿ 3.48 ದಲ್ಲಿ, ಬಿಂದು A ಇದು $\angle XYZ$ ದ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಇದೆ. AX = 2 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ AZ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.48

2. ಆಕೃತಿ 3.49 ದಲ್ಲಿ $\angle RST = 56^\circ$, ರೇಖ PT $\perp$ ಕಿರಣ ST ಮತ್ತು ರೇಖ PR $\perp$ ಕಿರಣ SR ಮತ್ತು ರೇಖ PR $\cong$ ರೇಖ PT ಇದ್ದರೆ $\angle RSP$ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅದರ ಕಾರಣ ಬರೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.49

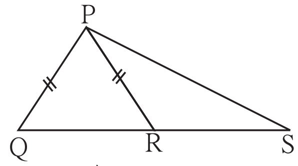
3. Δ PQR ದಲ್ಲಿ PQ = 10 ಸೆಮೀ, QR = 12 ಸೆಮೀ, PR = 8 ಸೆಮೀ, ಇದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕ ಕೋನ ಗುರುತಿಸಿರಿ.

4. Δ FAN ದಲ್ಲಿ $\angle F = 80^\circ$, $\angle A = 40^\circ$ ಹಾಗಾದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕ ಭುಜಗಳ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಸಕಾರಣದೊಂದಿಗೆ ಬರೆಯಿರಿ.

5. ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಕೋವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

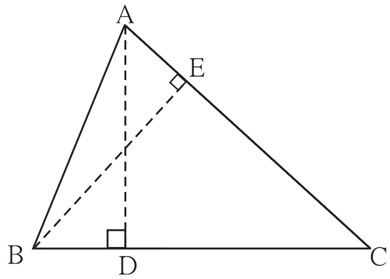
6. Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle$BAC ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಭುಜ BC ಯ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಿದೆ, ಹಾಗಾದರೆ Δ ABC ಯು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

7. ಆಕೃತಿ 3.50 ರಲ್ಲಿ ರೇಖ PR $\cong$ ರೇಖ PQ ಹಾಗಾದರೆ ರೇಖ PS > ರೇಖ PQ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.50

8. ಆಕೃತಿ 3.51 ರಲ್ಲಿ Δ ABC ಯ ರೇಖ AD ಮತ್ತು ರೇಖ BE ಇವು ಶಿರೋಲಂಬಗಳಿವೆ. ಮತ್ತು AE = BD ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ ರೇಖ AD $\cong$ ರೇಖ BE ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

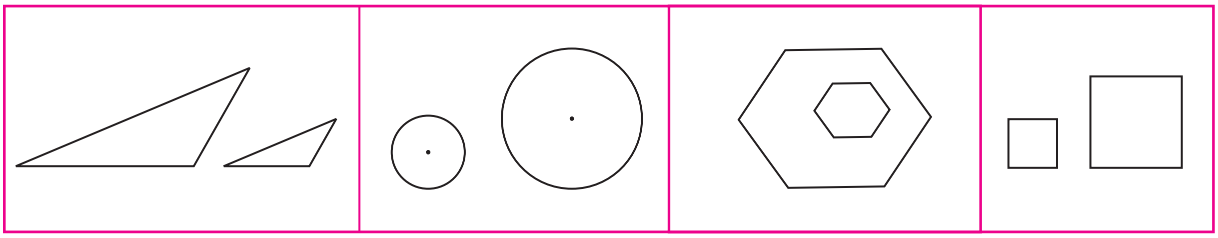


ಆಕೃತಿ 3.51

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

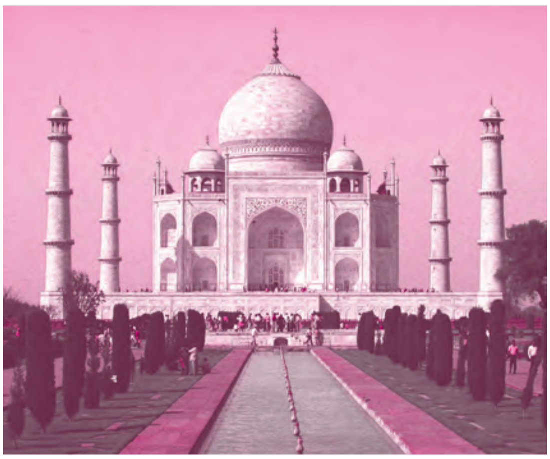
ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳು (Similar triangles)

ಕೆಳಗಿನ ಆಕತಿಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ.



ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಎರಡೆರಡು ಆಕೃತಿಗಳ ಆಕಾರ (shape) ಒಂದೇ ರೀತಿ ಇದೆ. ಆದರೆ ಆ ಆಕೃತಿಗಳು ಚಿಕ್ಕ ದೊಡ್ಡದಾಗಿವೆ ಅಂದರೆ ಅವುಗಳು ಏಕರೂಪವಿಲ್ಲ.

ಹೀಗೆ ಒಂದೇ ರೀತಿ ಕಾಣುವ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಅಂದರೆ ಸಮಾನರೂಪ ಇರುವ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ **ಸಮರೂಪ** ಆಕೃತಿಗಳೆನ್ನುವರು.



ಯಾವುದೊಂದು ಫೋಟೊ ಆದರಿಂದ ತೆಗೆದ ಇನ್ನೊಂದು ದೊಡ್ಡ ಫೋಟೊ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮರೂಪತೆ ಕಂಡುಬರುವುದು. ಆದರಂತೆ ರಸ್ತೆ ಮತ್ತು ರಸ್ತೆಯ ನಕಾಶ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮರೂಪತೆ ಕಂಡುಬರುವುದು.

ಎರಡೂ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಭುಜಗಳ ಪ್ರಮಾಣಬದ್ಧತೆ ಇದು ಸರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳ ಮಹತ್ವದ ಗುಣಧರ್ಮವಿದೆ. ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳು ಏಕರೂಪವಿದ್ದು ಅದೇ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ಎರಡು ರಸ್ತೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ಕೋನ ಇದೆ ಅದೇ ಕೋನ ನಕಾಶೆಯಲ್ಲಿ ಇರದಿದ್ದರೆ ಆ ನಕಾಶೆಯು ದಿಕ್ಕು ತಪ್ಪಿಸುವದಂತಹ ನಕಾಶೆ ಆಗುವುದು.

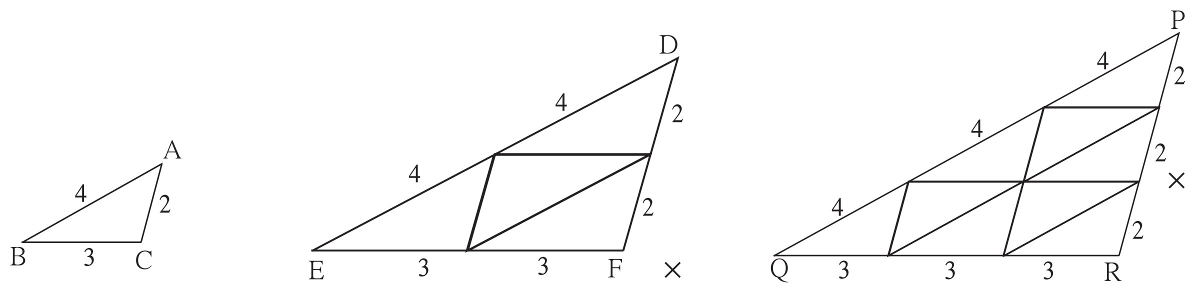
ICT Tools or Links

ಮೋಬಾಯಿಲದ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ ಸಂಗಣಕದ ಮೇಲೆ ಫೋಟೊ ತೆಗೆಯಿರಿ ಅದು ಚಿಕ್ಕದು ಅಥವಾ ದೊಡ್ಡದು ಮಾಡುವಾಗ ನೀವು ಏನು ಮಾಡುವಿರಿ ಅದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ, ಹಾಗೆಯೇ ಯಾವುದೊಂದು ಫೋಟೊದಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೊಂದು ಭಾಗ ನೋಡಲು ನೀವು ಯಾವ ಕೃತಿ ಮಾಡುವಿರಿ ಅದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಈಗ ನಾವು ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮ ಒಂದು ಕೃತಿಯಿಂದ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಕೃತಿ : 4 ಸೆಮೀ, 3 ಸೆಮೀ, 2 ಸೆಮೀ ಭುಜವಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದನ್ನು ದಪ್ಪ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಇಡಿರಿ. ಆದರ ಸುತ್ತಲೂ ಪೆನ್ಸಿಲಿಂದ ಗೆರೆ ಎಳೆದು ಇಂತಹ 14 ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

ಕಾಗದದ ಈ ತ್ರಿಕೋನಾಕೃತಿಯ ತುಂಡುಗಳು, ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಿಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವುದು ಅವುಗಳಿಂದ ಕಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ರಚಿಸಿ ಮೂರು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.52 **ಆಕೃತಿ 3.53** **ಆಕೃತಿ 3.54**

ತ್ರಿಕೋನದ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ತ್ರಿಕೋನದ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ತ್ರಿಕೋನದ ಸಂಖ್ಯೆ 9

Δ ABC ಮತ್ತು Δ DEF ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ABC $\leftrightarrow$ DEF ಈ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಸರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

$\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$

ಮತ್ತು $\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{AC}{DF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, ಅಂದರೆ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇವೆ.

ಆದೇ ಪ್ರಕಾರ Δ DEF ಮತ್ತು Δ PQR ಗಳ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿರಿ. DEF $\leftrightarrow$ PQR ಈ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಗೆ ಅನುಸಾರ ಕೋನ ಏಕರೂಪ ಮತ್ತು ಭುಜಗಳು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿವೆಯೇ ?

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಮರೂಪತೆ

Δ ABC ಮತ್ತು Δ PQR ದಲ್ಲಿ (i) $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$ ಮತ್ತು

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$; ಇದ್ದರೆ Δ ABC ಮತ್ತು Δ PQR ಸಮರೂಪ ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

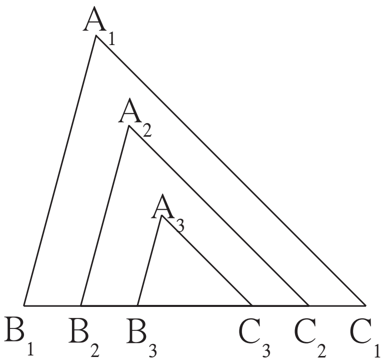
‘Δ ABC ಮತ್ತು Δ PQR ಸಮರೂಪಗಳಿರುತ್ತವೆ’ ಇದನ್ನು ‘$\Delta ABC \sim \Delta PQR$’ ಎಂದು ಬರೆಯುವರು.

ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತಕೋನ ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಭುಜ ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿಯಿಂದ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

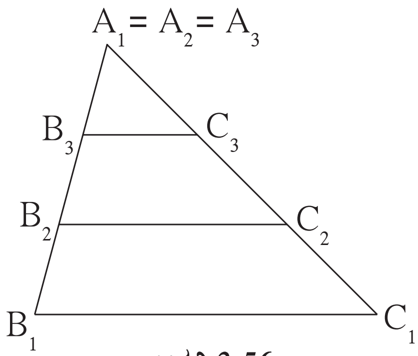
ಕೃತಿ : $\Delta A_1B_1C_1$ ತ್ರಿಕೋನ ದಪ್ಪಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿರಿ $\angle A_1, \angle B_1, \angle C_1$ ಅಳೆಯಿರಿ. ಅದೇರೀತಿ $\Delta A_2B_2C_2$ ಮತ್ತು $\Delta A_3B_3C_3$ ಹೀಗೆ ಇನ್ನೂ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು

$\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3$, $\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3$, $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3$

ಮತ್ತು $B_1C_1 > B_2C_2 > B_3C_3$ ಆಗುವಂತೆ ರಚಿಸಿರಿ. ಈಗ ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ. ಆ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ರಚನೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಕಾರ ಆಗುವಂತೆ ಮಾಡಿರಿ. ಮೂರು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ರಚನೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ, ಎರಡು ಪ್ರಕಾರ ಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.55



ಆಕೃತಿ 3.56

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2}, \frac{B_1C_1}{B_2C_2}, \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ, ಅದು ಸಮಾನ ವಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುವುದು.

ಅದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ $\frac{A_1C_1}{A_3C_3}, \frac{B_1C_1}{B_3C_3}, \frac{A_1B_1}{A_3B_3}$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರವೂ ಸಮಾನ ಇದೆಯೇ ಇದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಈ ಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಯಾವ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಸಮಾನ ಇರುತ್ತವೆ, ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವೂ ಸಮಾನ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಎಂಬುದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಈಗ ನಾವು ನೋಡಿದ ಪ್ರಕಾರ, Δ ABC ಮತ್ತು Δ PQR ದಲ್ಲಿ (i) $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$ ಅದ್ದರೆ,

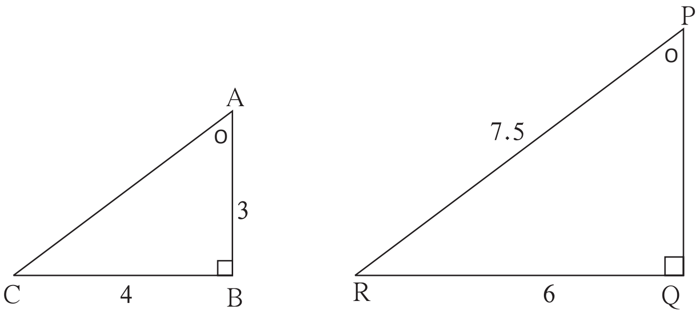
(ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ ಅಂದರೆ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳಲು ಸಮಾನ ವಿದ್ದರೆ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಶ್ರಮ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವದು ಅದನ್ನು ನಾವು ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವವರಿದ್ದೇವೆ.

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ.

- ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಿದ್ದರೆ. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.
- ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪ ಇದ್ದರೆ ಆಗ ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

ಉದಾ. ಆಕೃತಿ 3.57 ರಲ್ಲಿ Δ ABC ಮತ್ತು Δ PQR ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿ, ಇದರಿಂದ ಯಾವ ಭುಜದ ಉದ್ದಳತೆ ಕೊಡಲಿಲ್ಲ ಅದರ ಉದ್ದಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.57

ಉತ್ತರ : ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಬೇರೀಜು 180° ಇರುವುದು.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ

$\angle A = \angle P$ ಮತ್ತು $\angle B = \angle Q$ $\quad \therefore \angle C = \angle R$

$\therefore$ Δ ABC ಮತ್ತು Δ PQR ಇವುಗಳು ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿವೆ.

$\therefore$ ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿವೆ.

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

$$\therefore \frac{3}{PQ} = \frac{4}{6} = \frac{AC}{7.5}$$

$$\therefore 4 \times PQ = 18$$

$$\therefore PQ = \frac{18}{4} = 4.5$$

ಅದೇ ರೀತಿ $6 \times AC = 7.5 \times 4$

$$\therefore AC = \frac{7.5 \times 4}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

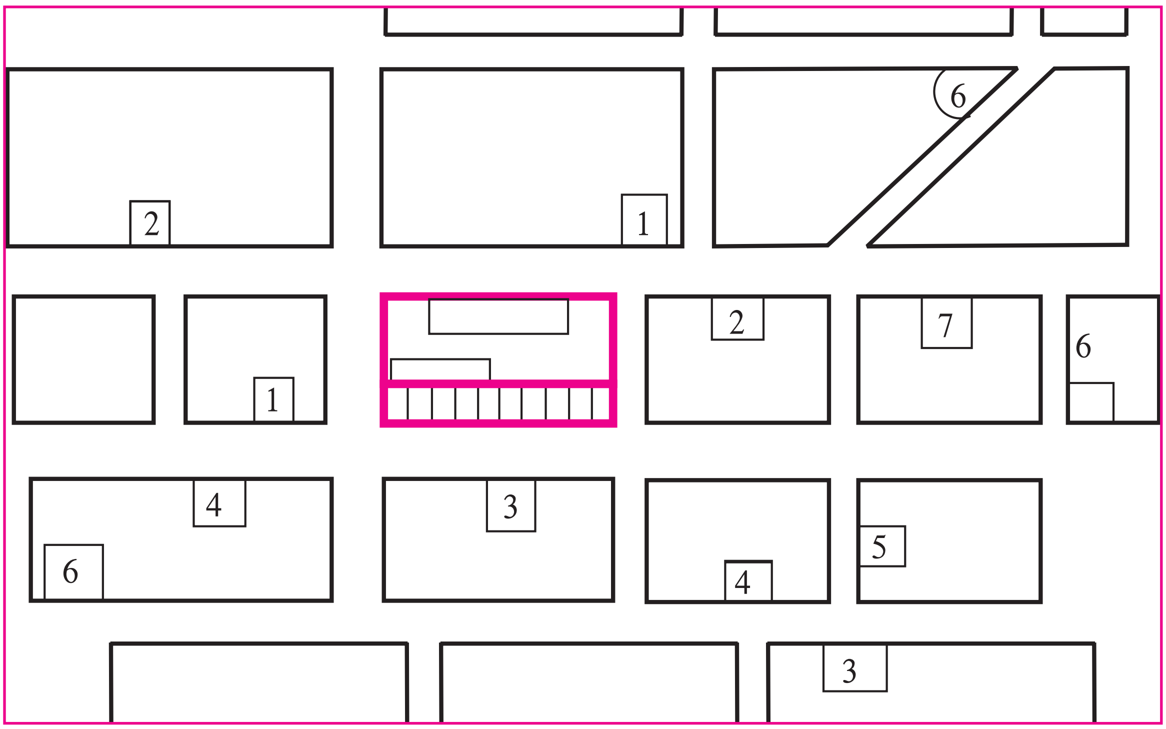
ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.5

1. Δ XYZ ~ Δ LMN ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಗತ ಭುಜ ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಕೋನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
2. Δ XYZ ದಲ್ಲಿ XY = 4 ಸೆಂ.ಮೀ., YZ = 6 ಸೆಂ.ಮೀ., XZ = 5 ಸೆಂ.ಮೀ., Δ XYZ ~ Δ PQR ಸರೂಪವಿದ್ದು ಮತ್ತು PQ = 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದಾಗ Δ PQR ದ ಉಳಿದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಯ ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನಗಳಗೆ ಹೆಸರು ಕೊಡಿರಿ, ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಗುರುತಿಸಿ. ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ತೋರಿಸಿರಿ.

ಉಪಕ್ರಮ :

ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯ ಅಥವಾ ಮನೆಯ ಸುತ್ತಲಿನ 500 ಮೀಟರ ಪರಿಸರದಲ್ಲಿಯ ರಸ್ತೆಗಳ ನಕಾಶೆ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಸ್ಥಳಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ ಹೇಗೆ ಅಳೆಯುವಿರಿ ? ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ 2 ಮೀಟರ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹೆಜ್ಜೆ (Steps) ನಡೆದು ಆಗುವುದು ಅದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಎರಡು ಮೀಟರ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಹೆಜ್ಜೆ ನಡೆದಾಯ್ತು. ಅಂದರೆ ಆ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ 90 ಹೆಜ್ಜೆ ಅಂದರೆ 60 ಮೀಟರಅಂತರ ತಿಳಿದು ಆಗುವ ಅಂತರ ನಿಶ್ಚಿಯಿಸಿರಿ. ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತದಲ್ಲಿ ಪರಿಸರದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ರಸ್ತೆಗಳಿಂದ ನಡೆದು ನಿಮಗೆಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಂತರಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಬೇಕಾಗುವುದು. ರಸ್ತೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಎಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿಸುತ್ತವೆ. ಅಲ್ಲಿ ಕೋನ ಉಂಟಾಗುವು ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳ ಅಂದಾಜು ಅಳತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ರಸ್ತೆಗಳ ಅಳೆದ ಉದ್ದಳೆಗಳ ಯೋಗ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ ತೆಗೆದು ನಕಾಶೆ ತಯಾರಿಸಿರಿ. ಪರಿಸರದ ದೊಡ್ಡ ಅಂಗಡಿ ಚಿಕ್ಕ ಅಂಗಡಿ, ಕಟ್ಟಡ, ಬಸ್ಸ ನಿಲ್ದಾಣ, ರಿಕ್ಷಾ ಸ್ಟ್ಯಾಂಡ್ ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ. ಕೆಳಗೆ ನಕಾಶೆಯ ಒಂದು ನಮೂನೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಸೂಚಿ : 1. ಪುಸ್ತಕದ ಅಂಗಡಿ 2. ಬಸ್ ನಿಲ್ದಾಣ 3. ಸ್ಟೇಶನರಿ ಅಂಗಡಿ 4. ಬ್ಯಾಂಕ್
5. ಔಷಧ ಅಂಗಡಿ 6. ಉಪಹಾರಗೃಹ 7. ಸಾಯಕಲ್ ಅಂಗಡಿ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3

1. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪರ್ಯಾಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಂದ ಉತ್ತರದ ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ.

(i) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಎರಡು ಭುಜಗಳ 5 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು 1.5 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೆ ಭುಜದ ಉದ್ದಳತೆ . . . . ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(A) 3.7 ಸೆಮೀ (B) 4.1 ಸೆಮೀ (C) 3.8 ಸೆಮೀ (D) 3.4 ಸೆಮೀ

(ii) Δ PQR ದಲ್ಲಿ $\angle R > \angle Q$ ಇದ್ದರೆ . . . . ಇರುವುದು.

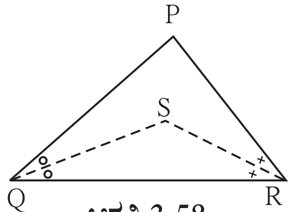
(A) QR > PR (B) PQ > PR (C) PQ < PR (D) QR < PR

(iii) Δ TPQ ದಲ್ಲಿ $\angle T = 65^\circ$, $\angle P = 95^\circ$ ಹಾಗಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸತ್ಯವಿದೆ.

(A) PQ < TP (B) PQ < TQ (C) TQ < TP < PQ (D) PQ < TP < TQ

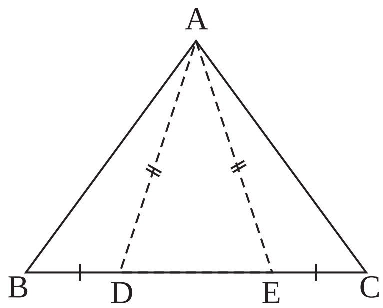
2. Δ ABC ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ AB = AC ಇದೆ, ಮತ್ತು BD ಹಾಗೂ CE ಗಳು ಮಧ್ಯಗಾಮಿಗಳಿದ್ದರೆ BD = CE ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

3. Δ PQR ದಲ್ಲಿ PQ > PR ಮತ್ತು $\angle Q$ ಮತ್ತು $\angle R$ ಇವುಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು SQ > ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



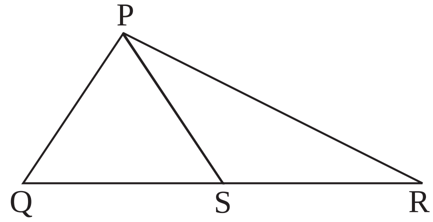
ಆಕೃತಿ 3.58

4. ಆಕೃತಿ 3.59 ದಲ್ಲಿ Δ ABC ಯಲ್ಲಿ BC ಭುಜ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳನ್ನು BD = CE ಆಗುವಂತೆ ಇವೆ. ಮತ್ತು AD = AE ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



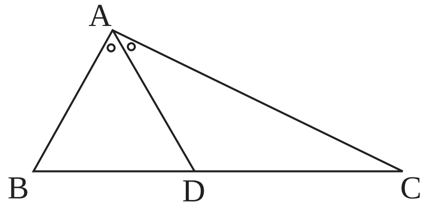
ಆಕೃತಿ 3.59

5. ಆಕೃತಿ 3.60 ರಲ್ಲಿ Δ PQR ದ ಭುಜ QR ದ ಮೇಲೆ S ಇದು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ. PQ + QR + RP > 2PS ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



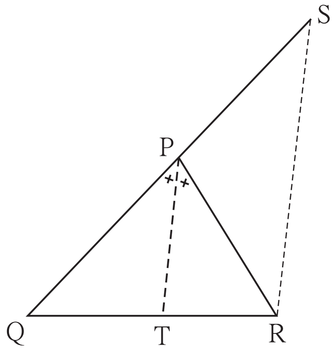
ಆಕೃತಿ 3.60

6. ಆಕೃತಿ 3.61 ರಲ್ಲಿ Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle$BAC ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕ BC ಯನ್ನು D ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ AB > BD ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.61

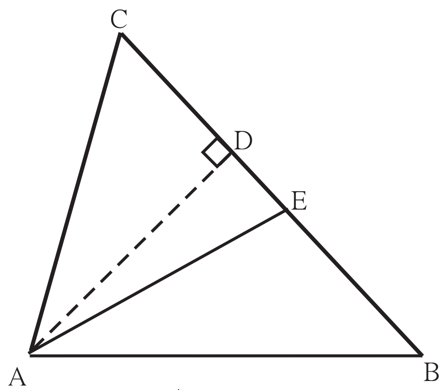
7.



ಆಕೃತಿ 3.62

ಆಕೃತಿ 3.62 ರಲ್ಲಿ ರೇಖ PT ಇದು $\angle$QPR ದ ದ್ವಿಭಾಜಕವಿದೆ. ಬಿಂದು R ದಿಂದ ತೆಗೆದ ರೇಖ PT ಗೆ ಸಮಾಂತರ ಇರುವ ರೇಷೆ ಕಿರಣ QP ಯನ್ನು S ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. PS = PR ಹಾಗಾದರೆ.

8. ಆಕೃತಿ 3.63 ರಲ್ಲಿ AD $\perp$ ರೇಖ BC.
ರೇಖ AE ಇದು $\angle$CAB ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕವಿದ್ದು D-E-C. ಇದ್ದರೆ
$m\angle DAE = \frac{1}{2}$ (m$\angle$B - m$\angle$C) ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.63

ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ.

ನಾವು ಕಲಿತಂತೆ, ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಕೋನ ಅಳತೆಯವು ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

ಎರಡು ಚೌಕೋನಗಳು ಸಮಕೋನ ಅಳತೆಯವು ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೇಯೇ? ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ತಗೆದು ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.

ಇದೇ ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನು ಇತರ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

4 ತ್ರಿಕೋನ ರಚನೆ

EHZ3EL

ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಘಟಕಗಳ ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿ ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸುವದು.

- ತಳ, ತಳಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಕೋನ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು.
- ತಳ, ತಳಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಕೋನ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ.
- ಪರಿಮಿತಿ ಮತ್ತು ತಳಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿದ ಕೋನ.

ಸ್ವಲ್ಪ ಜ್ಞಾಪಿಸೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನದ ರಚನೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ್ದೇವೆ.

✻ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸುವದು.

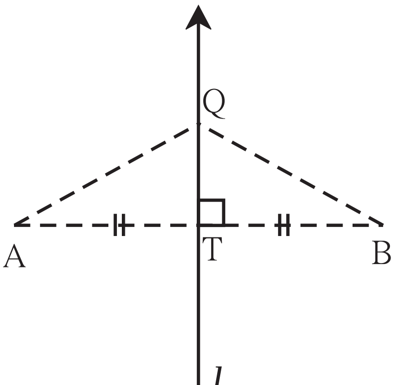
✻ ತಳ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಮಾಡುವ ಕೋನ ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸುವದು.

✻ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಸಮಾವಿಷ್ಟವಾದ ಕೋನ ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸುವದು.

✻ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಭುಜ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸುವುದು.

ಲಂಬ ದುಭಾಜಕದ ಪ್ರಮೇಯ

- ಕೊಟ್ಟ ರೇಷಾಖಂಡದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು ಇದು ಆ ರೆಷಾಖಂಡದ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.
- ರೇಷಾಖಂಡ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವು ರೇಖಾಖಂಡದ ತುದಿಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ 4.1

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ರಚನೆ (Constructions of triangles)

ತ್ರಿಕೋನದ ರಚನೆ ಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಮೂರು ಸಂಗತಿಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಬೇಕಾಗುವದು. ಮೂರು ಕೋನ ಮತ್ತು ಮೂರು ಭುಜ ಇವುಗಳಲಿಯ ಕೇವಲ ಎರಡು ಸಂಗತಿ ಕೊಟ್ಟಿದರ. ಮತ್ತು ಇದರ ಹೊರತು ಆ ತ್ರಿಕೋನ ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಮಾಹಿತಿ ಕೊಟ್ಟರೆ. ಆ ಮಾಹಿತಿಯ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಸಂಗತಿಗಳ ಉಪಯೋಗಮಾಡಿಕೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ರಚನೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಎರಡು ಭಿನ್ನ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ಇದ್ದರೆ. ಆ ಬಿಂದು ಆ ರೇಷಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಗುಣಧರ್ಮದ ಉಪಯೋಗ ಕೆಳಗಿನ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಅನೇಕಸಲ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

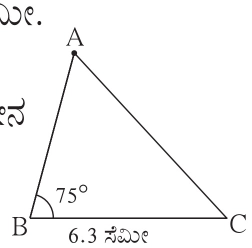
ರಚನೆ I

ತ್ರಿಕೋನದ ತಳ, ತಳಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿದ ಒಂದು ಕೋನ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆಯ ಬೇರೀಜು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸುವದು.

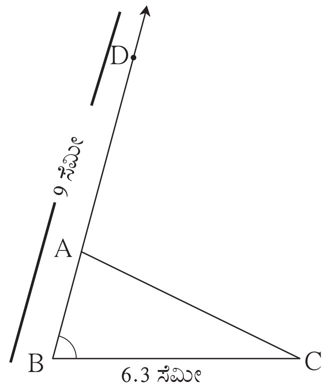
ಉದಾ Δ ABC ಯಲ್ಲಿ BC = 6.3 ಸೆಮೀ, $\angle B = 75^\circ$ ಮತ್ತು AB + AC = 9 ಸೆಮೀ ರಚಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಮೊದಲು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ತ್ರಿಕೋನ ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ ತೆಗೆಯುವಾ.

ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ : ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ BC = 6.3 ಸೆಂ.ಮೀ.
ಈ ರೇಖಾಖಂಡ ಮೊದಲು ತೆಗೆಯೋಣ.
ಬಿಂದು B ದ ಹತ್ತಿರ ರೇಖಾಖಂಡ BC ಗೆ 75° ಕೋನ
ಮಾಡುವ ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ D ಬಿಂದುವನ್ನು
BD = AB + AC = 9 ಸೆಂ.ಮೀ.
ಕಿರಣ BD ಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು A ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಿದೆ.
BA + AD = BA + AC = 9
$\therefore$ AD = AC
$\therefore$ ಬಿಂದು A ಇದು ರೇಖ CD ಯ
ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಇದೆ.
$\therefore$ ಕಿರಣ BD ಮತ್ತು ರೇಖ CD ಯ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ
ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಅಂದರೆ ಬಿಂದು A ಇದೆ.



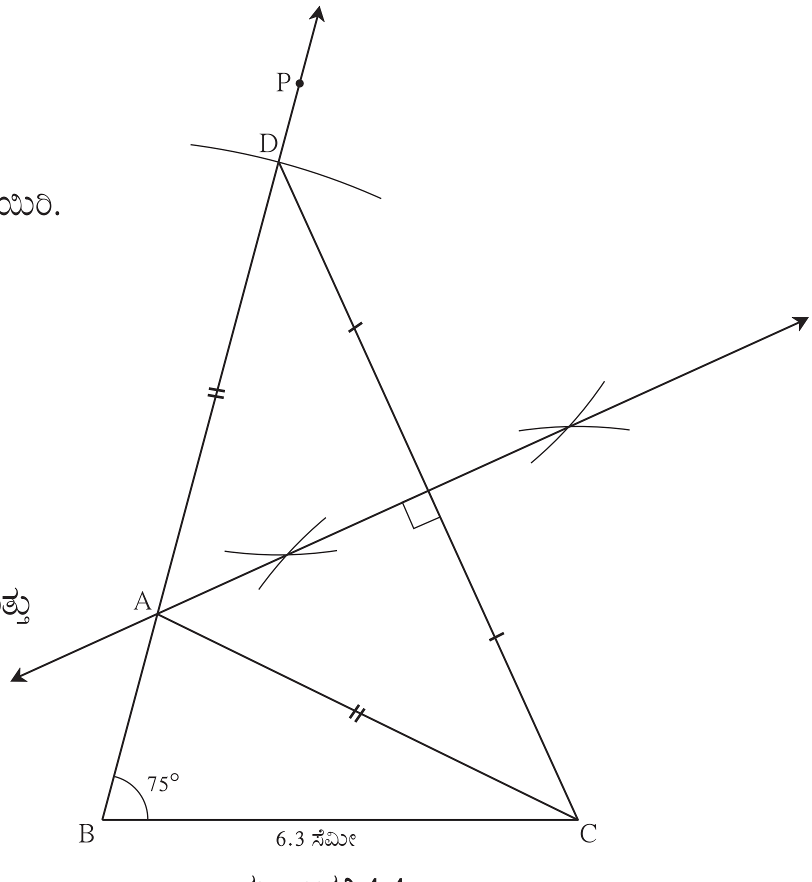
ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ 4.2



ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ 4.3

ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(1) ರೇಖ BC ಇದು 6.3 ಸೆಮೀ ತೆಗೆಯಿರಿ.
(2) ಬಿಂದು B ನಲ್ಲಿ 75° ದ ಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಕಿರಣ BP ತಿಳಿಯಿರಿ.
(3) ಕಿರಣ BP ಯ ಮೇಲೆ $d(B,D) = 9$ ಸೆಮೀ ಹೀಗೆ D ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.
(4) ರೇಖೆ DC ತೆಗೆಯಿರಿ.
(5) ರೇಖ DC ಯ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.
(6) ರೇಖ DC ಯ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಕಿರಣ BP ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿಗೆ A ಎಂದು ಹೆಸರುಕೊಡಿ
(7) ರೇಖೆ AC ತೆಗೆಯಿರಿ.
Δ ABC ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ಇದೆ.



ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ 4.4

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.1

1. ತಳ QR = 4.2 ಸೆಮೀ, $m\angle Q = 40^\circ$ ಮತ್ತು PQ + PR = 8.5 ಸೆಮೀ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನ Δ PQR ರಚಿಸಿರಿ.

2. ತಳ YZ = 6 ಸೆಮೀ, XY + XZ = 9 ಸೆಮೀ $m\angle XYZ = 50^\circ$ ಇರುವ Δ XYZ ರಚಿಸಿರಿ.

3. ತಳ BC = 6.2 ಸೆಮೀ, $m\angle ACB = 50^\circ$, AB + AC = 9.8 ಸೆಮೀ ಇರುವ Δ ABC ರಚಿಸಿರಿ.

4. ತಳ BC = 3.2 ಸೆಮೀ, $\angle ACB = 45^\circ$ ಮತ್ತು Δ ABC ಪರಿಮಿತಿ 10 ಸೆಮೀ ಇರುವ Δ ABC ರಚಿಸಿರಿ.

ರಚನೆ II

ತ್ರಿಕೋನದ ತಳ, ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ತಳಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿದ ಕೋನ ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸುವದು.

ಉದಾ (1)Δ ABC ಯಲ್ಲಿ BC = 7.5 ಸೆಮೀ, $m\angle ABC = 40^\circ$, AB – AC = 3 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ. Δ ABC ರಚಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಪ್ರಥಮ ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ ತೆಗೆಯುವಾ

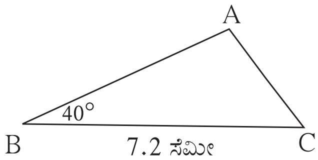
ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ : AB – AC = 3 ಸೆಮೀ $\therefore$ AB > AC ಇದೆ.

BC ರೇಖಾಖಂಡ ತೆಗೆಯಿರಿ ರೇಖ BC ಗೆ 40° ಕೋನ ಮಾಡುವ ಕಿರಣ BL ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ಆ ಕಿರಣ ಮೇಲೆ A ಬಿಂದು ಶೋಧಿಸಿರಿ. BD = 3 ಸೆಮೀ D ಬಿಂದುವನ್ನು B–D–A ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳರಿ ಮತ್ತು BD = AB –AD = 3 ಮತ್ತು AB – AC = 3 ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

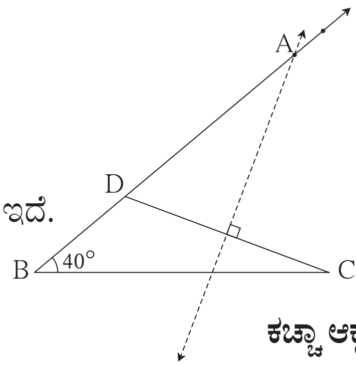
$\therefore$ AD = AC

$\therefore$ ಬಿಂದು A ಇದು ರೇಖ DC ಯ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಇದೆ.

