ಗಣಿತ ಭಾಗ -I

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆ

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಭಾಗ 4 ಕ

ನಾಗರಿಕರ ಮೂಲಭೂತ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು

ಅನುಚ್ಛೇದ 51 ಕ

ಮೂಲಭೂತ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು- ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಭಾರತೀಯ ನಾಗರಿಕನ ಈ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು ಇರುತ್ತವೆಯೆಂದರೆ ಅವನು-

(ಕ) ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ನಾಗರಿಕನು ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಪಾಲಿಸಬೇಕು. ಸಂವಿಧಾನದಲ್ಲಿಯ ಆದರ್ಶಗಳು ರಾಷ್ಟ್ರಧ್ವಜ ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆಗಳನ್ನು ಗೌರವಿಸಬೇಕು.

(ಖ) ಸ್ವಾತಂತ್ರಕ್ಕಾಗಿ ನಡೆದ ಹೋರಾಟಕ್ಕೆ ಸ್ಫೂರ್ತಿ ನೀಡಿದ ಆದರ್ಶಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸಬೇಕು.

(ಗ) ದೇಶದ ಸಾರ್ವಭೌಮತ್ವ, ಐಕ್ಯತೆ ಮತ್ತು ಸಮಗ್ರತೆಯನ್ನು ಸುರಕ್ಷಿತವಾಗಿಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಪ್ರಯತ್ನಶೀಲರಾಗಿರಬೇಕು.

(ಘ) ನಮ್ಮ ದೇಶದ ರಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಬೇಕು. ದೇಶದ ಸೇವೆ ಮಾಡಬೇಕು.

(ಙ) ಎಲ್ಲ ಪ್ರಕಾರದ ಭೇದಭಾವಗಳನ್ನು ಮರೆತು ಒಗ್ಗಟ್ಟನ್ನು ಬೆಳೆಸಬೇಕು ಹಾಗೂ ಸಹೋದರ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಉತ್ತೇಜಿಸಬೇಕು. ಸ್ತ್ರೀಯರ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಚ್ಯುತಿ ತರುವಂತಹ ರೂಢಿಗಳನ್ನು ತ್ಯಜಿಸಬೇಕು.

(ಚ) ನಮ್ಮ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಪರಂಪರೆಯನ್ನು ಕಾಪಾಡಬೇಕು.

(ಛ) ನೈಸರ್ಗಿಕ ಪರಿಸರವನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಸಜೀವ ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಮೇಲೆ ದಯೆ ತೋರಿಸಿರಿ.

(ಜ) ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಮನೋಭಾವನೆ, ಮಾನವೀಯತೆ ಮತ್ತು ಜಿಜ್ಞಾಸು ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

(ಝ) ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಆಸ್ತಿ-ಪಾಸ್ತಿಗಳನ್ನು ರಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಹಿಂಸಾಚಾರವನ್ನು ತ್ಯಜಿಸಬೇಕು.

(ಞ) ರಾಷ್ಟ್ರದ ಉತ್ತರೋತ್ತರ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ವೈಯಕ್ತಿಕ ಹಾಗೂ ಸಾಮೂಹಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಬೇಕು.

(ಟ) 6 ರಿಂದ 14 ವರ್ಷ ವಯೋಮಾನದಲ್ಲಿಯ ತಮ್ಮ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಪೋಷಕರು ಶಿಕ್ಷಣದ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಡಬೇಕು.

ಸರಕಾರ ನಿರ್ಣಯ ಕ್ರಮಾಂಕ : ಅಭ್ಯಾ ಸ-2116 /(ಪ್ರ.ಕ್ರ. 43/16) ಎಸ್‌ಡಿ-4 ದಿನಾಂಕ 25.4.2016 ಅನ್ವಯ ಸ್ಥಾಪಿತವಾದ ಸಮನ್ವಯ ಸಮಿತಿಯು ದಿ. 3.3.2017ರಂದು ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ ಮಾನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಗಣಿತ

ಭಾಗ - I

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆ

ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸ ಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳ, ಪುಣೆ.

EJY4HR

ತಮ್ಮ ಸ್ಮಾರ್ಟಫೋನದ ಮೇಲೆ DIKSHA App ಮೂಲಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಮೊದಲನೆಯ ಪುಟದ ಮೇಲಿರುವ Q.R. Codeದ ಮೂಲಕ ಡಿಜಿಟಲ್ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾಠದಲ್ಲಿರುವ Q.R. Codeದ ಮೂಲಕ ಆ ಪಾಠಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅಧ್ಯಯನ-ಅಧ್ಯಾಪನದ ಸಲುವಾಗಿ ಉಪಯುಕ್ತದೃಕ್-ಶ್ರಾವ್ಯಸಾಹಿತ್ಯಉಪಲಬದ್ಧವಾಗುವುದು.

ಪ್ರಥಮಾವೃತ್ತಿ 2017
ತೃತೀಯ ಪುನರ್ಮುದ್ರಣ : 2022

© **ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳ, ಪುಣೆ - 411 004.**

ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳವು ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಎಲ್ಲ ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಕಾಯ್ದಿರಿಸಿದೆ. ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸ ಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳದ ಸಂಚಾಲಕರ ಲಿಖಿತ ಅನುಮತಿ ಇಲ್ಲದೆ ಪುಸ್ತಕದ ಯಾವುದೇ ಭಾಗವನ್ನು ಉದ್ಧೃತಗೊಳಿಸಬಾರದು.

ಗಣಿತ ವಿಷಯ ತಜ್ಞ ಸಮಿತಿ

ಡಾ. ಮಂಗಲಾ ನಾರಳೀಕರ	(ಅಧ್ಯಕ್ಷೆ)
ಡಾ. ಜಯಶ್ರೀ ಅತ್ರೆ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀ. ರಮಾಕಾಂತ ಸರೋದೆ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀ. ದಾದಾಸೊ ಸರಡೆ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀ. ಸಂದಿಪ ಪಂಚಭಾಯಿ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀಮತಿ. ಲತಾ ಟಿಳೆಕರ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀಮತಿ. ಉಜ್ವಲಾ ಗೋಡಬೋಲೆ	(ಸದಸ್ಯ-ಸಚಿವೆ)

ಗಣಿತ ವಿಷಯ - ರಾಜ್ಯ ಅಭ್ಯಾಸಗಟ ಸದಸ್ಯರು

ಶ್ರೀಮತಿ. ಪೂಜಾ ಜಾಧವ
ಶ್ರೀ. ಪ್ರಮೋದ ಠೊಂಬರೆ
ಶ್ರೀ. ರಾಜೇಂದ್ರ ಚೌಧರಿ
ಶ್ರೀ. ಅಣ್ಣಪ್ಪಾ ಪರೀಟ
ಶ್ರೀ. ಶ್ರೀಪಾದ ದೇಶಪಾಂಡೆ
ಶ್ರೀ. ಬನ್ಸಿ ಹಾವಳೆ
ಶ್ರೀ. ಉಮೇಶ ರೇಳೆ
ಶ್ರೀ. ಚಂದನ ಕುಲಕರ್ಣಿ
ಶ್ರೀಮತಿ. ಅನಿತಾ ಜಾವೆ
ಶ್ರೀಮತಿ. ಭಾಗೆಶ್ರೀ ಚವ್ಹಾಣ
ಶ್ರೀ. ಕಲ್ಯಾಣ ಕಡೆಕರ
ಶ್ರೀ. ಸಂದೇಶ ಸೋನವಣೆ
ಶ್ರೀ. ಸುಜಿತ ಶಿಂದೆ
ಶ್ರೀ. ಹನುಮಂತ ಜಗತಾಪ
ಶ್ರೀ. ಪ್ರತಾಪ ಕಾಶಿದ
ಶ್ರೀ. ಕಾಶಿರಾಮ ಬಾವಿಸಾನೆ
ಶ್ರೀ. ಪಪ್ಪು ಗಾಡೆ
ಶ್ರೀಮತಿ. ರೋಹಿಣಿ ಶಿರ್ಕೆ
ಶ್ರೀ. ರಾಮ ವ್ಹನ್ಯಾಳಕರ

ಶ್ರೀ. ಅನ್ಸಾರ ಶೇಖ
ಶ್ರೀಮತಿ. ಸುವರ್ಣ ದೇಶಪಾಂಡೆ
ಶ್ರೀ. ಗಣೇಶ ಕೋಲತೆ
ಶ್ರೀ. ಸುರೇಶ ದಾತೆ
ಶ್ರೀ. ಪ್ರಕಾಶ ಝೆಂಡೆ
ಶ್ರೀ. ಶ್ರೀಕಾಂತ ರತ್ನಪಾರಖಿ
ಶ್ರೀ. ಸೂರ್ಯಕಾಂತ ಶಹಾನೆ
ಶ್ರೀ. ಪ್ರಕಾಶ ಕಾಪಸೆ
ಶ್ರೀ. ಸಲೀಮ ಹಾಶ್ಮಿ
ಶ್ರೀಮತಿ. ಆರ್ಯಾ ಭಿಡೆ
ಶ್ರೀ. ಮಿಲಿಂದ ಭಾಕರೆ
ಶ್ರೀ. ಜ್ಞಾನೇಶ್ವರ ಮಾಶಾಳಕರ
ಶ್ರೀ. ಲಕ್ಷ್ಮಣ ದಾವಣಕರ
ಶ್ರೀ. ಸುಧೀರ ಪಾಟೀಲ
ಶ್ರೀ. ರಾಜಾರಾಮ ಬಂಡಗರ
ಶ್ರೀ. ಪ್ರದೀಪ ಗೋಡಸೆ
ಶ್ರೀ. ರವೀಂದ್ರ ಖಂದಾರೆ
ಶ್ರೀ. ಸಾಗರ ಸಕುಡೆ

ಶ್ರೀಮತಿ. ಪ್ರಾಜಕ್ತಿ ಗೋಖಲೆ (ನಿಮಂತ್ರಿತ ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀ. ಎ. ದಿ. ಗೋಡಬೋಲೆ (ನಿಮಂತ್ರಿತ ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀಮತಿ. ತರೂಬೇನ ಪೋಪಟ (ನಿಮಂತ್ರಿತ ಸದಸ್ಯ)

ಕನ್ನಡ ಸಂಯೋಜನೆ : **ಡಾ. ಸದಾನಂದ ಎಂ. ಬಿಳ್ಳೂರ**
ವಿಶೇಷಾಧಿಕಾರಿ ಕನ್ನಡ
: **ಶ್ರೀ. ಆರ್.ಎಮ್. ಗಣಾಚಾರಿ**
ವಿಷಯ ಸಹಾಯಕ ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಮಂಡಳ ಪುಣೆ

ಭಾಷಾಂತರಕಾರರು : **ಶ್ರೀ. ವಾಯ್ ಪಿ. ತಿಕೋಟಿ**
ಶ್ರೀ. ಡಿ.ಎಮ್. ಬಗಲಿ
ಶ್ರೀ. ಎಸ್.ಸಿ. ದಸಮಾನೆ

ಸಮೀಕ್ಷೆ : **ಶ್ರೀಮತಿ. ಸುನೀತಾ ಹೆಚ್. ಶಿರಗುಪ್ಪಿ**

ಅಕ್ಷರಜೋಡಣೆ : PC Graphics. Mumbai.

ಮುಖಪುಟ ಮತ್ತು ಅಲಂಕಾರ : ಧನಶ್ರೀ ಮೋಕಾಶಿ, ಪುಣೆ

ಸಂಗಣಕದ ಆಲೇಖನ : ಸಂದೀಪ ಕೋಳಿ, ಮುಂಬಯಿ

ಚಿತ್ರಕಾರ : ಧನಶ್ರೀ ಮೋಕಾಶಿ.

ನಿರ್ಮಿತಿ : **ಶ್ರೀ. ಸಚ್ಚಿತಾನಂದ ಆಫಳೆ**
ಮುಖ್ಯ ನಿರ್ಮಿತಿ ಅಧಿಕಾರಿ
ಶ್ರೀ. ಸಂಜಯ ಕಾಂಬಳೆ
ನಿರ್ಮಿತಿ ಅಧಿಕಾರಿ
ಶ್ರೀ. ಪ್ರಶಾಂತ ಹರಣೆ
ಸಹಾ. ನಿರ್ಮಿತಿ ಅಧಿಕಾರಿ

ಕಾಗದ : 70 ಜಿ.ಎಸ್.ಎಮ್ ಕ್ರಿಮವೋವ್ಹ

ಮುದ್ರಣಾದೇಶ :

ಮುದ್ರಕ :

ಪ್ರಕಾಶಕ

ವಿವೇಕ ಉತ್ತಮ ಗೋಸಾವಿ, ನಿಯಂತ್ರಕ
ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮಂಡಳ,
ಪ್ರಭಾದೇವಿ, ಮುಂಬಯಿ - 25

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಪೀಠಿಕೆ

ಭಾರತದ ಪ್ರಜೆಗಳಾದ ನಾವು, ಭಾರತವನ್ನು ಒಂದು ಸಾರ್ವಭೌಮ
ಸಮಾಜವಾದಿ ಧರ್ಮನಿರಪೇಕ್ಷ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ಗಣರಾಜ್ಯವನ್ನಾಗಿ ನಿರ್ಮಿಸಲು
ಹಾಗೂ ಅದರ ಸಮಸ್ತ ನಾಗರಿಕರಿಗೆ :

ಸಾಮಾಜಿಕ, ಆರ್ಥಿಕ ಮತ್ತು ರಾಜಕೀಯ **ನ್ಯಾಯ;**
ವಿಚಾರ, ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ, ವಿಶ್ವಾಸ, ಶ್ರದ್ಧೆ
ಮತ್ತು ಉಪಾಸನಾ **ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ;**
ಸ್ಥಾನಮಾನ ಹಾಗೂ ಅವಕಾಶ **ಸಮಾನತೆಯು;**

ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ದೊರೆಯುವಂತೆ ಮಾಡಲು
ಮತ್ತು ವ್ಯಕ್ತಿಗೌರವವನ್ನು

ಹಾಗೂ ರಾಷ್ಟ್ರದ ಐಕ್ಯತೆ ಮತ್ತು ಏಕಾತ್ಮತೆಯನ್ನು
ಆಶ್ವಾಸನೆ ನೀಡುವ **ಬಂಧುತ್ವವನ್ನು**
ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲು ದೃಢಸಂಕಲ್ಪದ ನಿರ್ಧಾರ ಮಾಡಿ ;

ನಮ್ಮ ಸಂವಿಧಾನ ಸಭೆಯಲ್ಲಿ
ಇಂದು ದಿನಾಂಕ ಇಪ್ಪತ್ತಾರನೆಯ ನವ್ಹೆಂಬರ, ೧೯೪೯ ನೆಯ ಇಸವಿ
ಈ ಮೂಲಕ ಈ ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿ ಮತ್ತು ಅಧಿನಿಯಮಿತ
ಗೊಳಿಸಿ ಸ್ವತ: ಅರ್ಪಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

ಜನಗಣಮನ-ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯ ಹೇ
ಭಾರತ-ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ ।

ಪಂಜಾಬ, ಸಿಂಧು, ಗುಜರಾತ, ಮರಾಠಾ,
ದ್ರಾವಿಡ, ಉತ್ಕಲ, ಬಂಗ,

ವಿಂಧ್ಯ, ಹಿಮಾಚಲ, ಯಮುನಾ, ಗಂಗಾ,
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿತರಂಗ,

ತವ ಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ, ತವ ಶುಭ ಆಶಿಸ ಮಾಗೇ,
ಗಾಹೇ ತವ ಜಯಗಾಥಾ,

ಜನಗಣ ಮಂಗಲದಾಯಕ ಜಯ ಹೇ,
ಭಾರತ-ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ ।

ಜಯ ಹೇ, ಜಯ ಹೇ, ಜಯ ಹೇ,
ಜಯ ಜಯ ಜಯ, ಜಯ ಹೇ ॥

ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

ಭಾರತ ನನ್ನ ದೇಶ. ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ ಬಂಧು-ಭಗಿನಿಯರು.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ನನಗೆ ನನ್ನ ದೇಶದ ಸಮೃದ್ಧವಾದ ಹಾಗೂ ಬಹುವಿಧವಾದ ಪರಂಪರೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಅಭಿಮಾನವಿದೆ. ಈ ಪರಂಪರೆಗೆ ತಕ್ಕವನಾಗಿರಲು ನಾನು ಯಾವಾಗಲೂ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ತಾಯಿ-ತಂದೆ, ಗುರು-ಹಿರಿಯರನ್ನು ಆದರಿಸುತ್ತೇನೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರೊಡನೆ ಸೌಜನ್ಯದಿಂದ ನಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶ ಹಾಗೂ ನನ್ನ ದೇಶ ಬಾಂಧವರಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಠೆ ಇಡುವೆನೆಂದು ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಮಾಡುತ್ತೇನೆ. ಅವರ ಕಲ್ಯಾಣ ಹಾಗೂ ಉತ್ಕರ್ಷ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯೇ ನನ್ನ ಸುಖವುಂಟು.

ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಗೆಳೆಯರೆ,

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ನಿಮ್ಮೆಲ್ಲರಿಗೂ ಸ್ವಾಗತ !

ನೀವು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಿಕ್ಷಣದ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ, ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿಯ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದೀರಿ. ಅಭ್ಯಾಸದ ಸಲುವಾಗಿ ಎಂಟನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯ ತನಕ ಒಂದೇ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವಿತ್ತು, ಈಗ ಗಣಿತ ಭಾಗ 1 ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಭಾಗ 11 ಹೀಗೆ ಎರಡು ಪಠ್ಯಪುಸಕ್ತಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು.

ಗಣಿತ ಭಾಗ I ಈ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಜ್ಞಾನ, ಬೀಜಗಣಿತದ ಹೊರತಾಗಿ ವ್ಯವಹಾರಿಕ ಗಣಿತ, ಅರ್ಥ ನಿಯೋಜನೆ ಮತ್ತು ಮಾಹಿತಿಯ ವ್ಯವಸ್ಥಾಪನ ಈ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯ ಘಟಕಗಳ ಪರಿಚಯವಾಗುವುದು. ಈ ಭಾಗವು ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅನೇಕ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು. ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಾಂಖ್ಯಿಕಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಬೋಧ ಉಚ್ಚ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿಯೇ ಅಭ್ಯಾಸದ ಸಲುವಾಗಿ ತಳಹದಿಯಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿಯ ಸಂಕಲ್ಪನೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳವ ಸಲುವಾಗಿ ವಿವಿಧ ಕೃತಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಅದರಂತೆ ರೂಢಿ ಸಂಚುಗಳಲ್ಲಿಯು ಕೃತಿಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆ ಕೃತಿ ನಿಮಗೆ ಮಾಡುವುದಿದೆ. ಇಂಟರನೆಟದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿಯ ಸಂಕಲ್ಪನೆಗಳ ಇನ್ನಷ್ಟು ಕೆಲವು ಮಾಹಿತಿ ಮತ್ತು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ದೊರೆಯಬಹುದೇನು? ಅವನ್ನು ನೋಡವುದಿದೆ. ಕೃತಿ ಮಾಡುವಾಗ, ಉದಾಹರಣೆ ಬಿಡಿಸುವಾಗ, ನಿಷ್ಕರ್ಷೆ ತೆಗೆಯುವಾಗ ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯ/ಗೆಳತಿಯರೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡುವುದಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಪರಿಪೂರ್ಣವಾಚನ, ಕೃತಿಯುಕ್ತ ಅಧ್ಯಯನ ಮತ್ತು ರೂಢಿ ಈ ತ್ರಿಸೂತ್ರಗಳಿಂದ ಗಣಿತಯಾತ್ರೆಯನ್ನು ನೀವು ಆನಂದದಿಂದ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತೀರಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಶಯವೂ ಇಲ್ಲ.

ನಡೆಯಿರಿ ಆದರೆ ! ಈಗ ಶಿಕ್ಷಕರು, ಪಾಲಕರು, ಗೆಳೆಯ/ಗೆಳತಿಯರು ಇಂಟರನೆಟ ಇವರೆಲ್ಲರ ಜೊತೆಗೆ ಗಣಿತದ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ನಿಮ್ಮೆಲ್ಲರಿಗೂ ಅನೇಕ ಶುಭೇಚ್ಛೆಗಳು !

(ಡಾ. ಸುನಿಲ ಮಗರ)

ಸಂಚಾಲಕ

ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು

ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳ, ಪುಣೆ.

ಪುಣೆ: ದಿನಾಂಕ 28 ಎಪ್ರಿಲ್ 2017, ಅಕ್ಷಯತೃತೀಯಾ

ಭಾರತೀಯ ಸೌರ ದಿನಾಂಕ: 8 ವೈಶಾಖ 1939

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆ ಭಾಗ-1 ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯ ಕೆಳಗಿನ ಕ್ಷಮತೆಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ವಿಕಸಿತವಾಗಬಹುದು.

ಕ್ಷೇತ್ರ	ಘಟಕ	ಕ್ಷಮತೆ ವಿಧಾನಗಳು
1 ಸಂಖ್ಯೆಯ ಜ್ಞಾನ	1.1 ಗಣಗಳು 1.2 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ವರ್ಗಕರಣಿಗಳು	• ಸಂಖ್ಯೆ ಪ್ರಣಾಲಿಯಲ್ಲಿಯ ಗಣ ಮತ್ತು ಉಪಗಣ ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸಲು ಬರುವದು. • ಸಾಂತ ಮತ್ತು ಅನಂತ ಗಣ ಗುರುತಿಸಲು ಬರುವುದು. • ಗಣ ತೋರಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ವೇನ ಚಿತ್ರದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು. • ಗಣಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಿತ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಬರುವುದು. • ಸಂಖ್ಯೆ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು. • ವರ್ಗೀಕರಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅದರ ಮೇಲೆ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು.
2 ಬೀಜಗಣಿತ	2.1 ಬಹುಪದಿ 2.2 ದ್ವಿಚಲದಲ್ಲಿಯ ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು	• ಬಹುಪದಿಗಳ ಪರಿಚಯ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು. • ದ್ವಿಚಲದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಶಾಬ್ದಿಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವುದು.
3. ವ್ಯವಹಾರಿಕ ಗಣಿತ	3.1 ಅರ್ಥ ನಿಯೋಜನೆ 3.2 ಗುಣೋತ್ತರ ಪ್ರಮಾಣ	• ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರದ ತೆರಿಗೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ತೆರಿಗೆ ಆಕರಣೆ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು. • ನೌಕರರ ತೆರಿಗೆಯ ಗಣನೆ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು. • ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರದ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು. • ಸಮ ಪ್ರಮಾಣ ಮತ್ತು ವ್ಯಸ್ತ ಪ್ರಮಾಣ ಇವುಗಳ ಆಧಾರಿತ ಶಾಬ್ದಿಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವುದು.
4. ಮಾಹಿತಿಯ ವ್ಯವಸ್ಥಾಪನೆ (ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ)	4.1 ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ. 4.2 ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣಗಳು.	• ವರ್ಗೀಕೃತ ಮತ್ತು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸುವದು. • ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸಲು ಬರುವದು. • ಕೊಟ್ಟ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಗುರುತಿಸಿ ಅದರ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಲು ಬರುವದು

ಶಿಕ್ಷಕರ ಸಲುವಾಗಿ

ಒಂಬತ್ತನೆ ಇಯತ್ತೆ ಭಾಗ - 1 ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬಂದಿರುವ ಮೂಲಭೂತ ಸಂಕಲ್ಪನೆಯು ಮೂರ್ತದಿಂದ ಅಮೂರ್ತದೆಡೆಗೆ ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ವಿಕಸಿತಗೊಳಿಸಿರುವ ಸಂಬೋಧ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿಯ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಂಕಲ್ಪನೆ ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಈ ಕ್ಷೇತ್ರದ ವಿಸ್ತಾರ, ಹೀಗೆ ಎಲ್ಲ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಶಿಕ್ಷಕರು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಬೇಕು. ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಾಪನ ಮಾಡುವಾಗ ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆ, ಕೃತಿ, ಚರ್ಚೆ, ಪ್ರಶ್ನೋತ್ತರ, ಸಾಮೂಹಿಕ ಉಪಕ್ರಮ ಹೀಗೆ ವಿವಿಧ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಅಪೇಕ್ಷಿತವಿದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಶಿಕ್ಷಕರು ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಆಳವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿಯ ವಿವಿಧ ಕೃತಿಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಮಾಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.ಅದರ ಜೊತೆಗೆ ಅನೇಕ ಹೊಸ ಕೃತಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಬೇಕು.

ಗಣಿತದ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವುದಕ್ಕಿಂತ ಮೂಲ ಸಂಕಲ್ಪನೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಹೆಚ್ಚು ಮಹತ್ವವಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತರ್ಕಸಂಗತ, ವಿಚಾರ ಶಕ್ತಿಗೆ ಚಾಲನೆ ಕೊಡುವ ವಿವಿಧ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಶಿಕ್ಷಕ ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕೂಡಿಕೊಂಡು ಮಾಡಬೇಕು. ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿಯ ಆವ್ಹಾನಾತ್ಮಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಅಧೋರೇಖಿತಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಬೇರೆ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತರ್ಕಬದ್ಧ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿದ್ದರೆ, ಶಿಕ್ಷಕರು ಅದಕ್ಕೆ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹ ಕೊಡಬೇಕು. ಶಿಕ್ಷಕರು ಮೌಲ್ಯಾಂಕನ ಮಾಡುವಾಗ ಮುಕ್ತ ಪ್ರಶ್ನೆ ಮತ್ತು ಕೃತಿ ಪತ್ರಿಕೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಾ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವುದು ಅಪೇಕ್ಷಿತವಿದೆ. ಹೀಗೆ ಮೌಲ್ಯಾಂಕನ ಪದ್ಧತಿ ಶಿಕ್ಷಕರು ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಬೇಕು.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿಯ ಮಾದರಿಯು ಕೂಡಾ ಅದರ ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆಗಳ ಯಾದಿಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಹೊರತಾಗಿ ನೀವು ಸ್ವತ: ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು. ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿಯ ವಿವಿಧ ಕೃತಿಗಳು ಈ ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾವೇಶ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಅವು ಕೂಡಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಮಾಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಅವುಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಪದ್ಧತಿಯ ಉಪಯೋಗವು ಮುಂದಿನ ಇಯತ್ತೆಗಳ ಕ್ಷಮತೆಗಳು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ವಿಕಸಿತವಾಗಬಹುದು. ಹೀಗೆ ನಮಗೆ ಆಶೆ ಇದೆ.

ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆಯ ಮಾದರಿಯ ಯಾದಿ.

(1) ನಿಮ್ಮ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ ಇದು ವಿಶ್ವಗಣ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಖೋ-ಖೋ, ಕಬಡ್ಡಿ ಈ ರೀತಿಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಆಟ ಆಡುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗುಂಪು ವೆನ್ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರಿ.

(2) ಸಂಖ್ಯೆ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ $2+\sqrt{3}$, $5-\sqrt{2}$ ಇಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ.

(3) ಮೂರು ಅಥವಾ ನಾಲ್ಕು ಕೋಟಿ ಇರುವ ಬಹುಪದಿಯ ರೇಷೀಯ ಬಹುಪದಿಗೆ ವಿವಿಧ ಪದ್ಧತಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉತ್ತರವು ಒಂದೇ ಬರುತ್ತದೆಯೇ. ಅದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

(4) ತೆರಿಗೆ ತುಂಬುವ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವಿವರಣ ಪತ್ರ (ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯ, ಹಣ ಹೂಡಿಕೆ ಇತ್ಯಾದಿ ವಿಷಯ) ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ ಅದಕ್ಕೆ ತುಂಬಬೇಕಾದ ತೆರಿಗೆ ತೆಗೆಯುವುದು.

(5) ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣಾ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸುವುದು.

(6) ಸಹಜವಾಗಿ ಉಪಲಬ್ಧವಿರುವ ಔಷಧಗಳ ಪಾಕೀಟಿನ ಮೇಲೆ ಅದರಲ್ಲಿಯ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಟಕಗಳ ನಿಕಷ ತೆಗೆಯುವುದು.

(7) ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಆವ್ಹಾನಾತ್ಮಕ ಶಾಬ್ದಿಕ ಉದಾಹರಣೆ ದ್ವಿಚಲ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವುದು.

ಬೀಜ ಗಣಿತ

	ಪಾಠ	ಪುಷ್ಠಗಳು
1.	ಗಣಗಳು	1 ರಿಂದ 18
2.	ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	19 ರಿಂದ 35
3.	ಬಹುಪದಿಗಳು	36 ರಿಂದ 56
4.	ಗುಣೋತ್ತರ ಪ್ರಮಾಣ	57 ರಿಂದ 79
5.	ದ್ವಿಚಲ ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು	80 ರಿಂದ 92
6.	ಆರ್ಥಿಕ ನಿಯೋಜನೆ	93 ರಿಂದ 107
7.	ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	108 ರಿಂದ 128
•	ಉತ್ತರಸೂಚಿ	129 ರಿಂದ 136

1 ಗಣಗಳು

EK4CVH

ಕಲಿಯೋಣಬನ್ನಿ.

- ಗಣಗಳು : ಪರಿಚಯ
- ಗಣಗಳ ಪ್ರಕಾರಗಳು
- ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳು
- ಸಮಾನ ಗಣ, ಉಪಗಣಗಳು
- ವಿಶ್ವಗಣ, ಪೂರಕಗಣ
- ಛೇದಗಣ, ಸಂಯೋಗ ಗಣ
- ಗಣದಲ್ಲಿಯ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣಬನ್ನಿ.

ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಪರಿಚಯದ ವಸ್ತು ಸಮೂಹಗಳು ಇವೆ.

				1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...
ಹೂಗಳ ಗೊಂಚಲು	ಕೀಲಿಕೈಗಳ ಗುಂಪು	ಪಕ್ಷಿಗಳ ಸಮೂಹ	ವಹಿಗಳ ಬಂಡಲು	ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಂಪು

ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಸ್ತು ಸಮೂಹಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ವಿಶಿಷ್ಟ ಶಬ್ದ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಎಲ್ಲ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಮೂಹದಲ್ಲಿಯ ಘಟಕವನ್ನು ನಮಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಬರುವದು. ವಸ್ತುಗಳ ಈ ರೀತಿಯ ಸಮೂಹಗಳಿಗೆ 'ಗಣ' ಎನ್ನುವರು.

ಈಗ ಈ ಸಮೂಹ ನೋಡಿರಿ. 'ಊರಿನಲ್ಲಿಯ ಮಕ್ಕಳು ಸುಖಿ ಮಕ್ಕಳು' 'ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಜಾಣ ಮಕ್ಕಳು' ಸಮೂಹದ ಈ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ 'ಸುಖಿ' ಮತ್ತು 'ಜಾಣ' ಈ ಎರಡು ಶಬ್ದಗಳ ಅರ್ಥ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಪದಗಳಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ 'ಸುಖಿ' ವೃತ್ತಿ ಮತ್ತು 'ಜಾಣ' ಈ ಎರಡು ಶಬ್ದಗಳ ಅರ್ಥ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಮೂಹಗಳಿಗೆ 'ಗಣ' ಎನ್ನಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಈಗ ಮುಂದೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಮೂಹಗಳಿಗೆ ಗಣ ಎನ್ನಲು ಬರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

(1) ವಾರದಲ್ಲಿಯ ಏಳು ದಿನಗಳು

(2) ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿಯ ತಿಂಗಳುಗಳು

(3) ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಶೂರ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು

(4) ಮೊದಲಿನ 10 ಎಣಿಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

(5) ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿಯ ಗಟ್ಟಿ ಮುಟ್ಟಾದ ಕೋಟೆ-ದುರ್ಗಗಳು

(6) ನಮ್ಮ ಸೂರ್ಯಮಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ಗ್ರಹಗಳು

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಗಣಗಳು (Sets)

ಯಾವ ಸಮೂಹದಲ್ಲಿಯ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಬರುವುದೋ ಆ ಸಮೂಹಗಳಿಗೆ ಗಣ ಎನ್ನುವರು.

ಗಣಗಳಿಗೆ ಹೆಸರು ಕೊಡಲು ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇಂಗ್ಲೀಷ ವರ್ಣ ಮಾಲೆಯ ದೊಡ್ಡ ಅಕ್ಷರಗಳಾದ (Capital letters) A, B, C,.....,Z ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವರು.

ಗಣದಲ್ಲಿಯ ಘಟಕಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲು a, b, c,... z ಈ ಇಂಗ್ಲೀಷ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವರು

a ಇದು ಗಣ A ದ ಘಟಕ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸಲು '$a \in A$' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು a ಇದು ಗಣ A ದ ಘಟಕ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿಸಲು '$a \notin A$' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಈಗ ನಾವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

N = { 1, 2, 3, . . .} ಇದು ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ (Set of natural numbers) ಇದೆ.

W = {0, 1, 2, 3, . . .} ಇದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ (Set of whole numbers) ಇದೆ.

I = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...} ಇದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ (Set of integers) ಇದೆ.

Q ಇದು ಎಲ್ಲ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ (Set of rational numbers) ಇದೆ.

R ಇದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ (Set of real numbers) ಇದೆ.

ಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಪದ್ಧತಿಗಳು

ಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಎರಡು ಪದ್ಧತಿಗಳಿವೆ.

(1) ಯಾದಿ ಪದ್ಧತಿ (Listing method or roster method)

ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಗಣದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಪುಷ್ಪಾವರಣ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕವನ್ನು ಬೇರೆಯಾಗಿ ತೋರಿಸಲು ಎರಡು ಹೊಂದಿಕೊಂಡ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ಅಲ್ಪವಿರಾಮ ಚಿಹ್ನೆ ಕೊಡುತ್ತಾರೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಘಟಕಗಳ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಮಹತ್ವ ಇರುವುದಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ಎಲ್ಲ ಘಟಕಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವದು ಅವಶ್ಯಕ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ. 1 ರಿಂದ 10 ರ ನಡುವಿನ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಯಾದಿ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಮುಂದಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

ಉದಾ. A = {3, 5, 7, 9} ಅಥವಾ A = {7, 3, 5, 9}

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಘಟಕ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಬಂದರೂ ಸಹ ಇದನ್ನು ಒಂದೇ ಸಲ ಬರೆಯಬೇಕು. ಎಂಬ ಸಂಕೇತ ಇದೆ. ಉದಾ. - remember ಈ ಶಬ್ದದಲ್ಲಿ r, m, e ಈ ಅಕ್ಷರ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಬಂದಿದೆ. ಆದರೆ ಈ ಶಬ್ದದಲ್ಲಿಯ ಅಕ್ಷರಗಳ ಗಣ {r, e, m, b} ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವರು.

(2) ಗುಣಧರ್ಮ ಪದ್ಧತಿ (Rule method or set builder form)

ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಘಟಕಗಳ ಯಾದಿ ಮಾಡದೇ ಗಣದ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯ ಘಟಕ ಚಲಪದದಿಂದ ತೋರಿಸಿ ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಘಟಕಗಳ ಯಾದಿ ಮಾಡದೇ ಎಳೆಯುವರು. ನೇರ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮುಂದೆ ಆ ಚಲಪದದ ಗುಣಧರ್ಮ ಬರೆಯುವರು. **ಉದಾ.** $A = \{x \mid x \in N, 1 < x < 10\}$ ಇದರ ಓದುವ ರೀತಿ A ಗಣವು x ಘಟಕಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದು x ಇದು 1 ಮತ್ತು 10ರ ನಡುವಿನ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ. B = { x | x ಇದು 1 ರ 10 ನಡುವಿನ ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ} ಇದರಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ 10 ರ ನಡುವಿನ

ಎಲ್ಲ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾವೇಶ ಆಗುವುದರಿಂದ B ಈ ಗುಣವನ್ನು {2, 3, 5, 7} ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು.

Q ಇದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಇದೆ. ಇದನ್ನು ಗುಣಧರ್ಮ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

$$Q = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in I, q \neq 0\}$$

ಇದರ ವಾಚನ $\frac{p}{q}$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿಯ ಎಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದರೆ, p ಇದು ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು q ಇದು ಶ್ಯೂನ್ಯೇತ್ತರ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

ಮಾದರಿ ಉದಾಹರಣೆಗಳು: ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣ ಎರಡೂ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬರೆಯಲಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಗುಣಧರ್ಮ ಪದ್ಧತಿ	ಯಾದಿ ಪದ್ಧತಿ
A = { x | x ಇದು DIVISION ಈ ಶಬ್ದಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಕ್ಷರ ಇದೆ}	A = {D, I, V, S, O, N}
B = { y | y ಇದು ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ $y^2 = 9$}	B = { −3, 3}
C = {z | z ಇದು 5ರ ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿಯ 30 ಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ}	C = { 5, 10, 15, 20, 25}

ಉದಾ. : ಮುಂದಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿಯ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಯಾದಿ ಪದ್ಧತಿ	ಗುಣಧರ್ಮ ಪದ್ಧತಿ
A = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}	A = {x | x ಇದು 15ರ ಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣ ಸಮನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ}
....	B = { x | x ಇದು 1 ರಿಂದ 20ರ ನಡುವಿನ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ}
C = { a, e, i, o, u}	....
....	D = { y | y ಇದು ಕಾಮನ ಬಿಲ್ಲಿನಲ್ಲಿಯ ಬಣ್ಣವಿದೆ}
....	P = {x | x ಇದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದು, $-3 < x < 3$}
M = {1, 8, 27, 64, 125.......}	M = {x | x ಇದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಘನ ಇದೆ}

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.1

(1) ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ಯಾದಿ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ (ii) 1 ರಿಂದ 50 ರ ನಡುವಿನ ಸಮ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

(iii) ಎಲ್ಲ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ (iv) ಸಂಗೀತದಲ್ಲಿಯ ಏಳು ಮೂಲ ಸ್ವರಗಳ ಗಣ

(2) ಕೆಳಗೆ ಚಿಹ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಶಬ್ದಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\frac{4}{3} \in Q$ (ii) $-2 \notin N$ (iii) P = {p \| p ಇದು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ}

(3) ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ಯಾದಿ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಮತ್ತು ಗುಣಧರ್ಮ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬರೆಯಿರಿ.

(4) ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ಯಾದಿ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) ಭಾರತೀಯ ಸೌರವರ್ಷದ ಎಲ್ಲ ತಿಂಗಳುಗಳ ಗಣ

(ii) 'COMPLEMENT' ಈ ಶಬ್ದದಲ್ಲಿಯ ಅಕ್ಷರಗಳ ಗಣ

(iii) ಮಾನವನ ಎಲ್ಲ ಜ್ಞಾನೇಂದ್ರಿಯಗಳ ಗಣ

(iv) 1 ರಿಂದ 20 ರ ನಡುವಿನ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

(v) ಪೃಥ್ವಿಯ ಮೇಲಿನ ಖಂಡಗಳ ಗಣ

(5) ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ಗುಣಧರ್ಮ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) A = { 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

(ii) B = { 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48}

(iii) C = {S, M, I, L, E}

(iv) D = {ರವಿವಾರ, ಸೋಮವಾರ, ಮಂಗಳವಾರ, ಬುಧವಾರ, ಗುರುವಾರ, ಶುಕ್ರವಾರ, ಶನಿವಾರ}

(v) X = {a, e, t}

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಗಣಗಳ ಪ್ರಕಾರಗಳು (Types of sets)

ಗಣಗಳ ಹೆಸರು	ವ್ಯಾಖ್ಯೆ	ಉದಾಹರಣೆ
ಏಕ ಘಟಕ ಗಣ (Singleton Set)	ಯಾವ ಗಣದಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ಘಟಕ ಇರುತ್ತದೆ ಆ ಗಣಕ್ಕೆ 'ಏಕಘಟಕ ಗಣ' ಎಂದು ಎನ್ನುವರು.	A = {2} A ಇದು ಸಮ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಇದೆ.
ರಿಕ್ತ ಗಣ (Null Set) (Empty Set)	ಯಾವ ಗಣದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಗುಣಧರ್ಮದ ಒಂದು ಘಟಕ ಇರುವುದಿಲ್ಲವೋ ಅದಕ್ಕೆ 'ರಿಕ್ತಗಣ' ಎನ್ನುವರು. ಈ ಗಣವನ್ನು { } ಅಥವಾ 'ϕ' (ಫಾಯ) ಈ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ತೋರಿಸುವರು.	B = {x | x ಇದು 2 ಮತ್ತು 3ರ ನಡುವಿನ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.} $\therefore$ B = { } ಅಥವಾ ϕ
ಸಾಂತ ಗಣ (Finite Set)	ಯಾವ ಗಣ ರಿಕ್ತ ಇದೆ ಅಥವಾ ಯಾವ ಗಣದಲ್ಲಿಯ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮರ್ಯಾದಿತ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಘಟಕಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಲು ಬರುವದು ಆ ಗಣಕ್ಕೆ 'ಸಾಂತಗಣ' ಎನ್ನುವರು.	C = {p | p ಇದು 1 ರಿಂದ 22 ನಡುವಿನ 4 ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.} C = {4, 8, 12, 16, 20}
ಅನಂತ ಗಣ (Infinite Set)	ಯಾವ ಗಣದಲ್ಲಿಯ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಮರ್ಯಾದಿತ ವರೆಗೆ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಅದಕ್ಕೆ 'ಅನಂತ ಗಣ' ಎನ್ನುವರು.	N = {1, 2, 3, . . . }

ಉದಾ. ಮುಂದಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ಯಾದಿ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಅವುಗಳನ್ನು ಸಾಂತ ಗಣ ಮತ್ತು ಅನಂತ ಗಣ ಹೀಗೆ ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡಿರಿ.

(i) A = $\{x \mid x \in$ N ಮತ್ತು x ಇದು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ$\}$ (ii) B = $\{x \mid x \in N$ ಮತ್ತು $3x - 1 = 0\}$

(iii) C = $\{x \mid x \in$ N ಮತ್ತು x ಇದು 7ರ ವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ$\}$

(iv) D = $\{(a, b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$ (v) E = $\{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$

(vi) F = $\{(a, b) \mid a, b \in Q,\ a + b = 11\}$

ಉತ್ತರ : (i) A = $\{x \mid x \in$ N ಮತ್ತು x ಇದು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.$\}$

A = $\{1, 3, 5, 7, \ldots\ldots\}$ ಇದು ಅನಂತ ಗಣ ಇದೆ.

(ii) B = $\{x \mid x \in N$ ಮತ್ತು $3x - 1 = 0\}$

$3x - 1 = 0 \quad \therefore\ 3x = 1 \quad x = \frac{1}{3}$

ಆದರೆ $\frac{1}{3} \notin N \quad \therefore B = \{\ \ \}$ $\therefore$ B ಇದು ಸಾಂತ ಗಣ ಇದೆ.

(iii) C = $\{x \mid x \in$ N ಮತ್ತು x ಇದು 7 ರ ವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.$\}$

C = $\{7, 14, 21, \ldots\}$ ಇದು ಅನಂತ ಗಣ ಇದೆ.

(iv) D = $\{(a, b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$

ನಾವು a ಮತ್ತು b ಗಳ ಈ ರೀತಿಯ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ a, b ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದು a + b = 9 ಇದೆ

ಮೊದಲು a ದ ಮತ್ತು ನಂತರ b ದ ಬೆಲೆ ಈ ಕ್ರಮ ಇಟ್ಟು D ಈ ಗಣ ಯಾದಿ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಮುಂದಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

D = $\{(0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1), (9, 0)\}$,

ಈ ಗಣದ ಘಟಕ ಎಂದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಎಣಿಕೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು ಮತ್ತು ಅವು ನಿಶ್ಚಿತ ಇವೆ.

$\therefore$ D ಈ ಗಣ ಸಾಂತ ಗಣ ಇದೆ.

(v) E = $\{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$

E = $\{-10, 10\}$. E ಇದು ಸಾಂತ ಗಣ ಇದೆ

(vi) F = $\{(a, b) \mid a, b \in Q,\ a + b = 11\}$

F = $\{(6, 5), (3, 8), (3.5, 7.5), (-15, 26), \ldots\}$ ಈ ರೀತಿ ಅಸಂಖ್ಯ ಜೋಡಿಗಳು ದೊರೆಯುವವು.

$\therefore$ F ಇದು ಅನಂತ ಗಣ ಇದೆ.

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ N, W, I, Q, R ಈ ಎಲ್ಲ ಗಣಗಳು ಅನಂತ ಗಣಗಳಾಗಿವೆ.

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಸಮಾನ ಗಣಗಳು (Equal sets)

ಗಣ A ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕಗಳು ಗಣ B ದಲ್ಲಿ B ದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕ ಗಣ A ದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ ಆ ಗಣಗಳನ್ನು 'ಸಮಾನ ಗಣಗಳು' ಎನ್ನುವರು

'A ಮತ್ತು B ಇವು ಸಮಾನ ಗಣಗಳಾಗಿವೆ ಇದನ್ನು ಚಿಹ್ನೆಯಲ್ಲಿ A = B ಎಂದು ಬರೆಯುವರು.

ಉದಾ. (1) A = { x | x ಇದು 'listen' ಈ ಶಬ್ದದಲ್ಲಿಯ ಅಕ್ಷರ ಇದೆ} ∴ A = { l, i, s, t, e, n}

B = { y | y ಇದು 'silent' ಈ ಶಬ್ದದಲ್ಲಿಯ ಅಕ್ಷರ ಇದೆ} ∴ B = { s, i, l, e, n, t}

A ಮತ್ತು B ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಘಟಕಗಳ ಕ್ರಮ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಇದೆ, ಆದರೆ ಘಟಕಗಳು ಅವೇ ಇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ A ಮತ್ತು B ಈ ಗಣಗಳು ಸಮಾನ ಇವೆ ಅಂದರೆ A = B ಇದೆ

ಉದಾ. (2) A = {x | $x = 2n,\ n \in N,\ 0 < x \leq 10$}, A = {2, 4, 6, 8, 10}

B = { y | y ಇದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ $1 \leq y \leq 10$}, B = {2, 4, 6, 8, 10}

∴ A ಮತ್ತು B ಇವು ಸಮಾನ ಗಣಗಳಾಗಿವೆ

ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ

C = {1, 3, 5, 7} D = { 2, 3, 5, 7}

C ಮತ್ತು D ಸಮಾನ ಗಣಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುವುದೇ ? ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಇಲ್ಲ.

ಕಾರಣ $1 \in C,\ 1 \notin D,\ 2 \in D,\ 2 \notin C$

ಆದ್ದರಿಂದ C ಮತ್ತು D ಸಮಾನ ಗಣಗಳಾಗಿಲ್ಲ ಅಂದರೆ $C \neq D$

ಉದಾ. (3) ಒಂದು ವೇಳೆ A = {1, 2, 3} ಮತ್ತು B = { 1, 2, 3, 4} ಇದ್ದರೆ $A \neq B$ ಇದ್ದರೆ ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ

ಉದಾ. (4) A = {x | x ಇದು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಮತ್ತು $10 < x < 20$} ಮತ್ತು B = {11, 13, 17, 19}

ಇಲ್ಲಿ A = B ಇದೆ ಇದನ್ನು ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.2

(1) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಗಣಗಳು ಸಮಾನ ಇವೆ ಮತ್ತು ಯಾವವು ಸಮಾನ ಇಲ್ಲ ಇದನ್ನು ಕಾರಣ ಸಹಿತ ಬರೆಯಿರಿ.

A = { x | $3x - 1 = 2$}

B = { x | x ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಆದರೆ x ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ ಮತ್ತು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ}

C = {x | $x \in N,\ x < 2$}

(2) A ಮತ್ತು B ಸಮಾನ ಇವೆಯೇ ? ಅದನ್ನು ಕಾರಣ ಸಹಿತ ಬರೆಯಿರಿ

A = ಸಮ ಇರುವ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ B = {x | $7x - 1 = 13$}

(3) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಗಣಗಳು ರಿಕ್ತ ಇವೆ ಅದನ್ನು ಕಾರಣ ಸಹಿತ ಬರೆಯಿರಿ

(i) A = { a | a ಇದು ಶೂನ್ಯಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಿರುವ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ}

(ii) B = {x | $x^2 = 0$} (iii) C = { x | $5x - 2 = 0,\ x \in N$}

(4) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಗಣಗಳು ಸಾಂತ ಮತ್ತು ಯಾವವು ಅನಂತ ಇದೆ ಅದನ್ನು ಕಾರಣ ಸಹಿತ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $A = \{ x \mid x < 10,\ x$ ಇದು ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

(ii) $B = \{y \mid y < -1,\ y$ ಇದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

(iii) C = ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ 9ನೇ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ

(iv) ನಿಮ್ಮ ಊರಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುವ ಜನರ ಗಣ

(v) ಪ್ರಯೋಗಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ಉಪಕರಣಗಳ ಗಣ

(vi) ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

(vii) ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣ

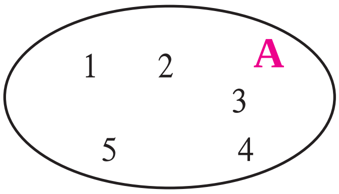
ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ವೆನ್ ಆಕೃತಿಗಳು (Venn diagrams)

ಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಬಂಧಿತ ಆಕೃತಿಗಳ ಉಪಯೋಗ ಬ್ರಿಟಿಶ್ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಜಾನ್‌ವೆನ್ ಇವನು ಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಮಾಡಿದನು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂತಹ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ವೆನ್ ಆಕೃತಿ ಎನ್ನುವರು. ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗಣಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಬಂಧ ತಿಳಿಯಲು ಮತ್ತು ಗಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಈ ಆಕೃತಿಗಳ ಒಳ್ಳೆಯ ಉಪಯೋಗವಾಗುವುದು. ವೆನ್ ಆಕೃತಿಗಳಿಂದ ಗಣಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತೋರಿಸುವರು ಎಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಉದಾ. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ವೆನ್ ಆಕೃತಿಯಿಂದ A ಈ ಗಣ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



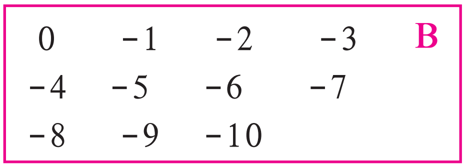
1834-1923

ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಈ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಗಣಿತದ ರೂಪ ಕೊಡುವ ಕಾರ್ಯ ಜಾನ್‌ವೆನ್ ಇವರು ಪ್ರಥಮ ಮಾಡಿದರು.

ಲಾಜಿಕ್ ಆಪ್ ಚಾನ್ಸ್ ಇದು ಅವರ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ ಪುಸ್ತಕ ಇದೆ.

$B = \{x \mid -10 \le x \le 0,\ x$ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಇದೆ$\}$

ಬದಿಯ ವೆನ್ ಆಕೃತಿ B ಗಣವನ್ನು ತೋರಿಸುವದು.



ಉಪಗಣ (Subset)

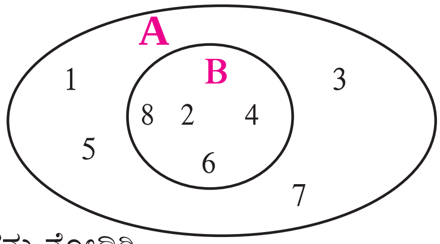
ಒಂದು ವೇಳೆ A ಮತ್ತು B ಇವು ಎರಡು ಗಣಗಳಾದರೆ ಮತ್ತು ಗಣ B ದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕ, ಗಣ A ದ ಕೂಡ ಘಟಕವಾದ್ದರೆ ಗಣ Bಗೆ ಗಣ Aದ ಉಪಗಣ ಎನ್ನುವರು ಮತ್ತು $B \subseteq A$ ಈ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ತೋರಿಸುವರು. ಎಂಬುದನ್ನು 'B ಉಪಗಣ A' ಎಂದು ಅಥವಾ 'B ಇದು A' ದ ಉಪಗಣ ಇದೆ ಎಂದು ಓದುವರು.

ಉದಾ. (1) $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

B ದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕ A ದ ಕೂಡ ಘಟಕವಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ $B \subseteq A$.



ಈ ಮಾಹಿತಿ ವೆನ್ ಆಕೃತಿಯಿಂದ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಕೃತಿ : ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಹುಡುಗರ ಗಣ ಮತ್ತು ಅದೇ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಈಜಾಡಲು ಬರುವ ಹುಡುಗರ ಗಣ ವೆನ್ ಆಕೃತಿಯಿಂದ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದರಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ಉಪಗಣಗಳಾಗಿ ವೆನ್ ಆಕೃತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ

(1) (i) ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಹುಡುಗರ ಗಣ

(ii) ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಸಾಯಕಲ ನಡೆಸಬಲ್ಲ ಹುಡುಗರ ಗಣ

(2) ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ಹಣ್ಣುಗಳ ಒಂದು ಗಣ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

{ಪೇರಲ ಹಣ್ಣು, ಕಿತ್ತಳೆ, ಮಾವು, ಹಲಸು, ಚಿಕ್ಕು, ನೇರಳೆ ಹಣ್ಣು, ಸೀತಾಫಲ, ಪಪ್ಪಾಯಿ, ಕವಳಿಕಾಯಿ}

ಮುಂದಿನ ಉಪಗಣ ತೋರಿಸಿರಿ (i) ಒಂದು ಬೀಜ ಇರುವ ಹಣ್ಣುಗಳು (ii) ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬೀಜವಿರುವ ಹಣ್ಣುಗಳು

ಈಗ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವೊಂದು ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾ (2) N = ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ   I = ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

ಇಲ್ಲಿ $N \subseteq I$. ಏಕೆಂದರೆ ಎಲ್ಲ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಹ ಇರುವುದು ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

ಉದಾ (3) P = { x | x ಇದು 25ರ ವರ್ಗಮೂಲ ಇದೆ} $S = \{ y \mid y \in I, -5 \leq y \leq 5\}$

ಯಾದಿ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ P ಗಣ ಬರೆಯೋಣ $P = \{-5, 5\}$

ಯಾದಿ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ S ಗಣ ಬರೆಯೋಣ $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

ಇಲ್ಲಿ P ಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕ S ಗಣದ ಘಟಕ ಇದೆ.

$\therefore P \subseteq S$

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

(i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣವು ತನ್ನದೇ ಆದ ಉಪಗಣ ಇರುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆ $A \subseteq A$

(ii) ರಿಕ್ತ ಗಣವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣದ ಉಪಗಣ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $\phi \subseteq A$

(iii) ಒಂದು ವೇಳೆ $A = B$ ಇದ್ದರೆ $A \subseteq B$ ಮತ್ತು $B \subseteq A$

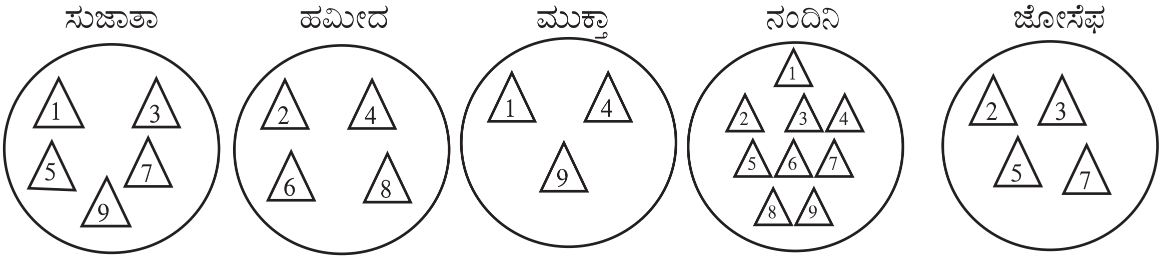
(iv) ಒಂದು ವೇಳೆ $A \subseteq B$ ಮತ್ತು $B \subseteq A$ ಇದ್ದರೆ $A = B$

ಉದಾ. $A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$ ಈ ಗಣದ ಎಲ್ಲ ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾ. $P = \{1, 3\}$, $T = \{4, 7, 8\}$, $V = \{1, 4, 8\}$, $S = \{1, 4, 7, 8\}$

ಹೀಗೆ ಇನ್ನೂ ಅನೇಕ ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಬರುವದು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಐದು ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಕೃತಿ : ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಕಾಗದದ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಸಮಾನ ಆಕಾರದ ಒಂಬತ್ತು ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಒಂದು ತಟ್ಟೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲೆ 1 ರಿಂದ 9 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಈಗ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನು ತಮ್ಮ ತಮ್ಮ ತಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿರುವ ಕೆಲವು ತ್ರಿಕೋನಾಕಾರದ ಕಾಗದ ಇಡಿರಿ. ಈಗ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಹತ್ತಿರ 1ರಿಂದ 9 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಗಣದ ಉಪಗಣ ತಯಾರಾಗುವದು.