$\therefore$ ಬಿಂದು A ಇದು ಕಿರಣ BL ಮತ್ತು ರೇಖ DC ಯ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಇದೆ.



ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ 4.5



ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ 4.6

ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(1) ರೇಖ BC ಇದು 7.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತೆಗೆಯಿರಿ.

(2) ಬಿಂದು B ದಲ್ಲಿಂದ 40° ಕೋನ ಮಾಡುವ ಕಿರಣ BL ತೆಗೆಯಿರಿ.

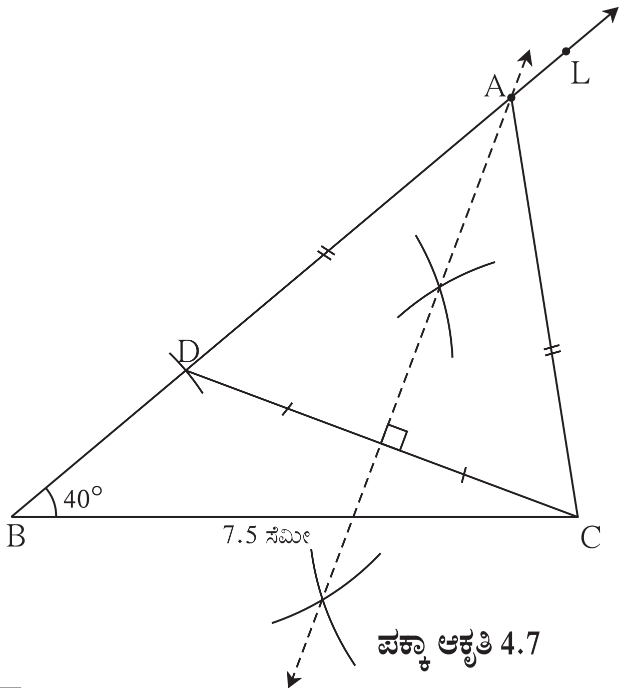
(3) ಕಿರಣ BL ದ ಮೇಲೆ D ಬಿಂದುವನ್ನು BD = 3 ಸೆಮೀ ಆಗುವಂತ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

(4) ರೇಖ CD ತೆಗೆದು ಅದರ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(5) ರೇಖ CD ಯ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ಕಿರಣ BL ಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ ಅಲ್ಲ A ಹೆಸರುಕೊಡಿರಿ.

(6) ರೇಖ AC ತೆಗೆಯಿರಿ.

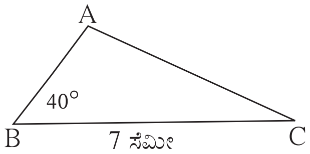
Δ ABC ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ಇದೆ.



ಪಕ್ಕಾ ಆಕೃತಿ 4.7

ಉದಾ. 2 Δ ABC ಯಲ್ಲಿ ಭುಜ BC = 7 ಸೆಮೀ, $\angle B = 40^\circ$ ಮತ್ತು AC − AB = 3 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ Δ ABC ರಚಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಮೊದಲು ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ ತೆಗೆಯುವಾ.



ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ 4.8

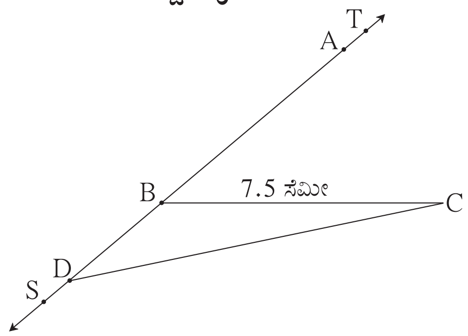
BC = 7 ಸೆಮೀ ತೆಗೆಯಿರಿ. AC > AB. BC ಈ ರೇಷಾಖಂಡದ ಬಿಂದು B ದಲ್ಲಿಂದ 40° ಕೋನ ಮಾಡುವ ಕಿರಣ BT ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು ಬಿಂದು A ಇದು ಈ ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ ಇದೆ ಕಿರಣ BT ವಿರುದ್ಧ ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು D ಯನ್ನು BD = 3 ಸೆಮೀ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಈಗ

AD = AB + BD = AB + 3 = AC

(ಕಾರಣ AC − AB = 3 ಸೆಮೀ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ)

$\therefore$ AD = AC

$\therefore$ ಬಿಂದು A ಇದು ರೇಖ CD ಯ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಇದೆ.



ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ 4.9

ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(1) ರೇಖ BC ಯನ್ನು 7.5 ಸೆಮೀ ಉದ್ದದ ರೇಖಾಖಂಡ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(2) ಬಿಂದು B ದಲ್ಲಿಂದ 40° ದ ಕೋನ ಮಾಡುವ ಕಿರಣ BT ತೆಗೆಯಿರಿ.

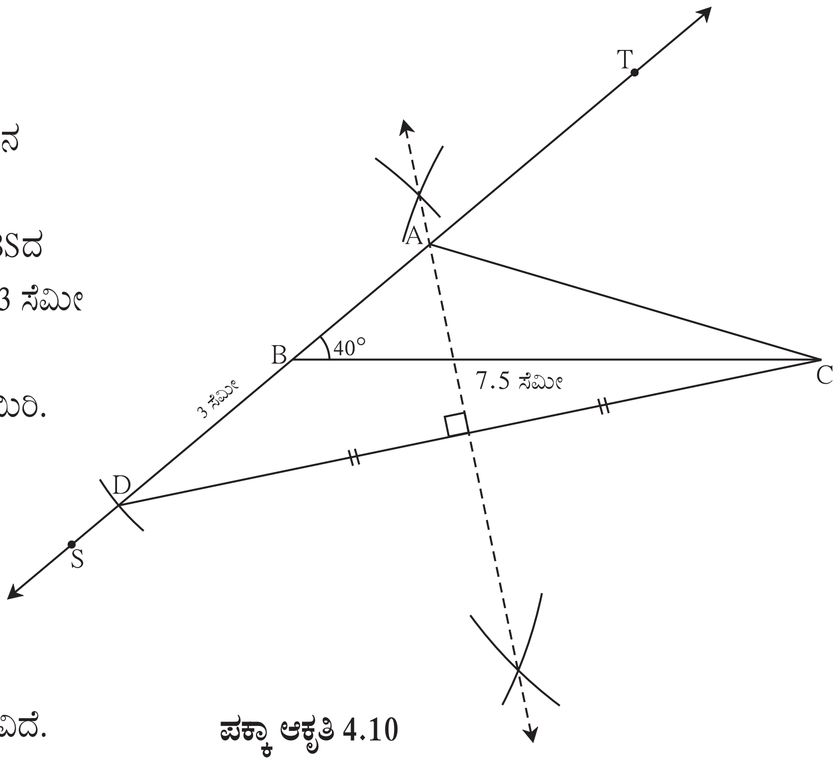
(3) ಕಿರಣ BT ಯ ವಿರುದ್ಧ ಕಿರಣ BSದ ಮೇಲೆ D ಬಿಂದುವನ್ನು BD = 3 ಸೆಮೀ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

(4) ರೇಖ DC ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕತ ಗೆಯಿರಿ.

(5) ರೇಖ DC ಯ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ಕಿರಣ BT ಗೆ ಎಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಆ ಬಿದುವಿಗೆ A ಎಂದು ಹೆಸರು ಕೊಡಿರಿ.

(6) ರೇಖ AC ರಚಿಸಿರಿ

Δ ABC ಇದು ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ.



ಪಕ್ಕಾ ಆಕೃತಿ 4.10

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.2

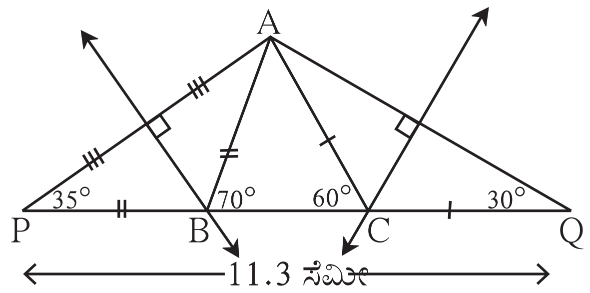
1. YZ = 7.4 ಸೆಮೀ $m\angle XYZ = 45^\circ$ ಮತ್ತು XY − XZ = 2.7 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ Δ XYZ ರಚಿಸಿರಿ
2. QR = 6.5 ಸೆಮೀ $m\angle PQR = 40^\circ$ ಮತ್ತು PQ − PR = 2.5 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ Δ PQR ರಚಿಸಿರಿ
3. BC = 6 ಸೆಮೀ $m\angle ABC = 100^\circ$ ಮತ್ತು AC − AB = 2.5 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ Δ ABC ರಚಿಸಿರಿ

ರಚನೆ III

ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿಮಿತಿ ಮತ್ತು ತಳಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸುವದು.

ಉದಾ. Δ ABC ಯಲ್ಲಿ AB + BC + CA = 11.3 ಸೆಮೀ, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ ಇದ್ದರೆ Δ ABC ರಚಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ ತೆಗೆಯುವಾ.



ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ 4.11

ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ : ಈ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖ BC ಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು P ಮತ್ತು Q ಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

PB = AB, CQ = AC

$\therefore$ PQ = PB + BC + CQ = AB + BC +AC = 11.3 ಸೆಮೀ

ಈಗ ΔPBA ದಲ್ಲಿ PB = BA

$\therefore$ $\angle APB = \angle PAB$ ಮತ್ತು $\angle APB + \angle PAB$ = ಬಾಹ್ಯಕೋನ ABC = 70°. . . .

(ದೂರಸ್ಥ ಅಂತರ ಕೋನಗಳ ಪ್ರಮೇಯ)

$\therefore$ $\angle APB = \angle PAB = 35^\circ$ ಅದರಂತೆ $\angle CQA = \angle CAQ = 30^\circ$

ಈಗ PAQ ಈ ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ಕಾರಣ ಅದರ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಭುಜ PQ ಗೊತ್ತಿದೆ.

ಈಗ BA = BP $\therefore$ ಬಿಂದು B ಬಿಂದು AP ಯ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಇದೆ. ಮತ್ತು CA = CQ

$\therefore$ ಬಿಂದು C ರೇಖ AQ ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಇದೆ.

$\therefore$ AP ಮತ್ತು AQ ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ರೇಷೆ PQ ಗೆ ಎಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ ಅಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು ದೊರೆಯುವವು.

ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(1) ರೇಖ PQ ಇದು 11.3 ಸೆಮೀ ಉದ್ದದ ರೇಷಾಖಂಡ ತೆಗೆಯಿರಿ.

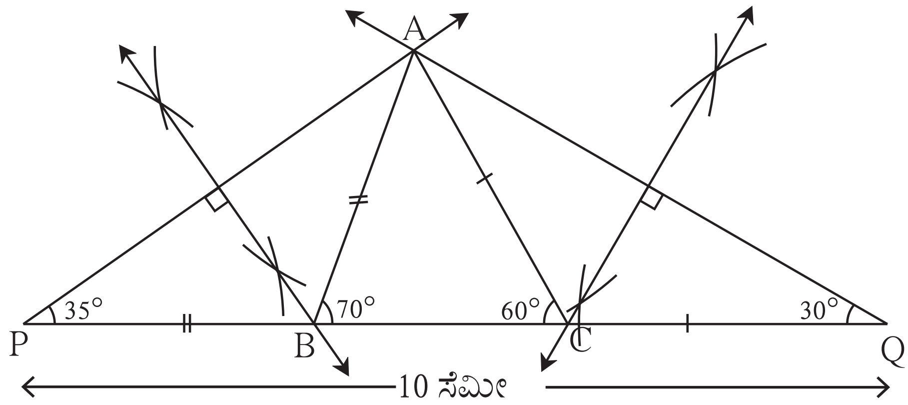
(2) ಬಿಂದು P ದಲ್ಲಿಂದ 35° ಅಳತೆಯ ಕೋನ ಮಾಡುವ ಕಿರಣ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(3) ಬಿಂದು Q ದಲ್ಲಿ 30° ಅಳತಿಯ ಕೋನ ಮಾಡುವ ಕಿರಣ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(4) ಎರಡೂ ಕಿರಣಗ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿಗೆ A ಎಂದು ಹೆಸರು ಕೊಡಿರಿ.

(5) ರೇಖ AP ಮತ್ತು ರೇಖ AQ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆಯಿರಿ ಅದು ರೇಖೆ PQ ನ್ನು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆಯೇ ಆ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ B ಮತ್ತು C ಎಂದು ಹೆಸರು ಕೊಡಿರಿ.

(6) ರೇಖ AB ಮತ್ತು ರೇಖ AC ತೆಗೆಯಿರಿ.
Δ ABC ಇದು ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ಎದೆ.



ಪಕ್ಕಾ ಆಕೃತಿ 4.12

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.3

1. Δ PQR ದಲ್ಲಿ $\angle Q = 70^\circ$, $\angle R = 80^\circ$ ಮತ್ತು PQ + QR + PR = 9.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವ Δ PQR ರಚಿಸಿರಿ
2. $\angle Y = 58^\circ$, $\angle X = 46^\circ$ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿಮಿತಿ 10.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದರೆ Δ XYZ ರಚಿಸಿರಿ.
3. Δ LMN ದಲ್ಲಿ $\angle M = 60^\circ$, $\angle N = 80^\circ$ ಮತ್ತು LM + MN + NL = 11 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವ Δ LMN ರಚಿಸಿರಿ.

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ 4

1. Δ XYZ ದಲ್ಲಿ XY + XZ = 10.3 ಸೆಮೀ, YZ = 4.9 ಸೆಮೀ ಇರುವ $\angle XYZ = 45^\circ$ ರಚಿಸಿರಿ.
2. $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, AB + BC + AC = 11.2 ಸೆಮೀ ಇರುವ Δ ABC ರಚಿಸಿರಿ.
3. ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿಮಿತಿ 14.4 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು ಭುಜಗಳ ಗುಣೊತ್ತರ 2:3:4 ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಿರಿ.
4. Δ PQR ದಲ್ಲಿ PQ − PR = 2.4 ಸೆಮೀ, QR = 6.4 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು $\angle PQR = 55^\circ$ಇರುವ Δ PQR ರಚಿಸಿರಿ.

ICT Tools or Links

ಸಂಗಣಕದ ಮೇಲೆ ತ್ರಿಕೋನದ ರಚನೆಯನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರಾ ಈ ಸಾಫ್ಟವೇರ ಅರದ ಸಹಾಯದಿಂಧ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ. ಮತ್ತು ಅನಂದ ಪಡೆಯಿರಿ ರಚನೆ ಕ್ರಮಾಂಕ 3 ಇದು ಸಾಫ್ಟವೇರದಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಪ್ರಕಾರದಿಂದ ಮಾಡಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆ ರೀತಿಯನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿರಿ.

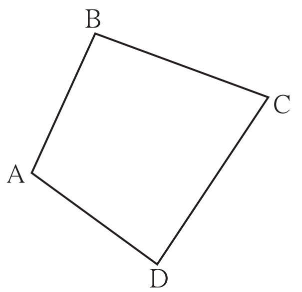
5 ಚೌಕೋನಗಳು

EN8YG9

ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

- ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ
- ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು
- ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನ
- ಆಯತ
- ಚೌರಸ
- ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ
- ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರಮೇಯ

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ.



ಆಕೃತಿ 5.1

1. □ABCD ಈ ಚೌಕೋನದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವ ಭುಜಗಳ ಜೋಡಿ:		ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿ.	
(1) ... , ...	(2) ... , ...	(1) ... , ...	(2) ... , ...
(3) ... , ...	(4) ... , ...	(3) ... , ...	(4) ... , ...

ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳ ಜೋಡಿಗಳು (1) ..... , ... (2) ..... , ...

ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳು (1) ..... , ... (2) ..... , ...

ನನ್ನ ಪ್ರಕಾರಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ನಾನು ಚೌಕೋನ ಇದ್ದೆನೆ

ನನ್ನ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳ ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳು ಸಮಾಂತರ	ನನ್ನ ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳು ಕಾಟಕೋನ	ನನ್ನ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಉದ್ದಳತೆಯ	ನನ್ನ ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ
☐	☐	☐	☐
ನನ್ನ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು	ನನ್ನ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು	ನನ್ನ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು	ನನ್ನ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು
• ಸಂಮುಖ ಭುಜ ಏಕರೂಪ • ಸಂಮುಖ ಕೋನ .... • ಕರ್ಣ	• ಸಂಮುಖ ಭುಜ .... • ಕರ್ಣ	• ಸಂಮುಖ ಕೋನ .... • ಕರ್ಣ	• ಕರ್ಣ .....

ನಾನು ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ

☐

ಚೌಕೋನದ ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ನಿಮಗೆ ಗುರುತ್ತಿದೆ. ಭುಜ ಹಾಗೂ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯುವುದು, ಮಡಿಕೆ ಹಾಕುವದು ಇತ್ಯಾದಿ ಕೃತಿಗಳಿಂದ ನೀವು ತಿಳಿದು ಕೊಂಡಿದ್ದೀರಿ. ಈ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ತರ್ಕದಿಂದ ಹೇಗೆ ಸಿದ್ಧವಾಗುವವು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಅಭ್ಯಸಿಸೋಣ.

ಯಾವುದೇ ಗುಣಧರ್ಮ ಗೃಹಿತಿಕೆಯಿಂದ ಸಿದ್ಧತೆಮಾಡಿದ್ದರೆ ಆ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಪ್ರಮೇಯ ಎನ್ನುವರು.

ಆಯತ, ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನ ಮತ್ತು ಚೌರಸ ಇವು ವಿಶಿಷ್ಟವಾದ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳೇ ಇರುವವು. ಅದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದು ಈ ಪ್ರಕರಣದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವಾಗ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿಯುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಭ್ಯಾಸದ ಪ್ರಾರಂಭ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದಿಂದ ಮಾಡೋಣ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ (Parellalogram)

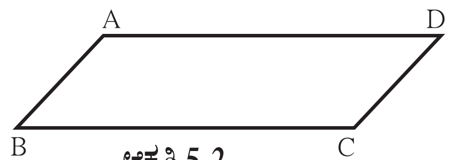
ಯಾವ ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳ ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳು ಸಮಾಂತರ ಇರುತ್ತದೆಯೋ. ಆ ಚೌಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಎನ್ನುವರು.

ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆ ಮಾಡುವಾಗ, ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಈ ಚೌಕೋನದ ಆಕೃತಿ ಮೇಲಿಂದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಆಕೃತಿ ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ನಮಗೆ □ABCD ಈ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ತೆಗೆಯುವುದಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಪದ್ಧತಿ I :

- ಮೊದಲು AB ಮತ್ತು BC ಈ ಯಾವುದೇ ಉದ್ದಳತೆಯ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಯಾವುದೇ ಅಳತೆಯ ಕೋನ ತಯಾರಿಸುವ ರೇಷಾಖಂಡ ತೆಗೆಯೋಣ.
- ಈಗ ರೇಖೆ AD ಮತ್ತು ರೇಖೆ BC ಸಮಾಂತರ ಇರಬೇಕು. ಅದ್ದರಿಂದ ಬಿಂದು A ದಿಂದ ರೇಖೆ BC ಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ ತೆಗೆಯೋಣ.

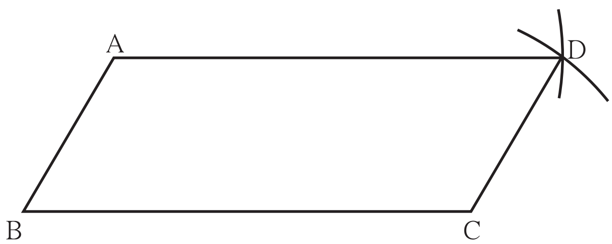


ಆಕೃತಿ 5.2

- ಆದರಂತೆ ರೇಖೆ AB || ರೇಖೆ DC, ಆದ್ದರಿಂದ ಬಿಂದು C ದಿಂದ ರೇಖೆ AB ಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ ತೆಗೆಯೋಣ. ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ, ಆ ಬಿಂದು D ಇರುವದು. ಅದ್ದರಿಂದ ತಯಾರಾದ ಚೌಕೋನ ABCD ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇರುವದು.

ಪದ್ಧತಿ II :

- ರೇಖೆ AB ಮತ್ತು ರೇಖೆ BC ಇವು ಯಾವುದೇ ಉದ್ದಳತೆಯ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಯಾವುದೇ ಅಳತೆಯ ಕೋನ ತಯಾರಿಸುವ ರೇಷಾಖಂಡ ತೆಗೆಯೋಣ.
- ಕಂಪಾಸದಲ್ಲಿ BC ಈ ಅಂತರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮತ್ತು ಬಿಂದು A ಕೇಂದ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದು ಕಂಸ ತೆಗೆಯೋಣ.
- ಕಂಪಾಸದಲ್ಲಿ AB ಈ ಅಂತರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಬಿಂದು C ಕೇಂದ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೊದಲನೆಯ ಕಂಸಕ್ಕೆ ಛೇದಿಸುವ ಕಂಸ ತೆಗೆಯೋಣ.
- ಕಂಸಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗೆ D ಹೆಸರು ಕೊಡೋಣ. ರೇಖೆ AD ಮತ್ತು ರೇಖೆ CD ಜೋಡಿಸೋಣ. ತಯಾರಾದ □ABCD ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ವಿರುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ 5.3

ಎರಡನೆಯ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ತೆಗೆದ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಂಮುಖ ಭುಜ ಸಮಾನ ವಿರುವ ಚೌಕೋನ ತೆಗೆದಿದ್ದೆವೆ. ಅದರ ಅವುಗಳ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳು ಸಮಾಂತರ ಏಕೆ ಬರುವವು. ಇದು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯ ನಂತರ ತಿಳಿಯುವದು.

ಕೃತಿ I ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಉದ್ದಳತೆಯ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಇರುವ ಐದು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ.

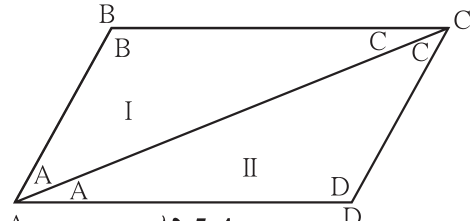
ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆ ಮಾಡಲು ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಉಪಯೋಗ ಆಗುವದು. ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಮುಂದಿನ ಕೃತಿ ಮಾಡಿರಿ.

ಕೃತಿ II

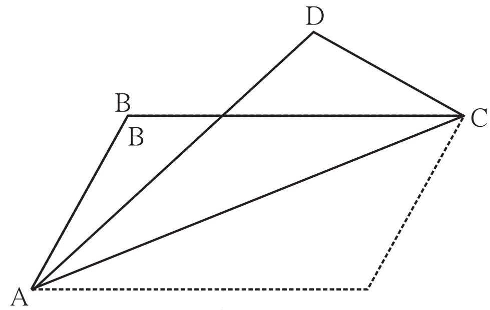
- ಒಂದು ದಪ್ಪ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ □ABCD ಈ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರ ಕರ್ಣ AC ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳ ಹೆಸರು ಒಳಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸಹ ಬರೆಯಿರಿ.

- ಕರ್ಣ AC ದ ಮೇಲೆ ಮಡಚಿ ΔADC ಮತ್ತು ΔCBA ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

- □ABCD ಯ ಕರ್ಣ AC ದ ಮೇಲೆ ಕತ್ತರಿಸಿ ΔADC ಮತ್ತು ΔCBA ಬೇರೆ ಮಾಡಿರಿ. ΔCBA ತಿರುಗಿಸಿ ΔADC ದೊಂದಿಗೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



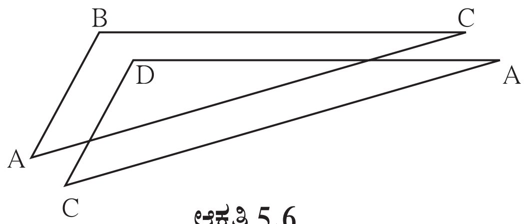
ಆಕೃತಿ 5.4



ಆಕೃತಿ 5.5

ಏನು ಕಂಡುಬರುವದು? ΔCBA ಯ ಯಾವ ಭುಜ ΔADC ಯ ಯಾವ ಭುಜದೊಂದಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳವದು? ΔCBA ದ ಯಾವ ಕೋನಗಳು ΔADC ದ ಯಾವ ಕೋನಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವವು?

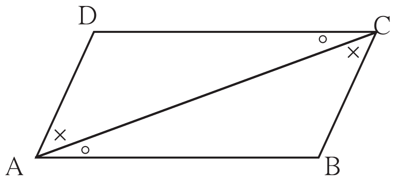
ಭುಜ DC ಇದು ಭುಜ AB ದೊಂದಿಗೆ ಮತ್ತು ಭುಜ AD ಇದು ಭುಜ CB ದೊಂದಿಗೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳವವು. ಅದರಂತೆ $\angle B$ ಇದು $\angle D$ ಹೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳವದು.



ಆಕೃತಿ 5.6

ಅಂದರೆ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳು ಹಾಗೂ ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪವಿವೆ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುವದು. ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಇದೇ ಗುಣಧರ್ಮ ನಾವು ಸಿದ್ಧತೆ ಮಾಡೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 1. ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ. ಹಾಗೂ ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 5.7

ಪಕ್ಷ : □ABCD ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.

ಅಂದರೆ ಭುಜ AB ॥ ಭುಜ DC, ಭುಜ AD ॥ ಭುಜ BC.

ಸಾಧ್ಯ : ರೇಖ AD ≅ ರೇಖ BC ; ರೇಖ DC ≅ ರೇಖ AB

∠ADC ≅ ∠CBA, ಮತ್ತು ∠DAB ≅ ∠BCD.

ರಚನೆ : ಕರ್ಣ AC ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ : ರೇಖ DC ॥ ರೇಖ AB ಹಾಗೂ ಕರ್ಣ AC ಇದು ಛೇದಿಕೆ.

∴ ∠DCA ≅ ∠BAC ....(1)

ಮತ್ತು ∠DAC ≅ ∠BCA ....(2) } ..... ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳು

ಈಗ, ΔADC ಹಾಗೂ ΔCBA ಗಳಲ್ಲಿ ,

∠DAC ≅ ∠BCA .... ವಿಧಾನ (2) ರ ಮೇಲಿಂದ

∠DCA ≅ ∠BAC .... ವಿಧಾನ (1) ರ ಮೇಲಿಂದ

ಭುಜ AC ≅ ಭುಜ CA .... ಸಾಮಾನ್ಯ ಭುಜ

∴ ΔADC ≅ ΔCBA ...... ಕೋ ಭು ಕೋ ಪರೀಕ್ಷೆ

∴ ಭುಜ AD ≅ ಭುಜ CB .... ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತಭುಜ

ಮತ್ತು ಭುಜ DC ≅ ಭುಜ AB .... ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತಭುಜ

ಅದರಂತೆ, ∠ADC ≅ ∠CBA .... ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಕೋನ

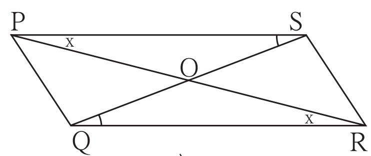
ಅದರಂತೆ, ∠DAB ≅ ∠BCD ಇದು ಸಿದ್ಧತೆ ಮಾಡಬಹುದು.

ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ∠DAB ≅ ∠BCD ಇದನ್ನು ಸಿದ್ಧತೆ ಮಾಡಲು ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಏನಾದರೂ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದೆ? ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ ಆ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡಿ ಸಿದ್ಧತೆ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು ?

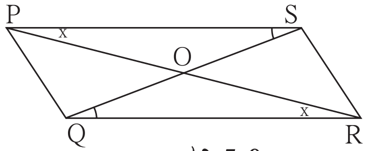
ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಇನ್ನೊಂದು ಗುಣಧರ್ಮ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಮುದಿನ ಕೃತಿ ಮಾಡಿರಿ.

ಕೃತಿ : □PQRS ಇದು ಯಾವುದೊಂದು. ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಕರ್ಣ PR ಮತ್ತು ಕರ್ಣ QS ತೆಗೆದು ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿಗೆ O ಈ ಹೆಸರು ಕೊಡಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕರ್ಣದ ತಯಾರಾದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಳತೆಯ ಹೋಲಿಕೆ ಕರ್ಕಟಕ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಾಡಿರಿ. ಎನು ಕಂಡುಬರುವದು ?



ಆಕೃತಿ 5.8

ಪ್ರಮೇಯ : ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 5.9

ಪಕ್ಷ : □PQRS ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.
ಕರ್ಣ PR ಹಾಗೂ ಕರ್ಣ QS ಇವು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು.

ಸಾಧ್ಯ : ರೇಖ PO ≅ ರೇಖ RO, ರೇಖ SO ≅ ರೇಖ QO

ಸಿದ್ಧತೆ : ΔPOS ಹಾಗೂ ΔROQ ಗಳಲ್ಲಿ

∠OPS ≅ ∠ORQ .... ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳು

ಭುಜ PS ≅ ಭುಜ RQ .... ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳು

∠PSO ≅ ∠RQO .... ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳು

∴ ΔPOS ≅ ΔROQ .... ಕೊ-ಭು-ಕೋ ಪರೀಕ್ಷೆ

∴ ರೇಖ PO ≅ ರೇಖ RO ....

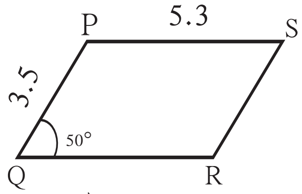
ಮತ್ತು ರೇಖ SO ≅ ರೇಖ QO .... }..... ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

- ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುವವು.
- ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳ ಏಕರೂಪ ಇರುವವು.
- ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವವು.

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. (1) □PQRS ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ. PQ = 3.5, PS = 5.3 $\angle Q = 50^\circ$ ಇದ್ದರೆ □PQRS ದ ಇತರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 5.10

ಉತ್ತರ : □PQRS ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ

$\therefore \angle Q + \angle P = 180^\circ$ .... ಅಂತರಕೋನಗಳು

$\therefore 50^\circ + \angle P = 180^\circ$

$\therefore \angle P = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

ಈಗ, $\angle P = \angle R$ ಮತ್ತು $\angle Q = \angle S$ .... ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳು

$\therefore \angle R = 130^\circ$ ಮತ್ತು $\angle S = 50^\circ$

ಅದರಂತೆ, PS = QR ಮತ್ತು PQ = SR .... ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳು

∴ QR = 5.3 ಮತ್ತು SR = 3.5

ಉದಾ (2) □ABCD ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇದೆ □ABCD ಯಲ್ಲಿ $\angle A = (4x + 13)^\circ$ ಮತ್ತು $\angle D = (5x - 22)^\circ$ ಇದ್ದರೆ $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಗಳ ಅಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಹೊಂದಿಕೊಂಡ ಕೋನಗಳು ಪೂರಕ ಇರುತ್ತವೆ.

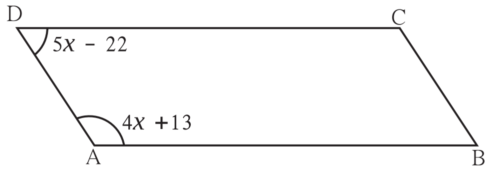
$\angle A$ ಮತ್ತು $\angle D$ ಇವು ಹೊಂದಿಕೊಂಡ ಕೋನಗಳಿವೆ.

$\therefore (4x + 13)^\circ + (5x - 22)^\circ = 180$

$\therefore 9x - 9 = 180$

$\therefore 9x = 189$

$\therefore x = 21$



ಆಕೃತಿ 5.11

$\therefore \angle A = 4x + 13 = 4 \times 21 + 13 = 84 + 13 = 97^\circ \quad \therefore \angle C = 97^\circ$

$\angle D = 5x - 22 = 5 \times 21 - 22 = 105 - 22 = 83^\circ \quad \therefore \angle B = 83^\circ$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.1

1. ಸಮಾಂತರಭುಜ □WXYZ ದ ಕರ್ಣಗಳು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. $\angle XYZ = 135^\circ$ ಇದ್ದರೆ $\angle XWZ = ?$, $\angle YZW = ?$ ಒಂದುವೇಳೆ $l(OY) = 5$ ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ $l(WY) = ?$

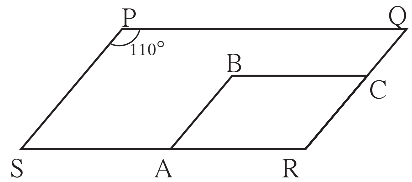
2. ಸಮಾಂತರಭುಜ □ABCD ಯಲ್ಲಿ $\angle A = (3x + 12)^\circ$, $\angle B = (2x - 32)^\circ$ ಇದ್ದರೆ x ದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ, ಅದರ ಮೇಲಿಂದ $\angle C$ ಮತ್ತು $\angle D$ ಗಳ ಅಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

3. ಒಂದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಪರಿಮಿತಿ 150 ಸೆಮೀ ಇದೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಭುಜ ಎರಡನೇಯ ಭುಜಕ್ಕಿಂತ 25 ಸೆಮೀ ದೊಡ್ಡದಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 1 : 2 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

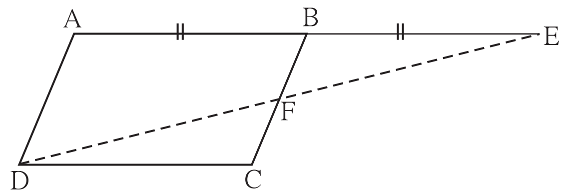
5*. ಸಮಾಂತರಭುಜ □ABCD ದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. AO = 5, BO = 12 ಮತ್ತು AB = 13 ಇದ್ದರೆ □ABCD ಸಮಭುಜ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

6. ಆಕೃತಿ 5.12 ರಲ್ಲಿ □PQRS ಹಾಗೂ □ABCR ಇವು ಎರಡು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. $\angle P = 110^\circ$ ಇದ್ದರೆ □ABCR ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 5.12

7. ಆಕೃತಿ 5.13 ಯಲ್ಲಿ □ABCD ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಕಿರಣ AB ಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು E ಹೀಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ BE = AB. ಆಗಬೇಕು, ಹಾಗಾದರೆ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ, ರೇಖ ED ಇದು ರೇಖ BC ಗೆ F ದಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ 5.13

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೊಣ.

ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು

1. ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಛೇದಿಕೆ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಏಕರೂಪವಿದ್ದರೆ. ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಇರುವವು.
2. ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಛೇದಿಕೆ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ವ್ಯುತ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಏಕರೂಪವಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಇರುವವು.
3. ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಛೇದಿಕೆ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಅಂತರಕೋನಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಪೂರಕ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಇರುವವು.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೊಣ ಬನ್ನಿ.

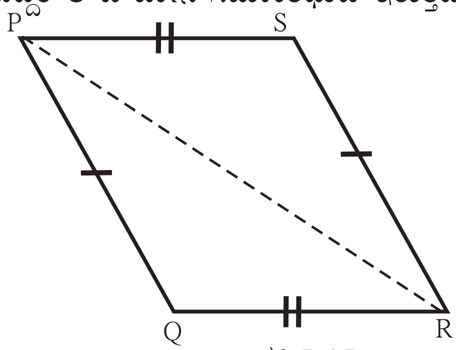
ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು (Tests for parallelogram)

□PQRS ದಲ್ಲಿ PS = QR ಮತ್ತು PQ = SR ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. □PQRS ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಇದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡುವದಿದೆ. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಈ ಚೌಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಯಾವ ಜೋಡಿಗಳು ಸಮಾಂತರ ಇವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕೆ? ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಯಾವ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು ಉಪಯೋಗವಾಗುವವು?

ಆಕೃತಿ 5.14

ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಿಗೆ ಅವಶ್ಯಕ ಇರುವ ಕೋನ ಪಡೆಯಲು ಯಾವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಕೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವದು ಅವಶ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ: ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಏಕರೂಪವಿದ್ದರೆ ಆ ಚೌಕೋನ ಸಮಾಂತಭುಜ ಇರುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ 5.15

ಪಕ್ಷ : □PQRS ದಲ್ಲಿ
ಭುಜ PS $\cong$ ಭುಜ QR
ಭುಜ PQ $\cong$ ಭುಜ SR

ಸಾಧ್ಯ : □PQRS ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಇದೆ.

ರಚನೆ : ಕರ್ಣ PR ತೆಗೆಯಲಾಗಿ

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ SPR ಹಾಗೂ Δ QRP ಗಳಲ್ಲಿ
ಭುಜ SP $\cong$ ಭುಜ QR ....(ಪಕ್ಷ)
ಭುಜ SR $\cong$ ಭುಜ QP .... (ಪಕ್ಷ)
ಭುಜ PR $\cong$ ಭುಜ RP .... ಸಾಮಾನ್ಯಭುಜ
$\therefore \Delta$ SPR $\cong \Delta$ QRP ...... ಭು-ಭು-ಭು ಪರೀಕ್ಷೆ
$\therefore \angle$SPR $\cong \angle$QRP .... ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳು
ಅದರಂತೆ $\angle$PRS $\cong \angle$RPQ ..... ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳು

$\angle$SPR ಮತ್ತು $\angle$QRP ಇವು ರೇಖ PS ಮತ್ತು ರೇಖ QR ಇವುಗಳ PR ಈ ಛೇದಿಕೆಯಿಂದ ಉಂಟಾದ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

∴ ಭುಜ PS || ಭುಜ QR ......(I) ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ.

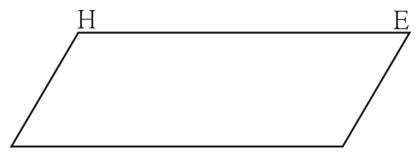
ಅದರಂತೆ ∠PRS ಮತ್ತು ∠RPQ ಇದು ರೇಖ PQ ಮತ್ತು ರೇಖ SR ಇವುಗಳ PR ಈ ಛೇದಿಕೆಯಿಂದ ಉಂಟಾದ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳಿವೆ.

∴ ಭುಜ PQ || ಭುಜ SR ......(II) ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ.

∴ (I) ಹಾಗೂ (II) ರ ಮೇಲಿಂದ □PQRS ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಇದೆ.

ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ತೆಗೆಯುವ ಎರಡು ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಎರಡನೆಯ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಮುಖ ಭುಜ ಸಮಾನವಿರುವ ಚೌಕೋನ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಚೌಕೋನ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಇರುತ್ತದೆ ಇದು ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವದೆ ?

ಪ್ರಮೇಯ : ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಏಕರೂಪವಿದ್ದರೆ ಅದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇರುತ್ತದೆ.
ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಪಕ್ಷ, ಸಾಧ್ಯ ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿಯ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ನೀವು ತುಂಬಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 5.16

ಪಕ್ಷ : □EFGH ದಲ್ಲಿ ∠E ≅ ∠G

ಮತ್ತು ∠.......... ≅ ∠..........

ಸಾಧ್ಯ : □EFGH ಇದು ....

ಸಿದ್ಧತೆ : ∠E = ∠G = x ಮತ್ತು ∠H = ∠F = y ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಚೌಕೋನದ ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು .... ಇರುತ್ತದೆ.

∴ ∠E + ∠G + ∠H + ∠F = ...

∴ x + y + ... + ... = ...

∴ □x + □y = ...

∴ $x + y = 180°$

∴ ∠G + ∠H = ...

ರೇಖ HE ಮತ್ತು ರೇಖ GF ಇವುಗಳಿಗೆ ಛೇದಿಕೆ HG ಛೇದಿಸಿದಾಗ ∠G ಮತ್ತು ∠H ಈ ಅಂತರಕೋನಗಳು ತಯಾರಾಗುವವು.

∴ ಭುಜ HE || ಭುಜ GF .... (I) ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳ ಅಂತರಕೋನಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ

ಅದರಂತೆ ∠G + ∠F = ...

∴ ಭುಜ .... || ಭುಜ .... (II) ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳ ಅಂತರಕೋನಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ

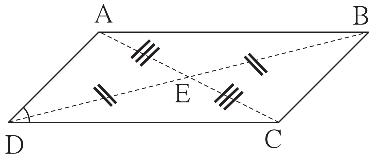
∴ (I) ಹಾಗೂ (II) ರ ಮೇಲಿಂದ □EFGH ಇದು .... ಇದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ: ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ ಚೌಕೋನ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಇರುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : □ABCD ದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ರೇಖ AE ≅ ರೇಖ CE ರೇಖ BE ≅ ರೇಖ DE

ಸಾಧ್ಯ : □ABCD ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಇದೆ.

ಸಿದ್ಧತೆ : ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನಗಳ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧತೆ ನೀವು ಸ್ವತಃ ಬರೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 5.17

1. ರೇಖ AB || ರೇಖ DC ಇದನ್ನು ಸಿದ್ಧತೆ ಮಾಡಲು ವ್ಯತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಯಾವ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಏಕರೂಪ ಇದೆ ತೋರಿಸ ಬೇಕಾಗುವದು? ವ್ಯತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಆ ಜೋಡಿ ಯಾವ ಭೇದಿಕೆಯಿಂದ ದೊರೆಯುವದು?
2. ವ್ಯತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳು ಇವು ಯಾವ ಯಾವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ?
3. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಯಾವ ಪರೀಕ್ಷೆಯಿಂದ ಏಕರೂಪವಾಗುವವು ?
4. ಅದರಂತೆ ವಿಚಾರಮಾಡಿ ರೇಖ AD || ರೇಖ BC ಇದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವುದೆ ?

ಯಾವುದೇ ಚೌಕೋನ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧತೆ ಮಾಡುವಾಗ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಉಪಯೋಗವಾಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರಮೇಯಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು ಎನ್ನುವರು.

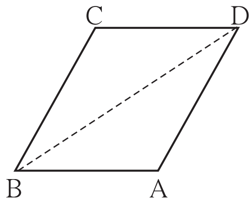
ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಮೇಯ ಸಮಾಂಥರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಪರೀಕ್ಷೆ ಎಂದು ಉಪಯೋಗವಾಗುವದು.

ಪ್ರಮೇಯ : ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಏಕರೂಪ ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಇದ್ದರೆ ಆ ಚೌಕೋನ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ವಿರುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : □ABCD ಯಲ್ಲಿ CB ≅ ರೇಖ DA ಮತ್ತು ರೇಖ CB || ರೇಖ DA

ಸಾಧ್ಯ : □ABCD ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.

ರಚನೆ : ಕರ್ಣ BD ತೆಗೆಯಲಾಗಿ.



ಆಕೃತಿ 5.18

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿಯ ಸಿದ್ಧತೆ ನೀವು ವಿಸ್ತಾರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

Δ CBD ≅ Δ ADB ....ಭು-ಕೋ-ಭು ಪರೀಕ್ಷೆ.

$\therefore$ $\angle$CDB ≅ $\angle$ABD ..... ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳು.

$\therefore$ ರೇಖ CD || ರೇಖ BA ..... ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ವ್ಯತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ

ಇದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

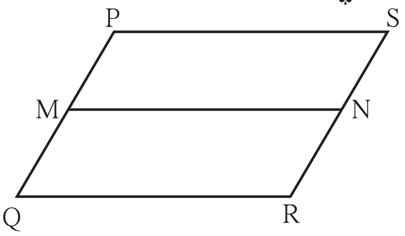
- ಯಾವ ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಏಕರೂಪವಿರುತ್ತವೆ ಆ ಚೌಕೋನ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇರುತ್ತದೆ.
- ಯಾವ ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಏಕರೂಪ ವಿರುತ್ತವೆ. ಆ ಚೌಕೋನ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ವಿರುತ್ತದೆ.
- ಯಾವ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ. ಆ ಚೌಕೋನ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ವಿರುತ್ತದ.
- ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಏಕರೂಪ ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಇದ್ದರೆ. ಆ ಚೌಕೋನ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ವಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಮೇಯಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು ಎನ್ನುವರು.

ವಿಚಾರ ಮಾಡಿರಿ.

ವಹಿಯಲ್ಲಿಯ ಮುದ್ರಿಸಿದ ರೇಖೆ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ರೇಖೆಗಳ ಉಪಯೋಗದಿಂದ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಹೇಗೆ ತಯಾರಿಸಬಹುದು?

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು -

ಉದಾ (1) □PQRS ಇದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಭುಜ PQ ದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಮತ್ತು ಭುಜ RS ದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು N ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ □PMNS ಮತ್ತು □MQRN ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 5.19

ಪಕ್ಷ : □PQRS ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ, ಭುಜ PQ ಮತ್ತು ಭುಜ RS ಇವುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ M ಮತ್ತು N ಇವು ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಇವೆ.

ಸಾಧ್ಯ : □PMNS ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.
□MQRN ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.

ಸಿದ್ಧತೆ : ಭುಜ PQ || ಭುಜ SR

∴ ಭುಜ PM || ಭುಜ SN ...... (∵ P-M-Q; S-N-R) ......(I)

ಅದರಂತೆ ಭುಜ PQ = ಭುಜ SR.

∴ $\frac{1}{2}$ ಭುಜ PQ = $\frac{1}{2}$ ಭುಜ SR

∴ ಭುಜ PM = ಭುಜ SN ..... (∵ M ಹಾಗೂ N ಇವು ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ)......(II)

∴ (I) ಹಾಗೂ (II) ರ ಮೇಲಿಂದ □PMNQ ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ,

ಅದರಂತೆ □MQRN ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

ಉದಾ (2) Δ ABC ದ ಭುಜ AB ಮತ್ತು AC ಗಳ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ D ಹಾಗೂ E ಇವು ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಕಿರಣ ED ಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು F, ED = DF ಆಗುವಂತೆ ಇದೆ. □AFBE ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ. ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಪಕ್ಷ ಮತ್ತು ಸಾಧ್ಯ ನೀವು ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿಯ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಪಕ್ಷ : --------------------

ಸಾಧ್ಯ : ----------------------

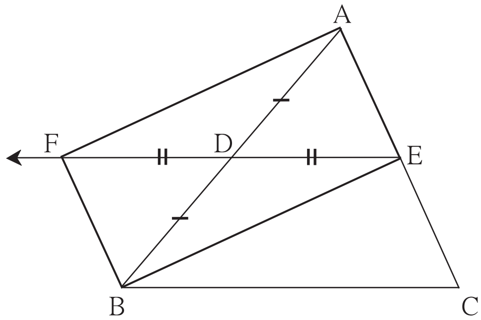
ಸಿದ್ಧತೆ : ರೇಖ AB ಮತ್ತು ರೇಖ EF ಇವು □AFBE ದ $\boxed{\quad\quad}$ ಇವೆ.

ರೇಖ AD ≅ ರೇಖ DB....... $\boxed{\quad\quad}$

ರೇಖ $\boxed{\quad\quad}$ ≅ ರೇಖ $\boxed{\quad\quad}$....... ರಚನೆ.

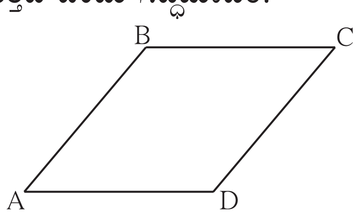
∴ □AFBE ದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ $\boxed{\quad\quad}$

∴ $\boxed{\quad\quad}$ ಪರೀಕ್ಷೆಯಿಂದ □AFBE ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.



ಆಕೃತಿ 5.20

ಉದಾ (3) ಯಾವುದೇ ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ವಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 5.21

ಪಕ್ಷ : □ABCD ಇದು ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : □ABCD ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.

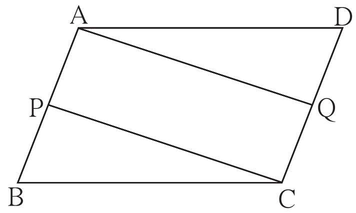
ಸಿದ್ಧತೆ : ಭುಜ AB = ಭುಜ BC = ಭುಜ CD = ಭುಜ DA (ಪಕ್ಷ)

∴ ಭುಜ AB = ಭುಜ CD ಮತ್ತು ಭುಜ BC = ಭುಜ AD

∴ □ABCD ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ ..... (ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ)

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.2

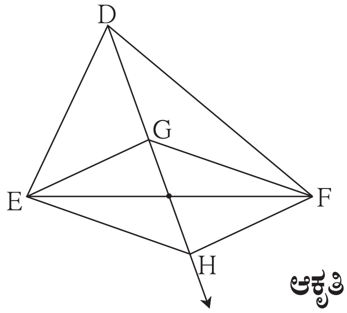
1. ಆಕೃತಿ 5.22 ದಲ್ಲಿ , □ABCD ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ. ಬಿಂದು P ಹಾಗೂ ಬಿಂದು Q ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಭುಜ AB ಹಾಗೂ ಭುಜ DC ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿದ್ದರೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ: □APCQ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.



ಆಕೃತಿ 5.22

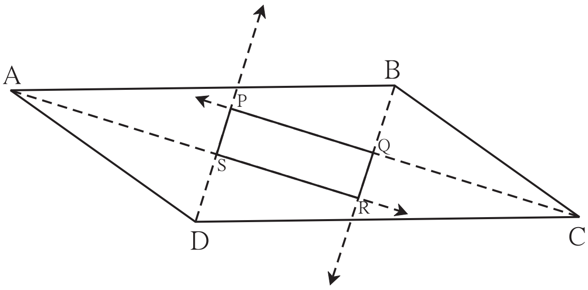
2. ಯಾವುದೇ ಆಯತ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ವಿರುತ್ತದೆ, ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

3. ಆಕೃತಿ 5.23 ದಲ್ಲಿ ಬಿಂದು G ಇದು Δ DEF ದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದು ಇದೆ. ಕಿರಣ DG ಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು H ಹೀಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ D-G-H ಮತ್ತು DG = GH, ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ: □GEHF ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.



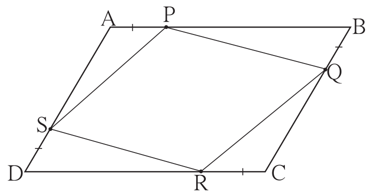
ಆಕೃತಿ 5.23

4*. ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳಿಂದ ತಯಾರಾದ ಚೌಕೋನ ಆಯತವಿರುತ್ತದೆ, ಇದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ. (ಆಕೃತಿ 5.24)



ಆಕೃತಿ 5.24

5. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿ 5.25 ರಲ್ಲಿ □ABCD ಈ ಸಮಾಂತರ ಚೌಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ P, Q, R, S ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆಗುವಂತೆ, AP = BQ = CR = DS ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ, ಹಾಗಾದರೆ □PQRS ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 5.25

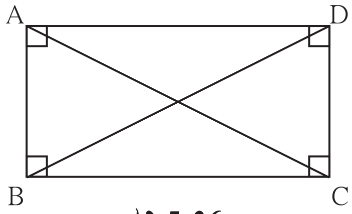
ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೊಣ ಬನ್ನಿ.

ಆಯತ, ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನ ಮತ್ತು ಚೌರಸ ಇವುಗಳ ವಿಶೇಷ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು (Properties of rectangle, rhombus and square)

ಆಯತ, ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನ ಮತ್ತು ಚೌರಸ ಇವು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದರಿಂದ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳ ಸಮಾನಾಗಿರುವದು, ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನಾಗಿರುವದು ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವವು. ಈ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ಮೂರು ಪ್ರಕಾರದ ಚೌಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

ಆದರೆ ಇದಕ್ಕಿಂತ ಕೆಲವು ಹೆಚ್ಚಿನ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಕಾರದ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಅದನ್ನು ನಾವು ನೊಡೋಣ. ಈ ಗುಣಧರ್ಮಗಳ ಸಿದ್ಧತೆಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿಯ ಹಂತಗಳನ್ನು ವಿಚಾರಮಾಡಿ ಆ ಸಿದ್ಧತೆಗಳನ್ನು ನೀವು ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ : ಆಯತದ ಕರ್ಣಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 5.26

ಪಕ್ಷ : □ABCD ಇದು ಆಯತ ಇದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : ಕರ್ಣ AC $\cong$ ಕರ್ಣ BD

ಸಿದ್ಧತೆ : ಸ್ಥಳದರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಕಾರಣದೊಂದಿಗೆ ಪೂರ್ಣಮಾಡಿರಿ.

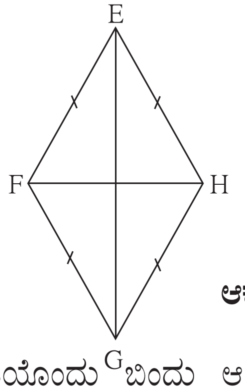
Δ ADC $\cong$ Δ DAB ...... ಭು-ಕೋ-ಭು ಪರೀಕ್ಷೆ

ಕರ್ಣ AC $\cong$ ಕರ್ಣ BD..... (ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು)

ಪ್ರಮೇಯ : ಚೌರಸದ ಕರ್ಣಗಳು ಏಕರೂಪ ವಿರುತ್ತವೆ.

ಪಕ್ಷ, ಸಾಧ್ಯ ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧತೆ ನೀವು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ : ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬದ್ವಿಜಾಕ ಇರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 5.27

ಪಕ್ಷ : □EFGH ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : (i) ಕರ್ಣ EG ಇದು ಕರ್ಣ HF ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕವಿದೆ.

(ii) ಕರ್ಣ HF ಇದು ಕರ್ಣ EG ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕವಿದೆ.

ಸಿದ್ಧತೆ : (i) $\left.\begin{array}{l}\text{ರೇಖ EF} \cong \text{ರೇಖ EH}\\ \text{ರೇಖ GF} \cong \text{ರೇಖ GH}\end{array}\right\}$ ಪಕ್ಷ

ರೇಖಾಖಂಡದ ತುದಿಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು ಆ ರೇಖಾಖಂಡದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ಬಿಂದು E ಹಾಗೂ ಬಿಂದು G ಇವು ರೇಖ HF ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲಿವೆ.

ಎರಡು ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಒಂದೇ ಒಂದು ರೇಖೆ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವುದು.

$\therefore$ ರೇಖೆ EG ಇದು ಕರ್ಣ HF ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

$\therefore$ ಕರ್ಣ EG ಇದು ಕರ್ಣ HF ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕವಿದೆ.

(ii) ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕರ್ಣ HF ಇದು ಕರ್ಣ EG ದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕವಿದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

ಮುಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸಿದ್ಧತೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಬರೆಯಿರಿ.

- ಚೌರಸದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕವಿರುತ್ತವೆ.
- ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಅದರ ಸಮುಖ ಕೋನಗಳನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ.
- ಚೌರಸದ ಕರ್ಣಗಳು ಅವುಗಳ ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ.

ಇದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

- ಆಯತದ ಕರ್ಣಗಳು ಏಕರೂಪ ವಿರುತ್ತವೆ.
- ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬದ್ವಿಭುಜಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.
- ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ.
- ಚೌರಸದ ಕರ್ಣಗಳು ಏಕರೂಪ ವಿರುತ್ತವೆ.
- ಚೌರಸದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬ-ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.
- ಚೌರಸದ ಕರ್ಣಗಳು ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ.

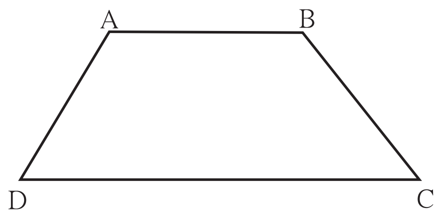
ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.3

1. □ABCD ಈ ಆಯತದ ಕರ್ಣಗಳು O ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಒಂದುವೇಳೆ AC = 8 ಸೆ.ಮೀ. ಇದ್ದರೆ BO = ? ಮತ್ತು $\angle CAD = 35^\circ$ ಇದ್ದರೆ $\angle ACB$ = ?
2. □PQRS ಈ ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದುವೇಳೆ PQ = 7.5 ಸೆ.ಮೀ. ಇದ್ದರೆ QR = ? ಮತ್ತು $\angle QPS = 75^\circ$ ಇದ್ದರೆ $\angle PQR$ = ?, $\angle SRQ$ = ?
3. □ IJKL ಈ ಚೌರಸದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ M ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, $\angle IMJ$, $\angle JIK$ ಮತ್ತು $\angle LJK$ ಗಳ ಅಳತೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.
4. ಒಂದು ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 20 ಸೆ.ಮೀ., 21 ಸೆ.ಮೀ. ಇವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಚೌಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಹಾಗೂ ಪರಿಮಿತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.
5. ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನಗಳು ಸತ್ಯ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾರಣಸಹಿತ ಬರೆಯಿರಿ.
   (i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನವಿರುತ್ತದೆ.
   (ii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇದು ಆಯತವಿರುತ್ತದೆ.
   (iii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಯತ ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇರುತ್ತದೆ.
   (iv) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚೌರಸ ಇದು ಆಯತವಿರುತ್ತದೆ.
   (v) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚೌರಸ ಇದು ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನವಿರುತ್ತದೆ.
   (vi) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೊನ ಆಯತವಿರುತ್ತದೆ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ (Trapezium)

ಯಾವ ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳ ಒಂದೇ ಜೋಡಿ ಸಮಾಂತರವಿರುತ್ತದೆ, ಆ ಚೌಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ ಎನ್ನುವರು.



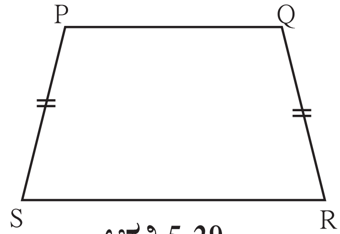
ಆಕೃತಿ 5.28

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ □ABCD ದ ಕೇಲವ AB ಮತ್ತು DC ಈ ಭುಜಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಇವೆ. ಅಂದರೆ ಇದು ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನವಿದೆ.

ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳಗನ್ನುಸಾರವಾಗಿ $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle D$ ಈ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿ ಪೂರಕ ಇದೆ. ಅದರಂತೆ $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಈ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಸಹ ಪೂರಕವಿದೆ.

ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವ ಕೋನಗಳ ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳು ಪೂರಕ ಇರುತ್ತವೆ.

ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದ ಸಮಾಂತರವಿಲ್ಲದ (ಅಸಮಾಂತರ) ಭುಜಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಏಕರೂಪವಿದ್ದರೆ ಆ ಚೌಕೋನಕ್ಕೆ **ಸಮದ್ವಿಭುಜ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ** (Isosceles trapezium) ಎನ್ನುವರು.

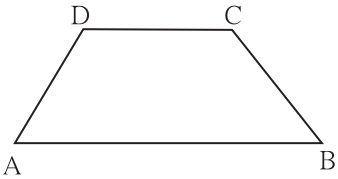


ಆಕೃತಿ 5.29

ಯಾವುದೇ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದ ಸಮಾಂತರ ವಿಲ್ಲದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಷಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಆ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಎನ್ನುವರು.

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರ್ಣೆಗಳು :

ಉದಾ (1) □ABCD ಯ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು 4 : 5 : 7 : 8 ಇವೆ. ಹಾಗಾದರೆ □ABCD ಇದು ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನವಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 5.30

ಉತ್ತರ : $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ ಇವುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $(4x)^\circ$, $(5x)^\circ$, $(7x)^\circ$, ಮತ್ತು $(8x)^\circ$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ ಚೌಕೋನದ ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳ ಅಳತಗಳ ಭೇರೀಜು 360° ಇರುತ್ತದೆ.

$\therefore\ 4x + 5x + 7x + 8x = 360$

$\therefore\ 24x = 360^\circ \quad \therefore\ x = 15$

$\angle A = 4 \times 15 = 60^\circ$, $\angle B = 5 \times 15 = 75^\circ$, $\angle C = 7 \times 15 = 105^\circ$,

ಮತ್ತು $\angle D = 8 \times 15 = 120^\circ$

ಈಗ $\angle B + \angle C = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$

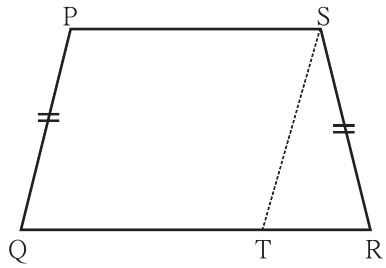
$\therefore$ ಭುಜ CD $\parallel$ ಭುಜ BA...... (I)

ಆದರೆ $\angle B + \angle A = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ \neq 180^\circ$

$\therefore$ ಭುಜ BC ಮತ್ತು ಭುಜ AD ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಇಲ್ಲ ....(II)

$\therefore$ □ABCD ಇದು ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನವಿದೆ ....(I) ಹಾಗೂ (II) ರ ಮೇಲಿಂದ

ಉದಾ (2) □PQRS ದಲ್ಲಿ ಭುಜ PS $\parallel$ ಭುಜ QR ಮತ್ತು ಭುಜ PQ $\cong$ ಭುಜ SR, ಭುಜ QR > ಭುಜ PS ಹಾಗಾದರೆ $\angle PQR \cong \angle SRQ$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 5.31

ಪಕ್ಷ : □PQRS ದಲ್ಲಿ ಭುಜ PS $\parallel$ ಭುಜ QR ಮತ್ತು ಭುಜ PQ $\cong$ ಭುಜ SR

ಸಾಧ್ಯ : $\angle PQR \cong \angle SRQ$

ರಚನೆ : S ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಭುಜ PQ ಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಷಾಖಂಡ ತೆಗೆಯಲಾಗಿ, ಅದು ಭುಜ QR ಗೆ T ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.

ಸಿದ್ಧತೆ : □PQRS ದಲ್ಲಿ

ರೇಖ PS $\parallel$ ರೇಖ QT .... ಪಕ್ಷ ಮತ್ತು Q-T-R

ರೇಖ PQ $\parallel$ ರೇಖ ST .... ರಚನೆ

$\therefore$ □PQRS ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.

$\therefore \angle PQT \cong \angle STR$ ..... ಸಂಗತಕೋನಗಳು (I)

ಅದರಂತೆ ರೇಖ PQ $\cong$ ರೇಖ ST

ಆದರೆ ರೇಖ PQ $\cong$ ರೇಖ ST ......(ಪಕ್ಷ)

$\therefore$ ರೇಖ ST $\cong$ ರೇಖ SR

$\therefore \angle STR \cong \angle SRT$..... ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ (II)

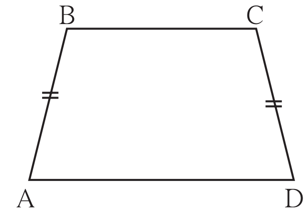
$\therefore \angle PQT \cong \angle SRT$ ....(I) ಹಾಗೂ (II) ರ ಮೇಲಿಂದ

$\therefore\ \angle PQR \cong \angle SRQ$ .... Q-T-R.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾಗುವದೆನೆಂದರೆ, ಸಮದ್ವಿಭುಜ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದ ತಳಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿದ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.4

1. □IJKL ದಲ್ಲಿ ಭುಜ IJ || ಭುಜ KL ಇದ್ದು ∠I = 108° ∠K = 53° ಇದ್ದರೆ ∠J ಮತ್ತು ∠L ಇವುಗಳ ಅಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
2. □ABCD ಯಲ್ಲಿ ಭುಜ BC || ಭುಜ AD ಇದ್ದು ಭುಜ AB ≅ ಭುಜ DC ಇದೆ, ಒಂದುವೇಳೆ ∠A = 72° ಇದ್ದರೆ ∠B, ಮತ್ತು ∠D ಗಳ ಅಳತೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.
3. ಆಕೃತಿ 5.32 ರಲ್ಲಿ □ABCD ಯಲ್ಲಿ ಭುಜ BC < ಭುಜ AD ಇದ್ದು
   ಭುಜ BC || ಭುಜ AD ಮತ್ತು
   ಭುಜ BA ≅ ಭುಜ CD
   ಇದ್ದರೆ ∠ABC ≅ ∠DCB ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



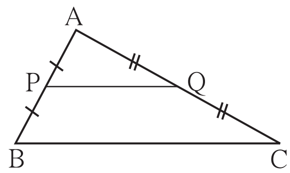
ಆಕೃತಿ 5.32

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರಮೇಯ (Theorem of midpoints of two sides of a triangle)

ವಿಧಾನ : ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಷಾಖಂಡವು ಮೂರನೆಯ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಆ ಭುಜದ ಉದ್ದಳತೆಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : Δ ABC ಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದು P ಇದು ರೇಖ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಹಾಗೂ ಬಿಂದು Q ಇದು ರೇಖ AC ದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ.

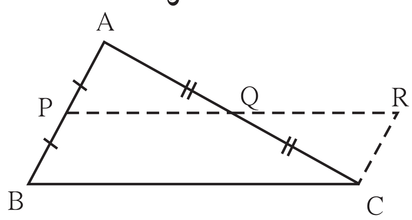


ಆಕೃತಿ 5.33

ಸಾಧ್ಯ : ರೇಖ PQ || ರೇಖ BC

ಮತ್ತು $PQ = \frac{1}{2}$ BC

ರಚನೆ : ರೇಖ PQ ಇದನ್ನು R ದ ವರೆಗೆ PQ = QR ಅಗುವಂತೆ ಬೆಳಿಸಿ ರೇಖ RC ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 5.34

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ AQP ಹಾಗೂ Δ CQR ದಲ್ಲಿ

ರೇಖ PQ ≅ ರೇಖ QR ...... ರಚನೆ

ರೇಖ AQ ≅ ರೇಖ QC ...... Q ಇದು AC ದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು

∠AQP ≅ ∠CQR ..... ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನ

∴ Δ AQP ≅ Δ CQR .... ಭು-ಕೋ-ಭು ಪರೀಕ್ಷೆ

∠PAQ ≅ ∠RCQ ..... (1) ಎಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳು

∴ ರೇಖ AP ≅ ರೇಖ CR ......(2) ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು

ವಿಧಾನ (1) ರ ಮೇಲಿಂದ ರೇಖ AB || ರೇಖ CR......... ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ

ವಿಧಾನ (2) ರ ಮೇಲಿಂಧ ರೇಖ AP ≅ ರೇಖ CR

ಆದರೆ ರೇಖ AP ≅ ರೇಖ PB ≅ ರೇಖ CR ಮತ್ತು ರೇಖ PB || ರೇಖ CR

∴ □PBCR ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.

∴ ರೇಖ PQ || ರೇಖ BC ಮತ್ತು PR = BC ..... ಕಾರಣ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳ ಸಮಾನ ಉದ್ದಳತೆಯ ಇರುವವು.

$PQ = \frac{1}{2}$ PR ...... ರಚನೆ

$\therefore$ $PQ = \frac{1}{2}$ BC $\quad\because$ PR = BC

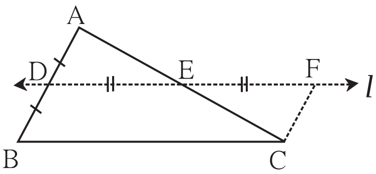
ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

ಪ್ರಮೇಯ: ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ವಿನಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಹಾಗೂ ಎರಡನೆ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಿರುವ ರೇಷೆ ಮೂರನೆಯ ಭುಜವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ವಿಧಾನದ ಸಲುವಾಗಿ ಆಕೃತಿ, ಪಕ್ಷ, ಸಾಧ್ಯ, ರಚನೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಆ ವಿಧಾನದ ಸಿದ್ಧತೆ ಬರೆಯುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಿರಿ.

ಪಕ್ಷ : Δ ABC ಯ ಭುಜ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು D ಇದೆ.

ಬಿಂದು D ದಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಭುಜ BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಿರುವ ರೇಖೆ l ಇದು ಭುಜ AC ಗೆ ಬಿಂದು E ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು.



ಆಕೃತಿ 5.35

ಸಾಧ್ಯ : AE = EC

ರಚನೆ : ಬಿಂದು C ದಲ್ಲಿಯ ರೇಖ ABಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆ ರೇಖೆ lಗೆ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಛೇದಿಸುವುದೋ, ಆ ಬಿಂದುವಿಗೆ F ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ : ರೇಖೆ l || ರೇಖೆ BC (ಪಕ್ಷ) ಮತ್ತು ಮಾಡಿರುವ ರಚನೆಯ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ.
□BCFD ಇದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.
Δ ADE $\cong$ Δ CFE ಇದನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಸಾಧ್ಯ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

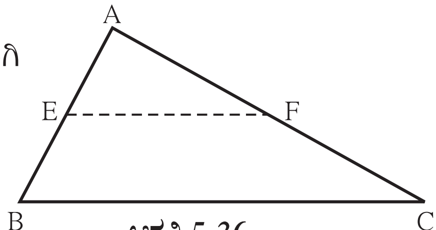
ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ (1) Δ ABC ಯ ಭುಜ AB ಹಾಗೂ AC ದ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಬಿಂದು E ಹಾಗೂ F ಗಳು ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ. EF = 5.6 ಇದ್ದರೆ BC ದ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : Δ ABC ಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದು E ಹಾಗೂ ಬಿಂದು F ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಭುಜ AB ಹಾಗೂ ಭುಜ AC ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ.

$EF = \frac{1}{2}$ BC .... ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರಮೇಯ

$5.6 = \frac{1}{2}$ BC $\quad\therefore$ BC = 5.6 × 2 = 11.2



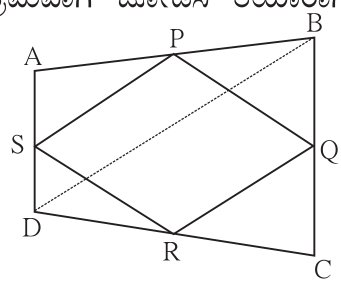
ಆಕೃತಿ 5.36

ಉದಾ (2) ಯಾವುದೇ ಚೌಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿ ತಯಾರಾಗುವ ಚೌಕೋನ ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

ಪಕ್ಷ : □ABCD ಯ ಭುಜ AB, BC, CD ಹಾಗೂ AD ದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಅನುಕ್ರಮಾವಗಿ P, Q, R, S ಗಳಿವೆ.

ಸಾಧ್ಯ : □PQRS ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.

ರಚನೆ : ಕರ್ಣ BD ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 5.37

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ ABD ಯಲ್ಲಿ S ಇದು AD ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಹಾಗೂ P ಇದು AB ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿದೆ.

$\therefore$ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕನುಸಾರ, PS $\parallel$ DB ಮತ್ತು PS = $\frac{1}{2}$ BD .... (1)

ಅದರಂತೆ Δ DBC ಯಲ್ಲಿ Q ಹಾಗೂ R ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ BC ಹಾಗೂ DC ಈ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ.

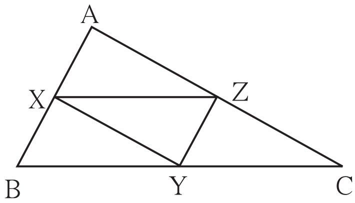
$\therefore$QR $\parallel$ BD, QR = $\frac{1}{2}$ BD .... (2) ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರಮೇಯನ್ನುಸಾರವಾಗಿ

$\therefore$PS $\parallel$ QR, PS = QR .... (1) ಹಾಗೂ (2) ರ ಮೇಲಿನ

$\therefore$ $\square$PQRS ಇದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.

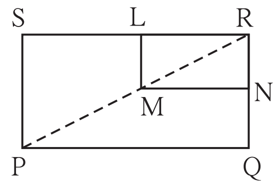
ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.5

1. ಆಕೃತಿ 5.38 ರಲ್ಲಿ Δ ABC ಯ ಭುಜ AB, ಭುಜ BC ಹಾಗೂ ಭುಜ AC ಗಳ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಬಿಂದುಗಳು X, Y, Z ಇವು ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ. AB = 5 ಸೆ.ಮೀ. AC = 9 ಸೆ.ಮೀ. BC = 11 ಸೆ.ಮೀ. ಇದ್ದರೆ XY, YZ, XZ ಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.



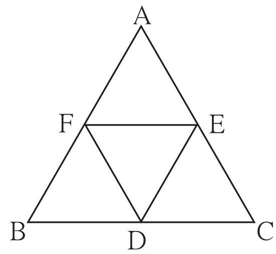
ಆಕೃತಿ 5.38

2. ಆಕೃತಿ 5.39 ರಲ್ಲಿ $\square$PQRS ಮತ್ತು $\square$MNRL ಇವು ಆಯತಗಳಿವೆ. ಬಿಂದು M ಇದು PR ದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ (i) SL = LR, (ii) LN = $\frac{1}{2}$SQ.