ಸುಜಾತಾ, ಹಮೀದ, ಮುಕ್ತಾ, ನಂದಿನಿ ಮತ್ತು ಜೋಸೆಫ್ ಇವರ ತಟ್ಟೆಯಿಂದ ಯಾವ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕಂಡು ಬರುವವು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನು ಯಾವ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಆರಿಸಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣ ಗುಣಧರ್ಮ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಬನ್ನಿ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡೋಣ

ಉದಾ. ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ಗಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

A = { ..., −4, −2, 0, 2, 4, 6, ...} B = {1, 2, 3, ...}

C = {..., −12, −6, 0, 6, 12, 18.....} D = {..., −8, −4, 0, 4, 8, ...}

I = { ....., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಯಾವ ವಿಧಾನಗಳು ಸತ್ಯ ಇವೆ ಎಂಬುದರ ಮೇಲೆ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಿರಿ

(i) A ಇದು B, C, D ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಗಣದ ಉಪಗಣ ಇದೆ. (ii) B ಇದು ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಗಣಗಳ ಉಪಗಣ ಇದೆ.

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

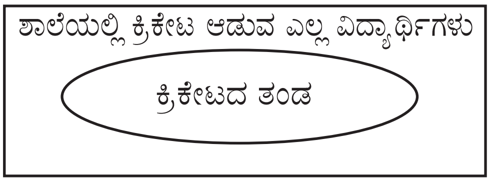
ವಿಶ್ವಗಣ (Universal set)

ನಾವು ಯಾವ ಗಣಗಳ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವವರಿದ್ದೇವೆ ಆ ಎಲ್ಲವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಗಣ 'ವಿಶ್ವಗಣ' ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದು. ಅದರ ಹೊರಗಿನ ಘಟಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ವಿಚಾರ ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ. ವಿಚಾರ ಮಾಡಿದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣ ವಿಶ್ವಗಣದ ಉಪಗಣ ಇರುವದು.

ಉದಾ. (1) ನಮ್ಮ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ 9ನೇ ವರ್ಗದ ಒಂದು ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿಯ ಕೆಲವು ಸತತ ಅನುಪಸ್ಥಿತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವದಿದೆ. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ 9ನೇ ಈ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣದ ವಿಚಾರ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು. ಇಲ್ಲಿ ಆ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣದ ವಿಚಾರ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಆ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ ಅಥವಾ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ ಇದು ವಿಶ್ವಗಣ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಬರುವುದು.

ಈಗ ಎರಡನೇ ಉದಾಹರಣೆ ನೋಡೋಣ

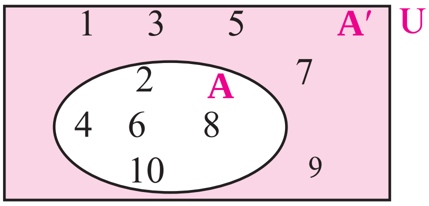
ಉದಾ. (2) ನಮ್ಮ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ಕ್ರಿಕೇಟ ಆಡುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 15 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತಂಡ ಆರಿಸುವುದಿದೆ. ಆಗ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ಕ್ರಿಕೆಟ ಆಡುವ ಎಲ್ಲ ಆಟಗಾರರ ಗಣ ಇದು ವಿಶ್ವಗಣ ಆಗುವದು. ಅದರಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯ ಆಗಿರುವ 15 ಆಟಗಾರರ ತಂಡ ಆ ವಿಶ್ವಗಣದ ಉಪಗಣ ಆಗುವದು. ವಿಶ್ವಗಣವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ **U** ಈ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ತೋರಿಸುವರು. ವೆನ್ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವಗಣವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಆಯತದಿಂದ ತೋರಿಸುವರು.



ಪೂರಕ ಗಣ (Complement of a set)

U ಇದು ವಿಶ್ವಗಣ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಒಂದು ವೇಳೆ $B \subseteq U$, ಇದ್ದರೆ ಗಣ B ಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದ ಆದರೆ ವಿಶ್ವಗಣ U ಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ಘಟಕಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಗಣ B ದ ಪೂರಕ ಗಣ ಎನ್ನುವರು. ಗಣ B ದ ಪೂರಕ ಗಣ B' ಅಥವಾ B^C ದಿಂದ ತೋರಿಸುವರು.

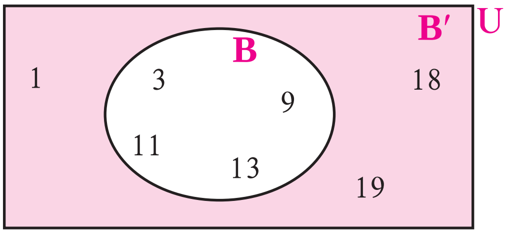
$\therefore B' = \{x \mid x \in U,$ ಮತ್ತು $x \notin B\}$ ಹೀಗೆ B' ದ ವರ್ಣನೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.



ಉದಾ. (1) U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

A = {2, 4, 6, 8, 10}

$\therefore$ A′ = {1, 3, 5, 7, 9}



ಉದಾ. (2) U = { 1, 3, 9, 11, 13, 18, 19} ತಿಳಿಯಿರಿ.

B = {3, 9, 11, 13}

$\therefore$ B′ = {1, 18, 19}

ಈಗ (B′)′ ತೆಗೆಯಿರಿ ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಯಾವ ನಿಷ್ಕರ್ಷ ಬರುವುದು.

(B′)′ ಈ ಗಣ ಎಂದರೆ B′ ದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದ ಆದರೆ U ದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಘಟಕಗಳ ಗಣ

(B′)′ = B ಸಿಗುವದೇ ?

ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿ ವೆನ್ ಆಕೃತಿಯಿಂದ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಪೂರಕ ಗಣದ ಪೂರಕ ಗಣ ಎಂದರೆ ಕೊಟ್ಟ ಗಣ ಇರುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

ಪೂರಕ ಗಣಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು

(i) A ಮತ್ತು A′ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಘಟಕ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) $A \subseteq U$ ಮತ್ತು $A' \subseteq U$

(iii) ವಿಶ್ವಗಣದ ಪೂರಕ ಗಣ ಇದು ರಿಕ್ತಗಣ ಇರುವುದು. $U' = \phi$

(iv) ರಿಕ್ತಗಣದ ಪೂರಕ ಗಣ ವಿಶ್ವಗಣ ಇರುವುದು. $\phi' = U$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.3

(1) ಒಂದು ವೇಳೆ A = $\{a, b, c, d, e\}$, B = $\{c, d, e, f\}$, C = $\{b, d\}$, D = $\{a, e\}$ ಇದ್ದರೆ ಮುಂದಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಿಧಾನಗಳು ಸತ್ಯ ಮತ್ತು ಯಾವ ವಿಧಾನಗಳು ಅಸತ್ಯ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $C \subseteq B$ (ii) $A \subseteq D$ (iii) $D \subseteq B$ (iv) $D \subseteq A$ (v) $B \subseteq A$ (vi) $C \subseteq A$

(2) 1 ರಿಂದ 20 ನಡುವಿನ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಶ್ವಗಣ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು X ಮತ್ತು Y ಗಣಗಳನ್ನು ವೆನ್ ಆಕೃತಿಯಿಂದ ತೋರಿಸಿರಿ.

(i) X = $\{x \mid x \in N$, ಮತ್ತು $7 < x < 15\}$

(ii) Y = $\{y \mid y \in N$, y ಇದು 1 ರಿಂದ 20 ನಡುವಿನ ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.$\}$

(3) U = $\{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

P = $\{1, 3, 7, 10\}$

ಇದ್ದರೆ (i) U, P ಮತ್ತು P' ವೆನ್ ಆಕೃತಿಯಿಂದ ತೋರಿಸಿರಿ (ii) $(P')' = P$ ಇದರ ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.

(4) A = $\{1, 3, 2, 7\}$ ಇದ್ದರೆ A ಈ ಗಣದ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಉಪಗಣ ಬರೆಯಿರಿ.

(5) (i) ಮುಂದಿನ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಗಣ ಎರಡನೆಯ ಯಾವ ಗಣದ ಉಪಗಣ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

P ಇದು ಪುಣೆಯಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುವ ಎಲ್ಲ ಜನರ ಗಣ ಇದೆ. M ಇದು ಮಧ್ಯ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುವ ಎಲ್ಲ ಜನರ ಗಣ ಇದೆ.

I ಇದು ಇಂದೋರ್‌ನಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುವ ಎಲ್ಲ ಜನರ ಗಣ ಇದೆ. B ಇದು ಭಾರತದಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುವ ಎಲ್ಲ ಜನರ ಗಣ ಇದೆ.

H ಇದು ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುವ ಎಲ್ಲ ಜನರ ಗಣ ಇದೆ.

(ii) ಮೇಲಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಗಣ ಇತರ ಎಲ್ಲ ಗಣಗಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ವಿಶ್ವಗಣ ಎಂದು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದೆ?

(6*) ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ಗಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವಾಗ ಯಾವ ಗಣ ಆ ಗಣಗಳಿಗಾಗಿ ವಿಶ್ವಗಣವೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು ?

(i) A = 5ರ ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ, B = 7 ರ ಮಗ್ಗಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

C = 12ರ ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

(ii) P = 4ರ ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ T = ಎಲ್ಲ ಸಮವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

(7) ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ ಇದು ವಿಶ್ವಗಣವೆಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ 50% ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ A ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ Aದ ಪೂರಕ ಗಣ ಬರೆಯಿರಿ.

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಗಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು

ಎರಡು ಗಣಗಳ ಛೇದ (Intersection of two sets)

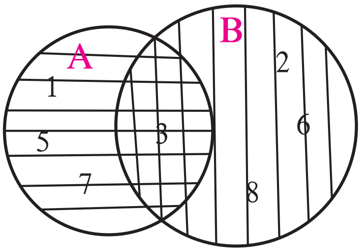
A ಮತ್ತು B ಇವು ಎರಡು ಗಣಗಳಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. A ಮತ್ತು B ಈ ಗಣಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಘಟಕಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ A ಮತ್ತು B ಈ ಗಣಗಳ ಛೇದನಗಣ ಎನ್ನುವರು. ಅದನ್ನು $A \cap B$ ಎಂದು ಬರೆಯುವರು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು A ಛೇದ B ಎಂದು ಓದುವರು. $\therefore$ $A \cap B = \{x \mid x \in A$ ಮತ್ತು $x \in B\}$

ಉದಾ. (1) A = { 1, 3, 5, 7} B = { 2, 3, 6, 8}

ಈಗ ವೆನ್ ಆಕೃತಿ ತೆಗೆಯೋಣ

A ಮತ್ತು B ಈ ಎರಡೂ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ 3 ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಘಟಕ ಇದೆ

$\therefore$ A $\cap$ B = {3}



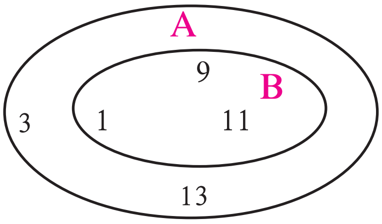
ಉದಾ. (2) A = {1, 3, 9, 11, 13} B = {1, 9, 11}

ಗಣ A ಮತ್ತು ಗಣ B ಯಲ್ಲಿ 1, 9, 11 ಇವು ಸಾಮಾನ್ಯ ಘಟಕ ಇವೆ.

$\therefore$ A $\cap$ B = {1, 9, 11} ಆದರೆ B = {1, 9, 11}

$\therefore$ A $\cap$ B = B

ಇಲ್ಲಿ B ಇದು A ದ ಉಪಗಣ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.



$\therefore$ ಒಂದು ವೇಳೆ B $\subseteq$ A ಇದ್ದರೆ A $\cap$ B = B. ಅದರಂತೆ ಒಂದು ವೇಳೆ B $\cap$ A = B, ಇದ್ದರೆ B $\subseteq$ A

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

ಛೇದ ಗಣಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು

(1) A $\cap$ B = B $\cap$ A

(2) ಒಂದು ವೇಳೆ A $\subseteq$ B ಇದ್ದರೆ A $\cap$ B = A

(3) ಒಂದು ವೇಳೆ A $\cap$ B = B ಇದ್ದರೆ B $\subseteq$ A

(4) A $\cap$ B $\subseteq$ A ಮತ್ತು A $\cap$ B $\subseteq$ B

(5) A $\cap$ A$'$ = ϕ

(6) A $\cap$ A = A

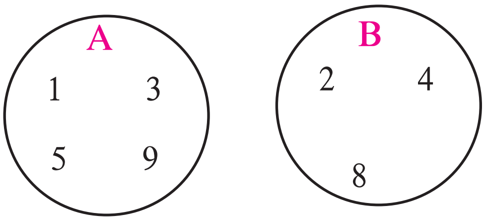
(7) A $\cap$ ϕ = ϕ

ಕೃತಿ : ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ಗುಣಧರ್ಮಗಳ ಪರಿಶೀಲನೆ ನೋಡಿರಿ.

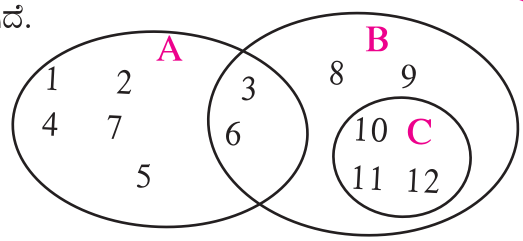
ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ವಿಭಿನ್ನ ಗಣಗಳು (Disjoint sets)

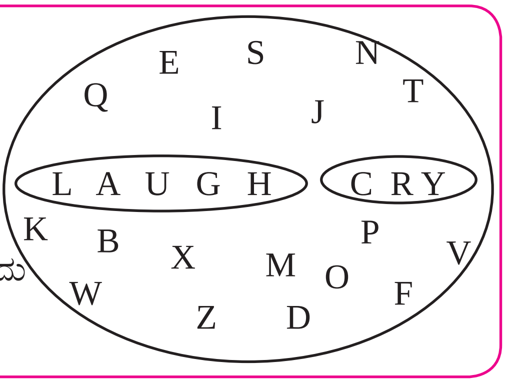
ತಿಳಿಯಿರಿ A = { 1, 3, 5, 9}
ಮತ್ತು B = {2, 4, 8} ಈ ಎರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.
ಗಣ A ಮತ್ತು B ಯಲ್ಲಿ ಒಂದೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಘಟಕ ಇಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ಆ ಗಣಗಳು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಬೇರೆ ಅಥವಾ ವಿಭಕ್ತ ಇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ 'ವಿಭಕ್ತ ಅಥವಾ ವಿಭಿನ್ನ' ಗಣ ಎನ್ನುವರು ಈ ಗಣಗಳ ವೆನ್ ಆಕೃತಿ ನೋಡಿರಿ.



ಕೃತಿ 1 : ಇಲ್ಲಿ A, B, C ಈ ಗಣಗಳನ್ನು ಆಕೃತಿಯಿಂದ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವ ಎರಡು ಗಣಗಳು ವಿಭಿನ್ನ ಗಣಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



ಕೃತಿ II : ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಅಕ್ಷರಗಳ ಗಣ ಇದು ವಿಶ್ವಗಣ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಗಣಗಳ ಘಟಕಗಳ ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆ. LAUGH ಈ ಶಬ್ದಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಕ್ಷರಗಳ ಒಂದು ಗಣ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ ಮತ್ತು CRY ಈ ಶಬ್ದಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಕ್ಷರಗಳ ಎರಡನೆಯ ಗಣ ಇದೆ. ಇವು ವಿಭಿನ್ನ ಗಣಗಳಿವೆ ಎಂದು ಅನ್ನಲಾಗುವದು ಈ ಎರಡು ಗಣಗಳ ಛೇದ ರಿಕ್ತ ಗಣ ಇದೆ ಇದನ್ನು ಅನುಭವಿಸಿರಿ.



ಎರಡು ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗ (Union of two sets)

ತಿಳಿಯಿರಿ, A ಮತ್ತು B ಇವು ಎರಡು ಗಣಗಳಿವೆ. ಈ ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿಯ ಘಟಕಗಳು ಕೂಡಿ ತಯಾರಾಗುವ ಗಣಕ್ಕೆ A ಮತ್ತು B ಈ ಗಣಗಳ 'ಸಂಯೋಗ ಗಣ' ಎನ್ನುವರು ಅದನ್ನು $A \cup B$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವರು ಮತ್ತು A ಸಂಯೋಗ B ಎಂದು ಓದುವರು.

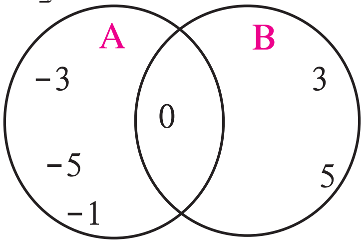
$A \cup B = \{x \mid x \in A$ ಅಥವಾ $x \in B\}$

ಉದಾ. **(1)** $A = \{-1, -3, -5, 0\}$

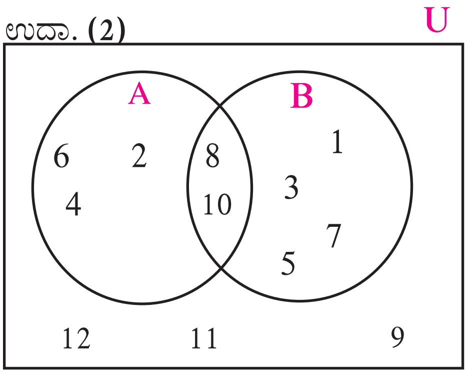
$B = \{0, 3, 5\}$

$A \cup B = \{-3, -5, 0, -1, 3, 5\}$

$A \cup B = B \cup A$



ಉದಾ. **(2)**



ಬದಿಗೆ ಕೊಟ್ಟ ವೆನ್ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಗಣಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ಯಾದಿ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) U (ii) A (iii) B (iv) $A \cup B$ (v) $A \cap B$

(vi) A' (vii) B' (viii) $(A \cup B)'$ (ix) $(A \cap B)'$

ಉತ್ತರ: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

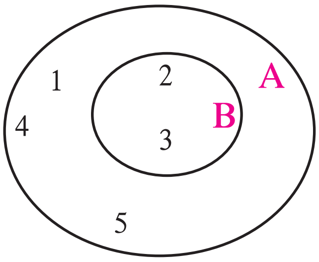
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ $A \cap B = \{8, 10\}$

$A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 12\}$ $B' = \{2, 4, 6, 9, 11, 12\}$

$(A \cup B)' = \{9, 11, 12\}$ $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$

ಉದಾ. (3)



$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 3\}$

ಈಗ ಈ ಉದಾಹರಣೆಯ ವೆನ್ ಆಕೃತಿ ನೋಡೋಣ

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ಗಣ A ಮತ್ತು ಗಣ $A \cup B$ ಯಲ್ಲಿ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ಅವೇ ಘಟಕಗಳಿವೆ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ $B \subseteq A$ ಇದ್ದರೆ $A \cup B = A$

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ

ಸಂಯೋಗ ಗಣಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು

(1) $A \cup B = B \cup A$

(2) ಒಂದು ವೇಳೆ $A \subseteq B$ ಇದ್ದರೆ $A \cup B = B$

(3) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

(4) $A \cup A' = U$

(5) $A \cup A = A$

(6) $A \cup \phi = A$

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಗಣದಲ್ಲಿಯ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (Number of elements in a set)

A = {3, 6, 9, 12,15} ಇದು ಕೊಟ್ಟ ಗಣ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಈ ಗಣದಲ್ಲಿ 5 ಘಟಕಗಳಿವೆ.

ಗಣ A ದಲ್ಲಿಯ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n (A) ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ $\therefore$ $n(A) = 5$

ತಿಳಿಯಿರಿ B = { 6, 12, 18, 24, 30, 36} $\therefore$ $n(B) = 6$

ಸಂಯೋಗ ಗಣ ಮತ್ತು ಛೇದನ ಗಣ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ :-

ಮೇಲಿನ ಗಣ A ಮತ್ತು ಗಣ B ಗಳ ವಿಚಾರ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

$n(A) + n(B) = 5 + 6 = 11$ ----(1)

$A \cup B$ = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 36} $\therefore$ $n(A \cup B) = 9$--------(2)

$A \cap B$ ತೆಗೆಯೋಣ ಅಂದರೆ ಗಣ A ಮತ್ತು ಗಣ B ಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಘಟಕ ನೋಡೋಣ

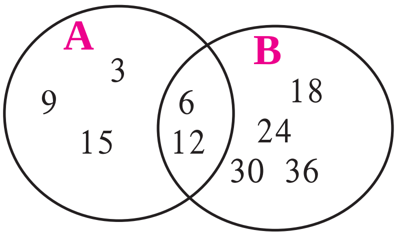
$A \cap B$ = {6, 12} $\therefore$ $n(A \cap B) = 2$--------(3)

ಗಮನಿಸಿರಿ, $n(A)$ ಮತ್ತು $n(B)$ಗಳ ಎಣಿಕೆ ಮಾಡುವಾಗ $A \cap B$ದ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಎಣಿಸಲಾಗಿದೆ.

$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 6 - 2 = 9$ ಆದರಂತೆ $n(A \cup B) = 9$

ಸಮೀಕರಣ (1), (2) ಮತ್ತು (3)ರ ಮೇಲಿಂದ ಹೀಗೆ ಕಂಡು ಬರುವದು.

$\therefore$ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದ ತಾಳೆಯನ್ನು ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಮಾಡಿರಿ.

$n(A) = \square$, $n(B) = \square$

$n(A \cup B) = \square$, $n(A \cap B) = \square$

$\therefore$ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

ಎಂದರೆ $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$

ಈಗ A = {1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13} B = {1, 2, 4, 6, 8, 12, 13}

ಈ ಗಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದ ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಗಣಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಿತ ಶಾಬ್ದಿಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. ಒಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿ 70 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದಾರೆ. ಅವರಲ್ಲಿ 45 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕ್ರಿಕೇಟ ಈ ಆಟ ಇಷ್ಟವಾಗುವುದು. 52 ವಿದಾಯರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಖೋ-ಖೋ ಈ ಆಟ ಇಷ್ಟವಾಗುವುದು. ಈ ಎರಡರಲ್ಲಿ ಒಂದೂ ಆಟ ಇಷ್ಟವಾಗದೆ ಇರುವ ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಕೂಡ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ ಕ್ರಿಕೇಟ ಮತ್ತು ಖೋ-ಖೋ ಈ ಎರಡು ಆಟಗಳು ಇಷ್ಟವಾಗುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಕೇವಲ ಕ್ರಿಕೇಟ ಆಟ ಆಡುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರ : ಈ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನಾವು ಎರಡು ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಪದ್ಧತಿ I : ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು = 70

ಕ್ರಿಕೇಟ ಇಷ್ಟವಾಗುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ A ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ಖೋ-ಖೋ ಇಷ್ಟವಾಗುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ B ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಕ್ರಿಕೇಟ ಮತ್ತು ಖೋ-ಖೋ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದರೂ ಆಟ ಇಷ್ಟವಾಗುವುದು.

ಕ್ರಿಕೇಟ ಅಥವಾ ಖೋ-ಖೋ ಇಷ್ಟವಾಗುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದರೆ $n(A \cup B)$

$\therefore\ n(A \cup B) = 70$

ಕ್ರಿಕೇಟ ಮತ್ತು ಖೋ-ಖೋ ಈ ಎರಡು ಆಟಗಳು ಇಷ್ಟವಾಗುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $n(A \cap B)$

$n(A) = 45, \qquad n(B) = 52$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ಇದು ನಮಗೆ ಗುರುತಿದೆ

$$\therefore\ n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$
$$= 45 + 52 - 70 = 27$$

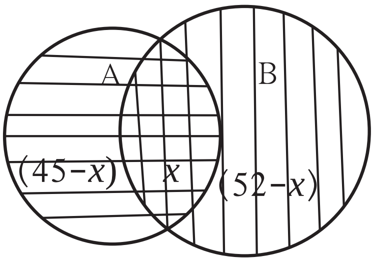
$\therefore$ ಎರಡು ಆಟಗಳು ಇಷ್ಟವಾಗುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 27, ಕ್ರಿಕೇಟ ಇಷ್ಟವಾಗುವ 45 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದಾರೆ.

$\therefore$ ಕೇವಲ ಕ್ರಿಕೇಟ ಇಷ್ಟವಾಗುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು

$= 45 - 27 = 18$

ಪದ್ಧತಿ II : $A \cap B$ ಇದು ಎರಡು ಆಟ ಇಷ್ಟವಾಗುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ ಇದೆ. $\therefore\ n(A \cap B) = 27$

ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿ ವೆನ್ ಆಕೃತಿಯಿಂದ ತೋರಿಸುವ ಮೂಲಕ ಎರಡು ಆಟ ಇಷ್ಟವಾಗುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮುಂದಿನಂತೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.



$n(A \cap B) = x$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ $n(A) = 45$, $n(B) = 52$,

$n(A \cup B) = 70$ ಇದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore\ n(A \cap B) = x = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$
$$= 45 + 52 - 70 = 27$$

ವೆನ್ ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಕೇವಲ ಕ್ರಿಕೆಟ ಇಷ್ಟವಾಗುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು

$= 45 - 27$

$= 18$

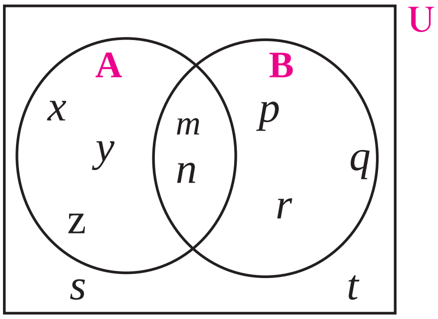
ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.4

(1) ಒಂದು ವೇಳೆ $n(A) = 15$, $n(A \cup B) = 29$, $n(A \cap B) = 7$ ಇದ್ದರೆ $n(B) =$ ಎಷ್ಟು?

(2) ಒಂದು ವಸತಿಗೃಹದಲ್ಲಿ 125 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದರೆ. ಅವರಲ್ಲಿ 80 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಚಹವನ್ನು ಸೇವಿಸುತ್ತಾರೆ 60 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಾಫಿ ಸೇವಿಸುವರು ಮತ್ತು 20 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಚಹಾ ಮತ್ತು ಕಾಫಿ ಎರಡೂ ಪ್ರಕಾರದ ಪೇಯವನ್ನು ಸೇವಿಸುವರು, ಹಾಗಾದರೆ ಯಾವುದೇ ಪ್ರಕಾರದ ಪೇಯವನ್ನು ಸೇವಿಸದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಧಾ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇಂಗ್ಲೀಷದಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣರಾಗಿದ್ದಾರೆ. 60 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣರಾಗಿದ್ದಾರೆ. 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎರಡು ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಕೂಡ ಯಾವುದೇ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಅನುತ್ತೀರ್ಣರಾಗಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4*) ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ಒಂಬತ್ತನೆ ತರಗತಿಯ 220 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅಭಿರುಚಿಯ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿದರು. ಅದರಲ್ಲಿ 130 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗುಡ್ಡ ಬೆಟ್ಟ ಸುತ್ತಾಡುವರು ಇಷ್ಟವಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದರು. ಹಾಗೂ 180 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಆಕಾಶದರ್ಶನದ ಇಷ್ಟವಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದರು. 110 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗುಟ್ಟ ಬೆಟ್ಟ ಸುತ್ತಾಡುವದು ಮತ್ತು ಆಕಾಶ ದರ್ಶನ ಎರಡು ಇಷ್ಟವಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದರು. ಹಾಗಾದರೆ ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಈ ಎರಡರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಇಷ್ಟ ಇಲ್ಲ ? ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕೇವಲ ಗುಡ್ಡ ಬೆಟ್ಟ ಸುತ್ತಾಡುವದು ಇಷ್ಟವಾಗುವದು ? ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕೇವಲ ಆಕಾಶ ದರ್ಶನ ಇಷ್ಟವಾಗುವದು ?