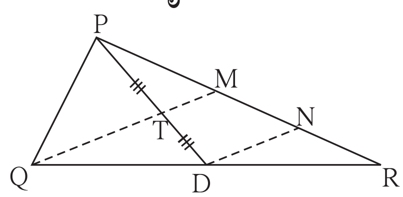
ಆಕೃತಿ 5.39

3. ಆಕೃತಿ 5.40 ಯಲ್ಲಿ Δ ABC ಇದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಬಿಂದು F, D, E ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಭುಜ AB, ಭುಜ BC, ಭುಜ AC ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿದ್ದರೆ Δ FED ಇದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 5.40

4. ಆಕೃತಿ 5.41 ರಲ್ಲಿ ರೇಖ PD ಇದು Δ PQR ದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇದೆ. ಬಿಂದು T ಇದು PD ದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ, QT ಬೆಳೆಸಿದಾಗ PR ಗೆ M ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ $\frac{PM}{PR} = \frac{1}{3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. [ಸೂಚನೆ : DN $\parallel$ QM ತೆಗೆಯಿರಿ.]



ಆಕೃತಿ 5.41

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ 5

1. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪರ್ಯಾಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಕೊಟ್ಟ ಉತ್ತರಗಳಲ್ಲಿಯ ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ.
   (i) ಯಾವ ಚೌಕೋನದ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವ ಭುಜಗಳ ಎಲ್ಲ ಜೋಡಿಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ, ಆ ಚೌಕೋನದ ಹೆಸರು ಯಾವುದು?
   (A) ಆಯತ (B) ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ (C) ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ (D) ಸಮಭುಜ ಚೌರಸ

(ii) ಒಂದು ಚೌರಸದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಳತೆ $12\sqrt{2}$ ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ. ಅದರ ಪರಿಮಿತಿ ಎಷ್ಟು ?

(A) 24 ಸೆಮೀ (B) $24\sqrt{2}$ ಸೆಮೀ (C) 48 ಸೆಮೀ (D) $48\sqrt{2}$ ಸೆಮೀ

(iii) ಒಂದು ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಎದುರುಬದರಿನ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು $(2x)^\circ$ ಹಾಗೂ $(3x - 40)^\circ$ ಇದ್ದರೆ $x = ?$

(A) 100° (B) 80° (C) 160° (D) 40°

2. ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನದ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವ ಭುಜಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 7 ಸೆ.ಮೀ. ಹಾಗೂ 24 ಸೆ.ಮೀ. ಇದ್ದರೆ ಆ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

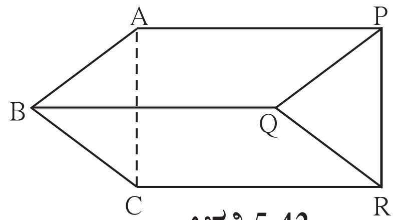
3. ಚೌರಸದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಳತೆ 13 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಚೌರಸದ ಭುಜ ತೆಗೆಯಿರಿ.

4. ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 3:4 ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಿಮಿತಿ 112 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅದರ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

5. ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣ PR ಹಾಗೂ ಕರ್ಣ QS ಇವುಗಳ ಉದ್ದಳತೆ 20 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ 48 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನ PQRS ದ ಭುಜ PQ ದ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

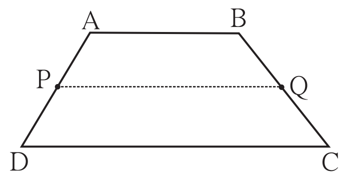
6. ಆಯತ PQRS ದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ M ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಒಂದುವೇಳೆ $\angle QMR = 50^\circ$ ಇದ್ದರೆ $\angle MPS$ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

7. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿ 5.42 ರಲ್ಲಿ
ರೇಖ AB $\parallel$ ರೇಖ PQ, ರೇಖ AB $\cong$ ರೇಖ PQ,
ರೇಖ AC $\parallel$ ರೇಖ PR, ರೇಖ AC $\cong$ ರೇಖ PR
ಇದ್ದರೆ, ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.
ರೇಖ BC $\parallel$ ರೇಖ QR ಮತ್ತು ರೇಖ BC $\cong$ ರೇಖ QR.



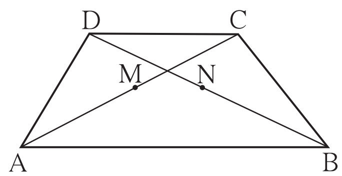
ಆಕೃತಿ 5.42

8*. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿ 5.43 ರಲ್ಲಿ □ABCD ಇದು ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನವಿದೆ. AB $\parallel$ DC ಇದೆ. P ಹಾಗೂ Q ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ರೇಖ AD ಹಾಗೂ ರೇಖ BC ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ, PQ $\parallel$ AB ಹಾಗೂ $PQ = \frac{1}{2}(AB + DC)$



ಆಕೃತಿ 5.43

9. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿ 5.44 ದಲ್ಲಿ □ABCD ಇದು ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನವಿದೆ. AB $\parallel$ DC. M ಮತ್ತು N ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕರ್ಣ AC ಹಾಗೂ ಕರ್ಣ DB ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ, MN $\parallel$ AB



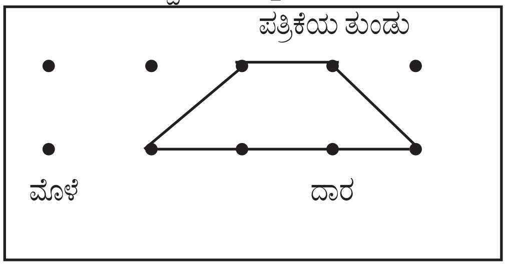
ಆಕೃತಿ 5.44

ಕೃತಿ

ಚೌಕೋನದ ವಿವಿಧ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ತಾಳೆ ಹಾಕುವದು.

ಸಾಹಿತ್ಯ : 15 ಸೆಮೀ × 10 ಸೆಮೀದ ಪ್ಲಾಯುಡದ ತುಂಡು; 12 ರಿಂದ 15 ಮೊಳೆಗಳು, ದಪ್ಪ ದಾರ, ಕತ್ತರಿ.

ಸೂಚನೆ : 15 ಸೆಮೀ × 10 ಸೆಮೀದ ಪ್ಲಾಯುಡದ್ 2 ಸೆಮೀ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ 5 ಮೊಳೆಗಳನ್ನು ಹೊಡೆಯಿರಿ. ಆದರಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ಸರಳವಾದ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆಸಹ ಮೊಳೆಗಳನ್ನು ಹೊಡಿಯಿರಿ. ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರಸಹ 2 ಸೆಮೀ ಇಡಿರಿ. ದಾರದಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಚೌಕೋನಗಳನ್ನು (ಮೊಳೆಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ) ತಯಾರಿಸಿರಿ. ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ದಾರದಿಂದ ತಾಳೆ ಹಾಕಿರಿ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಚೌಕೋನಗಳ ವಿವಿಧ ಪ್ರಮೇಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

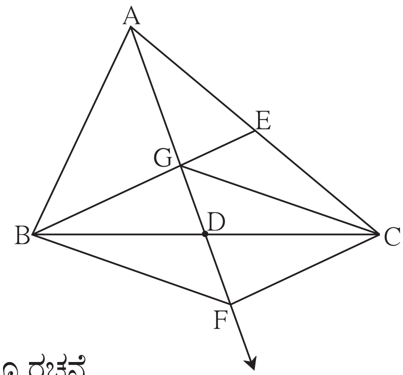


ಆಕೃತಿ 5.45

ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಗಾಗಿ

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮಧ್ಯಗಾಮಿಯ ಸಂಪಾದ ಬಿಂದು ಪತ್ರಿಯೊಂದು ಮಧ್ಯಗಾಮಿಗೆ 2 : 1 ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ, ಈ ಗುಣಧರ್ಮ ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

ಅದರ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದವೆ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 5.46

ಪಕ್ಷ : Δ ABC ಯ ರೇಖ AD ಮತ್ತು ರೇಖ BE

ಈ ಮಧ್ಯಗಾಮಿಗಳು, G ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು.

ಸಾಧ್ಯ : AG : GD = 2 : 1

ರಚನೆ : ಕಿರಣ AD ಯ ಮೇಲೆ F ಬಿಂದು

G-D-F ಮತ್ತು GD = DF

ಸಿದ್ಧತೆ : □BGCF ದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ. .... ಪಕ್ಷ ಹಾಗೂ ರಚನೆ.

∴ □BGCF ಇದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಇದೆ.

∴ ರೇಖ BE || ರೇಖ FC ..... ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳನ್ನು ಸಮಾವಿಷ್ಟಗೊಳ್ಳುವ ರೇಖೆ.

ಈಗ Δ AFC ದ ಭುಜ AC ದ E ಬಿಂದು ಇದು ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ. .... (ಪಕ್ಷ)

ರೇಖ EB || ರೇಖ FC

ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡನೆಯ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಿರುವ ರೇಖೆ ಮೂರನೆಯ ಭುಜವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

∴ ರೇಖ AF ದ G ಇದು ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ.

∴ AG = GF

ಆದರೆ AG = 2 GD

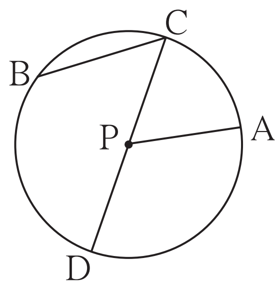
$\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ ಅಂದರೆ AG : GD = 2 : 1

6 ವರ್ತುಳ

ಬನ್ನಿ ಕಲಿಯೋಣ

- ವರ್ತುಳ
- ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾದ ಗುಣಧರ್ಮ
- ಅಂತರ್‌ವರ್ತುಳ
- ಪರಿವರ್ತುಳ

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.



ಆಕೃತಿ 6.1

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿಯ P ಕೇಂದ್ರ ಇರುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಕೆಳಗಿನ ಕೊಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

---	ರೇಖ PA	---	---	---	---	∠CPA
ಜ್ಯಾ	---	ವ್ಯಾಸ	ತ್ರಿಜ್ಯ	ಕೇಂದ್ರ	ಕೇಂದ್ರಸ್ಥ ಕೋನ	---

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ವರ್ತುಳ (Circle)

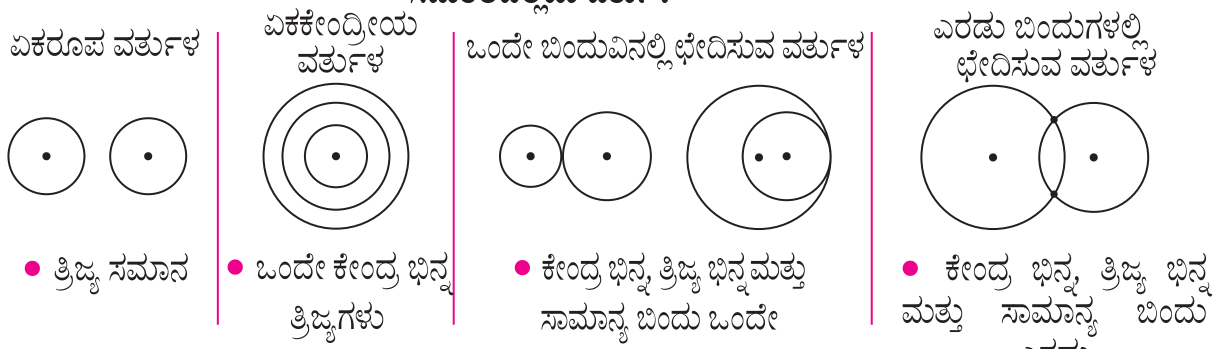
ಬಿಂದುಗಳ ಗಣದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಈ ವರ್ತುಳದ ವರ್ಣನೆ ಮಾಡೋಣ.

- ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ **ವರ್ತಳ** (Circle) ಎನ್ನುವರು. ಆ ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿಗೆ **ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರ** ಅಥವಾ **ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು** (Centre of a circle) ಎನ್ನುವರು.

ವರ್ತುಳದ ಕೆಲವು ಸಂಜ್ಞೆಗಳು

- ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಷಾಖಂಡಕ್ಕೆ ವರ್ತುಳದ **ತ್ರಿಜ್ಯ** (radius) ಎನ್ನುವರು.
- ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ವರ್ತುಳದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರಕ್ಕೆ **ತ್ರಿಜ್ಯ** ಎನ್ನುವರು.
- ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಷಾ ಖಂಡಕ್ಕ ಆ ವರ್ತುಳದ **ಜ್ಯಾ** (Chord) ಎನ್ನುವರು.
- ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಆ ವರ್ತುಳದ **ವ್ಯಾಸ** (Diameter) ಎನ್ನುವರು. ವ್ಯಾಸವು ವರ್ತುಳದ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಜ್ಯಾ ಇರುವದು.

ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ವರ್ತುಳ

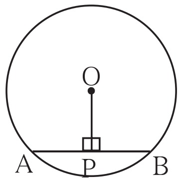


ಆಕೃತಿ 6.2

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾದ ಗುಣಧರ್ಮ (Properties of chord)

ಕೃತಿ I : ಗುಂಪಿನ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಮಾಡಬೇಕು.
ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ನೋಟಬುಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ತೆಗೆಯಿರಿ.
ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾದ ಮೇಲೆ ಲಂಬ ಎಳೆಯಿರಿ, ಜ್ಯಾದ ಯಾವ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿವೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.
ಗುಂಪು ಪ್ರಮುಖನು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಕಾರ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸಿ.
ಆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ನಿರೀಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ನೊಂದಾಯಿಸಬೇಕು.



ಆಕೃತಿ 6.3

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ / ಉದ್ದ	1	2	3	4	5	6
l (AP)	... ಸೆಮೀ					
l (PB)	... ಸೆಮೀ					

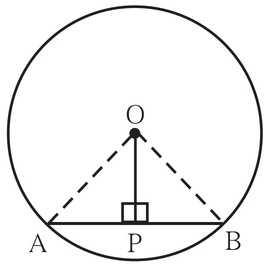
ಈ ನಿರೀಕ್ಷಣೆಯಿಂದ ತಿಳಿದು ಬರುವ ಗುಣಧರ್ಮ ಬರೆಯಿರಿ. ಈ ಗುಣಧರ್ಮದ ಸಿದ್ಧತೆ ನೋಡುವಾ.

ಪ್ರಮೇಯ: ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಜ್ಯಾವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : O ಕೇಂದ್ರಳದಲ್ಲಿ ರೇಖ AB ಇದು ಜ್ಯಾ ಇದೆ.
ರೇಖ OP $\perp$ ಜ್ಯಾ AB

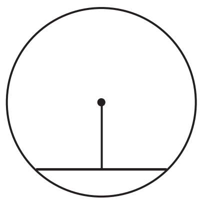
ಸಾಧ್ಯ : ರೇಖ AP $\cong$ ರೇಖ BP

ಸಿದ್ಧತೆ : ರೇಖ OA ಮತ್ತು ರೇಖ OB ತೆಗೆಯಿರಿ.
Δ OPA ಮತ್ತು Δ OPB ಗಳಲ್ಲಿ
$\angle$OPA $\cong$ $\angle$OPB . . . . ರೇಖ OP $\perp$ ಜ್ಯಾ AB,
ರೇಖ OP $\cong$ ರೇಖ OP . . . . ಸಾಮಾನ್ಯ ಭುಜ
ಕರ್ಣ OA $\cong$ ಕರ್ಣ OB . . . . ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ
$\therefore$ Δ OPA $\cong$ Δ OPB . . . . ಕರ್ಣ ಭುಜ ಪ್ರಮೇಯ
ರೇಖ PA $\cong$ ರೇಖ PB . . . . ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಂಗತ ಭುಜ



ಆಕೃತಿ 6.4

ಕೃತಿ II : ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿಯನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು.
ನಿಮ್ಮ ನೋಟಬುಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ತೆಗೆಯಿರಿ.
ಜ್ಯಾ ಮಧ್ಯ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಆ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಮತ್ತು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರ ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಷಾಖಂಡ ತೆಗೆಯಿರಿ.
ಆ ರೇಷೆಯು ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಉಂಟುಮಾಡಿದ ಕೋನ ಅಳೆಯಿರಿ.
ಏನು ಕಂಡುಬರುವುದು ?
ನೀವು ಅಳೆದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಒಬ್ಬರು ಇನ್ನೊಬ್ಬರಿಗೆ ಹೇಳಿರಿ.
ಇದರಿಂದ ಯಾವ ಗುಣಧರ್ಮ ತಿಳಿದು ಬರುವುದು, ಅದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

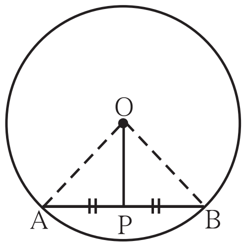

ಆಕೃತಿ 6.5

ಪ್ರಮೇಯ : ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಷಾಖಂಡವು ಆ ಜಾಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : O ಕೇಂದ್ರ ಇರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ರೇಖ AB ಇದು ಜ್ಯಾ ಇದೆ.
ಜ್ಯಾ AB ಯ P ಇದು ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ. ಅಂದರೆ ರೇಖ AP $\cong$ ರೇಖ PB.

ಸಾಧ್ಯ : ರೇಖ OP $\perp$ ಜ್ಯಾ AB

ಸಿದ್ಧತೆ : ರೇಖ OA ಮತ್ತು ರೇಖ OB ರಚಿಸಿರಿ.



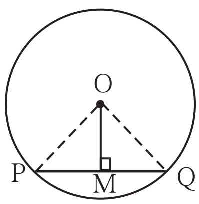
ಆಕೃತಿ 6.6

Δ AOP ಮತ್ತು Δ BOP ಗಳಲ್ಲಿ
ರೇಖ OA $\cong$ ರೇಖ OB . . . . (ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ)
ರೇಖ OP $\cong$ ರೇಖ OP. . . . . (ಸಾಮಾನ್ಯ ಭುಜ)
ರೇಖ AP $\cong$ ರೇಖ BP . . . . (ಪಕ್ಷ)
$\therefore$ Δ AOP $\cong$ Δ BOP . . . . (ಭು ಭು ಭು)
$\therefore$ $\angle$OPA $\cong$ $\angle$OPB . . . . (ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಕೋನ) . . . .(I)
ಈಗ $\angle OPA + \angle OPB = 180^\circ$ . . . (ರೇಷೀಯ ಜೋಡಿಕೋನ)
$\angle OPB + \angle OPB = 180^\circ$ . . . . . . (I) (ರಿಂದ)
$2\ \angle OPB = 180^\circ$
$\angle OPB = 90^\circ$
$\therefore$ ರೇಖ OP $\perp$ ಜ್ಯಾ AB

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ (1) ಒಂದು ವತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಆ ವರ್ತುಳದ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದಳತೆ 8 ಸೆಮೀ ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾದ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ :



ಆಕೃತಿ 6.7

ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯ ಆಧಾರದಿಂದ ಆಕೃತಿ ತೆಗೆಯೋಣ
O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ PQ ದ ಉದ್ದಳತೆ 8 ಸೆಮೀ ಇದೆ.
ರೇಖ OM $\perp$ ಜ್ಯಾ PQ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವ ಹಾಗೆ 'ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ಜ್ಯಾವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ'.

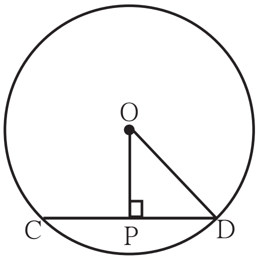
$\therefore$ PM = MQ = 4 ಸೆಮೀ
ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಮೀ ಅಂದರೆ OQ = 5 ಸೆಮೀ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.
ಕಾಟಕೋನ Δ OMQ ದಲ್ಲಿ ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ
$OM^2 + MQ^2 = OQ^2$
$OM^2 + 4^2 = 5^2$
$\therefore\ OM^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$
$\therefore\ OM = 3$
ಅಂದರೆ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾದ ಅಂತರ 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದೆ.

ಉದಾ (2) ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 20 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಆ ವರ್ತುಳದ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರ O ಇದೆ. ತ್ರಿಜ್ಯ = OD = 20 ಸೆಮೀ ಜ್ಯಾ CD ಕೇಂದ್ರ O ದಿಂದ ಅಂತರ 12 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ರೇಖ OP $\perp$ ರೇಖ CD

$\therefore$ OP = 12 ಸೆಮೀ

$\therefore$ CP = PD ...... ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ಜ್ಯಾವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುವುದು



ಆಕೃತಿ 6.8

ಕಾಟಕೋನ Δ OPD ಯಲ್ಲಿ ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ

$$OP^2 + PD^2 = OD^2$$

$$(12)^2 + PD^2 = 20^2$$

$$PD^2 = 20^2 - 12^2$$

$$PD^2 = (20+12)(20-12)$$

$$= 32 \times 8 = 256$$

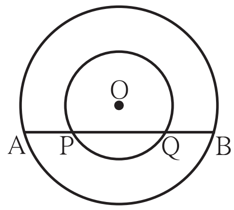
$\therefore$ PD = 16 $\quad\quad$ $\therefore$ CP = 16

CD = CP + PD = 16 + 16 = 32

$\therefore$ ಜ್ಯಾದ ಲಂಬವು 32 ಸೆಮೀ ಇದೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.1

1. ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರ O ದಿಂದ ಜ್ಯಾ AB ಯ ಅಂತರ 8 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಜ್ಯಾ AB ಯ ಉದ್ದಳತೆ 12 ಸೆಮೀ ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸ 26 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದು, ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದಳತೆಯು 24 ಸೆಮೀ ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅಂತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾದ ಅಂತರ 30 ಇದ್ದು, ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 34 ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. O ಕೇಂದ್ರ ಇರುವ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 41 ಇದೆ. ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾ PQ ದ ಉದ್ದಳತೆ 80 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಜ್ಯಾ PQ ದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅಂತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಆಕೃತಿ 6.9 ರಲ್ಲಿ O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳ ಇದೆ. ದೊಡ್ಡ ವರ್ತುಳದ AB ಯು ಚಿಕ್ಕ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ : AP = BQ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.
6. ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸವು ವರ್ತುಳದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ. ಆ ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 6.9

ಕೃತಿ I

(1) ಅನುಕೂಲವಾದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ತುಳ ರಚಿಸಿರಿ.

(2) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಉದ್ದಳತೆಯ ಎರಡು ಜ್ಯಾ ತೆಗೆಯಿರಿ.

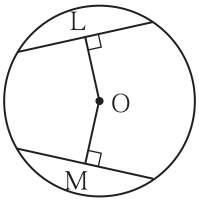
(3) ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು. ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಲಂಬ ಎಳೆಯಿರಿ

(4) ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದಳತೆ ಅಳೆಯಿರಿ.

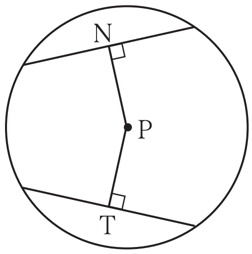
ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ವರ್ತುಳದ ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರ ಈ ಸಂಬಂಧದ ಗುಣಧರ್ಮ

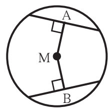
ಕೃತಿ II



ಆಕೃತಿ (i)



ಆಕೃತಿ (ii)



ಆಕೃತಿ (iii)

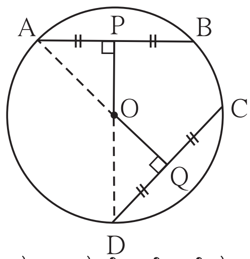
ಆಕೃತಿ (i) ರಲ್ಲಿ OL = OM, ಆಕೃತಿ (ii) ರಲ್ಲಿ PN = PT, ಆಕೃತಿ (iii) ರಲ್ಲಿ MA = MB ಹೀಗೆ ಕಂಡುಬರುವುದೆ ? ಈ ಕೃತಿಯಿಂದ ತಿಳಿದು ಬರುವ ಗುಣಧರ್ಮ ಶಬ್ದಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾಗಳ ಗುಣಧರ್ಮ (Properties of congruent chords)

ಪ್ರಮೇಯ: ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದಿಂದಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

ಪಕ್ಷ : O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ
ಜ್ಯಾ AB $\cong$ ಜ್ಯಾ CD
OP $\perp$ AB, OQ $\perp$ CD



ಆಕೃತಿ 6.10

ಸಾಧ್ಯ : OP = OQ

ರಚನೆ : ರೇಖ OA ಮತ್ತು ರೇಖ OD ಜೋಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ : $AP = \frac{1}{2}$ AB, $DQ = \frac{1}{2}$ CD . . . ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಜ್ಯಾವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

AB = CD . . . . ಪಕ್ಷ

$\therefore$ AP = DQ

$\therefore$ ರೇಖ AP $\cong$ ರೇಖ DQ . . . . (I) . . . ಸಮಾನ ಉದ್ದಳತೆಯ ರೇಷಾಖಂಡ.

ಕಾಟಕೋನ Δ APO ಮತ್ತು ಕಾಟಕೋನ Δ DQO ಗಳಲ್ಲಿ

ರೇಖ AP $\cong$ ರೇಖ DQ . . . . (I) ರಿಂದ

ಕರ್ಣ OA $\cong$ ಕರ್ಣ OD . . . . ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ

$\therefore$ Δ APO $\cong$ Δ DQO . . . . ಕರ್ಣ ಭುಜ ಪ್ರಮೇಯ

ರೇಖ OP $\cong$ ರೇಖ OQ . . . . ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜ

$\therefore$ OP = OQ . . . . ಏಕರೂಪ ರೇಷಾಖಂಡ ಉದ್ದಳತೆ ಸಮಾನ

ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

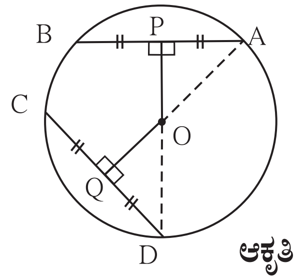
ಪ್ರಮೇಯ : ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರು ಜ್ಯಾಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

ಪಕ್ಷ : O ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ

ರೇಖ $OP \perp$ ಜ್ಯಾ AB

ರೇಖ $OQ \perp$ ಜ್ಯಾ CD

ಮತ್ತು OP = OQ



ಆಕೃತಿ 6.11

ಸಾಧ್ಯ : ಜ್ಯಾ AB $\cong$ ಜ್ಯಾ CD

ರಚನೆ : ರೇಖ OA ಮತ್ತು ರೇಖ OD ಜೋಡಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ : ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿಯ ರಿಕ್ತ ಸ್ಥಾನ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

ಕಾಟಕೋನ Δ OPA ಮತ್ತು ಕಾಟಕೋನ Δ OQD ದಲ್ಲಿ

ಕರ್ಣ OA $\cong$ ಕರ್ಣ OD . . . . $\boxed{}$

ರೇಖ OP $\cong$ ರೇಖ OQ . . . . ಪಕ್ಷ

$\therefore$ Δ OPA $\cong$ Δ OQD . . . . $\boxed{}$

$\therefore$ ರೇಖ AP $\cong$ ರೇಖ QD . . . . ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜ

$\therefore$ AP = QD . . . . (I)

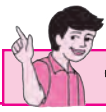
ಆದರೆ AP = $\frac{1}{2}$ AB, OQ = $\frac{1}{2}$ CD . . . . . $\boxed{}$

$\therefore$ AP = QD . . . . ವಿಧಾನ (I) ರಿಂದ

$\therefore$ AB = CD

$\therefore$ ರೇಖ AB $\cong$ ರೇಖ CD

ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇದೆ. ಇದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.



ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

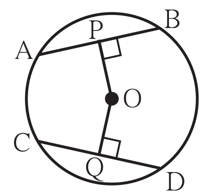
ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾಗಳು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಕೃತಿ : ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಬದಲಾಗಿ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವುದು.

1. ಏಕರೂಪ ವರ್ತುಳಗಳಲ್ಲಿ ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾಗಳು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.
2. ಏಕರೂಪ ವರ್ತುಳಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳು. ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ, ಈ ಎರಡೂ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಪಕ್ಷ ಸಾಧ್ಯ ಸಿದ್ಧತೆ ಬರೆಯಿರಿ.

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆ

ಉದಾ ಕೊಟ್ಟ ಆಕೃತಿ 6.12 ದಲ್ಲಿ O ಇದು ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರವಿದ್ದು AB = CD ಇದೆ. ಜ್ಯಾ OP = 4 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ OQ ದ ಉದ್ದಳತೆ



ಆಕೃತಿ 6.12

ಉತ್ತರ : O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ

ಜ್ಯಾ AB $\cong$ ಜ್ಯಾ CD ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ.

OP ⊥ AB, OQ ⊥ CD

OP = 4 ಸೆಮೀ ಇದೆ ಅಂದರೆ ಜ್ಯಾ AB ಇದು O ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 4 ಸೆಮೀ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಇದೆ.

ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವ ಹಾಗೆ, ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾಗಳು ಕೇಂದ್ರದಿಂಧ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

∴ OQ = 4 ಸೆಮೀ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.2

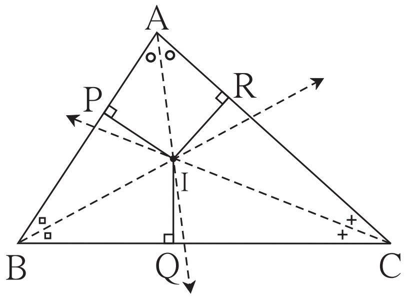
1. ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 10 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಆ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಂತೆ 16 ಸೆಮೀ ಉದ್ದಳತೆಯ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಜ್ಯಾಗಳು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆ ?
2. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಮಾನ ಉದ್ದಳತೆಯ ಜ್ಯಾಗಳು ಇವೆ. ಅವುಗಳು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇದ್ದು, ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 13 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. C ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ರೇಖ PM ಮತ್ತು ರೇಖ PN ಇವುಗಳು ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾಗಳಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕಿರಣ PC ಇದು ∠NPM ದ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ವಿವಿಧ ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆದು, ಅವುಗಳ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಏಕ ಸಂಪಾತ ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೇವೆ. ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದು 'I' ಈ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು, ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವುದು.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ ವರ್ತುಳ (Incircle of a triangle)



ಆಕೃತಿ 6.13

Δ ABC ಯ ಮೂರು ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು I ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಕೊಂಡಿವೆ.

ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ I ಈ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ ಲಂಬ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ.

IP ⊥ AB, IQ ⊥ BC, IR ⊥ AC

ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು ಕೋನಗಳ ಎರಡೂ ಭುಜಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆ ಇದನ್ನು ನಾವು ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ್ದೇವೆ.

∠B ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ I ಈ ಬಿಂದು ಇದೆ. ಅಂದರೆ IP = IQ.

∠C ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ I ಈ ಬಿಂದು ಇದೆ. ಅಂದರೆ IQ = IR

IP = IQ= IR

ಬಿಂದು I ಇದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳಿಂದ ಅಂದರೆ AB, AC, BC ಯಿಂದ ಸಮದೂರ ಇದೆ.

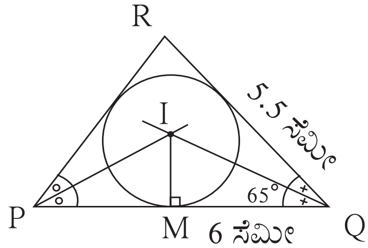
∴ ಬಿಂದು I ಇದು ಕೇಂದ್ರ ತಿಳಿದು ಮತ್ತು IP ಇದು ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ವರ್ತುಳ ತೆಗೆದಾಗ ವರ್ತುಳವು ಭುಜ AB, AC ಮತ್ತು BC ಇವುಗಳಿಗೆ ಒಳಗಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಷ ಮಾಡುವುದು. ಇಂತಹ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ಎನ್ನುವರು.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ರಚಿಸುವುದು (To construct incircle of a triangle)

ಉದಾ Δ PQR ದಲ್ಲಿ, PQ = 6 ಸೆಮೀ, $\angle Q = 35^\circ$, QR = 5.5 ಸೆಮೀ ಅಳತೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು Δ PQR ದ ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ರಚಿಸಿರಿ.

ಮೊದಲು ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ ರಚಿಸಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಯನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 6.14

ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು :

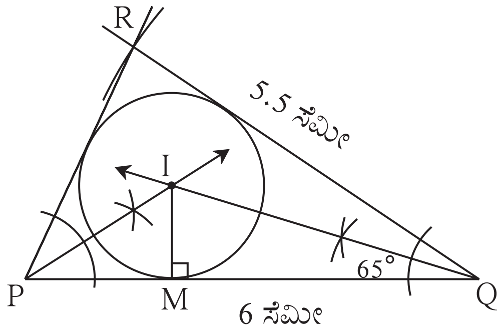
(1) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಯ Δ PQR ರಚಿಸಿರಿ.

(2) ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(3) ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿಗೆ I ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.

(4) ಬಿಂದು I ದಿಂದ ರೇಖ PQ ದ ಮೇಲೆ IM ಲಂಬ ಎಳೆಯಿರಿ.

(5) IM ಇದು ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು I ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳ ರಚಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 6.15

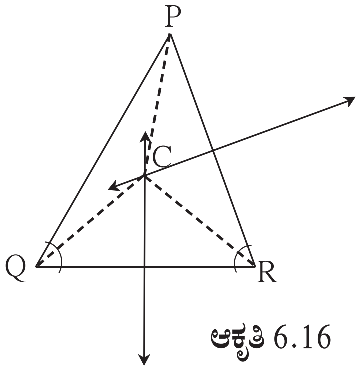
ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡೋಣ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಷಮಾಡವ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ಎನ್ನುವರು ಮತ್ತು ಆ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರ ಎನ್ನುವರು ಅಥವಾ ಅಂತರ ಮಧ್ಯ ಅಥವಾ ಅಂತರ ಕೇಂದ್ರ ಎನ್ನುವರು.

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಏಕ ಸಂಪಾತಿ ಇರುತ್ತವೆ ಈ ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನು ವಿವಿಧ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುವನ್ನು C ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಗುರುತಿಸುವರು.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.



ಆಕೃತಿ 6.16

Δ PQR ಭುಜಗಳ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು C ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಕೊಂಡಿವೆ. C ಇದು ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದು ಇದೆ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವರ್ತುಳ (Circumcircle)

ಬಿಂದು C ಇದು ತ್ರಿಕೋನ PQR ದ ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು ಇದೆ. PC, QC, RC ಜೋಡಿಸಿರಿ. ರೇಷಾಖಂಡದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು ಇದು ಆ ರೇಷಾಖಂಡದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಅಭ್ಯಾಸಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಬಿಂದು C ಇದು ರೇಖ PQ ದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಇದೆ. $\therefore$ PC = QC I

ಬಿಂದು C ಇದು ರೇಖ QR ದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಇದೆ. $\therefore$ QC = RC II

$\therefore$ PC = QC = RC . . . . . ವಿಧಾನ I ಮತ್ತು II ರಿಂದ.

$\therefore$ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು C ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮತ್ತು PC ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ರಚಿಸಿದ ವರ್ತುಳವು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಶಿರೋಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೋಗುವುದು ಇಂತಹ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವರ್ತುಳ ಎನ್ನುವರು.

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡೋಣ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವರ್ತುಳ ಎನ್ನುವರು.
ಮತ್ತು ಆ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಪರಿಕೇಂದ್ರ ಎನ್ನುವರು.

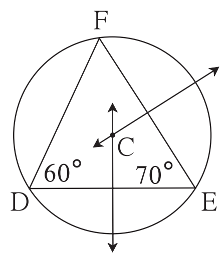
ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯುವುದು

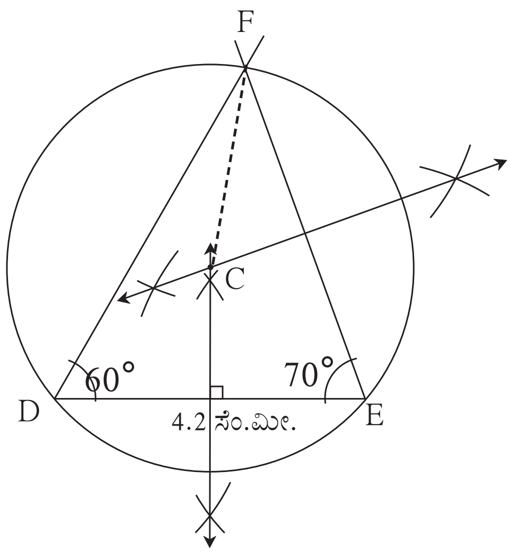
ಉದಾ. Δ DEF ದಲ್ಲಿ DE = 4.2 ಸೆಮೀ, $\angle D = 60^\circ$, $\angle E = 70^\circ$ ಹಾಗಾದರೆ Δ DEF ತೆಗೆದು ಅದರ ಪರಿವರ್ತುಳ ರಚಿಸಿರಿ.

ಮೊದಲು ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ, ಅದರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ



ಆಕೃತಿ 6.17



ಆಕೃತಿ 6.18

ರಚನೆಯ ಹಂತ :

(1) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಯ DEF ರಚಿಸಿರಿ.

(2) ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ರಚಿಸಿರಿ.

(3) ಆ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡಿ ಕೊಳ್ಳುವವೋ ಆ ಬಿಂದುವಿಗೆ C ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.

(4) ರೇಖ CF ರಚಿಸಿರಿ.

(5) C ಕೇಂದ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು CF ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ತುಳ ರಚಿಸಿರಿ.

ಕೃತಿ

ವಿವಿಧ ಅಳತೆಗಳ ಮತ್ತು ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರಗಳ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಿ ಅವುಗಳ ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ಪರಿವರ್ತುಳ ರಚಿಸಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ನಿರೀಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನೋಂದಾಯಿಸಿ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಿರಿ.

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪ್ರಕಾರ	ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ	ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ	ವಿಷಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ
ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದ ಸ್ಥಾನ	ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ ಭಾಗದಲ್ಲಿ	ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್ ಭಾಗದಲ್ಲಿ	ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ ಭಾಗದಲ್ಲಿ
ಪರಿವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದ ಸ್ಥಾನ	ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ ಭಾಗದಲ್ಲಿ	ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಬಾಹ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲೆ	

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪ್ರಕಾರ	ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ	ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ	ವಿಶಾಲ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ
ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದ ಸ್ಥಾನ			
ಪರಿವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದ ಸ್ಥಾನ		ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ	

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

- ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳ ಒಳಬದಿಯಿಂದ ಸ್ಪರ್ಷಿಸುತ್ತದೆ.
- ಒತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯುವಾಗ ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆಯ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.
- ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವರ್ತುಳವು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಶಿರೋಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವುದು.
- ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಅದರ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆಯ ಬೇಕಾಗುವುದು.
- ಲಘುಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿಕೇಂದ್ರವು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಗಡೆ ಇರುತ್ತವೆ.
- ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿಕೇಂದ್ರ ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇರುತ್ತದೆ.
- ವಿಶಾಲಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿಕೇಂದ್ರ ತ್ರಿಕೋನದ ಹೊರಗೆ ಇರುವುದು.
- ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ ಮಧ್ಯ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇರುವುದು.

ಕೃತಿ : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆದು ಅದರ ಅಂತರವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ಪರಿವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ.
ಮೇಲಿನ ಕೃತಿ ಮಾಡುವಾಗ ನಿಮಗೆ ಕೆಳಗಿನಸಂಗತಿಯಿಂದ ಏನು ತಿಳಿದು ಬಹುವುದು ?

(1) ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯುವಾಗ ಅವುಗಳ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಭುಜಗಳ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇವು ಒಂದೇ ಇರುತ್ತವೆಯೆ ?

(2) ಪರಿವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ಅಂತರ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರ ಒಂದೇ ಇರುವುದೆ ? ಹೀಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಕಾರಣ ಏನು ಇರುವುದು?

(3) ಪರಿವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಅಂತರ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಅಳೆದು ಅವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡೋಣ.

- ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯುವಾಗ ಅವುಗಳ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇವುಗಳು ಒಂದೇ ಬರುತ್ತವೆ.
- ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ಅಂತರ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರ ಒಂದೇ ಇರುತ್ತದೆ.
- ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅಂತರ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಗುಣೋತ್ತರ 2 : 1 ಇರುತ್ತದೆ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.3

1. Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 100^\circ$, BC = 6.4 ಸೆಮೀ $\angle C = 50^\circ$ ಇರುವ Δ ABC ರಚಿಸಿ. ಅದರ ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ.
2. Δ PQR ದಲ್ಲಿ $\angle P = 70^\circ$, $\angle R = 50^\circ$, QR = 7.3 ಸೆಮೀ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಿ ಅದರ ಪರಿವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ.
3. Δ XYZ ದಲ್ಲಿ XY = 6.7 ಸೆಮೀ, YZ = 5.8 ಸೆಮೀ, XZ = 6.9 ಸೆಮೀ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಿ ಅದರ ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ರಚಿಸಿರಿ.
4. Δ LMN ದಲ್ಲಿ LM = 7.2 ಸೆಮೀ, $\angle M = 105^\circ$, MN = 6.4 ಸೆಮೀ ಇರುವ LMN ತೆಗೆದು ಅದರ ಪರಿವರ್ತುಳ ರಚಿಸಿರಿ.
5. Δ DEF ದಲ್ಲಿ DE = EF = 6 ಸೆಮೀ $\angle F = 45^\circ$ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಿ ಅದರ ಪರಿವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಂ 6

1. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪರ್ಯಾಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದು, ಅದರ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅಂತರ 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಆ ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದಳತೆ ಎಷ್ಟು ?

(A) 16 ಸೆಮೀ (B) 8 ಸೆಮೀ (C) 12 ಸೆಮೀ (D) 32 ಸೆಮೀ

(ii) ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಏಕ ಸಂಪಾತ ಇರುತ್ತವೆ. ಆ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಏನು ಹೇಳುವರು ?

(A) ಮಧ್ಯಗಾ ಸಂಪಾತ (B) ಪರಿಕೇಂದ್ರ (C) ಅಂತರ ಕೇಂದ್ರ (D) ಲಂಬ ಸಂಪಾತ

(iii) ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಏನೆಂದು ಹೇಳುವರು ?

(A) ಪರಿವರ್ತುಳ (B) ಅಂತರ ವರ್ತುಳ (C) ಏಕರೂಪ ವರ್ತುಳ (D) ಏಕ ಕೇಂದ್ರಿ ವರ್ತುಳ

(iv) ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾ 24 ಸೆಮೀ ಇದ್ದು, ಅದರ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅಂತರ 5 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(A) 12 ಸೆಮೀ (B) 13 ಸೆಮೀ (C) 14 ಸೆಮೀ (D) 15 ಸೆಮೀ

(v) 2.9 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ ಎಷ್ಟು ಉದ್ದಳತೆಯ ಜ್ಯಾ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯ ?

(A) 3.5 ಸೆಮೀ (B) 7 ಸೆಮೀ (C) 10 ಸೆಮೀ (D) 5.8 ಸೆಮೀ

(vi) ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 4 ಸೆಮೀ ಇದೆ. O ಇದು ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು ಇದೆ l(OP) = 4.2 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ. 'P' ಕೇಂದ್ರದ ಸ್ಥಾನ ಎಲ್ಲಿ ಇರುವುದು ?

(A) ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ (B) ವರ್ತುಳದ ಅಂತರ ಭಾಗದಲ್ಲಿ C) ವರ್ತುಳದ ಬಾಹ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ (D) ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ

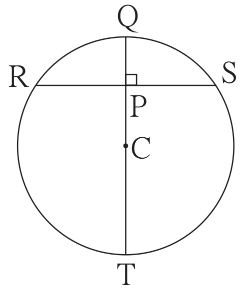
(vii) ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರ ಇರುವ ಜ್ಯಾಗಳ ಉದ್ದಳತೆ 6 ಸೆಮೀ, ಮತ್ತು 8 ಸೆಮೀ ಇವೆ. ಆ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಮೀ ಇದ್ದಾಗ ಆ ಜ್ಯಾಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(A) 2 ಸೆಮೀ (B) 1 ಸೆಮೀ (C) 8 ಸೆಮೀ (D) 7 ಸೆಮೀ

2. ಸಮಭುಜ Δ DSP ಯಲ್ಲಿ DS = 7.5 ಸೆಮೀ ಹಾಗಾದರೆ Δ DSP ಯ ಪರಿವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಪರಿವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ಅಂತರ ವರ್ತುಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಅಳೆದು ಬರೆಯಿರಿ. ಪರಿವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅಂತರ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದೊಡನೆ ಇರುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ.

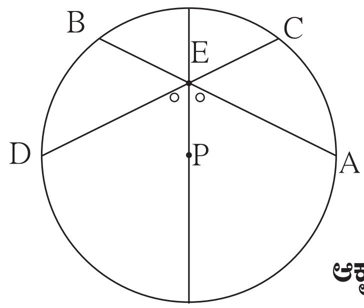
3. Δ NTS ದಲ್ಲಿ NT = 5.7 ಸೆಮೀ, TS = 7.5 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು $\angle NTS = 110^\circ$ ಇದ್ದರೆ Δ NTS ತೆಗೆದು ಅದರ ಪರಿವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ಅಂತರ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ.

4. ಆಕೃತಿ 6.19 ರಲ್ಲಿ C ಇದು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ. ರೇಖ QT ಇದು ವ್ಯಾಸವಿದೆ. CT = 13, CP = 5 ಇದ್ದರೆ ಜ್ಯಾ RS ತೆಗೆಯಿರಿ.



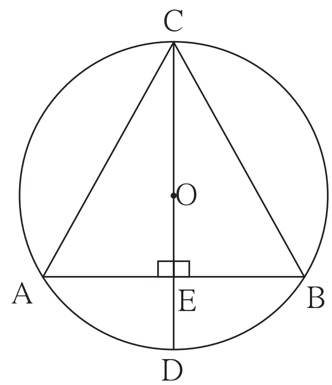
ಆಕೃತಿ 6.19

5. ಆಕೃತಿ 6.20 ರಿಲ್ಲಿ P ಇದು ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ. ಜ್ಯಾ AB ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ CD ಇವುಗಳು ವ್ಯಾಸದ ಮೇಲೆ E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.
$\angle AEP \cong \angle DEP$ ಇದ್ದರೆ
AB = CD ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 6.20

6. ಆಕೃತಿ 6.21 ದಲ್ಲಿ O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ CD ಇದು ವ್ಯಾಸವಿದೆ ಮತ್ತು AB ಇದು ಜ್ಯಾ ಇದೆ. ವ್ಯಾಸ CD ಇದು ಜ್ಯಾ AB ಗೆ E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬವಿದೆ.
Δ ABC ಇದು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 6.21

ICT Tools or Links

Geogebra software ದ ಸಹಾಯದಿಂದ ವರ್ತುಳ ರಚಿಸಿ ಜ್ಯಾಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕದಿಂದ ಅನುಭವಿಸಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. Move option ದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಮೂಲ ತ್ರಿಕೋನದ ಆಕಾರ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಅಂತರ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಪರಿಕೇಂದ್ರ ಇವುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆಯಿಂದ ಅನುಭವಿಸಿರಿ.

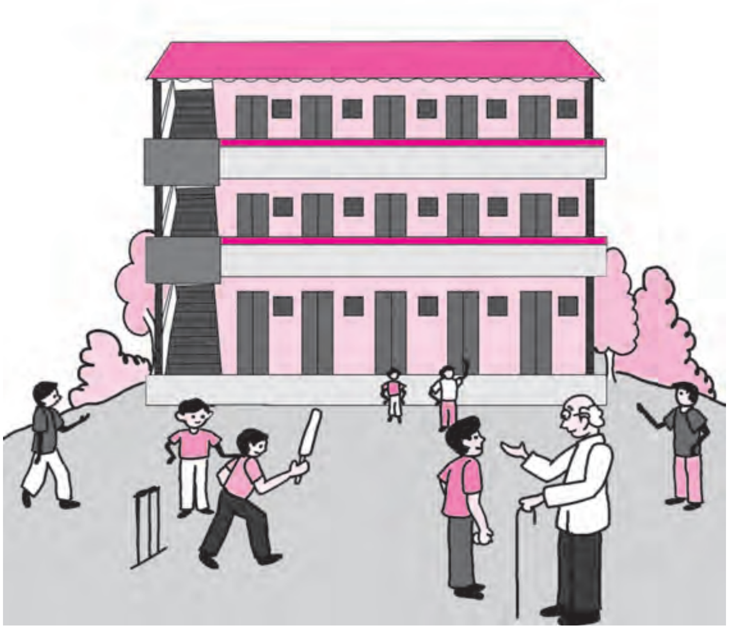
7 ನಿರ್ದೇಶಕ ಭೂಮಿತಿ

ENRQJJ

ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

- ಅಕ್ಷ, ಆರಂಭಬಿಂದು ಮತ್ತು ಚರಣ
- ಬಿಂದುವಿನ ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ನಿರ್ದೇಶಕ
- ಬಿಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸುವದು
- X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ
- Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ
- ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಮುಂದಿನ ಪಟಾಂಗಣದಲ್ಲಿ ಚಿಂಟು ಮತ್ತು ಆತನ ಮಿತ್ರರು ಕ್ರಿಕೇಟ ಆಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ ಒಬ್ಬ ತಾತನು ಅಲ್ಲಿಗೆ ಒಂದನು.



ತಾತ : ಚಿಂಟು ದತ್ತಾಭಾವು ಈ ಸೊಸಾಯಟಿಯಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತಾರೆಯೇ ?

ಚಿಂಟು : ಹೌದು ಇಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತಾರೆ. ಎರಡನೆಯ ಅಂತಸ್ತಿನಲ್ಲಿ ಅವರ ಮನೆ ಇದೆ. ಇಲ್ಲಿಂದ ಆ ಕಿಡಕಿ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆಯೋ ಅಲ್ಲಿ.

ತಾತ : ಎರಡನೆಯ ಅಂತಸ್ತಿನ ಮೇಲೆ ನನಗೆ ಐದು ಕಿಡಕಿಗಳು ಕಾಣಿಸುತ್ತವೆ. ನಿಜವಾದ ಮನೆ ಯಾವದು ?

ಚಿಂಟು : ಎರಡನೆಯ ಅಂತಸ್ತಿನ ಮೇಲಿನ ಎಡಗಡೆಯಿಂದ ಮೂರನೆಯ ಕಿಡಕಿ ಅವರ ದಾಗಿದೆ.

ಚಿಂಟು ಮಾಡಿದ ದತ್ತಾಭಾವು ಇವರ ಮನೆಯ ಸ್ಥಳದ ವರ್ಣನೆ ಅಂದರೆ ನಿರ್ದೇಶಕ ಭೂಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಸಂಕಲ್ಪನೆ ಯಾಗಿದೆ.

ಮನೆಯ ಸ್ಥಾನ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳುವ ಸಲುವಾಗಿ ಬರೆ ಅಂತಸ್ತಿನ ಕ್ರಮಾಂಕ ಹೇಳಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವದಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ಎಡಗಡಯಿಂದ ಅಥವಾ ಬಲಗಡೆಯಿಂದ ಎಷ್ಟನೆಯ ಮನೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಬೇಕಾಗುದದು. ಅಂದರೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಬೇಕಾಗುವದು. ಭೂಮಿಯಿಂದ ಎರಡನೆಯ ಅಂತಸ್ತು ಮತ್ತು ಎಡಗಡೆಯಿಂದ ಮೂರನೆಯ ಕಿಡಕಿ ಹೀಗೆ ಎರಡು ಕ್ರಮವಾಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಉಪಯೋಗಿಸ ಬೇಕಾಗುವದು.

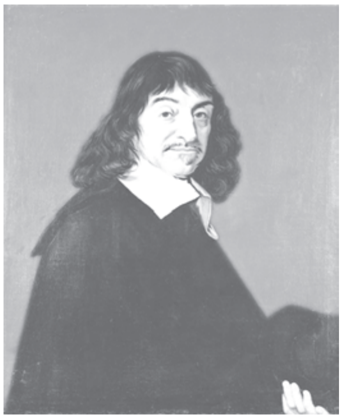
ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಅಕ್ಷ, ಆರಂಭಬಿಂದು ಮತ್ತು ಚರಣ (Axes, origin, quadrants)

ದತ್ತಾಭಾವು ಇವರ ಮನೆಯ ಸ್ಥಾನ ಎರಡು ಕ್ರಮವಾಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ಅದರಂತೆ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಲಂಬ ವಿರುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರದಿಂದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಸ್ಥಾನ ಹೇಳುವ ಸಲುವಾಗಿ, ಅದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಅಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯಾರೇಷ ತೆಗೆಯುವರು. ಈ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಗೆ X- ಅಕ್ಷ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ರೆನೆ ದೆಕಾರ್ತ (1596–1650)



ಹದಿನೇಳನೆಯ ಶತಕದಲ್ಲಿ ಫ್ರೆಂಚ ಗಣತಜ್ಞ ರೆನೆ ದೆಕಾರ್ತ ಇವರು ಸಮತಲದಲ್ಲಿಂದು ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ತೋರಿಸುವದಕ್ಕಾಗಿ ನಿರ್ದೇಶಕ ಭೂಮಿತಿಯ ಪದ್ಧತಿ ಸೂಚಿಸಿದರು ಮಾಡಿದರು. ಈ ಪದ್ಧತಿಗೆ. 'ಕಾರ್ತೇಶಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕ ಪದ್ಧತಿ' ಎಂದು ಕರೆಯ ಲಾಗುತ್ತದೆ. ದೆಕಾರ್ತ ಇವರ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಈ ಹೆಸರು ಕೊಡಲಾಯಿತು ದೆಕಾರ್ತ ಇವರು ಪ್ರಪಥಮವಾಗಿ ಯುಕ್ಲಿಡ ಭೂಮಿತಿ ಮತ್ತು ಬೀಜಗಣಿತ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪ್ರಸ್ಥಾಪಿಸಿದ್ದಕ್ಕಾಗಿ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಕ್ರಾಂತಿ ಯಾಯಿತು.

ಕಾರ್ತೇಶಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕ ಪದ್ಧತಿ. ಇದು ವಿಶ್ಲೇಷಕ ಭೂಮಿತಿಯ (Analytical Geometry) ಯ ತಳಹದಿ ಇರುತ್ತದ. ಲಾಜ್ಯಾಮೆಟ್ರಿಕ್ ಇದು ರೆನೆ ದೆಕಾರ್ತ ಇವರ ಮೊದಲನೆಯ ಪುಸ್ತಕವಾಗಿದೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅವರು ಭೂಮಿತಿಯ ಅಭ್ಯಾಸದ ಸಲುವಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಲಾಗುವದು. ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಬಿಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಮಿಕ ಜೋಡಿಯಿಂದ ತೋರಿಸಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಅವರು ಪ್ರಪ್ರಥಮವಾಗಿ ತಮ್ಮ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿದರು. ಈ ಕ್ರಮಿತ ಜೋಡಿಗೆ 'ಕಾರ್ತೇಶಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕ' ಎನ್ನುವರು.

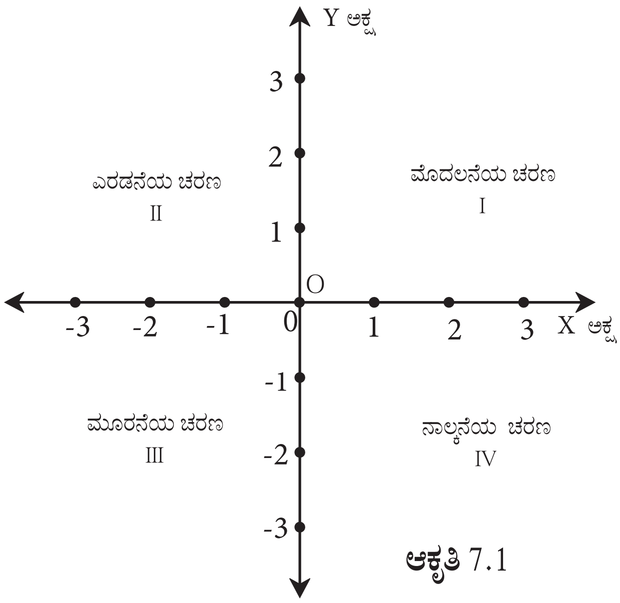
ನಿರ್ದೇಶಕ ಭೂಮಿತಿಯ ಉಪಯೋಗ ಭೌತಿಕಶಾಸ್ತ್ರ, ಅಭಿಯಾಂತ್ರಿಕಶಾಸ್ತ್ರ, ನೌಕಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ, ಭೂಕಂಪಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಕಲೆ ಇಂತಹ ವಿವಿಧ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಲಾಗುವದು. ತಂತ್ರಜ್ಞಾನದ ಪ್ರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ದೇಶಕ ಭೂಮಿತಿ ಮಹತ್ವದ ಪಾತ್ರ ವಹಿಸುವದು. ''ಜಿವೊಜಿಬ್ರಾದಲ್ಲಿ ಭೂಮಿತಿ ಮತ್ತು ಬೀಜಗಣಿತ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಹಸಂಬಂಧ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣಿಸುವದು. Geometry ಮತ್ತು Algebra ಈ ಶಬ್ದ ಗಳ ಮೇಲಿಂದ Geogebra ಎಂದು ಹೆಸರು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ.

X- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ 0 ಈ ನಿರ್ದೇಶಕ ವಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಿರುವ ಎರಡನೆಯ ರೇಖೆ ಎಂದರೆ Y-ಅಕ್ಷ ಇರುವದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ 0 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಆ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಆರಂಭ ಬಿಂದು (Origin) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅದು 'O' ಈ ಇಗ್ಲೀಷ ಅಕ್ಷರದಿಂಧ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ.

X-ಅಕ್ಷ ಮೇಲೆ O ದಬಲಬದಿಗೆ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ ಎಡಗಡೆ ಋಣಸಂಖ್ಯೆ ಇಂದ ತೋರಿಸುವರು.

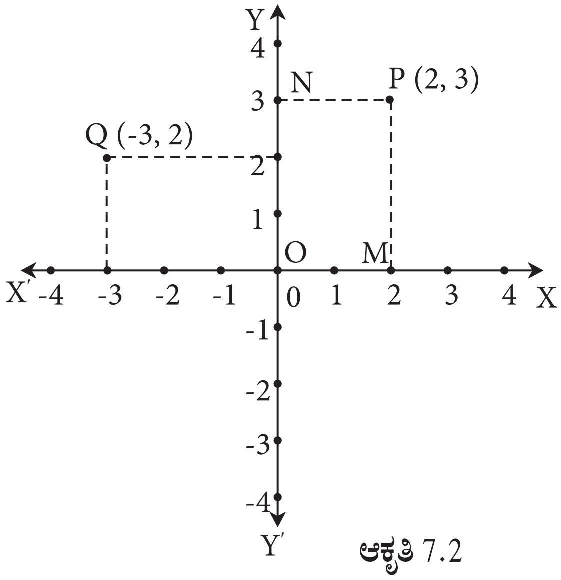
Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ O ದ ಮೇಲೆ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಡೆ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಂದ ತೋರಿಸುವದು.

X ಮತ್ತು Y ಅಕ್ಷಗಳಿಂದ ಸಮತಲದ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳಾಗುವವು. ಆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ **ಚರಣ** ಹೀಗೆ ಅನ್ನುವರು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಗಡಿಯಾರದ ಮುಳ್ಳಿನ ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಚರಣಗಳ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿಯುವ ಸಂಕೇತ ಇದೆ.



ಆಕೃತಿ 7.1

ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಬಿಂದುವಿನ ಸಹನಿರ್ದೇಶಕ (Co-ordinates of a point in a plane)



ಆಕೃತಿ 7.2

X-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು Y-ಅಕ್ಷದಿಂದ ನಿಶ್ಚಿತವಾದ ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಬಿಂದು P ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ ಅದರ ಸ್ಥಾನವುಗಳ ಎರಡೂ ಅಕ್ಷಗಳಿಂದ ಅಂತರದಿಂದ ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ರೇಖ PM ⊥ X-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ರೇಖ PN ⊥ Y-ಅಕ್ಷ ತೆಗೆಯಿರಿ.

M ದ X ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ 2 ಇದೆ. N ದ Y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ 3 ಇದೆ. ಅಂದರೆ P ದ x ನಿರ್ದೇಶಕ 2 ಮತ್ತು y ನಿರ್ದೇಶಕ 3 ಇದೆ.

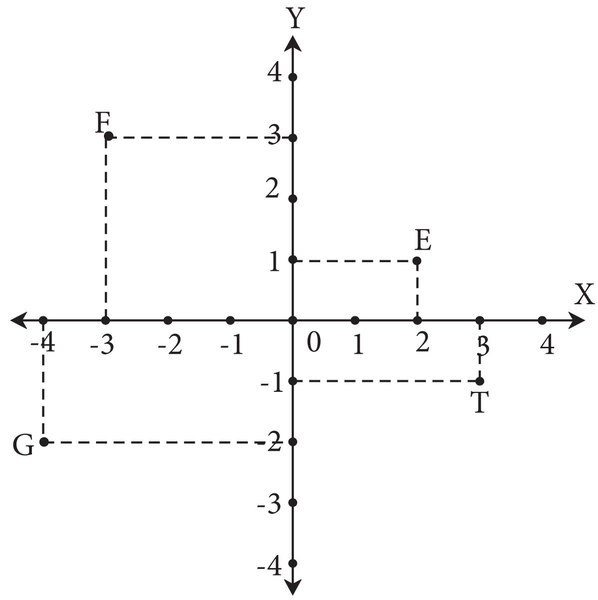
ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಹೇಳುವಾಗ ಅವುಗಳ x ದ ನಿರ್ದೇಶಕವನ್ನು ಮೊದಲು ಹೇಳುವ ಸಂಕೇತ ಇದೆ. ಈ ಸಂಕೇತದ ಅನುಸಾರ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕದ ಅಂತರದ 2, 3 ಈ ಕ್ರಮ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗುವದು ಮತ್ತು ಬಿಂದು P ದ ಸ್ಥಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯ (2, 3) ಈ ಜೋಡಿಯಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಹೇಳಲು ಬರುವದು.

ಬಿಂದು Q ದಿಂದ X ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ QS ಈ ಲಂಬ ತೆಗೆದು ಮತ್ತು Y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ QR ಈ ಲಂಬ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು. Q ದ X ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ನಿರ್ದೇಶಕ -3 ಮತ್ತು Y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ 2 ಇದೆ. ಅಂದರೆ ಬಿಂದು Q ದ ನಿರ್ದೇಶಕ (-3,2) ಇರುವುದು.

ಉದಾ. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ E, F, G, T ಈ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ಬರೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ :

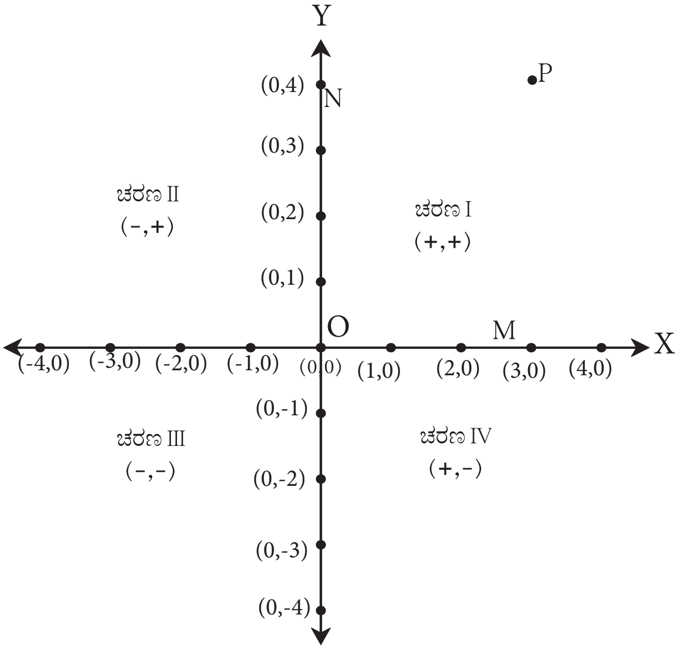
- ಬಿಂದು E ದ ನಿರ್ದೇಶಕ (2,1) ಇವೆ.
- ಬಿಂದು F ದ ನಿರ್ದೇಶಕ (-3,3) ಇವೆ.
- ಬಿಂದು G ದ ನಿರ್ದೇಶಕ (-4,-2) ಇವೆ.
- ಬಿಂದು T ದ ನಿರ್ದೇಶಕ (3,-1) ಇವೆ.



ಆಕೃತಿ 7.3

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (Co-ordinates of points on the axes)



ಆಕೃತಿ 7.4

M ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ವೆಂದರೆ x ನಿರ್ದೇಶಕ ಎಂದರೆ M ಬಿಂದುವಿನ Y ಅಕ್ಷದಿಂದ ಅಂತರ ಇರುವ ಆಗುವದು ಆ ಬಿಂದುವಿನ X ಅಕ್ಷದಿಂದ ಅಂತರ ಶೂನ್ಯ ಇದೆ. ಅದ್ದರಿಂದ M ದ y ನಿರ್ದೇಶಕ 0 ಇದೆ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ X ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ M ಬಿಂದುವಿನ ಸಹ ನಿರ್ದೇಶಕ (3,0) ಹೀಗೆ ಇವೆ. Y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ N ಬಿಂದುವಿನ y ನಿರ್ದೇಶಕ 4 ಇದೆ. ಕಾರಣ ಆ ಬಿಂದು X ಅಕ್ಷದಿಂದ 4 ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇದೆ. ಮತ್ತು ಬಿಂದು N ದ Y ಅಕ್ಷಷದಿಂದ ಅಂತರ ಶೂನ್ಯ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ y ನಿರ್ದೇಶಕ 0 ಇದೆ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ Y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ N ಈ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ (0,4) ಹೀಗೆ ಇದೆ.

ಈಗ 'O' ಈ ಆರಂಭಬಿಂದು X ಮತ್ತು Y ಎರಡೂ ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಇದೆ ಅಂದರೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನ X ಮತ್ತು Y ಈ ಎರಡೂ ಅಕ್ಷಗಳಿಂದ ಅಂತರ 0 ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 'O' ದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (0,0) ಇವೆ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಜೋಡಿ ನಿಗಡಿತ ಇರುವದು.

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

- X -ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ y ನಿರ್ದೇಶಕ ಶೂನ್ಯ ಇರುತ್ತದೆ.
- Y -ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ x ನಿರ್ದೇಶಕ ಶೂನ್ಯ ಇರುತ್ತದೆ.
- ಆರಂಭ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (0,0) ಇರುತ್ತವೆ.

ಉದಾ. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವ ಯಾವ ಚರಣದಲ್ಲಿವೆ ಅಥವಾ ಯಾವ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.
A(5,7), B(−6,4), C(4,−7), D(−8,−9), P(−3,0), Q(0,8)

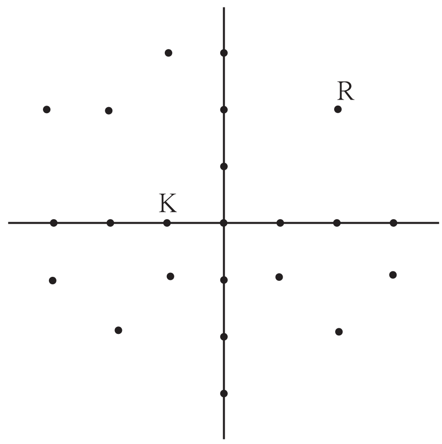
ಉತ್ತರ : A(5,7) ದ x ದ ನಿರ್ದೇಶಕ ಧನ ಇದೆ y ನಿರ್ದೇಶಕ ಧನ ಇದೆ. ∴ ಬಿಂದು A ಇದು ಮೊದಲನೆಯ ಚರಣದಲ್ಲಿ ಬರುವದು.
B(−6,4)ದ x ನಿರ್ದೇಶಕ ಋಣ ಇದೆ y ನಿರ್ದೇಶಕ ಧನ ಇದೆ. ∴ ಬಿಂದು B ಇದು ಎರಡನೆಯ ಚರಣದಲ್ಲಿ ಇದೆ.
C(4,−7) ದ x ನಿರ್ದೇಶಕ ಧನ ಇದೆ y ನಿರ್ದೇಶಕ ಋಣ ಇದೆ. ∴ ಬಿಂದು C ಇದು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಚರಣದಲ್ಲಿ ಇದೆ.
D(−8,−9) ದ x ನಿರ್ದೇಶಕ ಋಣ ಇದೆ y ನಿರ್ದೇಶಕ ಋಣ ಇದೆ. ∴ ಬಿಂದು D ಇದು ಮೂರನೆಯ ಚರಣದಲ್ಲಿ ಇದೆ.

P(-3,0) ದ y ನಿರ್ದೇಶಕ ಶೂನ್ಯ ಇದೆ. ∴ ಬಿಂದು P ಇದು X ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇದೆ.

Q(0,8) ರ x ನಿರ್ದೇಶಕ ಶೂನ್ಯ ಇದೆ. ∴ ಬಿಂದು Q ಇದು Y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇದೆ.

ಕೃತಿ ಶಾಲೆಯ ಮೈದಾನದ ಮೇಲೆ ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರಿ ಇದರಿಂದ X- ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು Y- ಅಕ್ಷ ತಯಾರಾಗುವುವು.

- ಬೇರೆ ಬಣ್ಣದಿಂದ ತೋರಿಸಿದ ಕಲೆಗಳ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಚರಣಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕೂಡ್ರಿಸಿರಿ.
- ಈಗ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿನ ಆದ್ಯಾಕ್ಷರದಿಂದ ಉಚ್ಚಾರ ಮಾಡಿ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ನಿಲ್ಲಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅವರ ನಿರ್ದೇಶಕ ವಿಚಾರಿಸಿರಿ. ಉದಾ: ರಾಜೇಂದ್ರ (2, 2) ಮತ್ತು ಕೀರ್ತಿ (-1, 0)
- ಈ ಪ್ರಕಾರ ಈ ಮೈದಾನದಲ್ಲಿ ಕೃತಿಯಿಂದ ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಮೋಜಿನಿಂದ ಸಹಜವಾಗಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವದು.



ಆಕೃತಿ 7.5

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಕೊಟ್ಟ ನಿರ್ದೇಶಕಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವದು (To plot the points of given co-ordinates)

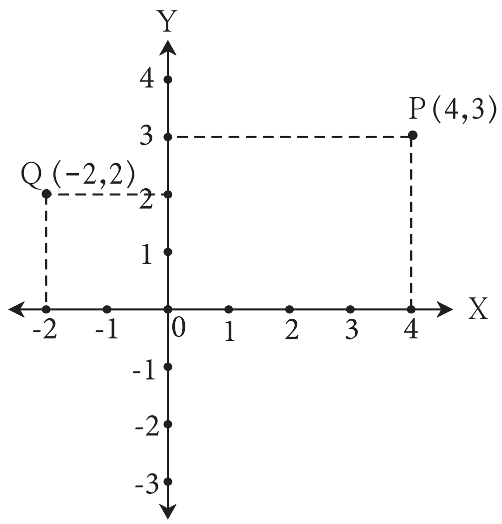
P (4,3) ಮತ್ತು Q (-2,2) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪನೆ ಮಾಡುವದಿದೆ. ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ಬಿಂದು ಸ್ಥಾಪನೆ ಮಾಡುವ ಹಂತಗಳು

(i) ಸಮತಲದಲ್ಲಿ X-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು Y-ಅಕ್ಷ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆರಂಭ ಬಿಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(ii) P (4,3) ಈ ಬಿಂದು ತೋರಿಸುವ ಸಲವಾಗಿ X ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ 4 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ತೋರಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

Y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ 3 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ತೋರಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 7.6

(iii) ಈ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಅಂದರೆ P (4,3) ಈ ಬಿಂದು ಇರುವದು. ಈ ಬಿಂದು ಯಾವ ಚರಣದಲ್ಲಿ ಇದೆ ? ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ.

(iv) ಅದೇ ಪ್ರಕಾರ Q (−2,2) ಈ ಬಿಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ ಈ ಬಿಂದು ಎರಡನೆಯ ಚರಣದಲ್ಲಿ ಬಂದಿದೆಯೆ? ಅದೇ ನಿರ್ದೇಶಕ ಪದ್ಧತಿಯ ಮೇಲೆ R(−3,−4), S(3,−1) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪನೆ ಮಾಡಿರಿ.