(5) ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಎಲ್ಲ ಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) U

(v) A' (vi) B' (vii) $(A \cup B)'$

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ 1

(1) ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗಾಗಿ ಯೋಗ್ಯವಾದ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ

(i) $M = \{1, 3, 5\}$, $N = \{2, 4, 6\}$, ಇದ್ದರೆ $M \cap N =$?

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (B) $\{1, 3, 5\}$ (C) ϕ (D) $\{2, 4, 6\}$

(ii) $P = \{x \mid x$ ಇದು ವಿಷಮ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ $1 < x \leq 5\}$ ಈ ಗಣವನ್ನು ಯಾದಿ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು ?

(A) $\{1, 3, 5\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (C) $\{1, 3\}$ (D) $\{3, 5\}$

(iii) $P = \{1, 2, ...10\}$, ಇದು ಯಾವ ಪ್ರಕಾರದ ಗಣ ಇದೆ ?

(A) ರಿಕ್ತ ಗಣ (B) ಅನಂತ ಗಣ (C) ಸಾಂತ ಗಣ (D) ಯಾವುದೂ ಇಲ್ಲ

(iv) $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ಮತ್ತು $M = \{1, 2, 4\}$ ಇದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ N ಈ ಗಣ ಯಾವುದು ?

(A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\{3, 4, 5, 6\}$ (C) $\{2, 5, 6\}$ (D) $\{4, 5, 6\}$

(v) ಒಂದು ವೇಳೆ $P \subseteq M$, ಇದ್ದರೆ $P \cap (P \cup M)$ ಇದು ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಗಣ ಇದೆ ?

(A) P (B) M (C) $P \cup M$ (D) $P' \cap M$

(vi) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಗಣ ರಿಕ್ತ ಗಣ ಇದೆ ?

(A) ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ (B) ಸಮ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

(C) 30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ದಿನಗಳಿರುವ ಇಂಗ್ಲೀಷ ತಿಂಗಳುಗಳ ಗಣ

(D) $P = \{x \mid x \in I, -1 < x < 1\}$

(2) ಕೆಳಗಿನ ಉಪ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾದ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ.

(i) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಮೂಹ ಗಣ ಇದೆ ?

(A) ಕಾಮನ ಬಿಲ್ಲಿನಲ್ಲಿಯ ಬಣ್ಣಗಳು (B) ಶಾಲೆಯ ಆವರಣದಲ್ಲಿಯ ಎತ್ತರ ಗಿಡಗಳು

(C) ಊರಿನಲ್ಲಿಯ ಶ್ರೀಮಂತ ಜನರು (D) ಪುಸ್ತದಲ್ಲಿಯ ಸರಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(ii) $N \cap W$ ಈ ಗಣ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ?

(A) {1, 2, 3, ...} (B) {0, 1, 2, 3, ...} (C) {0} (D) { }

(iii) $P = \{x \mid x$ ಇದು indian ಈ ಶಬ್ದದಲ್ಲಿಯ ಅಕ್ಷರ ಇದೆ$\}$ ಹಾಗಾದರೆ P ಈ ಗಣ ಯಾದಿ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ?

(A) {i, n, d} (B) {i, n, d, a} (C) {i, n, a} (D) {n, d, a}

(iv) ಒಂದು ವೇಳೆ T = {1, 2, 3, 4, 5} ಮತ್ತು M = {3, 4, 7, 8} ಇದ್ದರೆ $T \cup M$ = ?

(A) {1, 2, 3, 4, 5, 7} (B) {1, 2, 3, 7, 8}

(C) {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8} (D) {3, 4}

(3) ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿಯ 100 ಜನರಲ್ಲಿ 72 ಜನರು ಇಂಗ್ಲಿಷ ಮಾತನಾಡುವರು ಮತ್ತು 43 ಜನರು ಫ್ರೆಂಚ್ ಮಾತನಾಡುವರು. ಈ 100 ಜನರು ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಅಥವಾ ಫ್ರೆಂಚ್ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಭಾಷೆಯನ್ನು ಮಾತನಾಡುವರು. ಹಾಗಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಜನರು ಕೇವಲ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾತನಾಡುವರು ? ಎಷ್ಟು ಜನರು ಕೇವಲ ಫ್ರೆಂಚ್ ಮಾತನಾಡುವರು ? ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಜನರು ಇಂಗ್ಲೀಷ ಮತ್ತು ಫ್ರೆಂಚ್ ಈ ಎರಡು ಭಾಷೆ ಮಾತನಾಡುವರು ?

(4) ಪಾರ್ಥನು ವೃಕ್ಷಸಂವರ್ಧನು ಸಪ್ತಾಹದಲ್ಲಿ 70 ಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಪ್ರಜ್ಞಾಳು 90 ಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಟ್ಟಳು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರೂ ಕೂಡಿ 25 ಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಟ್ಟರೆ, ಪಾರ್ಥ ಅಥವಾ ಪ್ರಜ್ಞಾ ಇವರು ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಟ್ಟರು ?

(5) ಒಂದು ವೇಳೆ $n(A) = 20$, $n(B) = 28$ ಮತ್ತು $n(A \cup B) = 36$ ಇದ್ದರೆ $n(A \cap B)$ = ?

(6) ಒಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ 28 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 8 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮನೆಯಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ನಾಯಿಯನ್ನು ಸಾಕಿದ್ದಾರೆ, 6 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮನೆಯಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಬೆಕ್ಕನ್ನು ಸಾಕಿದ್ದಾರೆ. 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮನೆಯಲ್ಲಿ ನಾಯಿ ಮತ್ತು ಬೆಕ್ಕು ಎರಡನ್ನು ಸಾಕಿದ್ದಾರೆ ಹಾಗಾದರೆ ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮನೆಯಲ್ಲಿ ನಾಯಿ ಅಥವಾ ಬೆಕ್ಕು ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಪ್ರಾಣಿ ಸಾಕಿಲ್ಲ ?

(7) ಮುಂದಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯ ಗಣಗಳ ಛೇದ ಗಣ ವೆನ್ ಆಕೃತಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ತೋರಿಸಿರಿ.

(i) A ={3, 4, 5, 7} B ={1, 4, 8}

(ii) P = {a, b, c, e, f} Q ={l, m, n , e, b}

(iii) $X = \{x \mid x$ ಇದು 80 ಮತ್ತು 100 ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ $\}$

$Y = \{y \mid y$ ಇದು 90 ಮತ್ತು 100 ರ ನಡುವಿನ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ$\}$

(8) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಗಣ ಯಾವ ಗಣದ ಉಪಗಣ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ

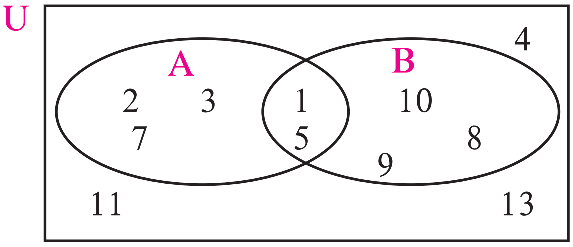
X = ಎಲ್ಲ ಚೌಕೋನಗಳ ಗಣ   Y = ಎಲ್ಲ ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳ ಗಣ

S = ಎಲ್ಲ ಚೌರಸಗಳ ಗಣ   T = ಎಲ್ಲ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನಗಳ ಗಣ

V = ಎಲ್ಲ ಆಯತಗಳ ಗಣ

(9) ಒಂದು ವೇಳೆ M ಇದು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಗಣ ಇದ್ದರೆ, $M \cup \phi$ ಮತ್ತು $M \cap \phi$ ಬರೆಯಿರಿ

(10*)



ಬದಿಯ ವೆನ್ ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ U, A, B, $A \cup B$ ಮತ್ತು $A \cap B$ ಈ ಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ

(11) ಒಂದು ವೇಳೆ $n(A) = 7$, $n(B) = 13$, $n(A \cap B) = 4$, ಇದ್ದರೆ $n(A \cup B\} = ?$

ಕೃತಿ I : ಬಿಟ್ಟ ಕಂಸಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಗಳ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

$U = \{1, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15\}$

$A = \{1, 11, 13\}$ $B = \{8, 5, 10, 11, 15\}$ $A' = \{........\}$ $B' = \{........\}$

$A \cap B = \{............\}$ $A' \cap B' = \{...............\}$

$A \cup B = \{............\}$ $A' \cup B' = \{............\}$

$(A \cap B)' = \{............\}$ $(A \cup B)' = \{............\}$

ತಾಳೆ ಹಾಕಿರಿ $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ಕೃತಿ II: ನಿಮ್ಮ ನೆರೆಹೊರೆಯ 20 ಕುಟುಂಬಗಳಿಂದ ಮುಂದಿನ ಮಾಹಿತಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿರಿ.

(i) ಕನ್ನಡ ವೃತ್ತ ಪತ್ರಿಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

(ii) ಇಂಗ್ಲಿಷ ವೃತ್ತ ಪತ್ರಿಕೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

(iii) ಇಂಗ್ಲಿಷ ಮತ್ತು ಕನ್ನಡ ಈ ಎರಡು ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿಯ ವೃತ್ತ ಪತ್ರಿಕೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

ದೊರೆತ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ವೆನ್ ಆಕೃತಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ತೋರಿಸಿರಿ.

2 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

EKDBV5

ನಡೆಯಿರಿ ಕಲಿಯೋಣ.

- ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು
- ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು
- ಕರಣಿಗಳು
- ವರ್ಗಕರಣಗಳ ಹೋಲಿಕೆ
- ವರ್ಗಕರಣಿಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು
- ವರ್ಗಕರಣಿಗಳ ಪರಿಮೇಯಿಕರಣ

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಹಿಂದಿನ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವುಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

N = ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ = $\{1, 2, 3, 4, ...\}$

W = ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ = $\{0, 1, 2, 3, 4,...\}$

I = ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ = $\{..., -3,-2,-1,0,1,2,3...\}$

Q = ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ = $\{\frac{p}{q}, | p, q \in I, q \neq 0\}$

R = ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ

$N \subseteq W \subseteq I \subseteq Q \subseteq R.$

ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಕ್ರಮಸಂಬಂಧ $\frac{p}{q}$ **ಮತ್ತು** $\frac{r}{s}$ ಇವು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು $q > 0, s > 0$

(i) $p \times s = q \times r$ ಇದ್ದರೆ $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ (ii) $p \times s > q \times r$ ಇದ್ದರೆ $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$

(iii) $p \times s < q \times r$ ಇದ್ದರೆ $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು (Properties of rational numbers)

a, b, c **ಇವು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ**

ಗುಣಧರ್ಮ	ಬೇರೀಜು	ಗುಣಾಕಾರ
1. ಕ್ರಮ ನಿರಪೇಕ್ಷತೆ	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
2. ಸಹ ಚರ್ಯತೆ	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. ಅವಿಕಾರಕ	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
4. ವ್ಯಸ್ತ	$a + (-a) = 0$	$a \times \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಯಾವುದೇ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಾಂಶ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ರೂಪಗಳು ಖಂಡಿತ ಅಥವಾ ಅಖಂಡ ಆವರ್ತಿ ಇರುತ್ತವೆ.

ಖಂಡಿತ ರೂಪ	ಅಖಂಡ ಆವರ್ತ ರೂಪ
(1) $\frac{2}{5} = 0.4$	(1) $\frac{17}{36} = 0.472222... = 0.47\dot{2}$
(2) $-\frac{7}{64} = -0.109375$	(2) $\frac{33}{26} = 1.2692307692307... = 1.2\overline{692307}$
(3) $\frac{101}{8} = 12.625$	(3) $\frac{56}{37} = 1.513513513... = 1.\overline{513}$

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಅಖಂಡ ಆವರ್ತ ದಶಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿಯ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗುವುದು.

ಉದಾ. (1) 0.777.... ಈ ಆವರ್ತ ದಶಾಂಶ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $x = 0.777... = 0.\dot{7}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ $\therefore\ 10x = 7.777... = 7.7$

$$\therefore\ 10x - x = 7.\dot{7} - 0.\dot{7}$$

$$\therefore\ 9x = 7$$

$$\therefore\ x = \frac{7}{9}$$

$$\therefore\ 0.777... = \frac{7}{9}$$

ಉದಾ. (2) 7.529529529... ಈ ಆವೃತಿ ದಶಾಂಶ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ

ಉತ್ತರ : $x = 7.529529... = 7.\overline{529}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

$$\therefore\ 1000x = 7529.529529... = 7529.\overline{529}$$

$$\therefore\ 1000x - x = 7529.\overline{529} - 7.\overline{529}$$

$$\therefore\ 999x = 7522.0 \qquad \therefore\ x = \frac{7522}{999}$$

$$\therefore\ 7.\overline{529} = \frac{7522}{999}$$

ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ.

$2.4\dot{3}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಈ ಬರೆಯಲು ಏನನ್ನು ಮಾಡುವಿರಿ?

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಿರಿ

(1) ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಾಂಶ ಚಿಹ್ನೆಯ ನಂತರ ಎಷ್ಟು ಅಂಕಗಳು ಆವರ್ತ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿ ಆ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 10, 100, 1000, ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯೋಗ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ. ಉದಾ. $2.\dot{3}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ 3 ಇದು ಒಂದೇ ಅಂಕ ಆವರ್ತ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $2.\dot{3}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಅದಕ್ಕೆ 10 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ. $1.\overline{24}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 2,4 ಈ ಎರಡು ಅಂಕಗಳು ಅವರ್ತ ಇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $1.\overline{24}$ ಕ್ಕೆ 100 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ. $1.\overline{513}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 5, 1, 3 ಈ ಮೂರು ಅಂಕಗಳು ಆವರ್ತಿ ಇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $1.\overline{513}$ ಕ್ಕೆ 1000 ದಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

(2) ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಛೇದದ ಮೂಲ ಅವಯವಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ, ಅದರಲ್ಲಿ 2 ಮತ್ತು 5 ಇವುಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಆ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಾಂಶ ರೂಪ ಖಂಡಿತ ಇರುತ್ತದೆ. 2 ಹಾಗೂ 5 ಇವುಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಛೇದದ ಅವಯವ ಇದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಾಂಶ ರೂಪ ಅಖಂಡ ಆವರ್ತ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.1

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಾಂಶ ರೂಪ ಖಂಡಿತ ಮತ್ತು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಾಂಶ ರೂಪ ಅಖಂಡ ಆವರ್ತಿ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\frac{13}{5}$ (ii) $\frac{2}{11}$ (iii) $\frac{29}{16}$ (iv) $\frac{17}{125}$ (v) $\frac{11}{6}$

2. ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದಶಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

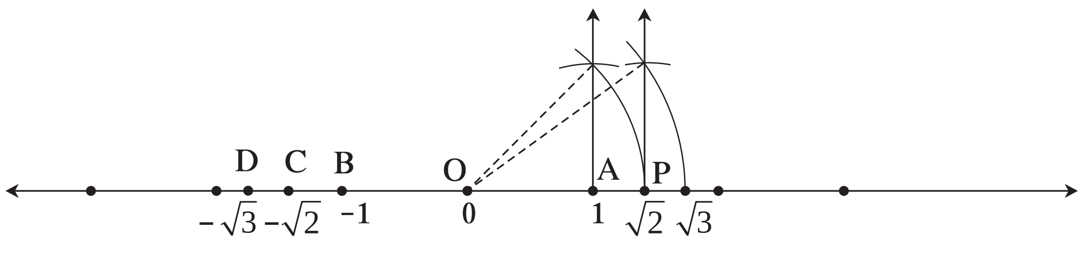
(i) $\frac{127}{200}$ (ii) $\frac{25}{99}$ (iii) $\frac{23}{7}$ (iv) $\frac{4}{5}$ (v) $\frac{17}{8}$

3. ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $0.\dot{6}$ (ii) $0.\overline{37}$ (iii) $3.\overline{17}$ (iv) $15.\overline{89}$ (v) $2.\overline{514}$

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ

ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ $\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $\sqrt{3}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಿಮೇಯ ಇಲ್ಲ, ಅಂದರೆ ಅವು ಅಪರಿಮೇಯ ಆಗಿವೆ.



ಈ ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ OA = 1 ಮೂಲ ಮಾನ ಅಂತರ ಇದೆ. O ದ ಎಡ ಬದಿಗೆ B ಬಿಂದು ಸಹ 1 ಮೂಲಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿದೆ. B ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ -1 ಇದೆ. P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ $\sqrt{2}$ ಇದ್ದು ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ C ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. C ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ $-\sqrt{2}$ ಇದೆ. ಅದರಂತೆ $\sqrt{3}$ ದ ವಿರುದ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವ D ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ $-\sqrt{3}$ ಇದೆ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಅಪರಿಮೇಯ ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (Irrational and real numbers)

$\sqrt{2}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಪರಿಮೇಯ ಇದೆ ಎಂದು ಈ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಸಿದ್ಧತೆ ಮುಖಾಂತರ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

$\sqrt{2}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸುವಾ, ಅದನ್ನು $\frac{p}{q}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

$\frac{p}{q}$ ಇದು ಆ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪ ಇದೆ, ಅಂದರೆ p ಹಾಗೂ q ಗಳಲ್ಲಿ 1 ರ ಹೊರತಾಗಿ ಬೇರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅವಯವ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $\qquad\therefore\quad 2 = \frac{P^2}{q^2}$ (ಎರಡು ಬದಿಗಳಿಗೆ ವರ್ಗ ಮಾಡಲಾಗಿ)

$\therefore\quad 2q^2 = p^2$

$\therefore\quad p^2$ ಇದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

$\therefore\quad p$ ಸಹ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ, ಅಂದರೆ 2 ಇದು p ದ ಅವಯವ ಇದೆ ....(I)

$\therefore\quad p = 2t \qquad \therefore\ p^2 = 4t^2 \qquad t \in I$

$\therefore\quad 2q^2 = 4t^2\ \ (\because\ p^2 = 2q^2) \quad \therefore\ q^2 = 2t^2 \quad \therefore\ q^2$ ಇದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ $\therefore\ q$ ಇದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

$\therefore$ 2 ಇದ್ದು q ದ ಸಹ ಅವಯವ ಇದೆ .... (II)

ವಿಧಾನ (I) ಮತ್ತು (II) ರ ಮೇಲಿಂದ 2 ಇದು p ಮತ್ತು q ಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅವಯವ ಇದೆ.

ಇದು ವಿಸಂಗತಿ ಇದೆ. ಕಾರಣ $\frac{p}{q}$ ದಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು q ದ 1ರ ಹೊರತಾಗಿ ಬೇರೆ ಅವಯವ ಇಲ್ಲ

$\therefore\quad \sqrt{2}$ ಇದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಈ ಊಹೆ ತಪ್ಪು ಇದೆ $\therefore\quad \sqrt{2}$ ಇದು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ

ಇದೇ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ಇವು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ 3 ಅಥವಾ 5 ಈ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 1 ರ ಅವಯವ ಇದ್ದರೆ n^2 ದ ಅವಯವಗಳು ಇರುತ್ತವೆ ಈ ನಿಯಮದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿರಿ.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು

ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು ಅದಕ್ಕೆ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಎಂದು ಎನ್ನುವರು.

ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ಇದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದಿರುವ ಬಿಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಆದರೆ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, π, $3+\sqrt{2}$ ಈ ರೀತಿಯ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಿಮೇಯ ಇರುವದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮಂಡನೆ

ನಾವು 2 ಹಾಗೂ 3 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗ ಮೂಲವನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ತೆಗೆಯೋಣ

2 ರ ವರ್ಗಮೂಲ

	1.41421...
1	$2.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$....
+1	-1
24	100
+4	-96
281	400
+ 1	-281
2824	11900
+ 4	-11296
28282	60400
+ 2	- 56564
282841	0383600

$\therefore\ \sqrt{2} = 1.41421...$

3 ರ ವರ್ಗಮೂಲ

	1.732....
1	$3.\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$....
+1	-1
27	200
+7	-189
343	1100
+ 3	-1029
3462	007100
+ 2	-6924
3464	0176

$\therefore\ \sqrt{3} = 1.732...$

ಇಲ್ಲಿ ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿಯ ದಶಾಂಶ ಚಿಹ್ನೆಯ ಮುಂದಿನ ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಮುಗಿಯುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ಅದು ಅಖಂಡ ರೂಪ ಇದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೆ ಗುಂಪು ಅಥವಾ ಅಂಕಗಳು ಪುನ: ಪುನ: ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಾಂಶ ರೂಪ ಅಖಂಡ ಅನಾವರ್ತಿ ದೊರೆಯುವದು.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ 1.4142... ಮತ್ತು 1.732... ಇವು ಸಹ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವೆ. **ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ, ಅಖಂಡ ಅನಾವರ್ತಿ ದಶಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಪರಿಮೇಯ ಇರುತ್ತವೆ.**

ಸಂಖ್ಯೆ π

ಕೃತಿ I

ದಪ್ಪ ಕಾರ್ಡಬೋರ್ಡ ಮೇಲೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮೂರು, ನಾಲ್ಕು ವರ್ತುಳಾಕೃತಿಯ ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಲ್ಲೆಯ ಅಂಚಿನಗುಂಟ ದಾರ ತಿರುಗಿಸಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ತುಳಾಕೃತಿ ಬಿಲ್ಲೆಗಳ ವ್ಯಾಸ ಹಾಗೂ ವಿಶೇಷ ಅಳೆಯಿರಿ. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಅ.ಕ್ರ.	ತ್ರಿಜ್ಯ	ವ್ಯಾಸ (d)	ಪರೀಘ(c)	ಗುಣೋತ್ತರ= $\frac{c}{d}$
1	7 ಸೆಮೀ			
2	8 ಸೆಮೀ			
3	5.5 ಸೆಮೀ			

ಬದಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ $\frac{c}{d}$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರ ಪ್ರತಿಸಲ 3.1 ರ ಸಮೀಪ ಬರುವದು. ಅಂದರೆ ಸ್ಥಿರ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವದು ಆ ಗುಣೋತ್ತರ π ಈ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಕೃತಿ II

π ದ ಅತಿ ಸಮೀಪ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯುವ ಸಲುವಾಗಿ 11 ಸೆಮೀ 22 ಸೆಮೀ, 33 ಸೆಮೀ ಉದ್ದಳತೆಯ ತಂತಿಯ ತುಂಡು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತಂತಿಯಿಂದ ವರ್ತುಳ ತಯಾರಿಸಿರಿ, ಆ ವರ್ತುಳಗಳ ವ್ಯಾಸ ಅಳೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ವರ್ತುಳ ಕ್ರ.	ಪರಿಘ	ವ್ಯಾಸ	ಪರಿಘ ಹಾಗೂ ವ್ಯಾಸಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ
1	11 ಸೆಮೀ		
2	22 ಸೆಮೀ		
3	33 ಸೆಮೀ		

ಪರಿಘ ಹಾಗೂ ವ್ಯಾಸ ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ $\frac{22}{7}$ ದ ಸಮೀಪ ಬಂದಿದೆಯೋ ಎಂದು ತಾಳೆ ಹಾಕಿರಿ.

ವರ್ತುಳದ ಪರೀಘ ಹಾಗೂ ವ್ಯಾಸ ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಇದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ, ಇದು ಅಪರಿಮೇಯ ಇರುತ್ತದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು π ಈ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ದರ್ಶಿಸಲಾಗಿದೆ. π ದ ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆ $\frac{22}{7}$ ಅಥವಾ 3.14 ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವರು.

ಶ್ರೇಷ್ಠ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತ ತಜ್ಞ ಆರ್ಯಭಟ್ ಇವರು ಇ.ಸ. 499 ರಲ್ಲಿ π ದ ಬೆಲೆ $\frac{62832}{20000} = 3.1416$ ಹೀಗೆ ತೆಗೆದಿದರು.

$\sqrt{3}$ ಇದು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ ಕಾರಣ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿಯ ಮಂಡಣೆ ಅಖಂಡ ಅನಾವರ್ತಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಈಗ $2 + \sqrt{3}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಪರಿಮೇಯ ಇದೆಯೋ ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

$2 + \sqrt{3}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ಅಂದರೆ ಅದು ಪರಿಮೇಯ ಇರಬೇಕು.

ಒಂದು ವೇಳೆ $2 + \sqrt{3}$ ಪರಿಮೇಯ ಇದ್ದರೆ $2 + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ.

$\therefore \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 2$ ಈ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವದು.

ಇಲ್ಲಿ ಎಡಬದಿ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಬಲಬದಿ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೀಗೆ ವಿಸಂಗತಿ ಬರುವದು.

ಅಂದರೆ $2 + \sqrt{3}$ ಇದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರದೆ ಅದು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಗುವದು.

ಅದರಂತೆ $2\sqrt{3}$ ಅಪರಿಮೇಯ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು.

ಎರಡು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಥವಾ ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯ ಇದನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಲು ಬರುವದು.

ಅದರಂತೆ, $2 + \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 2$, $4\sqrt{5} \div \sqrt{5} = 4$, $(3 + \sqrt{5}) - (\sqrt{5}) = 3$,

$2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$ $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$, $2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು

(1) ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಥವಾ ವಜಾಬಾಕಿ ಇದು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ.

(2) ಶೂನ್ಯೇತರ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಅಥವಾ ಭಾಗಾಕಾರ ಇದು ಸಹ ಒಂದು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ

(3) ಎರಡು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು, ವಜಾಬಾಕಿ, ಗುಣಾಕಾರ ಹಾಗೂ ಭಾಗಾಕಾರ ಇವು ಮಾತ್ರ ಪರಿಮೇಯ ಅಥವಾ ಆ ಪರಿಮೇಯ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧದ ಮೇಲಿನ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು

1. ಒಂದು ವೇಳೆ a ಮತ್ತು b ಇವು ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ $a = b$ ಅಥವಾ $a < b$ ಅಥವಾ $a > b$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಬಂಧ ಇರುತ್ತದೆ.

2. ಒಂದು ವೇಳೆ $a < b$ ಮತ್ತು $b < c$ ಇದ್ದರೆ $a < c$ 3. ಒಂದು ವೇಳೆ $a < b$ ಇದ್ದರೆ $a + c < b + c$

4. ಒಂದು ವೇಳೆ $a < b$ ಮತ್ತು $c > 0$ ಇದ್ದರೆ $ac < bc$ ಮತ್ತು $c < 0$ ಇದ್ದರೆ $ac > bc$

ಪರಿಮೇಯ ಹಾಗೂ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದ ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.

ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲ

ಒಂದು ವೇಳೆ $\sqrt{a} = b$ ಇದ್ದರೆ $b^2 = a$ ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತದೆ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಒಂದು ವೇಳೆ $\sqrt{5} = x$ ಇದ್ದರೆ $x^2 = 5$ ಇದು ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ

ಅದರಂತೆ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ ಅಂದರೆ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ ಎಂದೂ ಋಣ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದರೆ $(\sqrt{-5})^2 = -5 \therefore \sqrt{-5}$ ಇದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ.

ಅಂದರೆ ಋಣ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವರ್ಗಮೂಲ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.2

(1) $4\sqrt{2}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಪರಿಮೇಯ ಇದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

(2) $3 + \sqrt{5}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಪರಿಮೇಯ ಇದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

(3) $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿರಿ.

(4) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) 0.3 ಮತ್ತು −0.5 (ii) −2.3 ಮತ್ತು −2.33

(iii) 5.2 ಮತ್ತು 5.3 (iv) −4.5 ಮತ್ತು −4.6

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಧನ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂಲಗಳು (Root of positive rational number)

ಒಂದು ವೇಳೆ $x^2 = 2$ ಇದ್ದರೆ $x = \sqrt{2}$ ಅಥವಾ $x = -\sqrt{2}$, ಇರುತ್ತದೆ. $\sqrt{2}$ ಹಾಗೂ $-\sqrt{2}$ ಇವು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{8}$, ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಹ ಅಪರಿಮೇಯ ಇರುತ್ತವೆ.

n ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದು ಹಾಗೂ $x^n = a$ ಇದ್ದರೆ, x ಇದು a ದ n ನೇ ಮೂಲ ಇದೆ ಎಂದು ಎನ್ನುವರು. ಈ ಮೂಲ ಪರಿಮೇಯ ಅಥವಾ ಅಪರಿಮೇಯ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ. $2^5 = 32 \therefore$ 2 ಇದು 32 ರ 5ನೇ ಮೂಲ ಪರಿಮೇಯ ಇದೆ, ಆದರೆ $x^5 = 2$ ಇದ್ದರೆ $x = \sqrt[5]{2}$ ಇದು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

ಕರಣಿಗಳು (Surds)

5 ಇದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ ಆದರೆ $\sqrt{5}$ ಇದು ಪರಿಮೇಯ ಇಲ್ಲ. ಯಾವ ರೀತಿ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲ ಅಥವಾ ಘನಮೂಲ ಪರಿಮೇಯ ಅಥವಾ ಅಪರಿಮೇಯ ಇರುತ್ತದೆ ಹಾಗೆಯೇ n ನೇ ಮೂಲ ಸಹ ಪರಿಮೇಯ ಅಥವಾ ಅಪರಿಮೇಯ ಇರಬಹುದು.