ಉದಾ. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವ ಚರಣದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಯಾವ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) (5,3) (ii) (−2,4) (iii) (2,−5) (iv) (0,4)

(v) (−3,0) (vi) (−2,2.5) (vii) (5,3.5) (viii) (−3.5,1.5)

(ix) (0, −4) (x) (2,−4)

ಉತ್ತರ :

	ನಿರ್ದೇಶಕ	ಚರಣ/ಅಕ್ಷ
(i)	(5,3)	ಚರಣ I
(ii)	(−2,4)	ಚರಣ II
(iii)	(2,−5)	ಚರಣ IV
(iv)	(0,4)	Y ಅಕ್ಷ
(v)	(−3,0)	X ಅಕ್ಷ

	ನಿರ್ದೇಶಕ	ಚರಣ/ಅಕ್ಷ
(vi)	(−2, −2.5)	ಚರಣ III
(vii)	(5,3.5)	ಚರಣ I
(viii)	(−3.5,1.5)	ಚರಣ II
(ix)	(0, −4)	Y ಅಕ್ಷ
(x)	(2,−4)	ಚರಣ IV

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.1

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳು ಅವುಗಳ ಸಹ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಯಾವ ಚರಣದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
   - A(−3,2), • B(−5,−2), • K(3.5,1.5), • D(2,10),
   - E(37,35), • F(15,−18), • G(3,−7), • H(0,−5),
   - M(12,0), • N(0,9), • P(0,2.5), • Q(−7,−3)

2. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವ ಚರಣದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ?

   (i) ಯಾವುದರ ಎರಡೂ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಧನ ವಿರುತ್ತವೆ. (ii) ಯಾವುದರ ಎರಡೂ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಋಣ ಇರುತ್ತವೆ.

   (iii) x ನಿರ್ದೇಶಕ ಧನ y ನಿರ್ದೇಶಕ ಋಣ ಇದೆ. (iv) x ನಿರ್ದೇಶಕ ಋಣ ಮತ್ತು y ನಿರ್ದೇಶಕ ಧನ ಇದೆ.

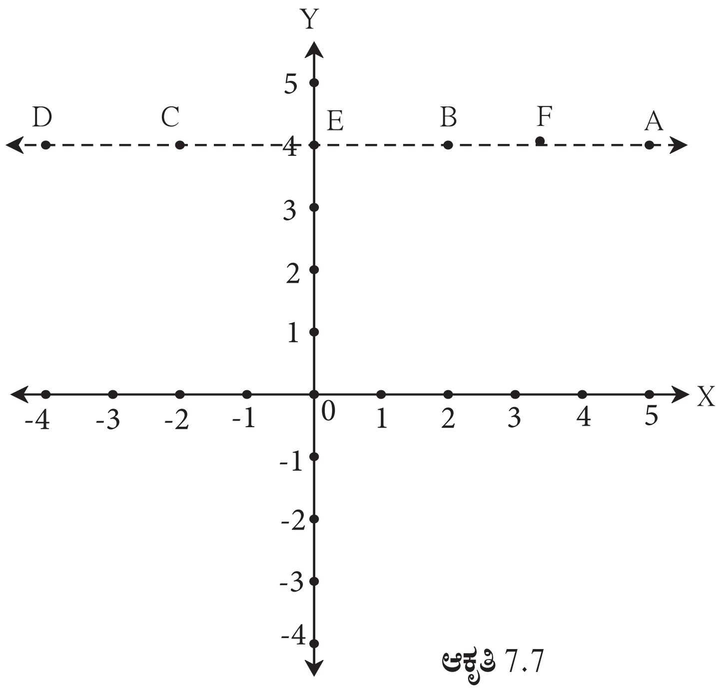
3. ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದೇಶಕ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತಮಾಡಿರಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.

   L(−2,4), M(5,6), N(−3,−4), P(2,−3), Q(6,−5), S(7,0), T(0,−5)

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

X –ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳು (Lines parallel to X–axis)

- ಆ ಲೇಖ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.
  A(5,4), B(2,4), C(–2,4), D(–4,4), E(0,4), F(3,4)
- ಬಿಂದುಗಳ ಸಹ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ.
- ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು y ನಿರ್ದೇಶಕ ಸಮಾನ ಇದೆ ಎಂಬುದು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಂದಿತೆ?
- ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕ–ರೇಖೀಯ ಇವೆ.
- ಈ ರೇಖೆಯು ಯಾವ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇದೆ.
- ರೇಖೆ DA ಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ y ನಿರ್ದೇಶಕವು ಸಮಾನ ಅಂದರೆ 4 ಇದೆ. ಅದು ಸ್ಥಿರವಿದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖೆ DA ದ ವರ್ಣನೆ y = 4 ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಮಾಡುತ್ತರೆ. ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ y ನಿರ್ದೇಶಕ 4 ಇದ್ದರೆ ಆ ಬಿಂದು ಆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಅಂದರೆ ರೇಖೆ DA ಯ ಮೇಲೆ ಇರಬಹುದು. X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ 4 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಸಮಾಂತರವಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ y = 4 ಇದೆ.



ಆಕೃತಿ 7.7

ಬನ್ನಿ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

- X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ 6 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ X ಅಕ್ಷದ ಕೆಳಗೆ ಇಂತಹ ರೇಷೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆಯೇ?
- (–3,–6), (10,–6), ($\frac{1}{2}$, –6) ಈ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ಆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರಬಹುದೇ ?
- ಈ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಯಾವುದಿರಬಹುದು ?

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡೋಣ.

ಒಂದುವೇಳೆ b > 0 ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು y = b ಇದು X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ವಿರುವ (0, b) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಖೆ ತಗೆಯಲಾಗಿ ಆ ರೇಖೆ X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಅದರ ಮೇಲಿನ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರ ಇರಬಹುದು. b < 0 ಇದ್ದರೆ ಆ ರೇಖೆಯು X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಅದರ ಕೆಳಗಿನ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರ ಇರಬಹುದು.

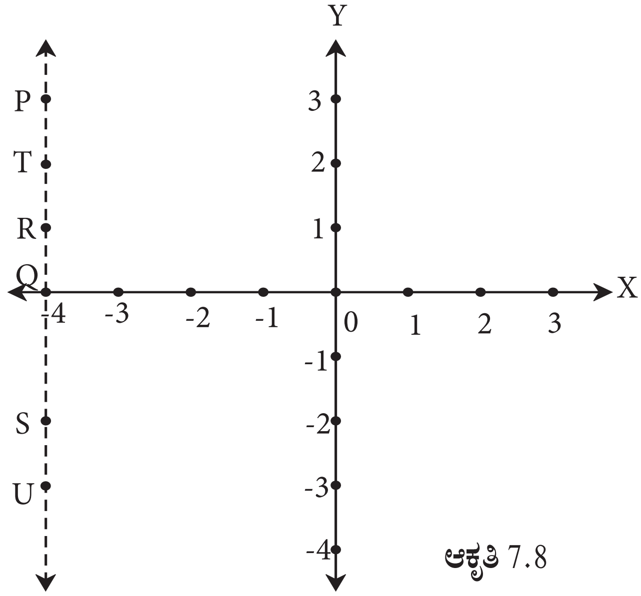
X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ವಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ y = b ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು (Lines parallel to Y-axis)

- ಆಲೇಖ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ.
  P(-4,3), Q(-4,0), R(-4,1), S(-4,-2), T(-4,2), U(-4,-3)
- ಬಿಂದುವಿನ ಸಹ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ.
- ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳ x ನಿರ್ದೇಶಕ ಸಮಾನ ಇದೆ ಎಂಬುದು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಂದಿದೆಯೆ ?
- ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕ ರೇಖೀಯ ಇವೆಯೆ ?
- ಈ ರೇಖೆಯು ಯಾವ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇದೆ ?
- ರೇಖೆ PS ದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ x ನಿರ್ದೇಶಕ ಸಮಾನ ಅಂದರೆ -4 ಇದೆ. ಅದು ಸ್ಥಿರ ಇದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖೆ PS ದ ವರ್ಣನೆ $x = -4$ ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನ x ನಿರ್ದೇಶಕ -4 ಇದೆ ಆದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು ರೇಖೆ PS ದ ಮೇಲೆ ಇರುವದು.

  Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಅದರ ಎಡಬದಿಗೆ 4 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಸಮಾಂತರ ವಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $x = -4$ ಇದೆ.



ಆಕೃತಿ 7.8

ಬನ್ನಿ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

- Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ 2 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಬಲಬದಿಗೆ ಇಂತಹ ರೇಖೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರಬಹುದೆ?
- (2,10), (2,8), $(2, -\frac{1}{2})$ ಈ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರಬಹುದೆ ?
- ಈ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಯಾವದು ಇರಬಹುದು ?

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಇಡುವಾ.

ಒಂದುವೇಳೆ $x = a$ ಇದು Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ವಿರುವ $(a, 0)$ ಬಿಂದುನಲ್ಲಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಖೆ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು. ಮತ್ತು $a > 0$ ಇದ್ದರೆ ಆಗ ಆ ರೇಖೆಯ Y ಅಕ್ಷದ ಬಲಗಡೆಗೆ ಇರುತ್ತದೆ $a < 0$ ಇದ್ದರೆ ಆಗ ಆ ರೇಖೆ Y ಅಕ್ಷದ ಎಡಗಡೆ ಇರುತ್ತದೆ.

Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ವಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $x = a$ ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡೋಣ.

(1) X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ y ನಿರ್ದೇಶಕ 0 ಇರುತ್ತದೆ ಇದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನ y ನಿರ್ದೇಶಕ 0 ಇರುತ್ತದೆ. ಆ ಬಿಂದು X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ X ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣ $y = 0$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

(2) Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ x ನಿರ್ದೇಶಕವು 0 ಇರುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನ x ನಿರ್ದೇಶಕವು 0 ಇರುತ್ತದೆ. ಆ ಬಿಂದು Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ Y ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣ $x = 0$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖ (Graph of linear equations)

ಉದಾ. $x = 2$ ಮತ್ತು $y = -3$ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ (i) ಆಲೇಖ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ X ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು Y ಅಕ್ಷ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

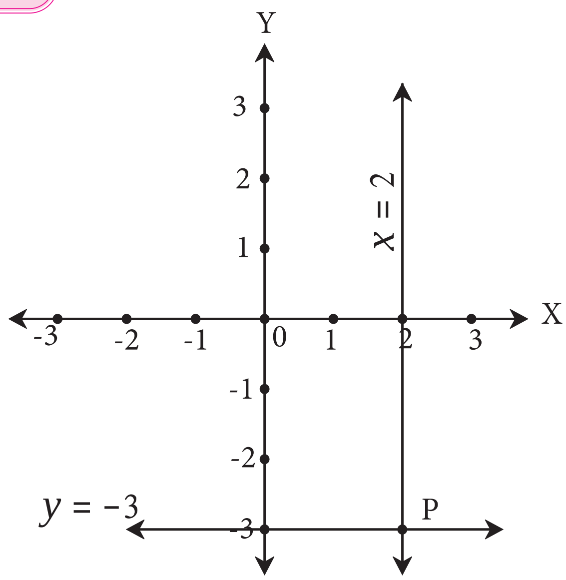
(ii) $x = 2$ ಕೊಟ್ಟದೆ ಆದ್ದರಿಂದ Y ಅಕ್ಷದ ಬಲಗಡೆ 2 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(iii) $y = -3$ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ X ಅಕ್ಷದ ಕೆಳಗಿನ ಬದಿಯಲ್ಲಿ 3 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(iv) ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ತೆಗೆದ ರೇಖೆ ಎಂದರೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖ ಇರುವರು.

(v) ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಎಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ಬರೆಯಿರಿ.

(vi) P ದ ನಿರ್ದೇಶಕ (2,−3) ಇವೆಯೇ? ಇದರ ತಾಳೆಹಾಕಿರಿ.

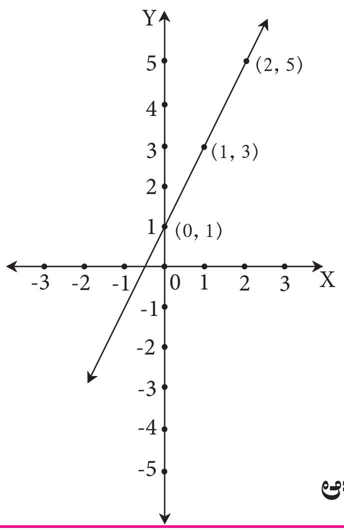


ಆಕೃತಿ 7.9

ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿಯ ರೇಖೀಯ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖ

ಕೃತಿ : ಆಲೇಖ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ (0,1) (1,3) (2,5) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. ಅವು ಏಕರೇಖೀಯ ಇವೆಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ. ಒಂದುವೇಳೆ ಏಕರೇಖಿಯ ವಿದ್ದರೆ. ಆದರಲ್ಲಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಖೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

- ಆ ರೇಖೆಯು ಯಾವ ಯಾವ ಚರಣಗಳಲ್ಲಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವದು. ಅದನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.
- ಆ ರೇಖೆ Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಆ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ಬರೆಯಿರಿ.
- ಆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಮೂರನೆಯ ಚರಣದಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 7.10

ಉದಾ. $2x - y + 1 = 0$ ಇದು ದ್ವಿಚಲದಲ್ಲಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿಯ ಸಮೀಕರಣ ಇದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖ ತೆಗೆಯೋಣ.

ಉತ್ತರ : $2x - y + 1 = 0$ ಅಂದರೆ $y = 2x + 1$

x ಕ್ಕೆ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ y ದ ಸಂಗತ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $x = 0$ ಈ ಬೆಲೆ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ $y = 1$ ಈ ಬೆಲೆ ದೊರೆಯುವದು.

ರಂತೆ, x ದ 0, 1, 2, $\frac{1}{2}$, -2 ದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು y ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮಿತ ಜೋಡಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

x	0	1	2	$\frac{1}{2}$	-2
y	1	3	5	2	-3
(x, y)	(0,1)	(1,3)	(2,5)	$(\frac{1}{2}, 2)$	$(-2,-3)$

ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವಾ ಸ್ಥಾಪನ ಮಾಡಿದ ಬಿಂದು ಏಕರೇಖೀಯ ಇವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಖಚಿತ ಮಾಡಿ ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಆ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ರೇಖೆ ಎಂದರೆ $2x - y + 1 = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖ ಇರುವದು.

ICT Tools or Links

Geogebra Software ದ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ X-ಅಕ್ಷ Y-ಅಕ್ಷ ತೆಗೆಯಿರಿ ವಿವಿಧ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. Algebric View ದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಸಿಸಿರಿ. ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ವಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ. Move Option ದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ರೇಖೆಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತಾ ಇರಿ. X-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು Y-ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣ ಯಾವದು ಬರುವದು ?

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.2

1. ಆಲೇಖ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ A (3,0), B(3,3), C(0,3) ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾಪನೆ ಮಾಡಿರಿ. AB ಮತ್ತು BC ಜೋಡಿಸಿರಿ. ಯಾವ ಆಕೃತಿ ದೊರೆಯುವದು ಅದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
2. Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಮತ್ತು ಆ ಕ್ಷದ ಎಡಗಡೆ 7 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿನ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಬರೆಯಿರಿ.
3. X-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಮತ್ತು ಆ ಅಕ್ಷದ ಕೆಳಗಡೆ 5 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಬರೆಯಿರಿ.
4. Q(-3,-2) ಈ ಬಿಂದು Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ವಿರುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇದೆ ಆ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಆಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ.
5. Y-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ರೇಷ $x = -4$ ಇವು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳಿವೆ ಹಾಗಾದರ ಆ ಎರಡು ರೇಷೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ ಎಷ್ಟು ಇದೆ?

6. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಮೀಕರಣ ಆಲೇಖ X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇವೆ ಮತ್ತು ಯಾವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖ Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇವೆ. ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $x = 3$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x + 6 = 0$ (iv) $y = -5$

7. ಆಲೇಖ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ A(2,3), B(6,−1) ಮತ್ತು C(0,5) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ. ಒಂದುವೇಳೆ ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖೀಯವಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಗೊಳಿಸುವ ರೇಷೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ X ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು Y ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ಬರೆಯಿರಿ.

8. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಆಲೇಖವನ್ನು ಒಂದೇ ನಿರ್ದೇಶನ ಪದ್ಧತಿಯ ಮೇಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. $x + 4 = 0$, $y - 1 = 0$, $2x + 3 = 0$, $3y - 15 = 0$

9. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(i) $x + y = 2$ (ii) $3x - y = 0$ (iii) $2x + y = 1$

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ 7

1. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪರ್ಯಾಯಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಕೊಟ್ಟ ಉತ್ತರಗಳಲ್ಲಿಯ ಸರಿ ಉತ್ತರ ಆರಿಸಿರಿ.

(i) X ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದೆ ?

(A) (b, b) (B) $(0, b)$ (C) $(a, 0)$ (D) (a, a)

(ii) ರೇಖೆ $y = x$ ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ?

(A) (a, a) (B) $(0, a)$ (C) $(a, 0)$ (D) $(a, -a)$

(iii) X ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದು ?

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $x = y$

(iv) (−4, −3) ಈ ಬಿಂದು ಯಾವ ಚರಣದಲ್ಲಿರುವದು ?

(A) ಮೊದಲನೆಯ (B) ಎರಡನೆಯ (C) ಮೂರನೆಯ (D) ನಾಲ್ಕನೆಯ

(v) (−5,5), (6,5), (−3,5), (0,5) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಮಾವಿಷ್ಟಗೊಳಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಸ್ವರೂಪ ಹೇಗೆ ಇರಬಹುದು ?

(A) ಆರಂಭ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದು ಹೋಗುವ (B) Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ವಿರುವ

(C) X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇರುವ (D) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಇಲ್ಲ

(vi) P(−1,1), Q(3,−4), R(1,−1), S(−2,−3), T(−4,4) ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಚರಣದಲ್ಲಿಯ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವವು ?

(A) P ಮತ್ತು T (B) Q ಮತ್ತು R (C) ಕೇವಲ S (D) P ಮತ್ತು R

2. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

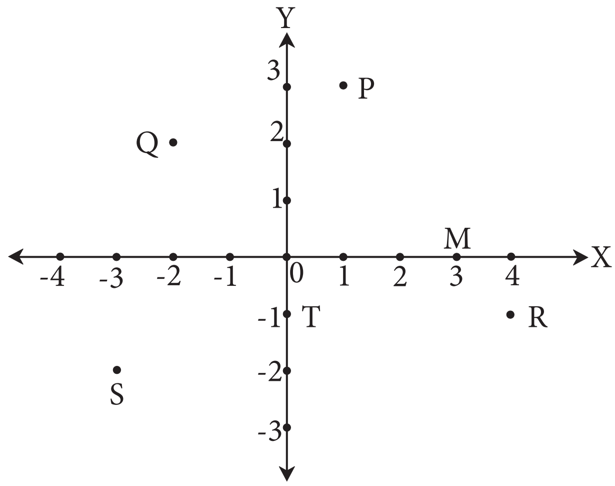
ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.

(i) Q ಮತ್ತು R ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) T ಮತ್ತು M ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ಬರೆಯಿರಿ.

(iii) ಮೂರನೆಯ ಚರಣದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬಿಂದು ಇದೆ.

(iv) ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನ x ಮತ್ತು y ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಸಮಾನ ಇವೆ?



ಆಕೃತಿ 7.11

3. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆಲೇಖದ ಮೇಲೆ ಸ್ಥಾಪನೆ ಮಾಡದೆ ಅವು ಯಾವ ಯಾವ ಚರಣದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $(5, -3)$ (ii) $(-7, -12)$ (iii) $(-23, 4)$

(iv) $(-9, 5)$ (v) $(0, -3)$ (vi) $(-6, 0)$

4. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆಲೇಖ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಸ್ಥಾಪನೆ ಮಾಡಿರಿ.

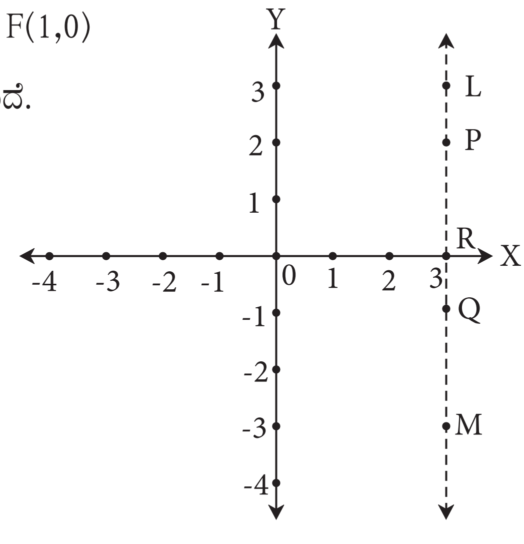
A(1,3), B(−3,−1), C(1,−4), D(−2,3), E(0,−8), F(1,0)

5. ಬದಿಯ ಆಲೇಖದಲ್ಲಿ ರೇಖೆ LM ಇದು Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಿದೆ.

(i) ರೇಖೆ LM ದ Y ಅಕ್ಷದಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರ ಎಷ್ಟು ?

(ii) P, Q, R ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಸಹ ನಿರ್ದೇಶಕ ಬರೆಯಿರಿ.

(iii) ಬಿಂದು L ಮತ್ತು M ಇವುಗಳ x ನಿರ್ದೇಶಕದಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಷ್ಟು ?



ಆಕೃತಿ 7.12

6. X- ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಮತ್ತು X-ಅಕ್ಷದಿಂದ 5 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಎಷ್ಟು ರೇಷೆಗಳಿವೆ? ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

7. ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ a ಇದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು Y-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು $x = a$ ಈ ರೇಷೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

❑❑❑

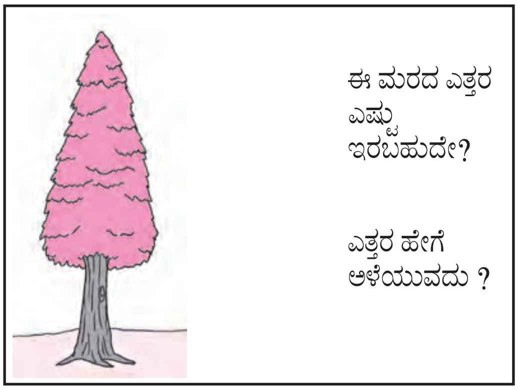
8 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

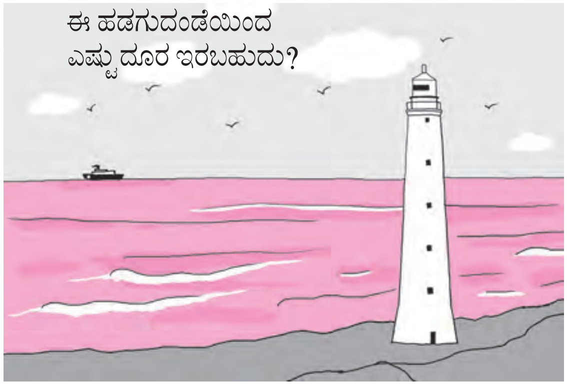
EP1LL7

ಬನ್ನಿ ಕಲಿಯೋಣ.

- ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪರಿಚಯ
- ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು
- ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಬಂಧ
- ವಿಶಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು.

ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಪರಿಚಯ (Introduction to trigonometry)





ನಾವು ಭೂಮಿಯ ಮೇಲಿನ ಅಂತರಗಳನ್ನು ದಾರದಿಂದ, ನಡೆದುಕೊಂಡು ಹೋಗಿ ಅಳೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಸಮುದ್ರದಲ್ಲಿಯ ಹಡಗಿನ ದೀಪಸ್ತಂಬದಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರ ಹೇಗೆ ಅಳೆಯುವರು ? ಮರಗಳ ಎತ್ತರ ಹೇಗೆ ಅಳೆಯುವದು ?

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಆ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ದೊರಕಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಲುವಾಗಿ ಗಣಿತ ವಿಷಯದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಶಾಖೆಯು ಉಪಯೋಗವಾಗುವದು. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಉಪಯೋಗ ಅಭಿಯಾಂತ್ರಿಕಿಶಾಸ್ತ್ರ,ಖಗೋಲಶಾಸ್ತ್ರ, ನೌಕಾಶಾಸ್ತ್ರ ಇತ್ಯಾದಿ ಶಾಖೆಗಳಲ್ಲಿಯಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಲಾಗುವದು.

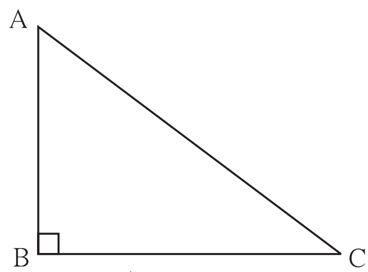
ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ (Trigonometry) ಈ ಶಬ್ದ ಮೂರು ಗ್ರೀಕ ಶಬ್ಧಗಳಿಂದ ತಯಾರಾಗಿದೆ. Tri ಅಂದರೆ ಮೂರು, gona ಅಂದರೆ ಭುಜ, metron ಅಂದರೆ ಅಳತೆ ಮಾಪನ.

ಸ್ವಲ್ಪ ಜ್ಞಾಪಿಸೋಣ.

ನಾವು ತ್ರಿಕೋನದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ, ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯ ಮತ್ತು ಸರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮ. ಇವುಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಿತಿಯ ವಿಷಯದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವದು.

ಅದರ ಉಜಳಣಿ ಮಾಡೋಣ.

- Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle$B ಇದು ಕಾಟಕೋನ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ $\angle$B ಯ ಕಾಟಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜ AC ಇದು ಕರ್ಣ ಇದೆ. $\angle$A ಯ ಎದುರಿನ ಭುಜ BC ಇದೆ; $\angle$C ದ ಎದುರಿನ ಭುಜ AB ಇದೆ.



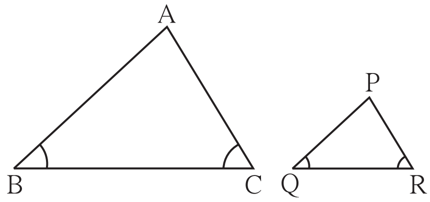
ಆಕೃತಿ 8.1

ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಧಾನ

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

- ಒಂದುವೇಳೆ Δ ABC ~ Δ PQR ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಸಂಗತಭುಜಗಳು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವವು

ಅಂದರೆ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$



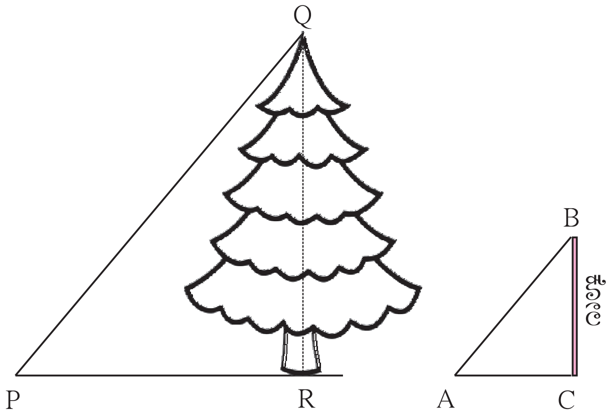
ಆಕೃತಿ 8.2

ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಮರದ ಎತ್ತರ ಅಳೆಯುವದಿದ್ದರೆ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವಾ.

ಕೃತಿ : ಈ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಹಗಲಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಖರಬಿಸಿಲು ಇದ್ದಾಗ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿ ನೀರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ. QR ಇದು ಮರದ ಎತ್ತರ ಇದೆ. BC ಇದು ಕೋಲಿನ ಎತ್ತರ ಇದೆ.

ಚಿಕ್ಕ ಕೋಲನ್ನು ಭೂಮಿಯಲ್ಲಿ ನೆಟ್ಟು ಅದರ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಅದರ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದಳತೆ ಅಳೆಯಿರಿ. ಮರದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದಳತೆ ಅಳೆಯಿರಿ. ಸೂರ್ಯನ ಕಿರಣಗಳು ಸಮಾಂತರ ವಿರುವದರಿಂದ Δ PQR ಮತ್ತು Δ ABC ಇವು ಸಮಕೋನ ಅಂದರೆ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಳಿವೆ, ಇದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುತ್ತಿವೆ ಇದರ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ $\frac{QR}{PR} = \frac{BC}{AC}$ ದೊರೆಯುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಮರದ

ಉತ್ತರ QR = $\frac{BC}{AC} \times PR$ ಈ ಸಮೀಕರಣ ಸಿಗುವದು.



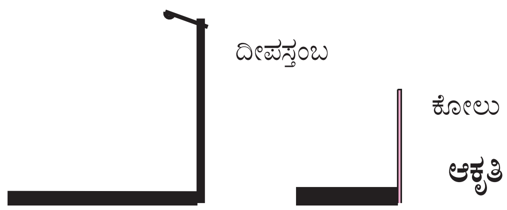
ಆಕೃತಿ 8.3

PR, BC ಮತ್ತು AC ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿವೆ. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿ QR ದ ಉದ್ದಳತೆ, ಅಂದರೆ ಮರದ ಎತ್ತರ ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುವದು.

ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಈ ಪ್ರಯೋಗ ಮುಂಜಾನೆ 8 ಗಂಟೆಗೆ ಮಾಡದೇ ಮಧ್ಯಾಹ್ನ 11:30 ಅಥವಾ 1:30 ಕ್ಕೆ ಮಾಡುವದು ಅನುಕೂಲವಾಗುವದು ಅದು ಏಕೆ?

ಕೃತಿ : ಮೇಲಿನ ಕೃತಿ ಮಾಡಿ ನೀವು ಸ್ವತ: ಪರಿಸರದಲ್ಲಿಯ ಎತ್ತರವಾದ ಮರಗಳ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಪರಿಸರದಲ್ಲಿ ಮರಗಳಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಯಾವುದೇ ಎತ್ತರದ ಕಂಬಿನ ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

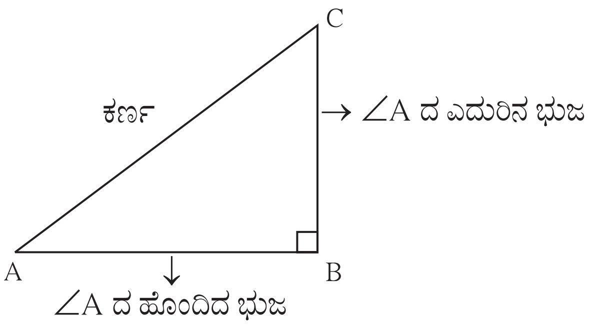


ಆಕೃತಿ 8.4

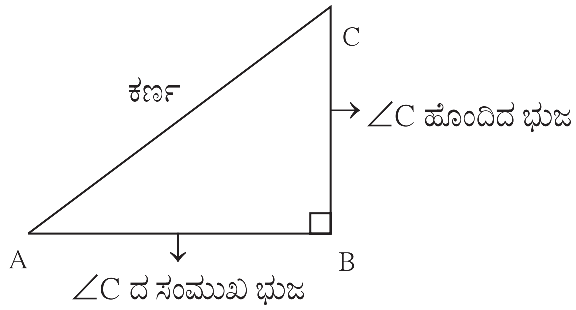
ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯ ಕೆಲವು ಸಂಜ್ಞೆಗಳು (Terms related to triangle)

ಕಾಟಕೋನ Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^\circ$ ಇದ್ದರೆ $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಲಘುಕೋನಗಳಿವೆ.

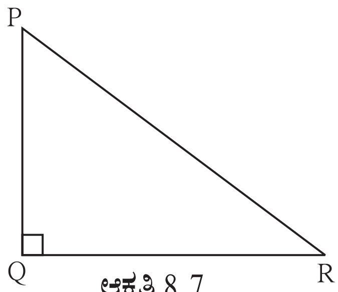


ಆಕೃತಿ 8.5



ಆಕೃತಿ 8.6

ಉದಾ. ಕಾಟಕೋನ Δ PQR ದಲ್ಲಿ



ಆಕೃತಿ 8.7

$\angle P$ ಎದುರಿನ ಭುಜ = . . . $\angle P$ ಯ ಹೊಂದಿದ ಭುಜ = ...

$\angle R$ ಎದುರಿನ ಭುಜ = . . . $\angle R$ ದ ಹೊಂದಿದ ಭುಜ = ...

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು (Trigonometic ratios)

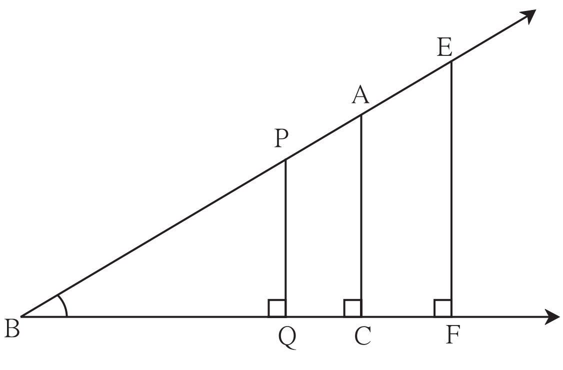
ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ 8.8 ರಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ $\angle B$ ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನವಿದೆ ಆದರಿಂದ ಈ ಎಲ್ಲ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

ಇಲ್ಲಿ Δ PQB ~ Δ ACB ಇದೆ.

$$\therefore \frac{PB}{AB} = \frac{PQ}{AC} = \frac{BQ}{BC}$$

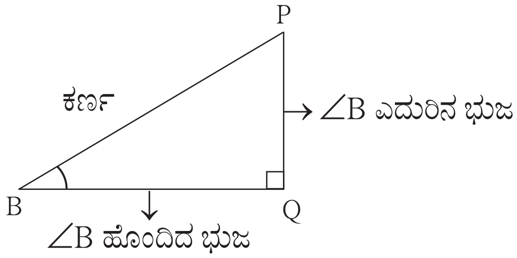
$$\frac{PQ}{AC} = \frac{PB}{AB} \quad \therefore \frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB}$$ . . . . . ಏಕಾಂತರ ಕ್ರಿಯೆ

$$\frac{QB}{BC} = \frac{PB}{AB} \quad \therefore \frac{QB}{PB} = \frac{BC}{AB}$$ . . . . . ಏಕಾಂತರ ಕ್ರಿಯೆ

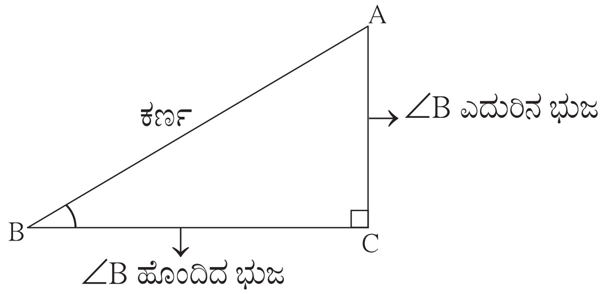


ಆಕೃತಿ 8.8

ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿ 8.9 ಮತ್ತು 8.10 ಈ ಆಕೃತಿ 8.8 ರಲ್ಲಿಂದ ಬೇರೆ ಮಾಡಿದ ತ್ರಿಕೋನಗಳದ್ದೆ ಆಗಿವೆ.



ಆಕೃತಿ 8.9



ಆಕೃತಿ 8.10

(i) Δ PQB ದಲ್ಲಿ

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ ದ ಎದುರಿನ ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}$$

Δ ACB ದಲ್ಲಿ

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ ದ ಎದುರಿನ ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}$$

$\frac{PQ}{PB}$ ವ $\frac{AC}{AB}$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು ಸಮಾನ ಇವೆ.

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ ದ ಎದುರಿನ ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}$$

ಈ ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ B ಈ ಕೋನದ ಸಾಯಿನ (sine) ಗುಣೋತ್ತರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಈ ಗುಣೋತ್ತರವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ **sinB** ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

(ii) Δ PQB ಮತ್ತು Δ ACB ಯಲ್ಲಿ

$$\frac{BQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ ದ ಹೊಂದಿದ ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ ದ ಹೊಂದಿದ ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}$$

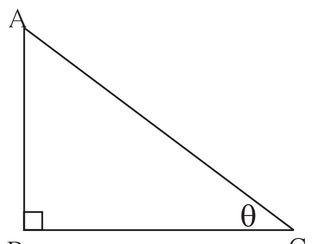
$$\frac{BQ}{PB} = \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ ದ ಎದುರಿನ ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}$$

ಈ ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ ಕೋನ B ದ ಕೋಸಾಯಿನ (cosine) ಗುಣೋತ್ತರ ಹೀಗೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಈ ಗುಣೋತ್ತರ ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ **cosB** ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

(iii) $\frac{PQ}{BQ} = \frac{AC}{BC} = \frac{\angle B \text{ ದ ಎದುರಿನ ಭುಜ}}{\angle B \text{ ದ ಹೊಂದಿದ ಭುಜ}}$

ಈ ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ B ಯ ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ (tangent) ಗುಣೋತ್ತರ ಅನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಈ ಗುಣೋತ್ತರವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ **tanB** ಎಂದು ಬರೆಯುವರು.