ಒಂದು ವೇಳೆ n ಇದು 1ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದು ಮತ್ತು a ಈ ಧನ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ n ನೇ ಮೂಲ x ದಿಂದ ತೋರಿಸಿದ್ದರೆ $x^n = a$ ಅಥವಾ $\sqrt[n]{a} = x$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವರು.

a ಧನ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ a ದ n ನೇ ಮೂಲ x ಇದು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ x ಇದು ಕರಣಿ (ಅಪರಿಮೇಯ ಮೂಲ) ಇದೆ ಎಂದು ಅನ್ನುವರು.

$\sqrt[n]{a}$ ಇದು ಕರಣಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ $\sqrt{\ }$ ಈ **ಚಿಹ್ನೆಗೆ ಕರಣಿ ಚಿಹ್ನೆ** (radical sign) ಎನ್ನುವರು. n ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಆ **ಕರಣಿಯ ಕ್ರಮ** (order of the surd) ಎನ್ನುವರು. ಮತ್ತು a ಗೆ ಕರಣಿಸ್ಥ ಸಂಖ್ಯೆ(radicand) ಎನ್ನುವರು.

(1) $a = 7, n = 3$, ಇದ್ದರೆ $\sqrt[3]{7}$ ಇದು ಕರಣಿ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಏಕೆಂದರೆ $\sqrt[3]{7}$ ಇದು ಅಪರಿಮೇಯ ಇದೆ.

(2) $a = 27$ ಮತ್ತು $n = 3$ ಇದ್ದರೆ $\sqrt[3]{27} = 3$ ಇದು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt[3]{27}$ ಇದು ಕರಣಿ ಇಲ್ಲ.

(3) $\sqrt[3]{8}$ ಇದು ಕರಣಿ ಇದೆಯೇ ?

$\sqrt[3]{8} = p$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ $p^3 = 8$. ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನ 8 ಇದೆ ?

2 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನ 8 ಇದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

$\sqrt[3]{8}$ ಯಲ್ಲಿ $a = 8$ ಇದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ. ಇಲ್ಲಿ $n = 3$ ಇದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ. ಆದರೆ $\sqrt[3]{8}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಪರಿಮೇಯ ಇಲ್ಲ, ಕಾರಣ 8ರ ಘನಮೂಲ 2 ಇದೆ $\therefore$ $\sqrt[3]{8}$ ಇದು ಕರಣಿ ಇಲ್ಲ.

(4) ಈಗ $\sqrt[4]{8}$ ದ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವಾ,

ಇಲ್ಲ $a = 8$, ಕರಿಣಿಯ ಕ್ರಮ $n = 4$; ಆದರೆ 8 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕನೇ ಘಾತ ಇಲ್ಲ. ಅಂದರೆ $\sqrt[4]{8}$ ಇದು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ. $\therefore$ $\sqrt[4]{8}$ ಇದು ಕರಣಿ ಇದೆ.

ಈ ವರ್ಷ ನಾವು ಕೇವಲ ಕ್ರಮ 2 ಇರುವ ಅಂದರೆ $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{42}$ ಇತ್ಯಾದಿ ಕರಣಿಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಕ್ರಮ 2 ಇರುವ ಕರಣಿಗಳಿಗೆ ವರ್ಗಕರಣಿ ಎನ್ನುವರು.

ಕರಣಿಗಳ ಸುಲಭ ರೂಪ

ಕೆಲವು ಸಲ ಕರಣಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪ ಕೊಡಲು ಬರುವದು ಉದಾ.

(i) $\sqrt{48} = \sqrt{16\times3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{98} = \sqrt{49\times2} = \sqrt{49}\times\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ....ಈ ರೀತಿಯ ಕೆಲವು ಕರಣಿಗಳು ಸುಲಭ ರೂಪದಲ್ಲಿಯ ಕರಣಿಗಳಿವೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಇನ್ನೂ ಸುಲಭ ರೂಪ ಕೊಡಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ.

ಒಂದೇ ತರಹದ (ಸಜಾತಿಯ) ಕರಣಿಗಳು (Similar or like surds)

$\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $\frac{4}{5}\sqrt{2}$ ಇವು ಕೆಲವು ಸಜಾತಿಯ ಅಥವಾ ಒಂದೇ ತರಹದ ಕರಣಿಗಳಿವೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ p ಮತ್ತು q ಇವು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದರೆ $p\sqrt{a}$, $q\sqrt{a}$ ಇವು ಒಂದೇ ತರಹದ ಕರಣಿಗಳಿವೆ ಎನ್ನುವರು. **ಎರಡು ಕರಣಿಗಳು ಒಂದೇ ತರಹದ ಕರಣಿಗಳಿರುವ ಸಲುವಾಗಿ ಅವುಗಳ ಕ್ರಮ ಸಮಾನ ಇರಬೇಕು, ಅದರಂತೆ ಕರಣಿಸ್ಥ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು.**

$\sqrt{45}$ ಹಾಗೂ $\sqrt{80}$ ಈ ಕರಣಿಗಳ ಕ್ರಮ 2 ಇದೆ, ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ಕ್ರಮ ಸಮಾನ ಇದೆ, ಆದರೆ ಕರಣಿಸ್ಥ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಾನ ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಕರಣಿಗಳ ಸಜಾತಿ ಇಲ್ಲವೆಂದು ಕಂಡು ಬರುವದು. ಈ ಕರಣಿಗಳಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪ ಕೊಡಲಾಗಿ.

$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ ಹಾಗೂ $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$3\sqrt{5}$ ಹಾಗೂ $4\sqrt{5}$ ಈ ಕರಣಿಗಳು ಒಂದೇ (ತರಹದ) / ಸಜಾತಿಯ ಇವೆ

ಅಂದರೆ $\sqrt{45}$ ಹಾಗೂ $\sqrt{80}$ ಈ ಕರಣಿಗಳ ಸರಳ ರೂಪಗಳು ಸಜಾತಿಯ ಇವೆ

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

ಸುಲಭ ರೂಪದಲ್ಲಿಯ ಕರಣಿಗಳ ಕ್ರಮ ಹಾಗೂ ಕರಣಿಸ್ಥ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ ಆ ಕರಣಿಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ತರಹದ ಅಥವಾ ಸಜಾತಿಯ ಕರಣಿಗಳು ಎನ್ನುವರು.

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಕರಣಿಗಳ ತುಲನೆ (Comparison of surds)

ಮತ್ತು a, b, k ಇವು ಧನವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ಒಂದು ವೇಳೆ

$a < b$ ಅದರಂತೆ $ak < bk$ ಅದರಂತೆ $\therefore a^2 < ab < b^2$

ಅದರಂತೆ $a < b$ ಇದ್ದರೆ $a^2 < b^2$

ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ $a^2 < b^2$ ಇದ್ದರೆ $a = b, a > b$ ಆದರೆ $a < b$ ಇರುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ನೋಡೋಣ.

$a = b$ ಆದ್ದರಿಂದ $a^2 = b^2$, $a > b$ ಇದರ ಮೇಲಿಂದ $a^2 > b^2$ ದೊರೆಯುವದು ಆದರೆ ಇದು ಅಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

$\therefore a < b$ ಸಿಗುವದು. ಇದ್ದರೆ $a^2 < b^2$ ಇದ್ದರೆ $a < b$

ಇಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b ಇವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವುದರಿಂದ ಅವು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಕರಣಿ ಇರಬಹುದು.

ಇದರ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಕರಣಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಚಿಕ್ಕ-ದೊಡ್ಡತನ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ.

(i) $6\sqrt{2}, 5\sqrt{5}$

$\sqrt{36} \times \sqrt{2}$ [?] $\sqrt{25} \times \sqrt{5}$

$\sqrt{72}$ [?] $\sqrt{125}$

ಆದರೆ 72 [<] 125

$\therefore 6\sqrt{2}$ [<] $5\sqrt{5}$

ಅಥವಾ

$(6\sqrt{2})^2$ [ ] $(5\sqrt{5})^2$,

$72 < 125$

$\therefore 6\sqrt{2}$ [<] $5\sqrt{5}$

(ii) $8\sqrt{3}, \sqrt{192}$

$\sqrt{64} \times \sqrt{3}$ [?] $\sqrt{192}$

$\sqrt{192}$ [?] $\sqrt{192}$

ಆದರೆ 192 [=] 192

$\therefore \sqrt{192}$ [=] $\sqrt{192}$

$\therefore 8\sqrt{3}$ [=] $\sqrt{192}$

(iii) $7\sqrt{2}, 5\sqrt{3}$

$\sqrt{49} \times \sqrt{2}$ [?] $\sqrt{25} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{98}$ [?] $\sqrt{75}$

ಆದರೆ 98 [>] 75

$\therefore 7\sqrt{2}$ [>] $5\sqrt{3}$

ಅಥವಾ

$(7\sqrt{2})^2$ [ ] $(5\sqrt{3})^2$,

$98 > 75$

$\therefore 7\sqrt{2}$ [>] $5\sqrt{3}$

ಸಜಾತಿಯ ಕರಣಿಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು (Operations on like surds)

ಸಜಾತಿಯ ಕರಣಿಗಳ ಮೇಲೆ ಬೇರೀಜು, ವಜಾಬಾಕಿ, ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಾಕಾರ ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

ಉದಾ. (1) ಸರಳ ರೂಪ ಕೊಡಿರಿ : $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3}$

ಉತ್ತರ : $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3} = (7 + 29)\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

ಉದಾ. (2) ಸರಳ ರೂಪ ಕೊಡಿರಿ : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3}$

ಉತ್ತರ : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = (7 - 29)\sqrt{3} = -22\sqrt{3}$

ವಿಚಾರ ಮಾಡಿರಿ.

$\sqrt{9+16} \overset{?}{=} \sqrt{9}+\sqrt{16}$

$\sqrt{100+36} \overset{?}{=} \sqrt{100}+\sqrt{36}$

ಉದಾ. (3) ಸರಳ ರೂಪ ಕೊಡಿರಿ : $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8}$

ಉತ್ತರ : $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8} = (13 + \frac{1}{2} - 5)\sqrt{8} = (\frac{26+1-10}{2})\sqrt{8}$

$$= \frac{17}{2}\sqrt{8} = \frac{17}{2}\sqrt{4\times 2}$$

$$= \frac{17}{2} \times 2\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$$

ಉದಾ. (4) ಸರಳ ರೂಪ ಕೊಡಿರಿ : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125}$

ಉತ್ತರ : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125} = 8\sqrt{5} + \sqrt{4\times 5} - \sqrt{25\times 5}$

$$= 8\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$$

$$= (8 + 2 - 5)\sqrt{5}$$

$$= 5\sqrt{5}$$

ಉದಾ. (5) ಕರಣಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿರಿ : $\sqrt{7} \times \sqrt{42}$

ಉತ್ತರ : $\sqrt{7} \times \sqrt{42} = \sqrt{7\times 42} = \sqrt{7\times 7\times 6} = 7\sqrt{6}$ ($7\sqrt{6}$ ಇದು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ)

ಉದಾ. (6) ಕರಣಿಗಳ ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿರಿ. $\sqrt{125} \div \sqrt{5}$

ಉತ್ತರ : $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$ (5 ಇದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ)

ಉದಾ. (7) $\sqrt{50} \times \sqrt{18} = \sqrt{25\times 2} \times \sqrt{9\times 2} = 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \times 2 = 30$

ಎರಡು ಕರಣಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಅಥವಾ ಭಾಗಾಕಾರ ಇದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಗಮನದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಕರಣಿಗಳ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ (Rationalization of surd)

ಎರಡು ಕರಣಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಕರಣಿಗೆ ಎರಡನೆಯ ಕರಣಿಯ ಪರಿಮೇಯಿಕರಣ ಗುಣಕ (Rationalizing Factor) ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾ. (1) $\sqrt{2}$ ಈ ಕರಣಿಗೆ $\sqrt{2}$ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ $\sqrt{2\times2} = \sqrt{4}$ ದೊರೆಯುವುದು $\sqrt{4} = 2$ ಇದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ

$\therefore$ $\sqrt{2}$ ಇದು $\sqrt{2}$ ರ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಗುಣಕ ಇದೆ.

ಉದಾ. (2) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ ಈ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿರಿ.

$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ ಇದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

$\therefore$ $\sqrt{2}$ ರ $\sqrt{8}$ ಇದು ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಗುಣಕ ಇದೆ.

ಅದರಂತೆ $8\sqrt{2}$ ಈ ಕರಣೀ ಸಹ $\sqrt{2}$ ಈ ಕರಣಿಯ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಗುಣಕ ಇದೆ.

ಕಾರಣ $\sqrt{2} \times 8\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 8 \times 2 = 16.$

$\sqrt{6}$, $\sqrt{16}$ $\sqrt{50}$ ಇವು $\sqrt{2}$ ರ ಪರಿಮೇಯಿಕರಣ ಗುಣಕ ಇದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

> ಕೊಟ್ಟ ಕರಣಿಯ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಗುಣಕ ಒಂದೇ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಯಾವುದೊಂದು ಕರಣಿ ಕೊಟ್ಟ ಕರಣಿಯ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಗುಣಕ ಇದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಶೋನ್ಯೆತರ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಕರಣಿ ಸಹ ಕೊಟ್ಟ ಕರಣಿಯ ಪರಿಮೇಯಿಕರಣ ಗುಣಕ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ. (3) $\sqrt{27}$ ರ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಗುಣಕ ಬರೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ: $\sqrt{27} = \sqrt{9\times3} = 3\sqrt{3}$ $\therefore$ $3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \times 3 = 9$ ಇದು ಪರಿಮೇಯಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

$\therefore$ $\sqrt{3}$ ಇದು $\sqrt{27}$ ರ ಕರಣಿಯ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಗುಣಕ ಇದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿರಿ, $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ ಅಂದರೆ $3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 9 \times 3 = 27.$

ಅಂದರೆ $\sqrt{27}$ ಈ ಕೊಟ್ಟ ಕರಣಿಯ $3\sqrt{3}$ ಇದೂ ಸಹ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಗುಣಕ ಇರುವದು. ಇದರ ಹೊರತಾಗಿ $4\sqrt{3}$, $7\sqrt{3}$ ಹೀಗೆ ಅನೇಕ ಗುಣಕಗಳು ಸಿಗುವವು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ $\sqrt{3}$ ಇದು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಸರಳ ರೂಪದಲ್ಲಿಯ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಗುಣಕ ಇದೆ,

ಉದಾ. (4) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ದ ಛೇದದ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ: $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ....ಅಂಶ ಹಾಗೂ ಛೇದಕ್ಕೆ $\sqrt{5}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ.

ಉದಾ. (5) $\dfrac{3}{2\sqrt{7}}$ ದ ಛೇದದ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ: $\dfrac{3}{2\sqrt{7}} = \dfrac{3}{2\sqrt{7}} \times \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{2\times7} = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}$ (ಇಲ್ಲಿ $2\sqrt{7}$ ಕ್ಕೆ $\sqrt{7}$ ದಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದು ಸಾಕಾಗುವದು)

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ

ಛೇದದ ಪರಿಮೇಯಿಕರಣ ಮಾಡಲು ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಗುಣಕದ ಉಪಯೋಗವಾಗುವದು. ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಛೇದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವದು ಅನುಕೂಲಕರ ಇರುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಛೇದಗಳ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.3

(1) ಕೆಳಗಿನ ಕರಣಿಗಳ ಕ್ರಮ ಹೇಳಿರಿ.

(i) $\sqrt[3]{7}$ (ii) $5\sqrt{12}$ (iii) $\sqrt[4]{10}$ (iv) $\sqrt{39}$ (v) $\sqrt[3]{18}$

(2) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕರಣಿ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

(i) $\sqrt[3]{51}$ (ii) $\sqrt[4]{16}$ (iii) $\sqrt[5]{81}$ (iv) $\sqrt{256}$ (v) $\sqrt[3]{64}$ (vi) $\sqrt{\frac{22}{7}}$

(3) ಕೆಳಗಿನ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಕರಣಿಯ ಜೋಡಿಗಳ ಸಜಾತಿಯ ಹಾಗೂ ಯಾವವು ವಿಜಾತಿಯ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\sqrt{52}$, $5\sqrt{13}$ (ii) $\sqrt{68}$, $5\sqrt{3}$ (iii) $4\sqrt{18}$, $7\sqrt{2}$

(iv) $19\sqrt{12}$, $6\sqrt{3}$ (v) $5\sqrt{22}$, $7\sqrt{33}$ (vi) $5\sqrt{5}$, $\sqrt{75}$

(4) ಕೆಳಗಿನ ಕರಣಿಗಳಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪ ಕೊಡಿರಿ.

(i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{250}$ (iv) $\sqrt{112}$ (v) $\sqrt{168}$

(5) ಕೆಳಗಿನ ಕರಣಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ತುಲನೆ ಮಾಡಿರಿ

(i) $7\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247}$, $\sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7}$, $\sqrt{28}$

(iv) $5\sqrt{5}$, $7\sqrt{2}$ (v) $4\sqrt{42}$, $9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3}$, 9 (vii) 7, $2\sqrt{5}$

(6) ಸರಳ ರೂಪ ಕೊಡಿರಿ.

(i) $5\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$ (ii) $9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{125}$

(iii) $7\sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{7} - \frac{3}{5}\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$

(7) ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿರಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಸರಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $3\sqrt{12} \times \sqrt{18}$ (ii) $3\sqrt{12} \times 7\sqrt{15}$

(iii) $3\sqrt{8} \times \sqrt{5}$ (iv) $5\sqrt{8} \times 2\sqrt{8}$

(8) ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿರಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಸರಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\sqrt{98} \div \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{125} \div \sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{54} \div \sqrt{27}$ (iv) $\sqrt{310} \div \sqrt{5}$

(9) ಛೇದದ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಮಾಡಿರಿ.

(i) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{14}}$ (iii) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (iv) $\frac{6}{9\sqrt{3}}$ (v) $\frac{11}{\sqrt{3}}$

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಒಂದು ವೇಳೆ $a > 0$, $b > 0$ ಇದ್ದರೆ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$; $\sqrt{a^2}=a$ ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ

ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿರಿ

ಉದಾ. (1) $\sqrt{2}(\sqrt{8}+\sqrt{18})$

$= \sqrt{2\times 8}+\sqrt{2\times 18}$

$\sqrt{16}+\sqrt{36}$

$= 4 + 6$

$= 10$

ಉದಾ. (2) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$

$= \sqrt{3}\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)$

$= \sqrt{3}\times 2\sqrt{3}-\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}-\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}+\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}$

$= 2\times 3-3\sqrt{6}-2\sqrt{6}+3\times 2$

$= 6-5\sqrt{6}+6$

$= 12-5\sqrt{6}$

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ವರ್ಗ ಕರಣಿಗಳ ದ್ವಿಪದ ರೂಪಗಳು (Binomial quadratic surd)

- $\sqrt{5}+\sqrt{3}$; $\frac{3}{4}+\sqrt{5}$ ಇವು ವರ್ಗ ಕರಣಿಯ ದ್ವಿಪದ ರೂಪಗಳಿವೆ ಅದರಂತೆ $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; $\frac{3}{4}-\sqrt{5}$ ಇವು ಸಹ
- ಕರಣಿಗಳ ದ್ವಿಪದ ರೂಪಗಳಿವೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿರಿ

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2 = a-b$

- $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2 = 5-3 = 2$
- $(\sqrt{3}+\sqrt{7})(\sqrt{3}-\sqrt{7}) = (\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2 = 3-7 = -4$
- $(\frac{3}{2}+\sqrt{5})(\frac{3}{2}-\sqrt{5}) = (\frac{3}{2})^2-(\sqrt{5})^2 = \frac{9}{4}-5 = \frac{9-20}{4} = -\frac{11}{4}$
- $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ ಹಾಗೂ $(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ ಈ ದ್ವಿಪದಿ ಕರಣಿಗಳ ಜೋಡಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ದ್ವಿಪದಿ ಕರಣಿಗಳಿಗೆ ಜೋಡಿಗಳಿಗೆ ಅನುಬದ್ಧ ಜೋಡಿಗಳು ಎನ್ನುವರು.

ದ್ವಿಪದಿ ಕರಣಿ ಹಾಗೂ ಅದರ ಅನುಬದ್ಧ ಜೋಡಿ ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಸ್ಪರರ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣದ ಗುಣಕ ಇರುತ್ತವೆ.

$\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ಅಥವಾ $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದ್ವಿಪದಿ ಕರಣಿ ಇದು $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ಈ ದ್ವಿಪದಿ ಕರಣಿಯ ಅನುಬದ್ಧ ಜೋಡಿ ಇದೆ.

ಅದರಂತೆ $7+\sqrt{3}$ ರ ಅನುಬದ್ಧ ಜೋಡಿ $7-\sqrt{3}$ ಇದೆ.

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

ದ್ವಿಪದಿ ಕರಣಿಗಳ ಅನುಬದ್ಧ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಯಾವಾಗಲೂ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುವದು

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಭೇದದ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ (Rationalization of the denominator)

ಅನುಭದ್ಧ ದ್ವಿಪದಿ ಕರಣಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಪರಿಮೇಯ ಇರುತ್ತದೆ, ಈ ಗುಣಧರ್ಮದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಂಡು, ಭೇದ ದ್ವಿಪದಿ ಕರಣಿ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭೇದಗಳ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

ಉದಾ.(1) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಭೇದದ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ: $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ಈ ದ್ವಿಪದಿ ಕರಣಿಯ ಅನುಬದ್ಧ ಜೋಡಿ $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ಇದೆ.

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

ಉದಾ. (2) $\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭೇದದ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ: $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ಈ ದ್ವಿಪದಿ ಕರಣಿಯ ಅನುಬದ್ಧ ಜೋಡಿ $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$ ಇದೆ.

$$\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{8(3\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{8\times 3\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{9\times 2 - 5} = \frac{24\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{18 - 5} = \frac{24\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{13}$$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.4

(1) ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿರಿ.

(i) $\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$ (ii) $(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{2}$ (iii) $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(4\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(2) ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭೇದಗಳ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಮಾಡಿರಿ.

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{3}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{4}{7+4\sqrt{3}}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಕೇವಲ ಮೂಲ್ಯ (Absolute value)

x ಇದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ x ದ ಕೇವಲ ಮೂಲ್ಯ (Absolute Value) ಅಥವಾ ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಶೂನ್ಯದಿಂದ ಅದರ ಅಂತರ $|x|$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ. $|x|$ ಇದನ್ನು x ದ ಕೇವಲ ಮೂಲ್ಯ ಎಂದು ಓದುವರು.

ಕೇವಲ ಮೂಲ್ಯದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡುವರು.

ಒಂದು ವೇಳೆ $x > 0$ ಇದ್ದರೆ $|x| = x$ ಒಂದು ವೇಳೆ x ಧನ ಇದ್ದರೆ x ದ ಕೇವಲ ಮೂಲ್ಯ x ಇರುತ್ತದೆ

ಒಂದು ವೇಳೆ $x = 0$ ಇದ್ದರೆ $|x| = 0$ ಒಂದು ವೇಳೆ x ಶೂನ್ಯ ಇದ್ದರೆ x ದ ಕೇವಲ ಮೂಲ್ಯ ಶೂನ್ಯ ಇರುತ್ತದೆ

ಒಂದು ವೇಳೆ $x < 0$ ಇದ್ದರೆ $|x| = -x$ ಒಂದು ವೇಳೆ x ಋಣ ಇದ್ದರೆ x ದ ಕೇವಲ ಮೂಲ್ಯ x ದ ವಿರುದ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ. (1) $|3| = 3$ $\quad |-3| = -(-3) = 3$ $\quad |0| = 0$

ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೇವಲ ಮೂಲ್ಯ ಋಣ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾ. (2) ಕೆಳಗಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

(i) $|9-5| = |4| = 4$ (ii) $|8-13| = |-5| = 5$

(iii) $|8| - |-3| = 5$ (iv) $|8| \times |4| = 8 \times 4 = 32$

ಉದಾ. (3) ಬಿಡಿಸಿರಿ $|x-5| = 2$

ಉತ್ತರ: $|x-5| = 2$ $\quad \therefore x - 5 = +2$ ಅಥವಾ $x - 5 = -2$

$\therefore x = 2 + 5$ ಅಥವಾ $x = -2+5$

$\therefore x = 7$ ಅಥವಾ $x = 3$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.5

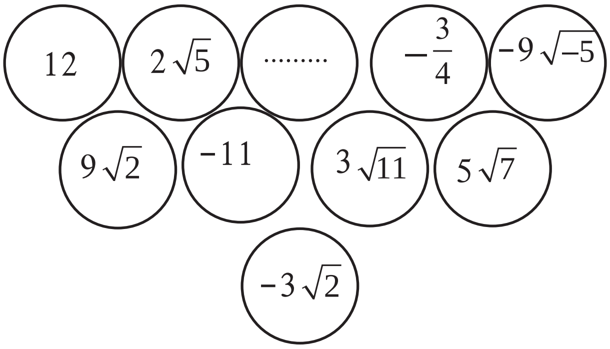
(1) ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

i) $|15 - 2|$ (ii) $|4 - 9|$ (iii) $|7| \times |-4|$

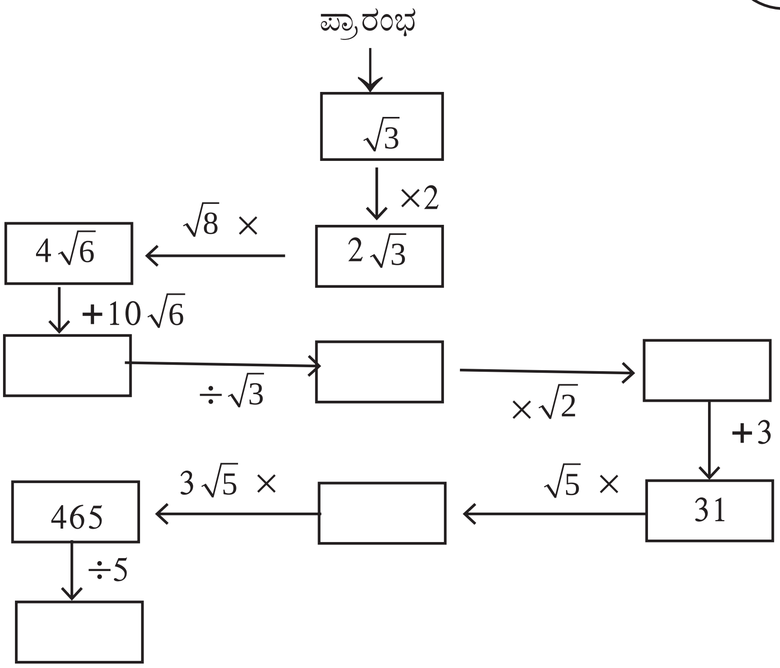
(2) ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $|3x-5| = 1$ (ii) $|7-2x| = 5$ (iii) $\left|\frac{8-x}{2}\right| = 5$ (iv) $\left|5+\frac{x}{4}\right| = 5$

ಕೃತಿ (I) : ಬದಿಯ ಕಾರ್ಡದ ಮೇಲೆ ಕೆಲವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗದಿಂದ ಬೇರೀಜು, ವಜಾಬಾಕಿ, ಗುಣಾಕಾರ ಹಾಗೂ ಭಾಗಾಕಾರದ ಎರಡು ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ ಹಾಗೂ ಬಿಡಿಸಿರಿ.



ಕೃತಿ (II) :



ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 2

(1) ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಬಹು ಪರ್ಯಾಯ ಉತ್ತರಗಳಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ.

(i) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವದು ?

(A) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\frac{3}{9}$ (D) $\sqrt{196}$

(ii) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ?

(A) 0.17 (B) $1.\overline{513}$ (C) $0.27\overline{46}$ (D) 0.101001000.....

(iii) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಾಂಶ ರೂಪ ಅಖಂಡ ಅವರ್ತ ಇರುವವು ?

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{3}{11}$ (D) $\frac{137}{25}$

(iv) ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು ಏನು ತೋರಿಸುವದು ?

(A) ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ (B) ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ (C) ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ (D) ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ

(v) $0.\dot{4}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಮೇಯ ರೂಪ ಯಾವುದು ?

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{40}{9}$ (C) $\frac{3.6}{9}$ (D) $\frac{36}{9}$

(vi) ಒಂದು ವೇಳೆ n ಇದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ $\sqrt{n}$ ಇದು ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವದು.

(A) ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ (B) ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ

(C) ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ (D) A, B, C ಈ ಮೂರು ಪರ್ಯಾಯ ಇರಬಹುದು.

(vii) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆ ಕರಣಿ ಇಲ್ಲ ?

(A) $\sqrt{7}$ (B) $\sqrt[3]{17}$ (C) $\sqrt[3]{64}$ (D) $\sqrt{193}$

(viii) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ ಈ ಕರಣಿಯ ಕ್ರಮ ಎಷ್ಟು ?

(A) 3 (B) 2 (C) 6 (D) 5

(ix) $2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ಈ ದ್ವಿಪದಿ ಕರಣಿಯ ಅನುಬದ್ಧ ಜೋಡಿ ಯಾವುದು ?

(A) $-2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

(x) $\left|12-(13+7)\times 4\right|$ ದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

(A) −68 (B) 68 (C) −32 (D) 32.

(2) ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) 0.555 (ii) $29.\overline{568}$ (iii) 9.315 315 ..... (iv) 357.417417..... (v) $30.\overline{219}$

(3) ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದಶಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\frac{-5}{7}$ (ii) $\frac{9}{11}$ (iii) $\sqrt{5}$ (iv) $\frac{121}{13}$ (v) $\frac{29}{8}$

(4) $5+\sqrt{7}$ ಇದು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ

(5) ಕೆಳಗಿನ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\frac{3}{4}\sqrt{8}$ (ii) $-\frac{5}{9}\sqrt{45}$

(6) ಕೆಳಗಿನ ಕರಣಿಗಳ ಸುಲಭ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಗುಣಕ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\sqrt{32}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{27}$ (iv) $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ (v) $3\sqrt{72}$ (vi) $4\sqrt{11}$

(7) ಸರಳ ರೂಪ ಕೊಡಿರಿ.

(i) $\frac{4}{7}\sqrt{147}+\frac{3}{8}\sqrt{192}-\frac{1}{5}\sqrt{75}$ (ii) $5\sqrt{3}+2\sqrt{27}+\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\sqrt{216}-5\sqrt{6}+\sqrt{294}-\frac{3}{\sqrt{6}}$

(iv) $4\sqrt{12}-\sqrt{75}-7\sqrt{48}$ (v*) $2\sqrt{48}-\sqrt{75}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(8) ಭೇದದ ಪರಿಮೇಯೀಕರಣ ಮಾಡಿರಿ.

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{3\sqrt{7}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$ (v) $\frac{12}{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

3 ಬಹುಪದಿಗಳು

EKH4YS

ಬನ್ನಿ ಕಲಿಯೋಣ

- ಬಹುಪದಿಯ ಪರಿಚಯ
- ಬಹುಪದಿಯ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು
- ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ
- ಸಂಶ್ಲೇಷಕ ಭಾಗಾಕಾರ
- ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ
- ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತ

ಬನ್ನಿ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡೋಣ.

$p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$; $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$; 6 ಇವುಗಳೆಲ್ಲವು ಬೈಜಿಕ ರಾಶಿಗಳಿವೆ.

ಶಿಕ್ಷಕ: ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮಿತ್ರರೆ, $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$, 6 ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಒಂದೊಂದು ಪದ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಆ ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ಚಲದ ಘಾತಾಂಕ ಹೇಳಿರಿ.

ಮಾಧುರಿ : $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$ ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳ ಚಲಗಳ ಘಾತಾಂಕ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 3, 2, 1 ಇವೆ.

ವಿವೇಕ : ಸರ್, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$ ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳ ಚಲಗಳ ಘಾತಾಂಕ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 2, 3, 5 ಇವೆ.

ರೋಹಿತ : ಸರ್, 6 ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಚಲ ಇಲ್ಲ. ಇಲ್ಲಿ $6 = 6 \times 1 = 6 \times x^0$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು, ಅಂದರೆ 6 ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿಯ ಚಲದ ಘಾತಾಂಕ 0 ಇದೆ.

ಶಿಕ್ಷಕ : ಅಂದರೆ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಚಲಗಳ ಘಾತಾಂಕ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯ ಅಂದರೆ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ.

ಯಾವ ಬೈಜಿಕ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಚಲಗಳ ಘಾತಾಂಕವು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತವೆ, ಆ ರಾಶಿಗೆ ಬಹುಪದಿ **(polynomial)** ಎಂದು ಅನ್ನುತ್ತಾರೆ. 6 ಇದು ಸಹಿತ ಬಹುಪದಿ ಇದೆ. 6, -7, $\frac{1}{2}$, 0, $\sqrt{3}$ ಇತ್ಯಾದಿ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ **ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದಿ (Constant polynomial)** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. 0 ಇದು ಸಹಿತ ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದಿ ಇದೆ.

$\sqrt{y} + 5$ ಮತ್ತು $\frac{1}{y} - 3$ ಇವು ಬಹುಪದಿಗಳಿವೆಯೆ ?

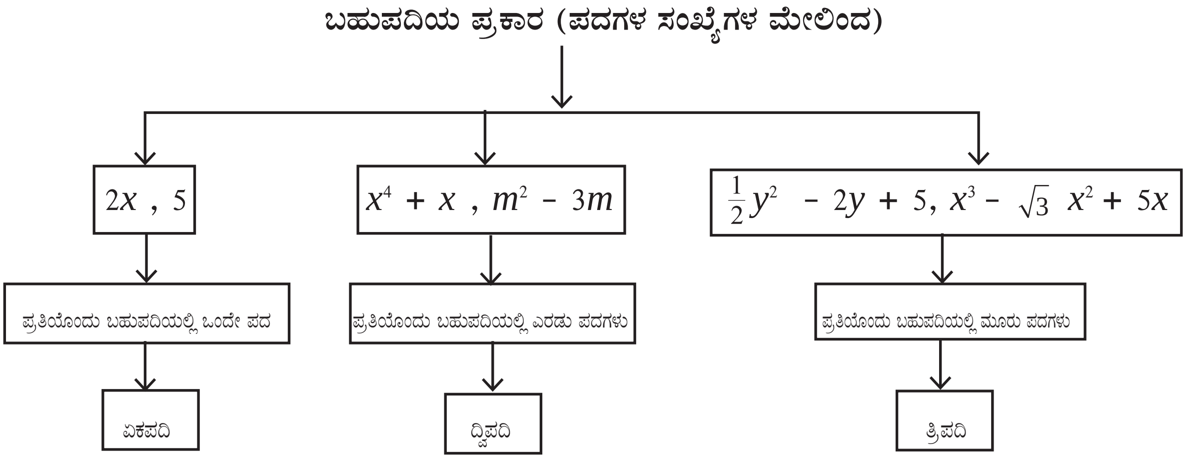
ಸಾರಾ : ಸರ್, $\sqrt{y} + 5$ ಇದು ಬಹುಪದಿ ಇಲ್ಲ. ಕಾರಣ $\sqrt{y} + 5 = y^{\frac{1}{2}} + 5$, ಇದರಲ್ಲಿ y ದ ಘಾತಾಂಕ $\frac{1}{2}$ ಇದ್ದು ಅದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಲ್ಲ.

ಜಾನ : ಸರ, $\frac{1}{y} - 3$ ಇದು ಸಹಿತ ಬಹುಪದಿಯಿಲ್ಲ. ಕಾರಣ $\frac{1}{y} - 3 = y^{-1} - 3$, ಇಲ್ಲಿ y ದ ಘಾತಾಂಕ -1 ಇದ್ದು ಅದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಲ್ಲ.

ಶಿಕ್ಷಕ : ಬಹು ಪದಿ ಇಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಐದು ಬೈಜಿಕ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಅವು ಬಹುಪದಿಗಳು ಯಾಕೆ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದರ ಸ್ಪಷ್ಟಕರಣ ಕೊಡಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉತ್ತರಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಿ ಶೋಧಿಸಿರಿ.

- ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೈಜಿಕ ರಾಶಿ ಇದು ಬಹುಪದಿ ಇರುತ್ತದೆಯೊ ಹೇಗೆ ?
- ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದಿ ಇದು ಬೈಜಿಕ ರಾಶಿ ಇರುತ್ತದೆ ಹೇಗೆ ?



ಒಂದೇ ಚಲದಲ್ಲಿಯ ಬಹುಪದಿ ಅದರಲ್ಲಿಯ ಚಲಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ $p(x)$, $q(m)$, $r(y)$ ಈ ಪ್ರಕಾರದಲ್ಲಿ ದರ್ಶಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $p(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ $\quad q(m) = m^2 + \frac{1}{2}m - 7$ $r(y) = y^2 + 5$

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಒಂದು ಚಲದಲ್ಲಿಯ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ : (Degree of a polynomial in one variable)

ಶಿಕ್ಷಕ : $2x^7 - 5x + 9$ ಈ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿಯ ಚಲದ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತಾಂಕ ಯಾವದು ಇದೆ ?

ಜೀಜಾ : ಸರ, ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತಾಂಕ 7 ಇದೆ.

ಶಿಕ್ಷಕ : ಒಂದೇ ಚಲದಲ್ಲಿಯ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ, ಚಲದ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತಲೂ ದೊಡ್ಡ ಘಾತಾಂಕಕ್ಕೆ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ ಎನ್ನುವರು ಹಾಗಾದರೆ ಈಗ ಹೇಳಿರಿ, ಮೇಲಿನ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ ಎಷ್ಟು ?

ಅಶೋಕ : ಸರ, $2x^7 - 5x + 9$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ 7 ಇದೆ.

ಶಿಕ್ಷಕ : 10 ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ ಎಷ್ಟು ?

ರಾಧಾ : $10 = 10 \times 1 = 10 \times x^0$ ಅಂದರೆ 10 ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ 0 ಇದೆ.

ಶಿಕ್ಷಕ : 10ರ ಇದರಂತೆಯೇ **ಯಾವುದೇ ಶೂನ್ಯೇತರ ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ 0 ಇರುವದು.**
ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾಡಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ.

ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಚಲಗಳಲ್ಲಿಯ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ

ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಚಲಗಳ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಅತೀ ಹೆಚ್ಚು ಎಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆಯೊ ಆ ಬೇರೀಜಿಗೆ ಆ **ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ** ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾ. $3m^3n^6 + 7m^2n^3 - mn$ ಇದು ಎರಡು ಚಲಗಳಲ್ಲಿಯ ಬಹುಪದಿ ಇದೆ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ 9 ಇದೆ.
(ಇಲ್ಲಿ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಬೇರಿಜು $3 + 6 = 9$, $2 + 3 = 5$, $1 + 1 = 2$)

ಕೃತಿ I : ಚಲ x ಮತ್ತು ಘಾತ 5 ಇರುವ ಏಕಪದಿ, ದ್ವಿಪದಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಪದಿಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಬರೆಯಿರಿ.

ಏಕ-ಪದಿ ☐ ದ್ವಿಪದಿ ☐ ತ್ರಿಪದಿ ☐

ಕೃತಿ II : 5 ಘಾತವಿರುವ ಎರಡು ಚಲಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ದ್ವಿಪದಿಯ ಉದಾಹರಣೆ ತಯಾರಿಸಿರಿ ☐

ಬಹುಪದಿಗಳ ಪ್ರಕಾರ (ಘಾತದ ಮೇಲಿಂದ)

ಒಂದೇ ಚಲದಲ್ಲಿಯ ಬಹುಪದಿ

$3x - 1,\ 7y$	$2y^2 + y + 1,\ - 3x^2$	$x^3 + x^2 + 2x + \sqrt{3}\ ,\ m - m^3$
ಘಾತ 1	**ಘಾತ 2**	**ಘಾತ 3**
ರೇಷಿಯ ಬಹುಪದಿ	**ವರ್ಗೀಯ ಬಹುಪದಿ**	**ಘನ ಬಹುಪದಿ**
ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ $ax + b$ ಇಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$	ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ $ax^2 + bx + c$ ಇಲ್ಲಿ $a,\ b,\ c$ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$	ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ಇಲ್ಲಿ $a,\ b,\ c,\ d$ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$

ಬಹುಪದಿ $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ಇದು x ಈ ಚಲದಲ್ಲಿಯ ಘಾತ n ಇರುವ ಬಹುಪದಿ ಇದೆ

ಇಲ್ಲಿ $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots..,\ a_2,\ a_1,\ a_0$ ಇವು ಸಹಗುಣಕಗಳಿದ್ದು $a_n \neq 0$

ಬಹುಪದಿಯ ಪ್ರಮಾಣ ರೂಪ, ಸಹಗುಣಕ ರೂಪ, ಮತ್ತು ಘಾತಾಂಕ ರೂಪ
(Standard form, co-efficient form and index form of a polynomial)

$p(x) = x - 3x^2 + 5 + x^4$ ಈ ಬಹುಪದಿ x ದ ಘಾತಾಂಕದ ಇಳಿಕೆಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ $x^4 - 3x^2 + x + 5$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಇದು ಪ್ರಮಾಣರೂಪವಿದೆ ಈ ಪದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು x ಈ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ 'x' ದ ಮೂರನೆಯ ಘಾತಾಂಕದ ಪದ ಇಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ಅದು $0x^3$ ಇದೆ ಹೀಗೆ ತಿಳಿಯಲು ಬರುವದು. ಈ ಪದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು $p(x)$ ದ ಬಹುಪದಿ $x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು ಈ ರೀತಿ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಿಂದ ಬರೆದ ಮತ್ತು ಘಾತಾಂಕದ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳು ಉಲ್ಲೇಖ ಮಾಡಿರುವ ಬಹುಪದಿಗೆ ಘಾತಾಂಕರೂಪ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಕೆಲವು ಸಲ ಘಾತಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿಯ ಬಹುಪದಿಯ ಚಲವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಕೇವಲ ಅದರ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಕ್ರಮದಿಂದ ಬರೆಯುವರು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ : $x^3 - 3x^2 + 0x - 8$ ಈ ಬಹುಪದಿ $(1, -3, 0, -8)$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಬಹುಪದಿಯ ಸಹಗುಣಕ ರೂಪ ಎಂದು ಅನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$(4, 0, -5, 0, 1)$ ಈ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ಚಲ y ಎಂದು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಘಾತಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ $4y^4 + 0y^3 - 5y^2 + 0y + 1$ ಅಂದರೆ $4y^4 - 5y^2 + 1$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

ಉದಾ. $p(m) = 3m^5 - 7m + 5m^3 + 2$

ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ಘಾತಾಂಕದ ಇಳಿಕೆಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ	$3m^5 + 5m^3 - 7m + 2$
ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದ ಪದಗಳನ್ನು ಶೂನ್ಯ ಸಹಗುಣಕ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಮಾಡಿ ಅದನ್ನು ಘಾತಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.	$3m^5 + 0m^4 + 5m^3 + 0m^2 - 7m + 2$
ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದಿಯ ಸಹಗುಣಕ ರೂಪ ಬರೆಯಿರಿ.	$(3, 0, 5, 0, -7, 2)$
ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ ಬರೆಯಿರಿ.	5

ಉದಾ: (1) $x^3 + 3x - 5$ ಈ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ಸಹಗುಣಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $x^3 + 3x - 5 = x^3 + 0x^2 + 3x - 5$

$\therefore$ ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದಿಯ ಸಹಗುಣಕ ರೂಪ $(1, 0, 3, -5)$

ಉದಾ (2) $(2, -1, 0, 5, 6)$ ಈ ಸಹಗುಣಕ ರೂಪದಲ್ಲಿಯ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ಘಾತಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಬಹುಪದಿಯ ಸಹಗುಣಕ ರೂಪ $(2, -1, 0, 5, 6)$

$\therefore$ ಘಾತಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿಯ ಬಹುಪದಿ $= 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 5x + 6$

ಅಂದರೆ $2x^4 - x^3 + 5x + 6$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.1

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ರಾಶಿಗಳು ಬಹುಪದಿ ಇವೆಯೇ? ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆದು ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ ಕೊಡಿರಿ.

   (i) $y + \frac{1}{y}$ (ii) $2 - 5\sqrt{x}$ (iii) $x^2 + 7x + 9$

   (iv) $2m^{-2} + 7m - 5$ (v) 10

2. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿಯ m^3 ದ ಸಹಗುಣಕ ಬರೆಯಿರಿ

   (i) m^3 (ii) $\frac{-3}{2} + m - \sqrt{3}\,m^3$ (iii) $\frac{-2}{3}m^3 - 5m^2 + 7m - 1$

3. ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ x ಈ ಚಲವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಒಂದು ಬಹುಪದಿ ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) ಘಾತ 7 ಇರುವ ಏಕಪದಿ (ii) ಘಾತ 35 ಇರುವ ದ್ವಿಪದಿ (iii) ಘಾತ 8 ಇರುವ ತ್ರಿಪದಿ

4. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\sqrt{5}$ (ii) x° (iii) x^2 (iv) $\sqrt{2}\,m^{10} - 7$ (v) $2p - \sqrt{7}$

(vi) $7y - y^3 + y^5$ (vii) $xyz + xy - z$ (viii) $m^3n^7 - 3m^5n + mn$

5. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು ರೇಷೀಯ, ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಘನ ಬಹುಪದಿ ಈ ಪ್ರಕಾರವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡಿರಿ.

(i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $5p$ (iii) $\sqrt{2}\ y - \frac{1}{2}$

(iv) $m^3 + 7m^2 + \frac{5}{2}m - \sqrt{7}$ (v) a^2 (vi) $3r^3$

6. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು ಪ್ರಮಾಣರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $m^3 + 3 + 5m$ (ii) $- 7y + y^5 + 3y^3 - \frac{1}{2} + 2y^4 - y^2$

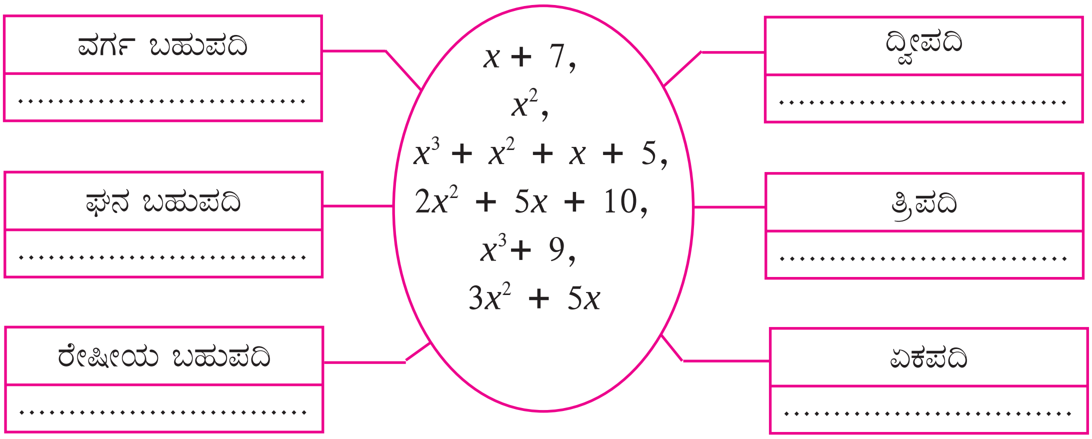
7. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು ಸಹಗುಣಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $x^3 - 2$ (ii) $5y$ (iii) $2m^4 - 3m^2 + 7$ (iv) $-\frac{2}{3}$

8.ಕೆಳಗಿನ ಸಹಗುಣಕ ರೂಪದಲ್ಲಿಯ ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು x ಚಲ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರಮಾಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) (1, 2, 3) (ii) (5, 0, 0, 0, − 1) (iii) (− 2, 2, − 2, 2)

9. ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ಬಹುಪದಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಆ ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.



ಸ್ವಲ್ಪ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

(1) ಎರಡು ಸರೂಪ ಬೈಜಿಕ ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಥವಾ ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡುವಾಗ ಅವುಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಅಥವಾ ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಉದಾ. $5m^3 - 7m^3 = (5 - 7)m^3 = -2m^3$

(2) ಎರಡು ಬೈಜಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಅಥವಾ ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡುವಾಗ ಅವುಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಅಥವಾ ಭಾಗಾಕಾರ ಆಗುವುದು. ಅದರಂತೆ ಘಾತಂಕದ ನಿಯಮಗಳ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾ. $-4y^3 \times 2y^2z = -8y^5z$; $12a^2b \div 3ab^2 = \frac{4a}{b}$

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಬಹುಪದಿಯ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು!

ಬಹುಪದಿಗಳ ಬೇರೀಜು, ವಜಾಬಾಕಿ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಬೈಜಿಕ ರಾಶಿಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳಂತೆಯೇ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾ. (1) $7a^2 + 5a + 6$ ದಲ್ಲಿಂದ $5a^2 - 2a$ ವಜಾ ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $(7a^2 + 5a + 6) - (5a^2 - 2a)$

$= 7a^2 + 5a + 6 - 5a^2 + 2a$

$= \underline{7a^2 - 5a^2} + \underline{5a + 2a} + 6$

$= 2a^2 + 7a + 6$

ಉದಾ. (2) $-2a \times 5a^2 = -10a^3$

ಉದಾ. (3) $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) = ?$

ಉತ್ತರ : $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2)$

$= m^2(m^3 + 2m - 2) - 5(m^3 + 2m - 2)$ } (ಮೊದಲನೆಯ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಿಂದ ಎರಡನೆಯ ಬಹುಪದಿಗೆ ಗುಣಿಸುವುದು)

$= m^5 + 2m^3 - 2m^2 - 5m^3 - 10m + 10$

$= m^5 + 2m^3 - 5m^3 - 2m^2 - 10m + 10$ (ಸರೂಪ ಪದಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಕಡೆ ಬರೆಯುವುದು)

$= m^5 - 3m^3 - 2m^2 - 10m + 10$

ಗುಣಾಕಾರದ ಘಾತ 5 ಇದೆ ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಉದಾ. (4) $3m^2n + 5mn^2 - 7mn$ ಮತ್ತು $2m^2n - mn^2 + mn$ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $(3m^2n + 5mn^2 - 7mn) + (2m^2n - mn^2 + mn)$

$= 3m^2n + 5mn^2 - 7mn + 2m^2n - mn^2 + mn$

$= \underline{3m^2n + 2m^2n} + \underline{5mn^2 - mn^2} - \underline{7mn + mn}$ (ಸರೂಪ ಪದಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಕಡೆ ಬರೆಯುವದು)

$= 5m^2n + 4mn^2 - 6mn$ (ಸರೂಪ ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿತು)

ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ ಬನ್ನಿ

ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ 3 ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ 5 ಇದ್ದರೆ, ಬಹುಪದಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಘಾತ ಎಷ್ಟು ಇರಬಹುದು ?

ಗುಣ್ಯ ಮತ್ತು ಗುಣಕ ಬಹುಪದಿಗಳ ಘಾತ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಘಾತ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಬಂಧ ಇರುತ್ತದೆ ?

ಉದಾ. (5) $(2 + 2x^2) \div (x + 2)$ ಈ ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿರಿ. ಮತ್ತು ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಮೊದಲು $p(x) = 2 + 2x^2$ ಈ ಭಾಜ್ಯ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ಪ್ರಮಾಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

$\therefore\ 2 + 2x^2 = 2x^2 + 0x + 2$

ಪದ್ಧತಿ I :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x - 4 \\
x + 2 & 2x^2 + 0x + 2 \\
- & 2x^2 + 4x \\
 & \underline{-\quad -} \\
 & -4x + 2 \\
- & -4x - 8 \\
 & \underline{+\quad +} \\
 & 10
\end{array}
$$

ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ

$2 + 2x^2 = (x + 2) \times (2x - 4) + 10$

$q(x)$, ಭಾಜಕ $= (x + 2)$

$s(x)$, ಭಾಗಾಕಾರ $= 2x - 4$ ಹಾಗೂ $r(x)$, ಶೇಷ $= 10$

$\therefore\ p(x) = q(x) \times s(x) + r(x).$

ಪದ್ಧತಿ II : ಭಾಗಾಕಾರದ ರೇಷೀಯ ಪದ್ಧತಿ

$(2x^2 + 2) \div (x + 2)$ ಈ ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿರಿ.

$2x^2$ ಈ ಪದ ದೊರಕಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ $(x + 2)$ ಕ್ಕೆ $2x$ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $4x$ ವಜಾ ಮಾಡಿರಿ.

$2x(x+2) - 4x = 2x^2$

$\therefore$ ಭಾಜ್ಯ $= 2x^2 + 2 = 2x(x+2) - 4x + 2$ ...(I)

ಈಗ $-4x$ ಈ ಪದ ದೊರಕಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ $(x+2)$ ಕ್ಕೆ -4 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮತ್ತು 8 ಕೂಡಿಸಿ.

$-4\,(x+2) + 8 = -4x$

$\therefore\ (2x^2 + 2) = 2x(x+2) - 4(x+2) + 8 + 2$ ...(I) ಮೇಲಿಂದ

$\therefore\ (2x^2 + 2) = (x + 2)\ (2x - 4) + 10$

ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಯುಕ್ಲಿಡನ ಭಾಗಾಕಾರ ಸಿದ್ಧಾಂತ

ಒಂದು ವೇಳೆ $s(x)$ ಮತ್ತು $p(x)$ ಇವು ಎರಡು ಬಹುಪದಿಗಳಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $s(x)$ ದ ಘಾತ ಇದು $p(x)$ ಘಾತದಷ್ಟು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಅದ್ದರೆ ಮತ್ತು $s(x)$ ಗೆ $p(x)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಾಕಾರ $q(x)$ ಇದ್ದರೆ ಆಗ, $s(x) = p(x)\ q(x) + r(x)$. ಇಲ್ಲಿ $r(x) = 0$ ಅಥವಾ $r(x)$ ದ ಘಾತ $p(x)$ ದ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.2

(1) ಕೊಟ್ಟ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) ಲಾಟ ಊರಿನಲ್ಲಿ a ಮರಗಳಿವೆ. ಮರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷ b ನಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತವೆ ಹಾಗಾದರೆ, x ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆ ಊರಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮರಗಳು ಇರಬಹುದು ?

(ii) ಕವಾಯಿತದ ಸಲುವಾಗಿ ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ y ಹುಡುಗರು ಈ ರೀತಿ x ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಮಾಡಲಾಯಿತು ಹಾಗಾದರೆ, ಕವಾಯಿತದ ಸಲುವಾಗಿ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಹುಡುಗರು ಉಪಸ್ಥಿತರಿದ್ದರು.

(iii) ಒಂದು ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಕಸ್ಥಾನದ ಮತ್ತು ದಶಕ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ m ಹಾಗೂ n ಇವೆ ಹಾಗಾದರೆ, ಆ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆ ದರ್ಶಿಸುವ ಬಹುಪದಿ ಯಾವುದು ?

(2) ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದಿಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿರಿ.

(i) $x^3 - 2x^2 - 9$; $5x^3 + 2x + 9$

(ii) $-7m^4 + 5m^3 + \sqrt{2}$; $5m^4 - 3m^3 + 2m^2 + 3m - 6$

(iii) $2y^2 + 7y + 5$; $3y + 9$; $3y^2 - 4y - 3$

(3) ಮೊದಲನೆಯ ಬಹುಪದಿಯಿಂದ ಎರಡನೆಯ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ವಜಾ ಮಾಡಿರಿ.

(i) $x^2 - 9x + \sqrt{3}$; $-19x + \sqrt{3} + 7x^2$

(ii) $2ab^2 + 3a^2b - 4ab$; $3ab - 8ab^2 + 2a^2b$

(4) ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿರಿ.