ಉದಾ.



ಆಕೃತಿ 8.11

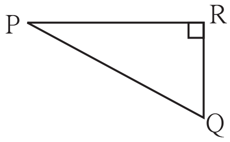
ಕೆಲವು ಸಲ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಘುಕೋನದ ಅಳತೆಗಳು θ (ಥೀಟಾ), α (ಅಲ್ಫಾ), β (ಬೀಟಾ) ಇತ್ಯಾದಿ ಗ್ರೀಕ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ Δ ABC ಯ C ಈ ಲಘುಕೋನದ ಅಳತೆ θ ಈ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ತೋರಿಸಿದೆ. ಇಂತಹ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ sinC, cosC, tanC ಈ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ sinθ, cosθ, tan θ ಹೀಗೆಯೂ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

$\sin C = \sin \theta = \frac{AB}{AC}$, $\cos C = \cos \theta = \frac{BC}{AC}$, $\tan C = \tan \theta = \frac{AB}{BC}$

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ.

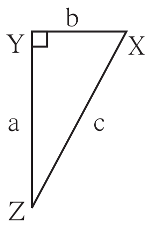
- sin ಗುಣೋತ್ತರ $= \dfrac{\text{ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}$
- cos ಗುಣೋತ್ತರ $= \dfrac{\text{ಕೋನದ ಹೊಂದಿದ ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}$
- tan ಗುಣೋತ್ತರ $= \dfrac{\text{ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜ}}{\text{ಕೋನದ ಹೊಂದಿದ ಭುಜ}}$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 8.1

1. 

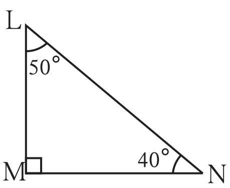
ಆಕೃತಿ 8.12

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ 8.12 ರಲ್ಲಿ Δ PQR ದ $\angle R$ ಇದು ಕಾಟಕೋನ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ.
(i) sin P (ii) cos Q (iii) tan P (iv) tan Q

2. 

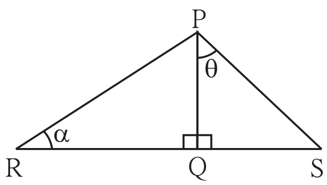
ಆಕೃತಿ 8.13

ಆಕೃತಯಲ್ಲಿ 8.13 Δ XYZ ಇದು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಇದೆ. $\angle XYZ = 90^\circ$ ಇದೆ. ಭುಜದ ಉದ್ದಳತೆಗಳು a,b,c ಹೀಗೆ ಕೊಟ್ಟದ್ದಾರೆ ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
(i) sin X (ii) tan Z (iii) cos X (iv) tan X

3. 

ಆಕೃತಿ 8.14

ಕಾಟಕೋನ Δ LMN ದಲ್ಲಿ $\angle LMN = 90^\circ$
$\angle L = 50^\circ$ ಮತ್ತು $\angle N = 40^\circ$ ಇದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
(i) $\sin 50^\circ$ (ii) $\cos 50^\circ$
(iii) $\tan 40^\circ$ (iv) $\cos 40^\circ$

4. 

ಆಕೃತಿ 8.15

ಕೊಟ್ಟ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ $\angle PQR = 90^\circ$,
$\angle PQS = 90^\circ$, $\angle PRQ = \alpha$ ಮತ್ತು $\angle QPS = \theta$ ಇದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
(i) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$
(ii) $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

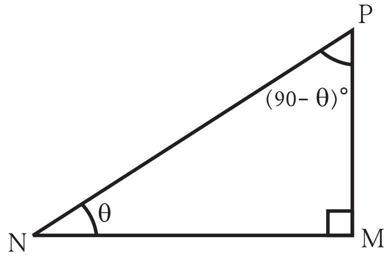
ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಬಂಧ (Relation between trigonometric ratios)

ಆಕೃತಿ 8.16 ರಲ್ಲಿ

Δ PMN ಇದು ಕಾಟಕೋನವಿದೆ.

$m\angle M = 90^\circ$, $\angle P$ ಮತ್ತು $\angle N$ ಇವು ಪರಸ್ಪರ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳಿವೆ.

$\therefore$ $m\angle N = \theta$ ಇದ್ದರೆ $m\angle P = 90 - \theta$



ಆಕೃತಿ 8.16

$\sin\theta = \dfrac{PM}{PN}$ ....(1)

$\cos\theta = \dfrac{NM}{PN}$ ....(2)

$\tan\theta = \dfrac{PM}{NM}$ ....(3)

$\sin(90-\theta) = \dfrac{NM}{PN}$ ....(4)

$\cos(90-\theta) = \dfrac{PM}{PN}$ ....(5)

$\tan(90-\theta) = \dfrac{NM}{PM}$ ....(6)

$\therefore$ $\sin\theta = \cos(90-\theta)$ .... (1) ಮತ್ತು (5) ರ ಮೇಲಿಂದ

$\cos\theta = \sin(90-\theta)$ .... (2) ಮತ್ತು (4) ರ ಮೇಲಿಂದ

ಈಗ ಇದನ್ನು ಸಹ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ $\tan\theta \times \tan(90-\theta) = \dfrac{PM}{NM} \times \dfrac{NM}{PM}$ .... (3) ಮತ್ತು (6) ರ ಮೇಲಿಂದ

$$\therefore \quad \tan\theta \times \tan(90-\theta) = 1$$

ಅದರಂತೆ $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{PM}{PN}}{\frac{NM}{PN}} = \dfrac{PM}{PN} \times \dfrac{PN}{NM} = \dfrac{PM}{NM} = \tan\theta$

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ.

$\cos(90-\theta) = \sin\theta$, $\quad \sin(90-\theta) = \cos\theta$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$, $\quad \tan\theta \times \tan(90-\theta) = 1$

✻ **ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿ ಸಲುವಾಗಿ**

$$\frac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\,\theta, \quad \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta, \quad \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$$

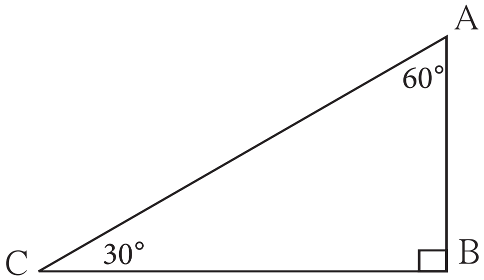
ಅಂದರೆ cosec θ, sec θ ಮತ್ತು cot θ ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ sin θ, cos θ ಮತ್ತು tan θ ಇವುಗಳ ವ್ಯಸ್ತ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು ಇವೆ.

- $\sec\theta = \text{cosec}\,(90 - \theta)$
- $\text{cosec}\,\theta = \sec\,(90 - \theta)$
- $\tan\theta = \cot\,(90 - \theta)$
- $\cot\theta = \tan\,(90 - \theta)$

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ.

$30° - 60° - 90°$ ಅಳತೆಯ ತ್ರಿಕೋನದ ಗುಣಧರ್ಮ

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು $30°, 60°, 90°$ ಗಳಿದ್ದರೆ ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದಂತೆ. $30°$ ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜ ಕರ್ಣದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $60°$ ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜವು ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಳತೆಯ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ಪಟ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.



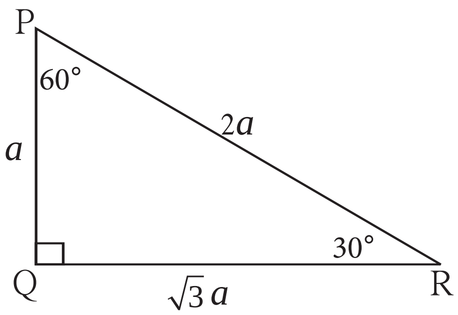
ಆಕೃತಿ 8.17

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕಾಟಕೋನ Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle C = 30°$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$ ಇದೆ.

$\therefore AB = \frac{1}{2} AC$ ಮತ್ತು $BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

$30°$ ಮತ್ತು $60°$ ಈ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು (Trignometric ratios of $30°$ and $60°$ angles)



ಆಕೃತಿ 8.18

ಕಾಟಕೋನ Δ PQR ದಲ್ಲಿ $\angle R = 30°$,

$\angle P = 60°$, $\angle Q = 90°$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ $PQ = a$

ಹಾಗಾದರೆ, $PQ = \frac{1}{2}$ PR

$a = \frac{1}{2}$ PR

$\therefore PR = 2a$

$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} PR$

$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a$

$QR = \sqrt{3}\,a$

$\therefore$ ಒಂದುವೇಳೆ $PQ = a$ ಇದ್ದರೆ $PR = 2a$ ಮತ್ತು $QR = \sqrt{3}\,a$

(I) 30° ಅಳತೆಯ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು.

$$\sin 30^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{PQ}{QR} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(II) 60° ಅಳತೆಯ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು.

$$\sin 60^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{QR}{PQ} = \frac{\sqrt{3}\,a}{a} = \sqrt{3}$$

ಕಾಟಕೋನ Δ PQR ದಲ್ಲಿ $\angle Q = 90^\circ$ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. $\angle P$ ಮತ್ತು $\angle R$ ಪರಸ್ಪರಗಳ ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳಿವೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನದ ಸಾಯಿನ್ ಗುಣೋತ್ತರದ ಮತ್ತು ಕೋಸಾಯಿನ್ ಗುಣೋತ್ತರದ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.

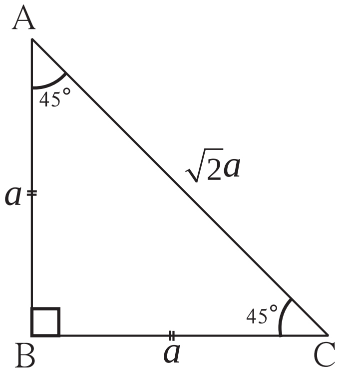
$\sin \theta = \cos(90-\theta)$
$\sin 30^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ$
$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

$\cos \theta = \sin(90-\theta)$
$\cos 30^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ$
$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

(III) 45° ಅಳತೆಯ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು.



ಆಕೃತಿ 8.19

ಕಾಟಕೋನ Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ $\therefore$ ಇದು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ. AB = a , BC = a ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ ಪಾಯಥಾಗೋರಸ ಪ್ರಮೇಯದ ಮೇಲಿಂದ AC ಯ ಉದ್ದಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾ

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= a^2 + a^2$$
$$AC^2 = 2a^2$$
$$\therefore AC = \sqrt{2}\,a$$

ಹಿಂದಿನ ಆಕೃತಿಯ 8.19 ರಲ್ಲಿ $\angle C = 45^\circ$ ಇದೆ.

$$\sin 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

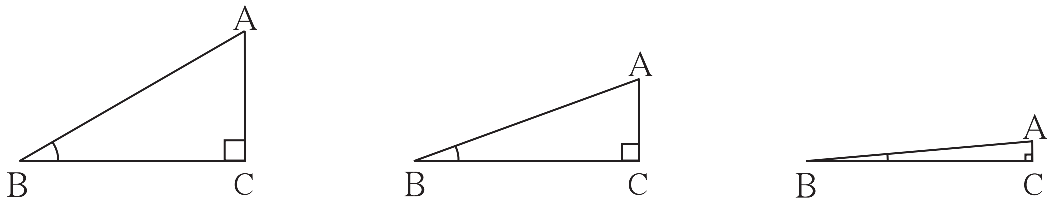
$$\cos 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^\circ = 1$

(IV) 0° ಮತ್ತು 90° ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು.

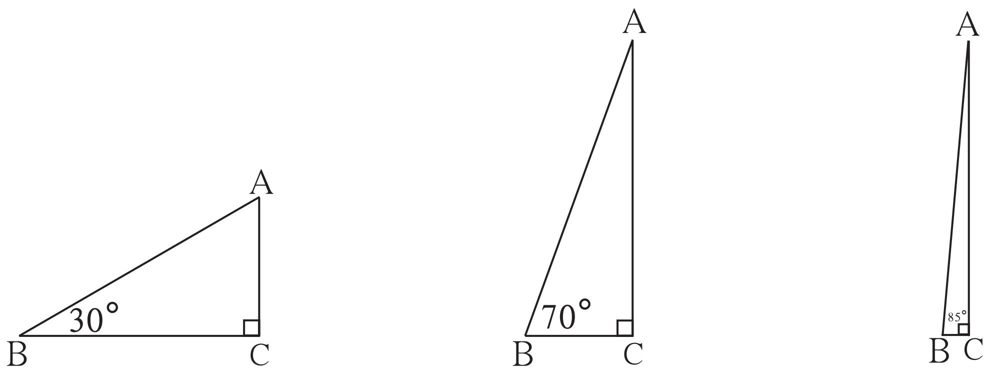


ಆಕೃತಿ 8.20

ಕಾಟಕೋನ Δ ACB ದಲ್ಲಿ $\angle C = 90^\circ$ ಮತ್ತು $\angle B = 30^\circ$ ಇದೆ. $\sin 30^\circ = \frac{AC}{AB}$ ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. AB ಯ ಉದ್ದಳತೆ ಸ್ಥಿರವಿಟ್ಟು $\angle B$ ದ ಅಳತೆ ಕ್ರಮೇಣ ಕಡಿಮೆ ಯಾಗುವದೋ ಅದರಂತೆ $\angle B$ ದ ಎದುರಿನಭುಜ AC ಯ ಉದ್ದಳತೆ ಕಡಿಮೆ ಯಾಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ $\angle B$ ದ ಅಳತೆ ಕಡಿಮೆ ಯಾದರೆ $\sin\theta$ ದ ಬೆಲೆ ಕಡಿಮೆ ಯಾಗುವದು.

$\therefore$ $\angle B$ ದ ಅಳತೆ 0° ಆಗುವದೋ ಆಗ AC ಯ ಉದ್ದಳತೆ 0 ಆಗುವದು.

$\therefore \sin 0^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{0}{AB}$ $\qquad$ $\therefore \sin 0^\circ = 0$



ಆಕೃತಿ 8.21

ಆಕೃತಿ 8.21 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಈ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ $\angle B$ ದ ಅಳತೆ ಕ್ರಮೇಣ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಹೋದಂತೆ. AC ಯ ಉದ್ದಳತೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಕಾಣಿಸುವದು $\angle B$ ದ ಅಳತೆ 90° ಆದರೆ AC ಯ ಅಳತೆಯು AB ದಷ್ಟು ಆಗುವದು.

$$\therefore \sin 90^\circ = \frac{AC}{AB} \qquad \therefore \sin 90^\circ = 1$$

ನಾವು ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ.

$\sin \theta = \cos (90 - \theta)$ ಮತ್ತು $\cos \theta = \sin (90 - \theta)$

$$\therefore \cos 0^\circ = \sin (90 - 0)^\circ = \sin 90^\circ = 1$$

ಮತ್ತು $\cos 90^\circ = \sin (90 - 90)^\circ = \sin 0^\circ = 0$

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0$

ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದಂತೆ

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \qquad \therefore \tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

ಆದರೆ $\tan 90^\circ = \dfrac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \dfrac{1}{0}$

ಆದರೆ $\frac{1}{0}$ ಇದನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ. θ ಲಘುಕೋನವಿದ್ದು ಅದು ಕ್ರಮೇಣ ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತಾ 90° ರ ಹತ್ತಿರ ಪಕ್ಕಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು. ಆದರಂತೆ $\tan \theta$ ಅನಿರ್ಭಂದದಿಂದ ದೊಡ್ಡ ದಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ tan 90 ದ ಬೆಲೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ.

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

ವಿಶಿಷ್ಟ ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು.

ಗುಣೋತ್ತರಗಳು \ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ಹೇಳಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ 1 ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$

ಉತ್ತರ : $2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$

$$= 2 \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 + 0$$

$$= 2$$

ಉದಾ 2 ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $\frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ}$

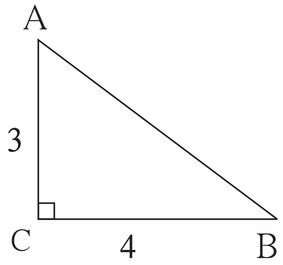
ಉತ್ತರ: $56^\circ + 34^\circ = 90^\circ$ ಅಂದರೆ. 56 ಮತ್ತು 34 ಇವು ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳಿವೆ.

$$\sin\theta = \cos(90 - \theta)$$

$$\therefore \quad \sin 34^\circ = \cos(90 - 34)^\circ = \cos 56^\circ$$

$$\therefore \quad \frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ} = \frac{\cos 56^\circ}{\cos 56^\circ} = 1$$

ಉದಾ 3 ಕಾಟಕೋನ Δ ACB ಯಲ್ಲಿ $\angle C = 90^\circ$, AC = 3, BC = 4 ಇದ್ದರೆ $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle B$ ಯ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
sin A, sin B, cos A, tan B



ಆಕೃತಿ 8.22

ಉತ್ತರ: ಕಾಟಕೋನ Δ ACB ದಲ್ಲಿ ಪಾಯಥಾಗೋರಸ ಪ್ರಮೇಯದ ಮೇಲಿಂದ

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$= 3^2 + 4^2$$

$$= 5^2$$

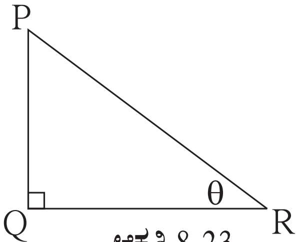
$$AB = 5$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5} \qquad \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} \qquad \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$$

ಉದಾ 4 ಕಾಟಕೋನ Δ PQR ದಲ್ಲಿ $\angle Q = 90^\circ$, $\angle R = \theta$ ಮತ್ತು $\sin\theta = \frac{5}{13}$ ಇದ್ದರೆ $\cos\theta$, $\tan\theta$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ :



ಆಕೃತಿ 8.23

ಕಾಟಕೋನ Δ PQR ದಲ್ಲಿ $\angle R = \theta$

$$\sin\theta = \frac{5}{13}$$

$$\therefore \quad \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$

$\therefore$ PQ = $5k$ ಮತ್ತು PR = $13k$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ಮೇಲಿಂದ QR ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾ.

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

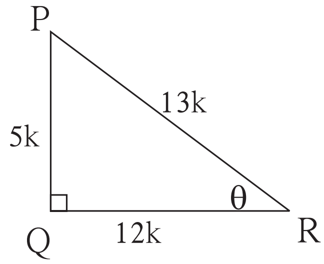
$(5k)^2 + QR^2 = (13k)^2$

$25k^2 + QR^2 = 169\,k^2$

$QR^2 = 169\,k^2 - 25k^2$

$QR^2 = 144\,k^2$

$QR = 12k$



ಆಕೃತಿ 8.24

ಈಗ ಕಾಟಕೋನ Δ PQR ದಲ್ಲಿ PQ = $5k$ ಮತ್ತು PR = $13k$, QR = $12k$

$\cos\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$, $\tan\theta = \frac{PQ}{QR} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$

ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ ಬನ್ನಿ.

(1) ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ ಬಿಡಿಸುವಾಗ PQ ಮತ್ತು PR ಮತ್ತು 5k ಮತ್ತು 13k ಏಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ ?

(2) PQ ಮತ್ತು PR ದ ಉದ್ದಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 5 ಮತ್ತು 13 ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಬರುವದೇ ? ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಬರುತ್ತಿದ್ದರೆ. ಬರಹದಲ್ಲಿ ಏನಾದರು ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮಾಡಬಹುದೆ ?

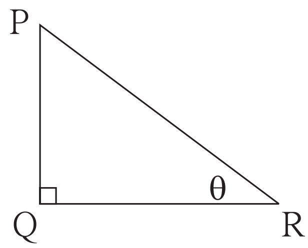
ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯ ಮಹತ್ವದ ಸಮೀಕರಣ

Δ PQR ಇದು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಇದೆ

$\angle PQR = 90^\circ$, $\angle R = \theta$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ

$\sin\theta = \frac{PQ}{PR}$ ....(1)

$\cos\theta = \frac{QR}{PR}$ ....(2)



ಆಕೃತಿ 8.25

ಪಾಯಥಾಗೋರಸ ಪ್ರಮೇಯದ ಮೇಲಿಂದ

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

$\therefore \frac{PQ^2}{PR^2} + \frac{QR^2}{PR^2} = \frac{PR^2}{PR^2}$ .... ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದಕ್ಕೆ PR^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ

$\therefore \left(\frac{PQ}{PR}\right)^2 + \left(\frac{QR}{PR}\right)^2 = 1$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$.... (1) ಮತ್ತು (2)ರ ಮೇಲಿಂದ

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಡೋಣ.

$(\sin\theta)^2$ ಅಂದರೆ $\sin\theta$ ದ ವರ್ಗ, ಇದು $\sin^2\theta$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ಈ ಸಮೀಕರಣ ನಾವು ಪಾಯಥಾಗೋರಸದ ಪ್ರಮೇಯ ಉಪಯೋಗಿಸಿ θ ಇದು ಒಂದು ಲಘುಕೋನ ವಿರುವ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದೆವು. $\theta = 0^\circ$ ಅಥವಾ $\theta = 90^\circ$ ಇದ್ದರೂ ಸಹ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಸತ್ಯ ಇರುವದೆಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ಈ ಸಮೀಕರಣ ಯಾವುದೇ ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಸತ್ಯ ವಿರುವದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ ಮೂಲಭೂತ ನಿತ್ಯ ಸಮಾನತೆ ಎನ್ನುವರು.

(i) $0 \le \sin\theta \le 1,\ 0 \le \sin^2\theta \le 1$ (ii) $0 \le \cos\theta \le 1,\ 0 \le \cos^2\theta \le 1$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 8.2

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಇತರ ಎರಡು ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳ ತುಂಬಿರಿ.

$\sin\theta$		$\frac{11}{61}$		$\frac{1}{2}$				$\frac{3}{5}$	
$\cos\theta$	$\frac{35}{37}$				$\frac{1}{\sqrt{3}}$				
$\tan\theta$			1			$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2. ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $5\sin 30^\circ + 3\tan 45^\circ$ (ii) $\frac{4}{5}\tan^2 60^\circ + 3\sin^2 60^\circ$

(iii) $2\sin 30^\circ + \cos 0^\circ + 3\sin 90^\circ$ (iv) $\dfrac{\tan 60}{\sin 60 + \cos 60}$

(v) $\cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ$ (vi) $\cos 60^\circ \times \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \times \sin 30^\circ$

3. $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ಇದ್ದರೆ $\cos\theta$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $\cos\theta = \frac{15}{17}$ ಇದ್ದರೆ $\sin\theta$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪರ್ಯಾಯಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉತ್ತರದ ಸರಿಯಾದ ಪರ್ಯಾಯವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಿಧಾನವು ಸತ್ಯ ಇದೆ.

(A) $\sin\theta = \cos(90-\theta)$ (B) $\cos\theta = \tan(90-\theta)$

(C) $\sin\theta = \tan(90-\theta)$ (D) $\tan\theta = \tan(90-\theta)$

(ii) $\sin 90°$ ದ ಬೆಲೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದು ?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

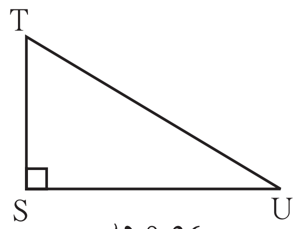
(iii) $2\tan 45° + \cos 45° - \sin 45° =$ ಎಷ್ಟು ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(iv) $\frac{\cos 28°}{\sin 62°} =$ ಎಷ್ಟು ?

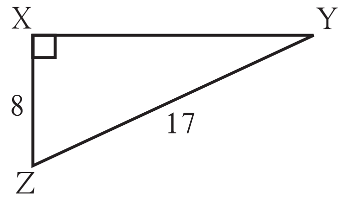
(A) 2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

2. ಕಾಟಕೋನ Δ TSU ದಲ್ಲಿ $TS = 5$, $\angle S = 90°$, $SU = 12$ ಇದ್ದರೆ sin T, cos T, tan T ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದರಂತೆ, sin U, cos U, tan U ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



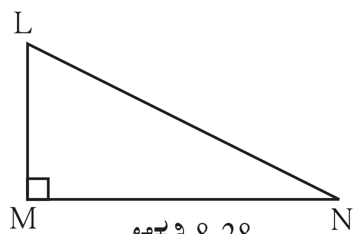
ಆಕೃತಿ 8.26

3. ಕಾಟಕೋನ Δ YXZ ದಲ್ಲಿ $\angle X = 90°$, $XZ = 8$ ಸೆಮೀ $YZ = 17$ ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ sin Y, cos Y, tan Y, sin Z, cos Z, tan Z ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 8.27

4. ಕಾಟಕೋನ Δ LMN ದಲ್ಲಿ $\angle N = \theta$, $\angle M = 90°$, $\cos\theta = \frac{24}{25}$ ಇದ್ದರೆ $\sin\theta$ ಮತ್ತು $\tan\theta$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅದರಂತೆ $(\sin^2\theta)$ ಮತ್ತು $(\cos^2\theta)$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 8.28

5. ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ

(i) $\sin 20° = \cos \boxed{}°$

(ii) $\tan 30° \times \tan \boxed{}° = 1$

(iii) $\cos 40° = \sin \boxed{}°$

9 ಪೃಷ್ಠಫಲ ಹಾಗೂ ಘನಫಲ

EPAHKU

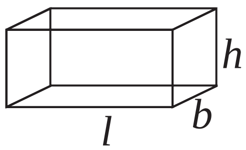
ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

- ಶಂಕೃವಿನ ಪೃಷ್ಠಫಲ
- ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ
- ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲ
- ಗೋಲದ ಘನಫಲ

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಹಿಂದಿನ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಇಷ್ಟಿಕಾಚಿತಿ, ಘನ, ವೃತ್ತಚಿತ್ತಿ ಈ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಪೃಷ್ಠಫಲ ಹಾಗೂ ಘನಫಲ ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದು. ಎಂಬುದನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ್ದೇವೆ.

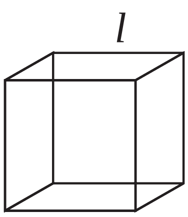
ಇಷ್ಟೀಕಾಚಿತಿ



ಆಕೃತಿ 9.1

- ಇಷ್ಟಿಕಾಚಿತಿಯ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ l , b, h ಇದ್ದರೆ,
  - (i) ಇಷ್ಟಿಕಾಚಿತಿಯ ಲಂಬ ಪೃಷ್ಠಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = $2(l + b) \times h$
    ಇಲ್ಲಿ ಇಷ್ಟೀಕಾಚಿತಿಯ ಲಂಬ 4 ಪೃಷ್ಟಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ವಿಚಾರ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.
  - (ii) ಇಷ್ಟಿಕಾಚಿತಿಯ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ = $2(lb + bh + lh)$
    ಇಲ್ಲಿ ಇಷ್ಟಿಕಾಚಿತಿಯ ಆರು ಪೃಷ್ಠಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ವಿಚಾರ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.
  - (iii) ಇಷ್ಟಿಕಾಚಿತಿಯ ಘನಫಲ = $l \times b \times h$

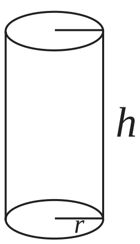
ಘನ



ಆಕೃತಿ 9.2

- ಘನದ ಅಂಚು (edge) l ಇದ್ದರೆ
  - (i) ಘನದ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ = $6l^2$
  - (ii) ಘನದ ಲಂಬ ಪೃಷ್ಠಫಲ = $4l^2$
  - (iii) ಘನದ ಘನಫಲ = l^3

ವೃತ್ತಚಿತಿ



ಆಕೃತಿ 9.3

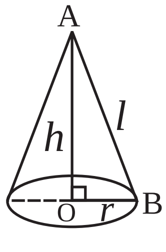
- ವೃತ್ತಚಿತಿ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ h ಇದ್ದಾಗ
  - (i) ವೃತ್ತಾಚಿತಿಯ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ = $2\pi rh$
  - (ii) ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ = $2\pi r(r + h)$
  - (iii) ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ಘನಫಲ = $\pi r^2 h$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 9.1

1. ಒಂದು ಇಷ್ಟಿಕಾಚಿತಿಯ ಆಕಾರದ ಔಷಧ ಡಬ್ಬಿಯ, ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 20 ಸೆ.ಮೀ, 12 ಸೆ.ಮೀ ಹಾಗೂ 10 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ಡಬ್ಬಿಯ ಲಂಬ ಪೃಷ್ಠಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಹಾಗೂ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಇಷ್ಟಿಕಾಚಿತಿ ಆಕಾರದ ಡಬ್ಬಿಯ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ 500 ಚೌ. ಮೂಲಮಾನ ಇದೆ. ಅದರ ಅಗಲ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 6 ಹಾಗೂ 5 ಮೂಲಮಾನ ಇದ್ದರೆ ಆ ಡಬ್ಬಿಯ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು ?
3. ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯ ಭುಜ 4.5 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಈ ಘನಾಕೃತಿಯ ಲಂಬ ಪೃಷ್ಠಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಹಾಗೂ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಘನದ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ 5400 ಚೌ ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ಘನದ ಲಂಬ ಪೃಷ್ಠಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಇಷ್ಟಿಕಾಚಿತಿಯ ಘನಫಲ 34.50 ಘನ ಮೀ ಇದ್ದು ಅದರ ಅಗಲ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 1.5 ಮೀ ಹಾಗೂ 1.15 ಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ಇಷ್ಟಿಕಾಚಿತಿಯ ಉದ್ದ ತೆಗೆಯಿರಿ.
6. 7.5 ಸೆಮೀ ಅಂಚು ಇರುವ ಘನದ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟು ?
7. ಒಂದು ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 20 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ 13 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ವಕ್ರ ಪೃಷ್ಠಫಲ ಹಾಗೂ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ (π = 3.14 ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)
8. ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ 1980 ಸೆಮೀ^{2} ಇದು ಅದರ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 15 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ವೃತ್ತ ಚಿತಿಯ ಎತ್ತರ ತೆಗೆಯಿರಿ ($\pi = \frac{22}{7}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ)

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೊಣ ಬನ್ನಿ.

ಶಂಕುವಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಂಜ್ಞೆಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ (Terms related with a cone and their relation)



ಆಕೃತಿ 9.4

ಬದಿಯಲ್ಲಿಯ ಆಕೃತಿ 9.4 ಇದು ಶಂಕುವಿನದಿದೆ. ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು O ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಶಿರೋಬಿಂದು A ಇದೆ. ರೇಖ OA ಇದು ತ್ರಿಜ್ಯ OB ಗೆ ಲಂಬವಿದೆ. ಅಂದರೆ AO ಇದು ಶಂಕುವಿನ ಲಂಬ ಎತ್ತರ (h) ಇದೆ. AB ಇದು ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ (l) ಇದೆ.

Δ AOB ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ.

$\therefore$ ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$\therefore l^2 = h^2 + r^2$$

ಅಂದರೆ, **(ವಕ್ರೋನ್ನತಿ)^2 = (ಲಂಬ ಎತ್ತರ)^2 + (ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ)^2**

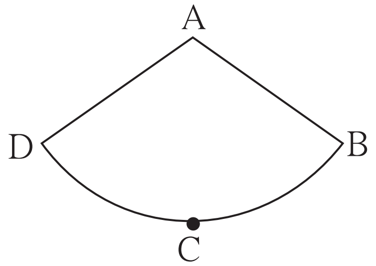
ಶಂಕುವಿನ ಪೃಷ್ಠಫಲ (Surface area of a cone)

ಶಂಕುವಿಗೆ ಎರಡು ಪೃಷ್ಠಗಳಿರುತ್ತಾವೆ. (i) ವರ್ತುಳಾಕಾರದ ತಳ (ii) ವಕ್ರ ಪೃಷ್ಠ

ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.

ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯುವ ಸೂತ್ರ ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು ?

ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠದ ರಚನೆ ನೋಡೋಣ.



ಆಕೃತಿ 9.5

ಆಕೃತಿ 9.4 ದಲ್ಲಿಯ ಶಂಕುವಿನ ಅದರ AB ಈ ವಕ್ರೋನ್ನತಿಯ ಮೇಲೆ ಕತ್ತಿರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಗಿ, ಅದರ ರಚನೆ ಬದಿಯ ಆಕೃತಿ 9.5 ರಂತೆ ದೊರೆಯುವದು. ಈ ಆಕೃತಿಯ ಹೆಸರು ವರ್ತುಳ ಕಂಸ ಇದೆ.

ಆಕೃತಿ 9.4 ಮತ್ತು ಆಕೃತಿ 9.5 ಗಳ ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಿರಿ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಘಟಕಗಳು ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವವೇ ?

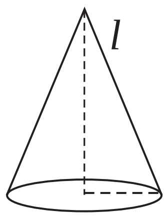
(i) ವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ತ್ರಿಜ್ಯ AB ಇದು ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರೋನ್ನತಿಯಷ್ಟು ಇದೆ.

(ii) ವರ್ತುಳಕಂಸದ ಕಂಸ BCD ಇದು ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ಪರಿಘದದ ರೂಪಾಂತರ ಇದೆ.

(iii) ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಪೃಷ್ಠದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = A-BCD ಈ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

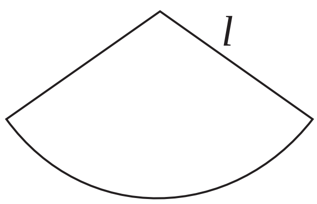
ಇದರ ಮೇಲಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯುವ ಅದರ ರಚನೆಯ, ಅಂದರೆ ವರ್ತುಳಕಂಸದ ಕೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯ ಬೇಕಾಗುವದು. ಈ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದು. ಇದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಕೃತಿಯಿಂದ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಕೃತಿ ಶಂಕುವಿನ ರಚನೆಯ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವಾ.



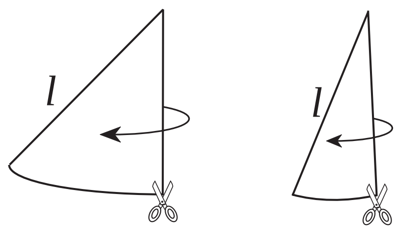
ಶಂಕು

ಆಕೃತಿ 9.6



ವಕ್ರಪೃಷ್ಠದ ರಚನೆ

ಆಕೃತಿ 9.7



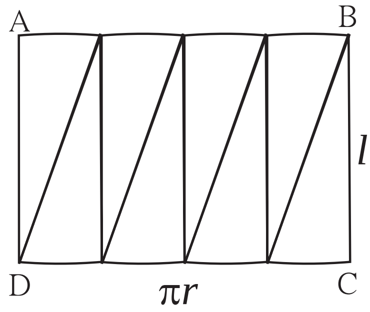
ರಚನೆಯ ತುಂಡುಗಳು

ಆಕೃತಿ 9.8

ತಳದ ಪರಿಘ = $2\pi r$

ಒಂದು ವಕ್ರಪೃಷ್ಠದ ಆಕೃತಿ 9.8 ದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕ ತುಂಡುಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿರಿ. ಅದು ಆಕೃತಿ 9.9 ದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಜೋಡಿಸಿರಿ.

ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠದ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ □ABCD ಯ ರೀತಿಯ ಆಯತ ತಯಾರಾಯಿತು.



ಆಕೃತಿ 9.9

AB ಹಾಗೂ CD ಗಳ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದಳತೆ ಇದು $2\pi r$ ಇದೆ.

$\therefore$ ABCD ಈ ಆಯತದ AB ಭುಜದ ಉದ್ದಳತೆ πr ಮತ್ತು CD ಭಉಜದ ಉದ್ದಳತೆ πr ಇದೆ.

ಆಯತದ BC ಈ ಭುಜದ ಉದ್ದಳತೆ = ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ = l ಇದೆ.

$\therefore$ ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ ಅಂದರೆ ಈ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವಾಗುವದು.

$\therefore$ ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠದ ಕೇತ್ರಫಲ = ಆಯತದ ಕ್ಷೆತ್ರಫಲ = AB × BC = $\pi r \times l = \pi rl$

ಈಗ, ಶಂಕುವಿನ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲದ ಸೂತ್ರಸಹ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.