(i) $2x$; $x^2 - 2x - 1$ (ii) $x^5 - 1$; $x^3 + 2x^2 + 2$ (iii) $2y + 1$; $y^2 - 2y^3 + 3y$

(5) ಮೊದಲನೆಯ ಬಹುಪದಿಗೆ ಎರಡನೆಯ ಬಹುಪದಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಉತ್ತರವನ್ನು ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ ಈ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $x^3 - 64$; $x - 4$ (ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2$; $x^2 - x$

(6*) ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪದಾವಲಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಪದಾವಲಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪ ಕೊಡಿರಿ.
ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿ ಹೊಲದ ಉದ್ದ $(2a^2 + 3b^2)$ ಮೀಟರ ಮತ್ತು ಅಗಲ $(a^2 + b^2)$ ಮೀಟರ ಇವೆ. ರೈತನು ಹೊಲದಲ್ಲಿ $(a^2 - b^2)$ ಮೀಟರ ಭುಜವಿರುವ ಚೌರಸಾಕೃತಿಯ ಸ್ಥಳದ ಮೇಲೆ ಮನೆ ಕಟ್ಟಿದರೆ, ಉಳಿದ ಹೊಲದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೃತಿ : ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಚ್ಛೇದ ಓದಿರಿ ಮತ್ತು ಚೌಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯ ರಾಶಿ ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಿರಿ.

ಶಿರಳಸ ಎಂಬ ಊರಿನಲ್ಲಿ ಒಣ ಬೇಸಾಯ ಮಾಡುವ ಗೋವಿಂದನ 5 ಎಕರೆ ಭೂಮಿ ಇದೆ. ಆತನ ಮನೆಯಲ್ಲಿ ಪತ್ನಿ, 2 ಮಕ್ಕಳು ಮತ್ತು ಅವನ ವೃದ್ಧ ತಾಯಿ ಇದ್ದಾರೆ.ಆತನ ಒಕ್ಕಲುತನದ ಸಲುವಾಗಿ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾಲುಲಕ್ಷ ರೂ. ಸಾಲವನ್ನು ದ. ಪ್ರ.ವ. ಪ್ರಶ್ನೆ. 10 ಈ ದರದಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡನು. ಆತನು ಹೊಲದಲ್ಲಿಯ x ಎಕರೆ ಜಮೀನಿನಲ್ಲಿ ಸೋಯಾಬೀನ ಮತ್ತು y ಎಕರೆ ಜಮೀನಿನಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿ ಮತ್ತು ತೊಗರಿ ಬೆಳೆಗಳನ್ನು ಬೆಳೆದನು. ಒಕ್ಕಲು ತನದ ಸಲುವಾಗಿ ತಗುಲಿದ ಖರ್ಚು ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ಬೀಜಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಒಟ್ಟು 10,000 ಕೊಟ್ಟನು, ಸೋಯಾಬಿನ ಈ ಬೆಳೆಯ ಸಲುವಾಗಿ 2000 x ರೂಪಾಯಿಗಳು ಗೊಬ್ಬರ ಮತ್ತು ಕೀಟಕನಾಶಕಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಮತ್ತು ಕೂಲಿ ಮತ್ತು ಹದಗೊಳಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ $4000x^2$ ರೂಪಾಯಿಗಳು ಖರ್ಚಾದವು ಹತ್ತಿಯ ಬೆಳೆ ಮತ್ತು ತೊಗರಿ ಬೆಳೆ ಸಲುವಾಗಿ 8000 y ರೂಪಾಯಿಗಳು ಗೊಬ್ಬರ ಮತ್ತು ಕೀಟಕನಾಶಕಗಳಿಗಾಗಿ ಮತ್ತು 9000 y^2 ರೂಪಾಯಿಗಳಷ್ಟು ಕೂಲಿ ಮತ್ತು ಹದಗೊಳಿಸಲು ಸಲುವಾಗಿ ಖರ್ಚಾಯಿತು.

ಹೊಲದ ಸಲುವಾಗಿ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟು ಬಂದಿತು ಅದನ್ನು x ಮತ್ತು y ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯುವಾ

☐ + $2000\,x$ + $4000\,x^2$ + $8000\,y$ + ☐ ರೂಪಾಯಿಗಳು.

ಆತನ ಹೊಲದಲ್ಲಿ ಸೋಯಾಬೀನದ ಉತ್ಪನ್ನ 5 x^2 ಕ್ವಿಂಟಲ್ ಆಯಿತು. ಅದನ್ನು 2800 ರೂ. ಪ್ರತಿ ಕ್ವಿಂಟಲ್‌ದಂತೆ ಮಾರಲಾಯಿತು.

ಹತ್ತಿಯ ಉತ್ಪನ್ನ $\frac{5}{3}y^2$ ಕ್ವಿಂಟಲ್ ಆಯಿತು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 5000ರೂ. ಪ್ರತಿ ಕ್ವಿಂಟಲ್ ದರದಿಂದ ಮಾರಲಾಯಿತು.

ತೊಗರಿಯ ಉತ್ಪನ್ನ $4y$ ಕ್ವಿಂಟಲ್ ಬಂದಿತು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 4000 ರೂ. ಪ್ರತಿ ಕ್ವಿಂಟಲ ದಂತೆ ಮಾರಲಾಯಿತು.

ಎಲ್ಲ ಕೃಷಿ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ ಅದರಲ್ಲಿಂದ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಗಳ ಉತ್ಪನ್ನ ಬಂದಿತು ಎಂದು x ಮತ್ತು y ದ ಪದಾವಲಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

☐ + ☐ + ☐ ರೂಪಾಯಿಗಳು

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಸಂಶ್ಲೇಷಕ ಭಾಗಾಕಾರ ಪದ್ಧತಿ (Synthetic Division)

ಒಂದು ಬಹುಪದಿಗೆ ಎರಡನೆಯ ಬಹುಪದ್ದತಿಯಿಂದ ಹೇಗೆ ಭಾಗಿಸುವದು ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ ಈಗ ನಾವು ಭಾಜಕ $x + a$ ಅಥವಾ $x - a$ ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ, ಭಾಗಾಕಾರದ ಸರಳ ಪದ್ಧತಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾ. (1) $(3x^3 + 2x^2 - 1)$ ಈ ಬಹುಪದಿಗೆ $(x + 2)$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಮೊದಲು ಭಾಜ್ಯ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ನಂತರ ಅದನ್ನು ಸಹಗುಣಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

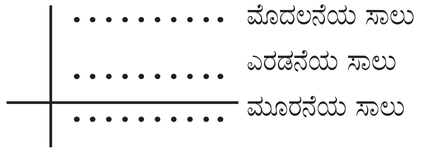
ಭಾಜ್ಯದ ಪ್ರಮಾಣರೂಪ $3x^3 + 2x^2 - 1 = 3x^3 + 2x^2 + 0\,x - 1$

$\therefore$ ಭಾಜ್ಯ ಬಹುಪದಿಯ ಸಹಗುಣಕ ರೂಪ $= (3,\ 2,\ 0,\ -1)$

ಭಾಜಕದ ಬಹುಪದಿ $= x + 2$

ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳ ಮೂಲಕ ಸಂಶ್ಲೇಷಕ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡೋಣ.

(1) ಬದಿಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಲಂಬ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅಡ್ಡ ಹೀಗೆ ಎರಡು ರೇಷೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.



(2) ಭಾಜಕ $x + 2$ ಮತ್ತು 2 ರ ವಿರುದ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ -2 ಇದೆ.
$\therefore$ ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯ ಲಂಬ ಗೆರೆಯು ಎಡಬದಿಯ ಕಡೆ -2 ಬರೆಯುವಾ. ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಭಾಜ್ಯ ಬಹುಪದಿಯ ಸಹಗುಣಕ ರೂಪ ಬರೆಯುವಾ.

-2	3	2	0	-1	ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲು
	↓ 3				ಮೂರನೆಯ ಸಾಲು

(3) ಅಡ್ಡ ರೇಷೆಯ ಕೆಳಗೆ ಅಂದರೆ ಮೂರನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಭಾಜ್ಯದಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಸಹಗುಣಕ ಹಾಗೆಯೇ ಬರೆಯೋಣ.

(4) ಮೂರನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯ 3 ಮತ್ತು ಭಾಜಕದಲ್ಲಿಯ -2 ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ -6 ಇದನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿಯ 2 ಈ ಸಹ ಗುಣಕದ ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯುವಾ. ನಂತರ 2 ಮತ್ತು -6 ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು -4 ಇದು ಮೂರನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯುವಾ.

-2	3	2	0	-1	
		-6	8	-16	
	3	-4	8	$\boxed{-17}$	ಶೇಷ

ಈ ಪ್ರಕಾರ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಬೇರಿಜುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಕೊನೆಯ ಬೇರೀಜು ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿಯ ಶೇಷ ಇರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷ -17 ಇದೆ $(3, -4, 8)$ ಇದು ಭಾಗಾಕಾರದ ಸಹಗುಣಕ ರೂಪವಿದೆ.

$\therefore$ ಭಾಗಾಕಾರ $= 3x^2 - 4x + 8$ ಮತ್ತು ಶೇಷ $= -17$

$\therefore\ 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$

ಈ ಪದ್ಧತಿಗೆ **ಭಾಗಾಕಾರದ ಸಂಶ್ಲೇಷಕ ಪದ್ಧತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.**

ಈ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ರೇಷೀಯ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

$$\begin{aligned}
3x^3 + 2x^2 - 1 &= 3x^2(x + 2) - 6x^2 + 2x^2 - 1 \\
&= 3x^2(x + 2) - 4x^2 - 1 \\
&= 3x^2(x + 2) - 4x^2 - 8x + 8x - 1 \\
&= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8x - 1 \\
&= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8x + 16 - 16 - 1 \\
&= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8(x + 2) - 17
\end{aligned}$$

$\therefore\ 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$

ಉದಾ **(2)** $(2y^4 - 3y^3 + 5y - 4) \div (y - 1)$ ಈ ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ : **ಸಂಶ್ಲೇಷಕ ಪದ್ಧತಿ :** ಭಾಜ್ಯ $= 2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^4 - 3y^3 + 0y^2 + 5y - 4$

ಭಾಜಕ $= y - 1$ -1ದ ವಿರುದ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಇದೆ

1	2	- 3	0	5	- 4	
		2	- 1	- 1	4	
	2	- 1	- 1	4	0	ಶೇಷ

ಭಾಗಾಕಾರದ ಸಹಗುಣಕ ರೂಪ : $(2, -1, -1, 4)$ ಇದೆ.

$\therefore$ ಭಾಗಾಕಾರ $= 2y^3 - y^2 - y + 4$ ಮತ್ತು ಶೇಷ $= 0$

ರೇಷೀಯ ಪದ್ಧತಿ : $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^3(y - 1) + 2y^3 - 3y^3 + 5y - 4$

$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y^2 + 5y - 4$

$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4y - 4$

$= (2y^3 - y^2 - y + 4)(y - 1)$

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ

ಸಂಶ್ಲೇಷಕ ಭಾಗಾಕಾರ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡುವಾಗ ಕೇವಲ $x + a$ ಅಥವಾ $x - a$ ಯಾವ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ 1 ಇದೆ ಅಂತಹ ಭಾಜಕಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.3

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಸಂಶ್ಲೇಷಕ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಮತ್ತು ರೇಷೀಯ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿರಿ ಭಾಗಾಕಾರ ಮತ್ತು ಶೇಷ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $(2m^2 - 3m + 10) \div (m - 5)$

(ii) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x + 2)$

(iii) $(y^3 - 216) \div (y - 6)$

(iv) $(2x^4 + 3x^3 + 4x - 2x^2) \div (x + 3)$

(v) $(x^4 - 3x^2 - 8) \div (x + 4)$

(vi) $(y^3 - 3y^2 + 5y - 1) \div (y - 1)$

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ (Value of polynomial)

ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿಯ ಚಲಕ್ಕೆ ಯಾವುದೊಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಆ ಬಹುಪದಿಯ ಒಂದು ಬೆಲೆ ಸಿಗುವದು ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $x + 7$ ಈ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ x ಇದಕ್ಕೆ 2 ಈ ಬೆಲೆ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಆ ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ 9 ದೊರೆಯುವದು.

$p(x)$ ಈ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ x ಇದಕ್ಕೆ a ಈ ಬೆಲೆ ತುಂಬಿ ಬರುವ ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ $p(a)$ ನಿಂದ ದರ್ಶಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾ (1) $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ $x = 2$ ಇದ್ದಾಗ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬಹುಪದಿ $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$

ಈ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ $x = 2$ ತುಂಬಲಾಗಿ,

$$\therefore\ p(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5$$
$$= 2 \times 4 - 6 + 5$$
$$= 8 - 6 + 5$$
$$\therefore\ p(2) = 7$$

ಉದಾ (2) $y = -2$ ಇದ್ದಾಗ ಬಹುಪದಿ $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$

$$\therefore\ p(-2) = 2 \times (-2)^3 - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= 2 \times (-8) - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= -16 + 4 + \sqrt{7}$$
$$= -12 + \sqrt{7}$$

$\therefore$ $y = -2$ ಇದ್ದಾಗ ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆಯು $-12 + \sqrt{7}$ ಇರುವದು.

ಉದಾ (3) $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಸಲುವಾಗಿ $p(0)$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$

$$\therefore\ p(0) = 2 \times 0^2 - 0^3 + 0 + 2$$
$$= 2 \times 0 - 0 + 0 + 2$$
$$= 2$$

ಉದಾ (4) ಒಂದು ವೇಳೆ $m^2 - am + 7$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ $m = -1$ ಇದ್ದಾಗ 10 ಇದ್ದರೆ a ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $p(m) = m^2 - am + 7$

$$\therefore\ p(-1) = (-1)^2 - a \times (-1) + 7$$
$$= 1 + a + 7$$
$$= 8 + a$$

ಆದರೆ $p(-1) = 10$ (ಕೊಟ್ಟಿದೆ)

$$\therefore\ 8 + a = 10$$
$$\therefore\ a = 10 - 8$$
$$\therefore\ a = 2$$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.4

(1) $x = 0$ ಇದ್ದಾಗ $x^2 - 5x + 5$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಒಂದು ವೇಳೆ $p(y) = y^2 - 3\sqrt{2}y + 1$ ಇದ್ದರೆ $p(3\sqrt{2})$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ವೇಳೆ $p(m) = m^3 + 2m^2 - m + 10$ ಇದ್ದರೆ $p(a) + p(-a) = ?$

(4) ಒಂದು ವೇಳೆ $p(y) = 2y^3 - 6y^2 - 5y + 7$ ಇದ್ದರೆ $p(2)$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

ಚಲದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಬಹುಪದಿಯ ಮೇಲೆ ತೆಗೆಯುವಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿ x ದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತುಂಬಿ ಆ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು ಇರುತ್ತದೆ.

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತ (Remainder Theorem)

$p(x)$ ಈ ಬಹುಪದಿಗೆ $(x + a)$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷ ಮತ್ತು ಆ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ x ಗೆ $-a$ ಈ ಬೆಲೆ ಕೊಟ್ಟು ಬರುವ ಆ ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಬಂಧ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿರಿ.

ಉದಾ. $p(x) = (4x^2 - x + 2)$ ಇದಕ್ಕೆ $(x + 1)$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ $x + a$ ಅಂದರೆ $(x + 1)$ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಭಾಜ್ಯ ಬಹುಪದಿ $= 4x^2 - x + 2$

ಭಾಜಕ ಬಹುಪದಿ $= x + 1$

ಭಾಗಾಕಾರ $4x - 5$

ಭಾಜಕ $x + 1 \overline{)\ 4x^2 - x + 2}$ ಭಾಜ್ಯ

$\quad - \; 4x^2 + 4x$ (ಚಿಹ್ನೆ: $- \; -$)

$\quad -5x + 2$

$\quad - \; -5x - 5$ (ಚಿಹ್ನೆ: $+ \; +$)

$\quad 7$ ಶೇಷ

ಭಾಗಾಕಾರ $= 4x - 5$ ಮತ್ತು ಶೇಷ $= 7$ .... (I)

ಇದೇ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಸಂಶ್ಲೇಷಕ ಭಾಗಾಕಾರ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸುವಾ.

$p(x)$ ದ ಸಹಗುಣಕ ರೂಪ $= (4, -1, 2)$

ಭಾಜಕ ಬಹುಪದಿ $= x + 1$

1 ರ ವಿರುದ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ -1

-1	4	-1	2	
		-4	5	
	4	-5	7	ಶೇಷ

ಭಾಗಾಕಾರ $= 4x - 5$ ಶೇಷ $= 7$

ಈಗ ನಾವು ಶೇಷ ಮತ್ತು ಭಾಜ್ಯ ಬಹುಪದಿಗಳ ಬೆಲೆ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಬಂಧ ನೋಡೋಣ

ಭಾಜ್ಯ ಬಹುಪದಿಯ ಅಂದರೆ, $4x^2 - x + 2$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ $x = -1$ ಇದ್ದಾಗ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವದು.

$$p(x) = 4x^2 - x + 2$$

$$\therefore\ p(-1) = 4 \times (-1)^2 - (-1) + 2$$

$$= 4 \times 1 + 1 + 2$$

$$= 4 + 1 + 2$$

$$= 7$$

$\therefore\ x = -1$ ಇದ್ದಾಗ ಬಹುಪದಿ $p(x)$ ಬೆಲೆ 7 ಇದೆ ...... (II)

ಆದ್ದರಿಂದ ವಿಧಾನ (I) ಮತ್ತು (II) ರ ಮೇಲಿಂದ $p(x) = 4x^2 - x + 2$ ಈ ಬಹುಪದಿಗೆ $(x + a)$ ದಿಂದ ಅಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ $x + 1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಸಿಗುವ ಶೇಷ ಮತ್ತು $x = -1$ ಇದ್ದಾಗ $p(x)$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ; ಅಂದರೆ $p(-1)$ ಸಮಾನ ಇವೆ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಧರ್ಮ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವದು

$p(x)$ ಈ ಬಹುಪದಿಗೆ $(x + a)$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷ ಇದು $p(-a)$ ದಷ್ಟು,
ಅಂದರೆ, $p(x)$ ದಲ್ಲಿ $x = -a$ ತುಂಬಿ ಬರುವ ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆಯಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

(ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿ ಉಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆ ಶೇಷ ಇರುವದು) ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ **ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತ** ಎನ್ನುವರು.

ಯುಕ್ಲಿಡನ ಭಾಗಾಕಾರದ ನಿಯಮ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಗುಣಧರ್ಮ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡುವಾ.

$p(x)$ ಗೆ $(x + a)$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ

$p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ [$q(x)$ = ಭಾಗಾಕಾರ, $r(x)$ = ಶೇಷ]

ಒಂದು ವೇಳೆ, $r(x) \neq 0$ ಇದ್ದರೆ, ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ $r(x)$ ದ ಘಾತ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂದರೆ 0 ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $r(x)$ ಇದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

$\therefore\ r(-a)$ ಇದು ಸಹ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

ಈಗ, $p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ ....(1)

ಇದರಲ್ಲಿ $x = -a$ ಬೆಲೆ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$p(-a) = q(-a) \times (a - a) + r(-a)$$

$$= q(-a) \times 0 + r(-a) \quad ....(2)$$

$\therefore\ p(-a) = r(-a)$ ....(1) ಮತ್ತು (2) ರ ಮೇಲಿಂದ

ಕೃತಿ : ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ತಾಳೆ ಹಾಕಿರಿ.

(1) $p(x) = 3x^2 + x + 7$ ಈ ಬಹುಪದಿಗೆ $x + 2$ ಈ ಬಹುಪದಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಶೇಷ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) $x = -2$ ಇದ್ದಾಗ $p(x) = 3x^2 + x + 7$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(3) ಈಗ ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಶೇಷ ಇದು $p(-2)$ ದ ಬೆಲೆ ಇದೆಯೇ ?

ಇನ್ನು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೇಲಿನಂತೆ ತಾಳೆ ಹಾಕಿರಿ.

ಉದಾ. (1) $x^4 - 5x^2 - 4x$ ಈ ಬಹುಪದಿಗೆ $x + 3$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

ಉತ್ತರ : **ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ**

ಭಾಜ್ಯ ಬಹುಪದಿ $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

ಭಾಜಕ $= x + 3$

$\therefore$ $x = -3$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ

$\therefore$ $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

$p(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 - 4(-3)$

$= 81 - 45 + 12$

$p(-3) = 48$

ಸಂಶ್ಲೇಷಕ ಭಾಗಾಕಾರ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ

ಪ್ರಮಾಣ ರೂಪ $x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 4x + 0$

ಸಹಗುಣಕ ರೂಪ $= (1, 0, -5, -4, 0)$

-3	1	0	-5	-4	0	
		-3	9	-12	48	
	1	-3	4	-16	48	ಶೇಷ

ಶೇಷ = 48

ಉದಾ. (2) ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಂಡು $x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ ಈ ಬಹುಪದಿಗೆ $x - 1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಶೇಷ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

ಭಾಜಕ $= x - 1$ $\therefore$ $x = 1$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ

$\therefore$ ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಅನುಸಾರ ಶೇಷ $= p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1$

$= 1 - 2 \times 1 - 4 - 1$

$p(1) = 1 - 2 - 4 - 1 = -6$

$\therefore$ ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಅನುಸಾರ ಶೇಷ $= -6$

ಉದಾ. (3) ಒಂದು ವೇಳೆ $t^3 - 3t^2 + kt + 50$ ಈ ಬಹುಪದಿಗೆ $(t-3)$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷವು 62 ಉಳಿಯುತ್ತಿದ್ದರೆ, k ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ: ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದಿಗೆ $(t-3)$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ ಶೇಷ 62 ಉಳಿಯುವದು ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಭಾಜ್ಯ ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ $t = 3$ ಇದ್ದಾಗ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಾ.

$p(t) = t^3 - 3t^2 + kt + 50$

∴ ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ನಿಯಮದ ಅನುಸಾರ

ಶೇಷ $= p(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + k \times 3 + 50$

$= 27 - 3 \times 9 + 3k + 50$

$= 27 - 27 + 3k + 50$

$= 3k + 50$

ಆದರೆ ಶೇಷ 62 ಕೊಟ್ಟಿದೆ

$\therefore\ 3k + 50 = 62$

$\therefore\ 3k = 62 - 50$

$\therefore\ 3k = 12$

$\therefore\ k = \frac{12}{3}$

$\therefore\ k = 4$

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತ : $p(x)$ **ಇದು ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದಿ ಇದ್ದು** 'a' **ಇದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ** $p(x)$**ಕ್ಕೆ** $(x + a)$ **ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಶೇಷವು** $p(-a)$ **ದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.**

$p(x) = s(x)\ (x - a) + r(x)$ $\qquad r(x)$ ದ ಘಾತ < 1 ಅಥವಾ $r(x) = 0$

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x = a$ ತುಂಬಿ $p(a) = 0 + r\ (a) = r\ (a)$ ದೊರೆಯುವದು

∴ $r(a)$ ದ ಘಾತ $= 0$ ಅಥವಾ $r(a) = 0$ ಅಂದರೆ $(x - a)$ ಇದು $p(x)$ ದ ಅವಯವ ಇದೆ. ಎಂದು ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವದು.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಅವಯವದ ಸಿದ್ಧಾಂತ (Factor Theorem)

21 ಕ್ಕೆ 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು 0 ಬರುವದು ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು 7 ಇದು 21 ರ ಅವಯವ ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಅದರಂತೆ ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದಿಗೆ ಭಾಜಕ ಬಹುಪದಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು 0 ಬರುತ್ತಿದ್ದರೆ ಆ ಬಹುಪದಿ ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದಿಯ ಅವಯವ ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾ. (1) $p(x) = (x^3 + 4x - 5)$ ಈ ಬಹುಪದಿಗೆ $(x - 1)$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ ಬರುವ ಶೇಷ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$(x - 1)$ ಇದು $p(x)$ದ ಅವಯವ ಇದೆಯೋ ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ

ಉತ್ತರ : $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$p(1) = (1)^3 + 4(1) - 5$

$= 1 + 4 - 5$

$= 0$

ಇಲ್ಲಿ, ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಅನುಸಾರ ಶೇಷ $= 0$

∴ $(x - 1)$ ಇದು $p(x)$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಅವಯವ ಇದೆ.

ಉದಾ. (2) $p(x) = x^3 + 4x - 5$ ಈ ಬಹುಪದಿಗೆ $x + 2$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಶೇಷ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$(x + 2)$ ಇದು $p(x)$ದ ಅವಯವ ಇದೆಯೊ ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$p(-2) = (-2)^3 + 4(-2) - 5$

$p(-2) = -8 - 8 - 5$

$= -21$

ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಅನುಸಾರ ಶೇಷ -21 ಬಂದಿತು.

ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷ $\neq 0$

∴ $(x + 2)$ ಇದು $p(x)$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಅವಯವ ಇಲ್ಲ.

ಕೃತಿ : $(x - 1)$ ಇದು $x^3 + 4x - 5$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಅವಯವ ಇದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ಹಾಕಿರಿ.

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

$p(x)$ ಇದು ಬಹುಪದಿ ಇದ್ದು a ಇದು ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು $p(a) = 0$ ಇದ್ದರೆ $(x - a)$ ಇದು $p(x)$ ದ ಅವಯವ ಇರುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಬದಲಾಗಿ $(x - a)$ ಇದು $p(x)$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಅವಯವ ಇದ್ದರೆ, $p(a) = 0$ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ. (1) ಅವಯವದ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ $x - 2$ ಇದು $x^3 - x^2 - 4$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಅವಯವ ಇದೇಯೋ ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $p(x) = x^3 - x^2 - 4$ ಭಾಜಕ $= x - 2$

$\therefore\ p(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

$\therefore$ ಅವಯವ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಅನುಸಾರ, $(x - 2)$ ಇದು $(x^3 - x^2 - 4)$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಅವಯವ ಇದೆ.

ಉದಾ. (2) ಒಂದು ವೇಳೆ $(x - 1)$ ಇದು $(x^3 - 2x^2 + mx - 4)$ದ ಅವಯವ ಇದ್ದರೆ m ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

ಉತ್ತರ : $(x - 1)$ ಇದು $p(x)$ ದ ಅವಯವ ಇದೆ $\therefore\ p(1) = 0$

$p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$

$p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + m \times 1 - 4 = 0$

$\therefore\ 1 - 2 \times 1 + m - 4 = 0$

$\therefore\ 1 - 2 + m - 4 = 0 \qquad \therefore\ m - 5 = 0 \qquad \therefore\ m = 5$

ಕೃತಿ : ನಾವು ಒಣ ಬೇಸಾಯ ಮಾಡುವ ಗೋವಿಂತನ ಬೇಸಾಯದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಬಹುಪದಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬೇಸಾಯದ ಖರ್ಚು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನ ಈ ಎರಡೂ ಸಂಗತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆತನು ಬ್ಯಾಂಕಿನ ಸಾಲ ಒಂದು ಕಾಲು ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದನು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 10% ಬಡ್ಡಿಯ ದರದಿಂದ ಮರಳಿ ಮುಟ್ಟಿಸಿದ್ದನು. ಬೀಜದ ಸಲುವಾಗಿ. ಖರ್ಚು 10,000 ರೂಪಾಯಿಗಳು, ಸೋಯಾಬೀನದ ಬೆಳೆಗೆ, ಗೊಬ್ಬರ-ಕೀಟನಾಶಕದ ಖರ್ಚಿನ ಸಲುವಾಗಿ $2000x$ ರೂಪಾಯಿಗಳು ಮತ್ತು ಹೊಲದ ಕೆಲಸದ ಸಲುವಾಗಿ $4000x^2$ ರೂಪಾಯಿ ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದ್ದನು. ಹತ್ತಿಯ ಮತ್ತು ತೊಗರಿ ಬೆಳೆಗಾಗಿ ಗೊಬ್ಬರ ಮತ್ತು ಕೀಟನಾಶಕದ ಸಲುವಾಗಿ $8000y$ ರೂಪಾಯಿಗಳು ಮತ್ತು ಹೊಲದ ಕೆಲಸದ ಸಲುವಾಗಿ $9000y^2$ ರೂಪಾಯಿಗಳಷ್ಟು ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದ್ದನು.

ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನ $14000x^2 + \dfrac{25000}{3}y^2 + 16000y$ ಇಷ್ಟು ಆಯಿತು.