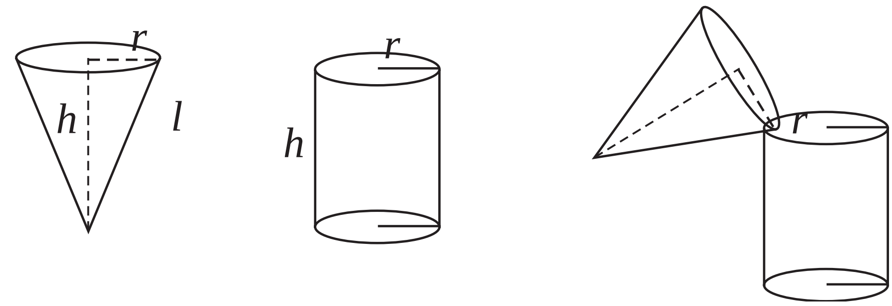
ಶಂಕುವಿನ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ = ವಕ್ರಪೃಷ್ಠದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ + ತಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

$$= \pi rl + \pi r^2$$

$$= \pi r(l + r)$$

ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಹತ್ವದ ಸಂಗತಿ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವದೇ? ಶಂಕು ಪೊಳ್ಳಿಗಿದ್ದು (ಅಂದರೆ ವಿದೂಷಕನ ಅಥವಾ ಹುಟ್ಟು ಹಬ್ಬದ ಟೋಪ್ಪಿಗೆ ಆಕಾರದಂತೆ ಇದ್ದರೆ) ವಕ್ರಪೃಷ್ಠ ಇದು ಅದರ ಒಂದೇ ಪೃಷ್ಠ ಇರುವದು. ಅಂದರೆ ಅದರ ಪೃಷ್ಠಫಲ πrl ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ ದೊರೆಯುವದು.

ಕೃತಿ : ಒಂದು ಕಾರ್ಡಬೋರ್ಡ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದರಿಂದ ಒಂದು ಮುಚ್ಚಿದ್ದ ವೃತ್ತಚಿತಿ ತಯಾರಿಸಿರಿ ಅಂದರೆ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ ಸಮಾನ ಇರುವ ಒಂದು ಶಂಕು ಹಾಗೂ ಒಂದು ಬದಿಗೆ ಮುಚ್ಚಿದ್ದ ಈ ವೃತ್ತಚಿತಿ ತಯಾರಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಲಂಬ ಎತ್ತರ ಹಾಗೂ ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ಎತ್ತರ ಸಮಾನವಾಗುವ ರೀತಿಯ ಶಂಕು ಹಾಗೂ ವೃತ್ತಚಿತಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಶಂಕು ಸಣ್ಣ ಮರುಳಿನಿಂದ ಪೂರ್ಣ ತುಂಬಿರಿ ಹಾಗೂ ಆ ಮರಳನ್ನು ಈ ವೃತ್ತಚಿತಿಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಿರಿ. ವೃತ್ತಚಿತ್ತಿ ಸಂಪೂರ್ಣ ತುಂಬವ ವರೆಗೆ ಈ ಕೃತಿ ಮಾಡಿರಿ. ವೃತ್ತಚಿತಿ ಮರಳಿನಿಂದ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬಲು ಎಷ್ಟು ಶಂಕುಗಳನ್ನು ಮರಳಿನಿಂದ ತುಂಬ ಬೇಕಾಗುವದು ? ಅಳೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 9.10

ವೃತ್ತಚಿತಿ ತುಂಬಲು ಮರಳಿನಿಂದ ತುಂಬಿದ ಮೂರು ಶಂಕುಗಳು ಬೇಕಾದವು.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ (Volume of a cone)

3 × ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ = ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ಘನಫಲ

$\therefore$ 3 × ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ = $\pi r^2 h$

$\therefore$ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ = $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

ಇದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

(i) ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = πr^2

(ii) ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ = πrl

(iii) ಶಂಕುವಿನ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ = $\pi r(l + r)$

(iv) ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ = $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ (1) ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಜ್ಯ (r) ಹಾಗೂ ಕೊಟ್ಟ ಲಂಬ ಎತ್ತರ (h) ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ (l) ತೆಗೆಯಿರಿ.

(i) $r = 6$ ಸೆ.ಮೀ, $h = 8$ ಸೆಮೀ

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (6)^2 + (8)^2$

$\therefore l^2 = 36 + 64$

$\therefore l^2 = 100$

$\therefore l = 10$ ಸೆಮೀ

(ii) $r = 9$ ಸೆಮೀ, $h = 12$ ಸೆಮೀ

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (9)^2 + (12)^2$

$\therefore l^2 = 81 + 144$

$\therefore l^2 = 225$

$\therefore l = 15$ ಸೆಮೀ

ಉದಾ (2) ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 12 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ ಲಂಬ ಎತ್ತರ 16 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ, ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ ಹಾಗೂ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$)

(i) $r = 12$ ಸೆಮೀ, $h = 16$ ಸೆಮೀ

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (12)^2 + (16)^2$

$\therefore l^2 = 144 + 256$

$\therefore l^2 = 400$

$\therefore l = 20$ ಸೆಮೀ

(ii) ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ $= \pi rl$

$= 3.14 \times 12 \times 20$

$= 753.6$ ಚೌಸೆಮೀ

(iii) ಶಂಕುವಿನ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ $= \pi r(l + r)$

$= 3.14 \times 12(20+12)$

$= 3.14 \times 12 \times 32$

$= 1205.76$ ಚೌಸೆಮೀ

ಉದಾ (3) ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ 704 ಚೌಸೆಮೀ ಹಾಗೂ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 ಸೆಮೀ ಇರುವ ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ ($\pi = \frac{22}{7}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ)

ಶಂಕುವಿನ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ $= \pi r(l + r)$

$$\therefore \quad 704 = \frac{22}{7} \times 7\,(l + 7)$$

$$\therefore \quad \frac{704}{22} = l + 7$$

$$\therefore \quad 32 = l + 7$$

$$\therefore \quad 32 - 7 = l$$

$$\therefore \quad l = 25 \text{ ಸೆಮೀ}$$

ಉದಾ (4) ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 1386 ಚೌಸೆಮೀ ಇದೆ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 28 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)

ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = πr^2

$\therefore \quad 1386 = \frac{22}{7} \times r^2$

$\therefore \quad \frac{1386 \times 7}{22} = r^2$

$\therefore \quad 63 \times 7 = r^2$

$\therefore \quad 441 = r^2$

$\therefore \quad r = 21$ ಸೆಮೀ

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (21)^2 + (28)^2$

$\therefore l^2 = 441 + 784$

$\therefore l^2 = 1225$

$\therefore l = 35$ ಸೆಮೀ

ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ = πrl

$= \frac{22}{7} \times 21 \times 35$

$= 22 \times 21 \times 5$

$= 2310$ ಚೌಸೆಮೀ

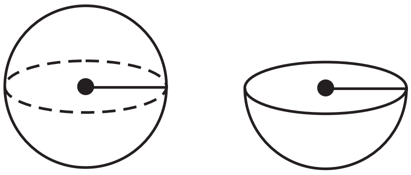
ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 9.2

1. ಶಂಕುವಿನ ಲಂಬ ಎತ್ತರ 12 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ 13 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು ?
2. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಒಟ್ಟು 7128 ಸೆಮೀ^{2} ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 28 ಸೆ.ಮೀ. ಇದ್ದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)
3. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ 251.2 ಸೆಮೀ^{2} ಹಾಗೂ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 8 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ ಹಾಗೂ ಲಂಬ ಎತ್ತರ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)
4. 6 ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹಾಗೂ 8 ಮೀ ವಕ್ರೋನ್ನತಿಯ ತಗಡಿನ ಗಟ್ಟಿಯಾದ (ಬಂದಿಸ್ತ) ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಘನಾಕೃತಿ ತಯಾರಿಸಲು 10 ರೂ. ಪ್ರತಿ ಚೌರಸ ಮೀಟರ ದರ ಇದ್ದರೆ ಆ ಘನಾಕೃತಿ ತಯಾರಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚಾಗುವದು. ($\pi = \frac{22}{7}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)
5. ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ 6280 ಘಸೆಮೀ ಇದ್ದು, ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 20 ಸೆ.ಮೀ. ಇದ್ದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಲಂಬ ಎತ್ತರ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)
6. ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಪೃಷ್ಠಫಲ 188.4 ಚೌಸೆಮೀ ಹಾಗೂ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ 10 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಲಂಬ ಎತ್ತರ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)
7. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ 1232 ಸೆಮೀ^{3} ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ 24 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)
8. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ 2200 ಚೌಸೆಮೀ ಇದೆ ಹಾಗೂ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ 50 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ಶಂಕುವಿನ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ ಹಾಗೂ ಘನಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)
9. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ತಂಬುವಿನಲ್ಲಿ 25 ಜನರು ಇರುವರು. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೆ ಭೂಮಿಯ ಮೇಲಿನ 4 ಚೌಮೀ ಸ್ಥಳ ಬೇಕಾಗುವದು. ಒಂದುವೇಳೆ ತಂಬುವಿನ ಎತ್ತರ 18 ಮೀಟರ ಇದ್ದರೆ ಆ ತಂಬುವಿನ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟು ?

10. ಒಂದು ಹೊಲದಲ್ಲಿ ದನಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಒಣಗಿದ ಹಲ್ಲುನ್ನು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಮೇವಿನ ರಾಶಿ (ಗೂಡು) ಮಾಡಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ, ರಾಶಿಯ (ಗುಡಿನ) ಎತ್ತರ 2.1 ಮೀ ಇದ್ದರೆ ತಳದ ವ್ಯಾಸ 7.2 ಮೀಟರ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ರಾಶಿಯ (ಹುಲ್ಲಿನ) ಘನಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮಳೆಯ ಲಕ್ಷಣಗಳು ಕಾಣಿಸಿದಾಗ ಆ ಪ್ರಸಂಗದಲ್ಲಿ ಈ ರಾಶಿಯನ್ನು (ಗೂಡನ್ನು) ಪ್ಲಾಸ್ಟಿಕ್‌ದಿಂದ ಮುಚ್ಚುವವರಿದ್ದರೆ ರೈತನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಚೌ. ಮೀಟರ ಪ್ಲಾಸ್ಟಿಕ ಕಾಗದ ಬೇಕಾಗುವದು? ($\pi = \frac{22}{7}$ ಮತ್ತು $\sqrt{17.37} = 4.17$ ಕೊಳ್ಳಿರಿ.)

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲ (Surface area of sphere)



ಆಕೃತಿ 9.11

ಪೊಳ್ಳಾದ ಗೋಲದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ = $4\pi r^2$

$\therefore$ ಅರ್ಧಗೋಲದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ = $2\pi r^2$

ಗಟ್ಟಿ ಅರ್ಧಗೋಲದ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ = ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ + ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

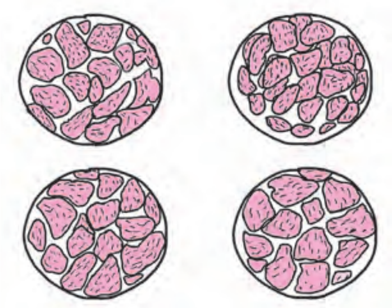
$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$

ಕೃತಿ :

ಒಂದು ಮೊಸಂಬಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದರ ಎರಡು ಅರ್ಧ ಭಾಗ ಮಾಡಿರಿ.

ಒಂದು ಅರ್ಧ ಗೋಲವನ್ನು ಸಪಾಟಾದ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಬುಡ ಮೇಲಾಗಿ ಇಟ್ಟು ಅದರ ನಾಲ್ಕು ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಈಗ ಮೊಸಂಬಿಯ ಸಿಪ್ಪೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಚಿಕ್ಕ-ಚಿಕ್ಕ ತುಂಡುಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿರಿ.



ಆ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಗುರುತುಮಾಡಿದ ವರ್ತುಳಗಳ ಮೇಲೆ ಅಂಟಿಸಿರಿ. ನಾಲ್ಕು ವರ್ತುಳಗಳು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬುವವು ಇದನ್ನು ಅನುಭವಿಸಿರಿ ನಾಲ್ಕು ವರ್ತುಳಗಳು ಪೂರ್ಣ ತುಂಬುವವು ಇದರ ಮೇಲಿಂದ

ಗೋಲದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ = $4 \times$ ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

$= 4\pi r^2$

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) ಒಂದು ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ. ಆ ಗೋಲದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)

ಗೋಲದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ = $4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times (7)^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 88 \times 7$

$= 616$

ಗೋಲದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ = 616 ಚೌಸೆಮೀ

(2) ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ 1256 ಚೌಸೆಮೀ ಇರುವ ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆಯಿರಿ (π = 3.14 ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)

ಗೋಲದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ = $4\pi r^2$

$\therefore\ 1256 = 4 \times 3.14 \times r^2$

$\therefore\ \frac{1256}{4 \times 3.14} = r^2$

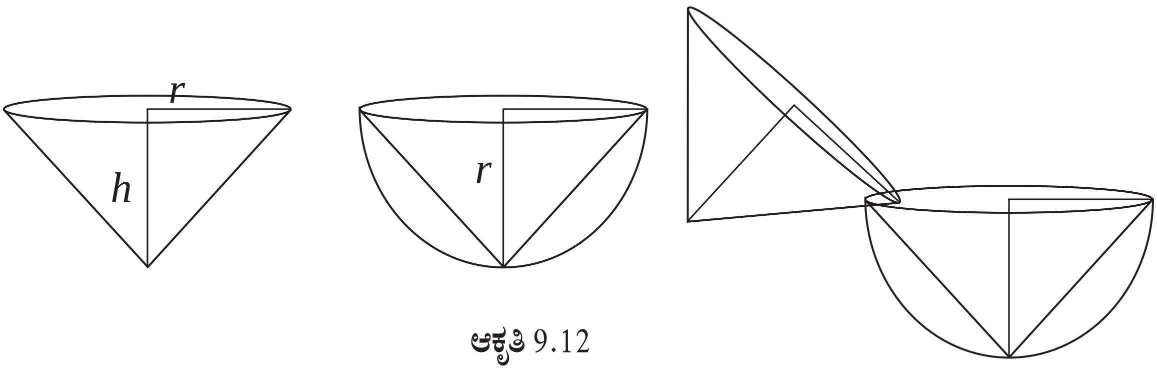
$\therefore\ \frac{31400}{314} = r^2$

$\therefore\ 100 = r^2$

$\therefore\ 10 = r$

$\therefore\ r = 10$ ಸೆಮೀ

ಕೃತಿ : ಒಂದು ಶಂಕು ಹಾಗೂ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಲ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ, ಅರ್ಧ ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹಾಗೂ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ ಸಮಾನ ಇರಬೇಕು. ಅದರಂತೆ ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹಾಗೂ ಅರ್ಧಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಸಮಾನ ಇರಬೇಕು. ಶಂಕುವನ್ನು ಮರಳನಿಂದ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬಿರಿ. ತುಂಬಿದ ಶಂಕುವನ್ನು ಅರ್ಧ ಗೋಲದಲ್ಲಿ ಸುರುವಿರಿ. ಅರ್ಧಗೋಲ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬಲು ಎಷ್ಟು ಶಂಕುಗಳು ಬೇಕಾಗುವವು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 9.12

ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಲ ತುಂಬಲು ಎರಡು ಶಂಕು ತುಂಬಿ ಮರಳು ಬೇಕಾಗುವದು.

$\therefore$ 2 × ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ = ಅರ್ಧಗೋಲದ ಘನಫಲ

$\therefore$ ಅರ್ಧಗೋಲದ ಘನಫಲ = 2 × ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times r$

$= \frac{2}{3}\pi r^3$

$\therefore$ ಗೋಲದ ಘನಫಲ = 2 × ಅರ್ಧಗೋಲದ ಘನಫಲ

$= \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore$ ಗೋಲದ ಘನಫಲ = $\frac{4}{3}\pi r^3$

ಇದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

- ಅರ್ಧಗೋಲದ ಘನಫಲ = $\frac{2}{3}\pi r^3$
- ಗಟ್ಟಿ ಅರ್ಧಗೋಲದ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ = $2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ (1) ಒಂದು ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯ 21 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಗೋಲದ ಘನಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)

ಉತ್ತರ : ಗೋಲದ ಘನಫಲ = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (21)^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21$

$= 88 \times 441$

$\therefore$ ಗೋಲದ ಘನಫಲ = 38808 ಘಸೆಮೀ

ಉದಾ (2) 113040 ಘಸೆಮೀ ಘನಫಲವಿರುವ ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆಯಿರಿ. (π = 3.14 ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ)

ಉತ್ತರ : ಗೋಲದ ಘನಫಲ = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$113040 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times r^3$

$\frac{113040 \times 3}{4 \times 3.14} = r^3$

$\frac{28260 \times 3}{3.14} = r^3$

$\therefore 9000 \times 3 = r^3$

$\therefore r^3 = 27000$

$\therefore r$ = 30 ಸೆಮೀ

ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯ 30 ಸೆಮೀ ಇದೆ.

ಉತ್ತರ (3) ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ 314 ಚೌ.ಸೆ.ಮೀ. ಇರುವ ಗೋಲದ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟು ? (π = 3.14 ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)

ಗೋಲದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ = $4\pi r^2$

$314 = 4 \times 3.14 \times r^2$

$\frac{314}{4 \times 3.14} = r^2$

$\frac{31400}{4 \times 314} = r^2$

$\therefore \frac{100}{4} = r^2$

$\therefore 25 = r^2$

$\therefore r$ = 5 ಸೆಮೀ

ಗೋಲದ ಘನಫಲ = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 5^3$

$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 125$

= 523.33 ಘಸೆಮೀ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 9.3

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯ ದರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ.
   (i) 4 ಸೆಮೀ (ii) 9 ಸೆಮೀ (iii) 3.5 ಸೆಮೀ
   ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಗೋಲಗಳ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ ಹಾಗೂ ಘನಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. (π = 3.14 ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)
2. 5 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯ ಇರುವ ಗಟ್ಟಿ ಅರ್ಧಗೋಲದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ ಹಾಗೂ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. (π = 3.14 ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)
3. 2826 ಸೆ.ಮೀ.^{2} ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ ಇರುವ ಗೋಲದ ಘನಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. (π = 3.14 ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)
4. 38808 ಘಸೆಮೀ ಘನಫಲವಿರುವ ಗೋಲದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)
5. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಲದ ಘನಫಲ 18000 π ಘಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಗೋಲದ ವ್ಯಾಸ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ 9

1. 0.9 ಮೀ ವ್ಯಾಸ ಹಾಗೂ 1.4 ಮೀ ಉದ್ದವಿರುವ ರೋಡ ರೋಲರದ 500 ಸುತ್ತುಗಳಿಂದ ಸಪಾಟಾದ ಭೂಮಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ($\pi = \frac{22}{7}$)
2. ಒಂದು ಇಷ್ಟಿಕಾಚಿತ್ತಿಯ ಆಕಾರದ ಮನೆಯಲ್ಲಿಯ ಮತ್ಸ್ಯಾಲಯ ತಯಾರಿಸಲು 2 ಮಿ.ಮೀ. ದಪ್ಪದ ಗಾಜನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಯಿತು. ಮತ್ಸ್ಯಾಲಯದ (ಗೋಡೆಯ) ಹೊರಗಿನಿಂದ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 60.4 × 40.4 × 40.2 ಇವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಮತ್ಸ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚು ಎಷ್ಟು ನೀರು ಹಿಡಿಯುವದು ?
3. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹಾಗೂ ಲಂಬ ಎತ್ತರ ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 5:12 ಇದೆ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ 314 ಘ.ಮೀ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಲಂಬ ಎತ್ತರ ಹಾಗೂ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ. (π = 3.14 ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)
4. ಒಂದು ಗೋಲದ ಘನಫಲ 904.32 ಘಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆಯಿರಿ. (π = 3.14 ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)
5. ಒಂದು ಘನದ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ 864 ಚೌಸೆಮೀ ಇರುತ್ತದೆ. ಆ ಗೋಲದ ಘನಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.
6. ಯಾವ ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲ 154 ಚೌಸೆಮೀ ಇದೆ. ಅದರ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ ಇದು ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ 616 ಚೌಸೆಮೀ ಇದೆ. ಅದರ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ ಇದು ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಇದ್ದರೆ, ಅದರ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.
8. ವರ್ತುಳಾಕಾರದ ಬಾವಿಯ ಒಳಗಿನ ವ್ಯಾಸ 4.20 ಮೀಟರ ಇದೆ. ಬಾವಿಯ ಆಳ 10 ಮೀಟರ ಇದೆ. ಅದರ ಒಳಬಿದಿಯ (ಒಳಗಿನ) ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ ಎಷ್ಟು? ಬಾವಿಯ ಒಳಬದಿಯ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಭಾಗಕ್ಕೆ ಗಿಲಾವು ಮಾಡಲು ಪ್ರತಿ ಚೌಸೆಮಿ 52 ರೂ. ದರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚು ಬರುವದು ?
9. ಒಂದು ರೋಡ ರೋಲರದ ಉದ್ದ 2.1 ಮೀಟರ ಇದ್ದು ಅದರ ವ್ಯಾಸ 1.4 ಮೀಟರ ಇದೆ. ಒಂದು ಮೈದಾನವನ್ನು ಸಪಾಟು ಮಾಡುವಾಗ ರೋಲರದ 500 ಸುತ್ತುಗಳು ಪೂರ್ಣ ಆಗುವವು. ಹಾಗಾದರೆ ರೋಲರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಚೌ.ಮೀ ಮೈದಾನ ಸಪಾಟು ಆಗುವದು? ಸಪಾಟು ಮಾಡುವ ದರ ಪ್ರತಿ ಚೌ.ಮೀ 7 ರೂ. ಇದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚು ಆಗುವದು ?

ಉತ್ತರ ಸೂಚಿ

1. ಭೂಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯ ಮೂಲಭೂತ ಸಂಕಲ್ಪನೆ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.1

1. (i) 3 (ii) 3 (iii) 7 (iv) 1
   (v) 3 (vi) 5 (vii) 2 (viii) 7
2. (i) 6 (ii) 8 (iii) 10 (iv) 1 (v) 3 (vi) 12
3. (i) P-R-Q (ii) ಏಕರೇಷೀಯ ಇಲ್ಲ (iii) A-C-B (iv) ಏಕರೇಷೀಯ ಇಲ್ಲ
   (v) X-Y-Z (vi) ಏಕರೇಷೀಯ ಇಲ್ಲ
4. 18 ಮತ್ತು 2 **5.** 25 ಮತ್ತು 9 **6.** (i) 4.5 (ii) 6.2 (iii) $2\sqrt{7}$ **7.** ತ್ರಿಕೋನ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.2

1. (i) ಇಲ್ಲ (ii) ಇಲ್ಲ (iii) ಇದೆ **2.** 4 **3.** 5 **4.** BP < AP < AB
5. (i) ಕಿರಣ RS ಅಥವಾ ಕಿರಣ RT (ii) ಕಿರಣ PQ (iii) ರೇಖ QR (iv) ಕಿರಣ QR ಮತ್ತು ಕಿರಣ RQ ಇತ್ಯಾದಿ
   (v) ಕಿರಣ RQ ಮತ್ತು ಕಿರಣ RT ಇ. (vi) ಕಿರಣ SR , ಕಿರಣ ST ಇ. (vii) ಬಿಂದು S
6. (i) ಬಿಂದು A ಮತ್ತು ಬಿಂದು C , ಬಿಂದು D ಮತ್ತು ಬಿಂದು P (ii) ಬಿಂದು L ಮತ್ತು ಬಿಂದು U , ಬಿಂದು P ಬಿಂದು R
   (iii) d(U,V) = 10 ,d(P,C) =6 , d(V,B) = 3 , d(U,L)=2

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.3

1. (i) ಯಾವುದೇ ಚೌಕೋನವು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದ್ದರೆ, ಆ ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.
   (ii) ಯಾವುದೇ ಚೌಕೋನವು ಆಯತವಿದ್ದರೆ ಆ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಏಕರೂಪವಿರುತ್ತವೆ.
   (iii) ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ಇದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದು ಮತ್ತು ತಳದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು ತಳಕ್ಕೆ ಲಂಬ ಇರುತ್ತದೆ.
2. (i) ಒಂದುವೇಳೆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಛೇದಿಕೆ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪವಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಇರುತ್ತವೆ.
   (ii) ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಛೇದಿಕೆಯ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಅಂತರಕೋನಗಳ ಜೋಡಿ ಪೂರಕ ಇರುತ್ತದೆ.
   (iii) ಯಾವುದೇ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಏಕರೂಪ ವಿದ್ದರೆ. ಆ ಚೌಕೋನವು ಆಯತ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ 1

1. (i) A (ii) C (iii) C (iv) C (v) B
2. (i) ಅಸತ್ಯ (ii) ಅಸತ್ಯ (iii) ಸತ್ಯ (iv) ಅಸತ್ಯ
3. (i) 3 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 2 (v) 6 (vi) 22 (vii) 165
4. -15 ಮತ್ತು 1 (5) (i) 10.5 (ii) 9.1 (6) -6 ಮತ್ತು 8

2. ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳು

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.1

1. (i) 95° (ii) 95° (iii) 85° (iv) 85°
2. $\angle a = 70^\circ$, $\angle b = 70^\circ$, $\angle c = 115^\circ$, $\angle d = 65^\circ$
3. $\angle a = 135^\circ$, $\angle b = 135^\circ$, $\angle c = 135^\circ$
5. (i) 75° (ii) 75° (iii) 105° (iv) 75°

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.2

1. ಇಲ್ಲ 4. $\angle ABC = 130^\circ$

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ 2

1. (i) C (ii) C (iii) A (iv) B (v) C 4. $x = 130^\circ$ $y = 50^\circ$
5. $x = 126^{0\circ}$ 6. $f = 100^\circ$ $g = 80^\circ$

3. ತ್ರಿಕೋನಗಳು

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.1

1. 110° 2. 45° 3. $80^\circ, 60^\circ, 40^\circ$ 4. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$
5. $60^\circ, 80^\circ, 40^\circ$ 6. $\angle DRE = 70^\circ$, $\angle ARE = 110^\circ$
7. $\angle AOB = 125^\circ$ 9. $30^\circ, 70^\circ, 80^\circ$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.2

1. (i) ಭು-ಭು-ಭು (ii) ಭು-ಕೋ-ಭು (iii) ಕೋ-ಭು-ಕೋ (iv) ಕರ್ಣಭುಜ
2. (i) ಕೋ-ಭು-ಕೋ, $\angle BAC \cong \angle QPR$, ರೇಖ AB $\cong$ ರೇಖ PQ, ರೇಖ AC $\cong$ ರೇಖ PR
   (ii) ಭು-ಕೋ-ಭು, $\angle TPQ \cong \angle TSR$, $\angle TQP \cong \angle TRS$, ರೇಖ PQ $\cong$ ರೇಖ SR
3. ಕರ್ಣಭುಜ, $\angle ACB \cong \angle QRP$, $\angle ABC \cong \angle QPR$, ರೇಖ AC $\cong$ ರೇಖ QR
4. ಭು-ಭು-ಭು, $\angle MLN \cong \angle MPN$, $\angle LMN \cong \angle MNP$, $\angle LNM \cong \angle PMN$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.3

1. $x = 50^\circ$, $y = 60^\circ$, $m\angle ABD = 110^\circ$, $m\angle ACD = 110^\circ$.
2. 7.5 ಮೂಲಮಾನ 3. 6.5 ಮೂಲಮಾನ 4. $l(PG)$ = 5 ಸೆಮೀ, $l(PT)$ = 7.5 ಸೆಮೀ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.4

1. 2 ಸೆ.ಮೀ. 2. 28° 3. $\angle QPR$, $\angle PQR$ 4. ಭುಜ NA, ಭುಜ FN

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.5

1. $\frac{XY}{LM} = \frac{YZ}{MN} = \frac{XZ}{LN}$, $\angle X \cong \angle L$, $\angle Y \cong \angle M$, $\angle Z \cong \angle N$
2. $l(QR)$ = 12 ಸೆಮೀ, $l(PR)$ = 10 ಸೆಮೀ

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ 3

1. (i) D (ii) B (iii) B

5. ಚೌಕೋನ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.1

1. m$\angle$XWZ = 135°, m$\angle$YZW = 45°, l (WY) = 10 ಸೆಮೀ
2. x = 40°, $\angle$C = 132°, $\angle$D = 48°
3. 25 ಸೆಮೀ, 50 ಸೆಮೀ, 25 ಸೆಮೀ, 50 ಸೆಮೀ
4. 60°, 120°, 60°, 120°
6. $\angle$A = 70°, $\angle$B = 110°, $\angle$C = 70°, $\angle$R = 110°

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.3

1. BO = 4 ಸೆಮೀ, $\angle$ACB = 35°
2. QR = 7.5 ಸೆಮೀ, $\angle$PQR = 105°, $\angle$SRQ = 75°
3. $\angle$IMJ = 90°, $\angle$JIK = 45°, $\angle$LJK = 45°
4. ಭುಜ = 14.5 ಸೆಮೀ, ಪರಿಮಿತಿ = 58 ಸೆಮೀ
5. (i) ಅಸತ್ಯ (ii) ಅಸತ್ಯ (iii) ಸತ್ಯ (iv) ಸತ್ಯ (v) ಸತ್ಯ (vi) ಅಸತ್ಯ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.4

1. $\angle$J = 127°, $\angle$L = 72° **2.** $\angle$B = 108°, $\angle$D = 72°

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.5

1. XY = 4.5 ಸೆಮೀ, YZ = 2.5 D, XZ = 5.5 ಸೆಮೀ

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ 5

1. (i) D (ii) C (iii) D **2.** 25 ಸೆಮೀ, **3.** $6.5\sqrt{2}$ ಸೆಮೀ
4. 24 ಸೆಮೀ, 32 ಸೆಮೀ, 24 ಸೆಮೀ, 32 ಸೆಮೀ **5.** PQ = 26 ಸೆಮೀ **6.** $\angle$MPS = 65°

6. ವರ್ತುಳ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.1

1. 20 ಸೆಮೀ **2.** 5 ಸೆಮೀ **3.** 32 ಮೂಲಮಾನ **4.** 9 ಮೂಲಮಾನ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.2

1. 12 ಸೆಮೀ **2.** 24 ಸೆಮೀ

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ 6

1. **1.** (i) A (ii) C (iii) A (iv) B (v) D (vi) C (vii) D ಅಥವಾ B **2.** 2:1 **4.** 24 ಮೂಲಮಾನ

7. ನಿರ್ದೇಶಕ ಭೂಮಿತಿ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.2

1. ಬಿಂದು A : ಚರಣ II, ಬಿಂದು B : ಚರಣ III, ಬಿಂದು K : ಚರಣ I, ಬಿಂದು D : ಚರಣ I
ಬಿಂದು E : ಚರಣ I, ಬಿಂದು F : ಚರಣ IV, ಬಿಂದು G : ಚರಣ IV, ಬಿಂದು H : Y-ಅಕ್ಷ
ಬಿಂದು M : X-ಅಕ್ಷ, ಬಿಂದು N : Y-ಅಕ್ಷ, ಬಿಂದು P : Y-ಅಕ್ಷ, ಬಿಂದು Q : ಚರಣ III
2. (i) ಚರಣ I (ii) ಚರಣ III (iii) ಚರಣ IV (iv) ಚರಣ II

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.3

1. ಚೌರಸ 2. $x = -7$ 3. $y = -5$ 4. $x = -3$ 5. 4 ಮೂಲಮಾನ
6. (i) Y-ಅಕ್ಷ (ii) X-ಅಕ್ಷ (iii) Y-ಅಕ್ಷ (iv) X-ಅಕ್ಷ
7. X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ (5,0) , Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ (0,5)
8. (−4,1), (−1.5, 1), (−1.5,5), (−4,5)

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ 7

1. (i) C (ii) A (iii) B (iv) C (v) C (vi) B **2.** (i) Q (−2,2), R(4,−1)
(ii) T(0,−1), M(3,0) (iii) ಬಿಂದು S (iv) ಬಿಂದು O **3.** (i) ಚರಣ IV (ii) ಚರಣ III
(iii) ಚರಣ II (iv) ಚರಣ II (v) Y ಅಕ್ಷ (vi) X ಅಕ್ಷ **5.** (i) 3
(ii) P(3,2), Q(3,−1), R (3,0) (iii) 0 **6.** ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು $y = 5$, $y = -5$ **7.** $|a|$

8. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 8.1

1. (i) $\frac{QR}{PQ}$ (ii) $\frac{QR}{PQ}$ (iii) $\frac{QR}{PR}$ (iv) $\frac{PR}{QR}$

2. (i) $\frac{a}{c}$ (ii) $\frac{b}{a}$ (iii) $\frac{b}{c}$ (iv) $\frac{a}{b}$

3. (i) $\frac{MN}{LN}$ (ii) $\frac{LM}{LN}$ (iii) $\frac{LM}{MN}$ (iv) $\frac{MN}{LN}$

4. (i) $\frac{PQ}{PR}, \frac{RQ}{PR}, \frac{PQ}{RQ}$ (ii) $\frac{QS}{PS}, \frac{PQ}{PS}, \frac{QS}{PQ}$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 8.2

1. $\sin\theta : \frac{12}{37}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{21}{29}, \frac{8}{17}, \frac{1}{3}$; $\cos\theta : \frac{60}{61}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{20}{29}, \frac{15}{17}, \frac{4}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta : \frac{12}{35}, \frac{11}{60}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}, \frac{3}{4}$

2. (i) $\frac{11}{2}$ (ii) $\frac{93}{20}$ (iii) 5 (iv) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ (v) $\frac{3}{4}$ (vi) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{3}{5}$ 4. $\frac{8}{17}$

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ 8

1. (i) A (ii) D (iii) C (iv) D
2. $\sin T = \frac{12}{13}$, $\cos T = \frac{5}{13}$, $\tan T = \frac{12}{5}$, $\sin U = \frac{5}{13}$, $\cos U = \frac{12}{13}$, $\tan U = \frac{5}{12}$
3. $\sin Y = \frac{8}{17}$, $\cos Y = \frac{15}{17}$, $\tan Y = \frac{8}{15}$, $\sin Z = \frac{15}{17}$, $\cos Z = \frac{8}{17}$, $\tan Z = \frac{15}{8}$
4. $\sin\theta = \frac{7}{25}$, $\tan\theta = \frac{7}{24}$, $\sin^2\theta = \frac{49}{625}$, $\cos^2\theta = \frac{576}{625}$
5. (i) 70 (ii) 60 (iii) 50

9. ಪೃಷ್ಠಫಲ ಹಾಗೂ ಘನಫಲ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 9.1

1. 640 ಚೌಸೆಮೀ, 1120 ಚೌಸೆಮೀ 2. 20 ಮೂಲಮಾನ 3. 81 ಚೌಸೆಮೀ, 121.50 ಚೌಸೆಮೀ
4. 3600 ಚೌಸೆಮೀ 5. 20 ಮೀ 6. 421.88 ಘಸೆಮೀ
7. 1632.80 ಚೌಸೆಮೀ, 4144.80 ಚೌಸೆಮೀ 8. 21 ಸೆಮೀ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 9.2

1. 5 ಸೆಮೀ 2. 36960 ಘಸೆಮೀ 3. 10 ಸೆಮೀ, 6 ಸೆಮೀ 4. ₹ 2640
5. 15 ಸೆಮೀ 6. 8 ಸೆಮೀ 7. 550 ಚೌಸೆಮೀ 8. 2816 ಚೌಸೆಮೀ, 9856 ಘಸೆಮೀ
9. 600 ಘಮೀ 10. 28.51 ಘಮೀ, 47.18 ಚೌಮೀ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 9.3

1. (i) 200.96 ಚೌಸೆಮೀ, 267.95 ಘಸೆಮೀ (ii) 1017.36 ಚೌಸೆಮೀ, 3052.08 ಘಸೆಮೀ
(iii) 153.86 ಚೌಸೆಮೀ, 179.50 ಘಸೆಮೀ
2. 157 ಚೌಸೆಮೀ, 235.5 ಚೌಸೆಮೀ 3. 14130 ಘಸೆಮೀ 4. 5544 ಚೌಸೆಮೀ 5. 60 ಸೆಮೀ

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ 9

1. 1980 ಚೌಸೆಮೀ 2. 96801.6 ಘಸೆಮೀ 3. 12 ಮೀ, 13 ಮೀ
4. 6 ಸೆಮೀ 5. 1728 ಘಸೆಮೀ 6. 179.67 ಘಸೆಮೀ
7. 21 ಸೆಮೀ 8. 132 ಚೌಮೀ, ₹ 6864 9. 4620 ಚೌಮೀ, ₹ 32340

ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳ, ಪುಣೆ – 411004.

कन्नड गणित इ.९वी भाग–२ ₹61.00