$x = 2,\ y = 3$ ಈ ಬೆಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಗೋವಿಂದನ ಬೇಸಾಯದ ಜಮಾಖರ್ಚು ಬರೆದು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ :

ಜಮಾ (ಆಯ)		ಖರ್ಚು (ವ್ಯಯ)	
1,25,000	ಬ್ಯಾಂಕಿನ ಸಾಲ	1,37,000 ರೂಪಾಯಿ	ಬ್ಯಾಂಕಿನ ಬಡ್ಡಿ ಸಹಿತ ಮರಳಿ ಕೊಟ್ಟನು
₹	ಸೋಯಾಬೀನ ಉತ್ಪನ್ನ	₹	ಬೀಜದ ಸಲುವಾಗಿ
₹	ಹತ್ತಿಯ ಬೆಳೆ ಉತ್ಪನ್ನ	₹	ಸೋಯಾಬೀನ: ಗೊಬ್ಬರ ಹಾಗೂ ಕೀಟನಾಶಕ
₹	ತೊಗರೆಯ ಉತ್ಪನ್ನ	₹	ಸೋಯಾಬೀನ : ಹೊಲದ ಕೆಲಸ
₹	ಒಟ್ಟು ಜಮಾ	₹	ಹತ್ತಿ ಮತ್ತು ತೊಗರಿ : ಗೊಬ್ಬರ ಹಾಗೂ ಕೀಟನಾಶಕಗಳು
		₹	ಹತ್ತಿ ಮತ್ತು ತೊಗರಿಯ ಹೊಲದ ಕೆಲಸ
		₹	ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.5

(1) x ದ ಕೊಟ್ಟ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು $2x - 2x^3 + 7$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

(i) $x = 3$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 0$

(2) ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದಿಯ ಸಲುವಾಗಿ $p(1)$, $p(0)$ ಮತ್ತು $p(-2)$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $p(x) = x^3$ (ii) $p(y) = y^2 - 2y + 5$ (iii) $p(x) = x^4 - 2x^2 - x$

(3) $m^3 + 2m + a$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಮೇಲೆ $m = 2$ ಇದ್ದಾಗ 12 ಬರುವದು ಹಾಗಾದರೆ a ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) $mx^2 - 2x + 3$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಸಲುವಾಗಿ $p(-1) = 7$ ಇದ್ದರೆ m ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿಯ - ಮೊದಲನೆಯ ಬಹುಪದಿಗೆ ಎರಡನೆಯ ಬಹುಪದಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷವನ್ನು ಶೇಷ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

(i) $(x^2 - 7x + 9)$; $(x + 1)$

(ii) $(2x^3 - 2x^2 + ax - a)$; $(x - a)$

(iii) $(54m^3 + 18m^2 - 27m + 5)$; $(m - 3)$

(6) $y^3 - 5y^2 + 7y + m$ ಈ ಬಹುಪದಿಗೆ $y + 2$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷವು 50 ಉಳಿಯುವದು ಹಾಗಾದರೆ m ಇದರ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(7) ಅವಯವ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಂಡು $x + 3$ ಇದು $x^2 + 2x - 3$ ದ ಅವಯವ ಇದೆಯೋ ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

(8) ಒಂದು ವೇಳೆ $x - 2$ ಇದು $x^3 - mx^2 + 10x - 20$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಅವಯವ ಇದ್ದರೆ mದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

(9) ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ $q(x)$ ಇದು $p(x)$ ದ ಅವಯವ ಇದೆ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಅವಯವದ ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

(i) $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $q(x) = x - 1$

(ii) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 45$, $q(x) = x - 3$

(10) $(x + 1)$ ದಿಂದ $(x^{31} + 31)$ ಗೆ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಶೇಷ ಬರೆಯಿರಿ.

(11) $m - 1$ ಇದು $m^{21} - 1$ ಮತ್ತು $m^{22} - 1$ ಈ ಬಹುಪದಿಗಳ ಅವಯವ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ

(12*) $x - 2$ ಮತ್ತು $x - \frac{1}{2}$ ಇವು ಎರಡೂ $nx^2 - 5x + m$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಅವಯವ ಇದ್ದರೆ $m = n = 2$ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(13) (i) $p(x) = 2 + 5x$ ಇದ್ದರೆ, $p(2) + p(-2) - p(1)$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

(ii) $p(x) = 2x^2 - 5\sqrt{3}x + 5$ ಇದ್ದರೆ $p(5\sqrt{3})$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸ್ವಲ್ಪ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಹಿಂದಿನ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಬಹುಪದಿಗಳ ಅವಯವ ಹೇಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವದು ಅದರ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ

ಉದಾ. (1) $4x^2 - 25$

$= (2x)^2 - (5)^2$

$= (2x + 5)(2x - 5)$

ಉದಾ. (2) $3x^2 + 7x + 2$

$= 3x^2 + 6x + x + 2$

$= 3x(x + 2) + 1(x + 2)$

$= (x + 2)(3x + 1)$

ಉದಾ. **(3)** $63x^2 + 5x - 2$

$= 63x^2 + 14x - 9x - 2$

$= 7x(9x + 2) - 1(9x + 2)$

$= (9x + 2)(7x - 1)$

ಉದಾ. **(4)** $6x^2 - 5x - 6$

$= 6x^2 - 9x + 4x - 6$

$= 3x(2x - 3) + 2(2x - 3)$

$= (2x - 3)(3x + 2)$

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಬಹುಪದಿಗಳ ಅವಯವ (Factors of polynomials)

ಕೆಲವು ಸಲ ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದಿಯ ರೂಪಾಂತರ $ax^2 + bx + c$ ಹೀಗೆ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು. ಅದರಿಂದ ಅದರ ಅವಯವ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು ಸುಲಭವಾಗುವುದು

ಉದಾ. **(1)** $(y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50$ರ ಅವಯವ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಕೊಟ್ಟ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ $(y^2-3y) = x$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

$\therefore (y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50 = x^2 - 5x - 50$

$= x^2 - 10x + 5x - 50$

$= x(x - 10) + 5(x - 10)$

$= (x - 10)(x + 5)$

$= (y^2-3y - 10)(y^2-3y + 5)$

$= [y^2-5y + 2y - 10](y^2-3y + 5)$

$= [y(y - 5) + 2(y - 5)](y^2-3y + 5)$

$= (y - 5)(y + 2)(y^2-3y + 5)$

ಉದಾ. **(2)** ಅವಯವ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

$(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

ಉತ್ತರ : $(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

$= (x + 2)(x - 7)(x - 3)(x - 2) + 64$

$= (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 6) + 64$

$= (m - 14)(m + 6) + 64$ . . . . ($x^2 - 5x$ ಸಲುವಾಗಿ m ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿ)

$= m^2 - 14m + 6m - 84 + 64$

$= m^2 - 8m - 20$

$= (m - 10)(m + 2)$

$= (x^2 - 5x - 10)(x^2 - 5x + 2)$ .... m ದ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ $x^2 - 5x$ ತುಂಬಲಾಗಿ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.6

(1) ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದಿಗಳ ಅವಯವ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2x^2 + x - 1$ (ii) $2m^2 + 5m - 3$ (iii) $12x^2 + 61x + 77$

(iv) $3y^2 - 2y - 1$ (v) $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}$ (vi) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

(2) ಕೆಳಗಿನ ಬಹು ಪದಿಗಳ ಅವಯವ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(i) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$ (ii) $(x - 5)^2 - (5x - 25) - 24$

(iii) $(x^2 - 6x)^2 - 8(x^2 - 6x + 8) - 64$ (iv) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 5) - 35$

(v) $(y + 2)(y - 3)(y + 8)(y + 3) + 56$

(vi) $(y^2 + 5y)(y^2 + 5y - 2) - 24$

(vii) $(x - 3)(x - 4)^2(x - 5) - 6$

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನಸಂಗ್ರಹ - 3

(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಪರ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿಂದ ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ.

(i) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಬಹುಪದಿ ಯಾವುದು ?

(A) $\frac{x}{y}$ (B) $x^{\sqrt{2}} - 3x$ (C) $x^{-2} + 7$ (D) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}$

(ii) $\sqrt{7}$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ ಎಷ್ಟು ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 5 (C) 2 (D) 0

(iii) 0 ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ ಎಷ್ಟು ?

(A) 0 (B) 1 (C) ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾಡಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ (D) ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ

(iv) $2x^2 + 5x^3 + 7$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ ಎಷ್ಟು ?

(A) 3 (B) 2 (C) 5 (D) 7

(v) $x^3 - 1$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಸಹಗುಣಕ ರೂಪ ಯಾವದು ?

(A) (1, – 1) (B) (3, – 1) (C) (1, 0, 0, – 1) (D) (1, 3, – 1)

(vi) $p(x) = x^2 - 7\sqrt{7}x + 3$ ಇದ್ದರೆ $p(7\sqrt{7}) = ?$

(A) 3 (B) $7\sqrt{7}$ (C) $42\sqrt{7} + 3$ (D) $49\sqrt{7}$

(vii) $2x^3 + 2x$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ $x = -1$ ಇದ್ದಾಗ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

(A) 4 (B) 2 (C) – 2 (D) – 4

(viii) $3x^2 + mx$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ $x - 1$ ಇದು ಅವಯವವಿದ್ದರೆ m ದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

(A) 2 (B) – 2 (C) – 3 (D) 3

(ix) $(x^2 - 3)(2x - 7x^3 + 4)$ ಈ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿ ಸಿಗುವ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ ಎಷ್ಟು ?

(A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 0

(x) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ರೇಷೀಯ ಬಹುಪದಿ ಯಾವುದು ?

(A) $x + 5$ (B) $x^2 + 5$ (C) $x^3 + 5$ (D) $x^4 + 5$

(2) ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $5 + 3x^4$ (ii) 7 (iii) $ax^7 + bx^9$ {a, b ಇವು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ}

(3) ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು ಪ್ರಮಾಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $4x^2+7x^4-x^3-x+9$ (ii) $p+2p^3+10p^2+5p^4-8$

(4) ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು ಸಹಗುಣಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) x^4+16 (ii) $\mathrm{m}^5+2\mathrm{m}^2+3\mathrm{m}+15$

(5) ಕೆಳಗಿನ ಸಹಗುಣಕ ರೂಪದಲ್ಲಿಯ ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು x ಈ ಚಲವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಘಾತಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) (3, −2, 0, 7, 18) (ii) (6, 1, 0, 7) (iii) (4, 5, −3, 0)

(6) ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿರಿ.

(i) $7x^4-2x^3+x+10$; $3x^4+15x^3+9x^2-8x+2$ (ii) $3p^3q+2p^2q+7$; $2p^2q+4pq-2p^3q$

(7) ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡಿರಿ.

(i) $5x^2-2y+9$; $3x^2+5y-7$ (ii) $2x^2+3x+5$; x^2-2x+3

(8) ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿರಿ.

(i) $(m^3-2m+3)(m^4-2m^2+3m+2)$ (ii) $(5m^3-2)(m^2-m+3)$

(9) $3x^3-8x^2+x+7$ ಈ ಬಹುಪದಿಗೆ $x-3$ ಈ ಬಹುಪದಿಯಿಂದ ಸಂಶ್ಲೇಷಕ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಶೇಷ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(10) m ದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ $x+3$ ಇದು $x^3-2mx+21$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಅವಯವ ಇರುವದು ?

(11) 2016 ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ಕೋವಾಡ, ವರುಡ, ಮತ್ತು ಚಿಖಲಿ ಊರುಗಳ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $5x^2-3y^2$, $7y^2+2xy$ ಮತ್ತು $9x^2+4xy$ ದಷ್ಟು ಇತ್ತು. 2017 ರ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಮೂರೂ ಊರುಗಳಿಂದ ಶಿಕ್ಷಣ ಹಾಗೂ ದಿನಗೂಲಿಗಾರರ ಸಲುವಾಗಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ x^2+xy-y^2, $5xy$ ಮತ್ತು $3x^2+xy$ ಜನರು ಪರ ಊರಿಗೆ ಹೋದರು. ಹಾಗಾದರೆ 2017ರ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಆ ಊರುಗಳ ಒಟ್ಟು ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಇತ್ತು ?

(12) $bx^2 + x + 5$ ಹಾಗೂ bx^3-2x+5 ಈ ಬಹುಪದಿಗಳಿಗೆ $x-3$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ m ಹಾಗೂ n ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ವೇಳೆ $m - n = 0$ ಇದ್ದರೆ b ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(13) ಸರಳ ರೂಪ ಕೊಡಿರಿ $(8m^2+ 3m - 6) - (9m - 7) + (3m^2 - 2m + 4)$

(14) $x^2 + 13x + 7$ ಇದರಿಂದ ಯಾವ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ವಜಾ ಮಾಡಲಾಗಿ $3x^2 + 5x - 4$ ಈ ಬಹುಪದಿ ದೊರೆಯುವದು?

(15) $4m + 2n + 3$ ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ರಾಶಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ $6m + 3n + 10$ ಈ ಬಹುಪದಿ ದೊರೆಯುವದು?

4 ಗುಣೋತ್ತರ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣ

ನಡೆಯಿರಿ,ಕಲಿಯೋಣ.

- ಗುಣೋತ್ತರ
- ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು
- ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣ
- ಗುಣೋತ್ತರದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು
- ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತ
- ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿಯ k ಪದ್ಧತಿ

ಸ್ವಲ್ಪ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ನಾವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಗುಣೋತ್ತರ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣ ಇವುಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಸಹಿತ ಬಿಡಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಉದಾ.ವಿಮಲಳು ತಯಾರಿಸಿದ ರವೆಯ ಉಂಡೆಗಳು ಬಹಳ ರುಚಿಕರ ಇರುತ್ತವೆ. ಅವಳು ಒಂದು ಬಟ್ಟಲು ತುಪ್ಪ, 3 ಬಟ್ಟಲು ರವೆ ಮತ್ತು 2 ಬಟ್ಟಲು ಸಕ್ಕರೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಉಂಡಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುವಳು.

ಇಲ್ಲಿ ರವೆ ಮತ್ತು ಸಕ್ಕರೆಯ ಪ್ರಮಾಣ 3:2 ಅಥವಾ $\frac{3}{2}$ ಇದೆ.

ಒಂದು ವೇಳೆ ಉಂಡಿಗಳ ಸಲುವಾಗಿ 12 ಬಟ್ಟಲು ರವೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಎಷ್ಟು ಬಟ್ಟಲು ಸಕ್ಕರೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುವದು?

ಸಕ್ಕರೆ x ಬಟ್ಟಲು ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ ಇದರ ಮೇಲಿಂದ $\frac{3}{2} = \frac{12}{x}$ $\therefore\ 3x = 24$ $\therefore\ x = 8$

ಅಂದರೆ 12 ಬಟ್ಟಲು ರವೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಉಂಡೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿ 8 ಬಟ್ಟಲು ಸಕ್ಕರೆ ಬೇಕಾಗುವದು.

ಇದೇ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು.

ರವಾ $3k$ ಬಟ್ಟಲು ಇದ್ದರೆ ಸಕ್ಕರೆ $2k$ ಬಟ್ಟಲು ಬೇಕಾಗುವದು. ಕಾರಣ $\frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}$

$3k = 12$ ಇದ್ದರೆ $k = 4$ $\therefore\ 2k = 8$ ಬಟ್ಟಲು ಸಕ್ಕರೆ ಬೇಕಾಗುವದು.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಗುಣೋತ್ತರ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣ (Ratio and proportion)

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಸಂಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಮೂರು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ವಿಸ್ತಾರ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಉಂಡಿಗಳ ಉದಾಹರಣೆ ಗಮನಿಸಿ. ತುಪ್ಪ, ರವೆ ಮತ್ತು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳ ಪ್ರಮಾಣ 1:3:2 ಇದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ತುಪ್ಪ ಮತ್ತು ರವೆ ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 1:3 ಇದೆ ಮತ್ತು ರವೆ ಮತ್ತು ಸಕ್ಕರೆ ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 3:2 ಇದೆ. ಈ ಮಾಹಿತಿ ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ತುಪ್ಪ 1k = k ಬಟ್ಟಲು, ಸವಾ 3k ಬಟ್ಟಲು ಮತ್ತು ಸಕ್ಕರೆ 2k ಬಟ್ಟಲು ಹೀಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಈಗ 12 ಬಟ್ಟಲು ರವಾ ಇದ್ದರೆ ಉಂಡಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಎಷ್ಟು ತುಪ್ಪ ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಬಟ್ಟಲು ಸಕ್ಕರೆ ಬೇಕಾಗುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಬರುವದು.

ಕಾರಣ 3k = 12 $\therefore\ k = 4$ ಮತ್ತು 2k = 8 ಅಂದರೆ 4 ಬಟ್ಟಲು ತುಪ್ಪ ಮತ್ತು 8 ಬಟ್ಟಲು ಸಕ್ಕರೆ ಬೇಕಾಗುವದು. ಇದೇ ಕಲ್ಪನೆ ನಾಲ್ಕು ಅಥವಾ ಅಧಿಕ ಬಾಬತ್ತುಗಳ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಲುವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವದು.

ಒಂದು ವೇಳೆ a, b, c, d ಈ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರಮಾಣ 2 : 3 : 7 : 4 ಹೀಗೆ ಇದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $2m, 3m, 7m, 4m$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ m ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಬರುವದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು 48, ಇದ್ದರೆ ಆ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಾ.

$2m + 3m + 7m + 4m = 16\,m = 48$

$\therefore \quad m = 3$

$\therefore \quad 2m = 6,\ 3m = 9,\ 7m = 21,\ 4m = 12$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೊರಕಿದವು.

$\therefore$ ಇಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು = 6, 9, 21, 12

ಉದಾ. (1) ಗೊಬ್ಬರದ 18:18:10 ಈ ಪ್ರಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ನಾಯಟ್ರೋಜನದ ಸಂಯುಕ್ತ 18% ಫಾಸ್ಪರಸದ (ರಂಜಕ)ದ ಸಂಯುಕ್ತ 18% ಮತ್ತು ಪೊಟ್ಯಾಸಿಯಂ ಸಂಯುಕ್ತ 10% ಇರುತ್ತದೆ. ಉಳಿದ ಭಾಗ ಇತರ ಪದಾರ್ಥಗಳದ್ದು ಇರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ಆ ಪ್ರಕಾರದ 20 ಕಿಲೋಗ್ರಾಮ್ ಗೊಬ್ಬರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಕಾರದ ಸಂಯುಕ್ತಗಳ ದ್ರವ್ಯ ರಾಶಿಎಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರ : 20 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ಗೊಬ್ಬರದಲ್ಲಿಯ ಪೊಟ್ಯಾಸಿಯಂ ಸಂಯುಕ್ತದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ x ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ತಿಳಿಯಿರಿ.

$$\therefore \quad \frac{18}{100} = \frac{x}{20} \qquad \therefore \quad x = \frac{18 \times 20}{100} = 3.6$$

$\therefore$ ನೈಟ್ರೋಜನದ ಸಂಯುಕ್ತ 3.6 ಕಿಗ್ರಾಂ ಇರಬಹುದು.

ಫಾಸ್ಪರಸ್ (ರಂಜಕ)ದ ಸಂಯುಕ್ತದ ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣ 18 ರಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ $\therefore$ ಫಾಸ್ಪರಸ್ (ರಂಜಕ)ದ ಸಂಯುಕ್ತ 3.6 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ಇರಬಹುದು.

20 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ಗೊಬ್ಬರದಲ್ಲಿಯ ಪೊಟ್ಯಾಶಿಯಂ ಸಂಯುಕ್ತದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ y ಕಿಗ್ರಾ ತಿಳಿದುಕೊಂಡರೆ.

$\frac{10}{100} = \frac{y}{20} \qquad \therefore y = 2 \qquad\qquad \therefore$ ಪೊಟ್ಯಾಶಿಯಂ ಸಂಯುಕ್ತ 2 ಕಿಗ್ರಾ ಇರಬಹುದು.

ಸಮಪ್ರಮಾಣ

ಒಂದು ಮೋಟಾರಗಾಡಿ 1 ಲೀಟರ ಪೆಟ್ರೋಲದಲ್ಲಿ 10 ಕಿಮೀ. ಅಂತರ ಕ್ರಮಿಸುವದು.

ಅಂದರೆ 20 ಲೀಟರ ಪೆಟ್ರೋಲದಲ್ಲಿ ಆ ಗಾಡಿ 20 × 10 = 200 ಕಿಮೀ ಅಂತರ ಕ್ರಮಿಸಬಹುದು.

ಹಾಗಾದರೆ 40 ಮೀಟರ ಪೆಟ್ರೋಲದಲ್ಲಿ ಅದೇ ಗಾಡಿಯು 40 × 10 = 400 ಕಿ.ಮೀ. ಅಂತರ ಕ್ರಮಿಸುವದು.

ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಾ.

ಪೆಟ್ರೋಲ್ : x ಲೀ.	1	20	40	
ಅಂತರ y ಕಿ.ಮೀ.	10	200	400	
$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$	$\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$	$\frac{x}{y} = k$

ಗಾಡಿಯು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಪೆಟ್ರೋಲ (ಲೀಟರಗಳಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು ಅಷ್ಟೇ ಪೆಟ್ರೋಲದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸಿದ ಅಂತರ (ಕಿಲೋ ಮೀಟರ್ ಗಳಲ್ಲಿ) ಈ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಸ್ಥಿರ ಇದೆ. ಇಂತಹ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳು ಸಮ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಅಂದರೆ ಆ ಎರಡು ರಾಶಿಗಳು ಸಮ ಚಲನದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ವ್ಯಸ್ತ ಪ್ರಮಾಣ

ಒಂದು ಮೋಟಾರಿಗೆ ತಾಸಿಗೆ 50 ಕಿ.ಮೀ, ವೇಗದಿಂದ 100 ಕಿ.ಮೀ ಕ್ರಮಿಸಲು ಎರಡು ತಾಸು ಬೇಕಾಗುವವು. ಒಂದು ಎತ್ತಿನ ಗಾಡಿಯ ವೇಗವು ಗಂಟೆಗೆ 5 ಕಿ.ಮಿ ಇದೆ. ಅಷ್ಟೇ ಅಂತರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ಎತ್ತಿನ ಗಾಡಿಗೆ 20 ಗಂಟೆಗಳು ಬೇಕಾಗುವವು.

$\therefore$ ವೇಗ $\times$ ವೇಳೆ = ಅಂತರ ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

	ವೇಗ/ಗಂಟೆ x	ವೇಳೆ y	$x \times y$	$x \times y = k$
ಮೋಟಾರ	50	2	100	
ಎತ್ತಿನ ಗಾಡಿ	5	20	100	

ಅಂದರೆ, ವಾಹನದ ವೇಗ ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಸಕ್ಕೆ ಬೇಕಾಗುವ ವೇಳೆ ಇವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಸ್ಥಿರ ಬಂದದ್ದು ಕಂಡು ಬಂದಿದೆ. ಇಂತಹ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಆ ರಾಶಿಗಳು ವ್ಯಸ್ತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಆ ರಾಶಿಗಳು ವ್ಯಸ್ತ ಚಲನದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ವಾಹನದ ವೇಗ ಮತ್ತು ನಿಶ್ಚಿತ ಅಂತರ ಕ್ರಮಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ವೇಳೆ ಇವು ವ್ಯಸ್ತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

ಸ್ವಲ್ಪ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಗುಣೋತ್ತರದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು

(1) a ಮತ್ತು b ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ $a : b$ ಅಥವಾ $\frac{a}{b}$ ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು. ಇಲ್ಲಿ a ಗೆ ಪೂರ್ವಪದ (ಪ್ರಥಮ ಪದ) ಮತ್ತು b ಗೆ ಉತ್ತರ ಪದ (ಎರಡನೇ ಪದ) ಎನ್ನುವರು.

(2) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ಉತ್ತರ ಪದ 100 ಇದ್ದರೆ ಆಗ ಆ ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ ಶತಮಾನ ಎಂದು ಅನ್ನುವರು.

(3) ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಶೂನ್ಯೇತರ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾ. 3:4 = 6:8 = 9:12 ಅದರಂತೆ 2:3:5 = 8:12:20 ಅಥವಾ k ಈ ಶೂನ್ಯೇತರ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ

$a : b = ak : bk$ $\qquad$ $a : b : c = ak : bk : ck$

(4) ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ತೆಗೆಯುವದಿದೆಯೋ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಂದೇ ಪ್ರಕಾರದ ಅಳತೆಯದ್ದು ಇರಬೇಕು. ಅದರಂತೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಳತೆಯ ಮೂಲಮಾನವು ಸಮಾನ ಇರಬೇಕು.

(5) ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ ಮೂಲಮಾನ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ರಂತೆ 2 ಕಿಲೊಗ್ರಾ್ಯಮ ಮತ್ತು 300 ಗ್ರಾ್ಯಮ ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 2:300 ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಆದರೆ 2 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ = 2000 ಗ್ರಾ್ಯಂ ಅಂದರೆ ಆ ಗುಣೋತ್ತರ 2000:300 ಅಂದರೆ 20.3 ಇದೆ.

ಉದಾ. (1) ಸೀಮಾಳ ಮತ್ತು ರಾಜಶ್ರೀಯ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 3 : 1 ಇದೆ. ರಾಜಶ್ರೀಯ ಮತ್ತು ಅತುಲನ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 2 : 3 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಸೀಮಾ, ರಾಜಶ್ರೀ ಮತ್ತು ಅತುಲ ಇವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಸೀಮಾಳ ವಯಸ್ಸು : ರಾಜಶ್ರೀಯ ವಯಸ್ಸು = 3 : 1 ರಾಜಶ್ರೀಯ ವಯಸ್ಸು : ಅತುಲನ ವಯಸ್ಸು = 2 : 3

ಮೊದಲನೆಯ ಗುಣೋತ್ತರದ ಉತ್ತರ ಪದವು ಎರಡನೆಯ ಗುಣೋತ್ತರದ ಪೂರ್ವ ಪದ ಇರಲೇಬೇಕು.

ಇದರ ಸಲುವಾಗಿ ಅಂದರೆ ಕ್ರಮವಾದ ಗುಣೋತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಮೊದಲನೆಯ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳಿಗೆ 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಅಂದರೆ 3:1 = 6:2 ಸಿಗುವದು.

$$\frac{\text{ಸೀಮಾಳ ವಯಸ್ಸು}}{\text{ರಾಜಶ್ರೀಯ ವಯಸ್ಸು}} = \frac{6}{2}, \quad \frac{\text{ರಾಜಶ್ರೀಯ ವಯಸ್ಸು}}{\text{ಅತುಲನ ವಯಸ್ಸು}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ ಸೀಮಾಳ ವಯಸ್ಸು : ರಾಜಶ್ರೀಯ ವಯಸ್ಸು : ಅತುಲನ ವಯಸ್ಸು ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 6 : 2 : 3 ಹೀಗೆ ಇದೆ.

ಉದಾ. (2) ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿ ಹೊಲದ ಉದ್ದ 1.2 ಕಿ.ಮೀ ಇದ್ದು ಅದರ ಅಗಲ 400 ಮೀ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಉದ್ದದ ಅಗಲದೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಇಲ್ಲಿ ಉದ್ದ ಕಿಲೋಮೀಟರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಅಗಲ ಮೀಟರದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಗುಣೋತ್ತರದ ಸಲುವಾಗಿ ಎರಡೂ ಅಳತೆಗಳ ಮೂಲಮಾನಗಳು ಸಮಾನ ಇರಬೇಕು. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಕಿಲೋಮೀಟರದ ರೂಪಾಂತರ ಮೀಟರದಲ್ಲಿ ಮಾಡುವಾ.

1.2 ಕಿ.ಮೀ = $1.2 \times 1000 = 1200$ ಮೀಟರ $\therefore$ 1200 ಮೀಟರದ 400 ಮೀಟರಕ್ಕೆ ಗುಣೋತ್ತರ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾ

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಗುಣೋತ್ತರ = $\frac{1200}{400} = \frac{3}{1}$, ಅಂದರೆ 3:1 ಇದೆ.

ಉದಾ. (3) ಮಹೇಶ ಇವನ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಖರ್ಚಿನ ಅದರ ಉತ್ಪನ್ನದೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಗುಣೋತ್ತರ 3:5 ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಅವರ ಖರ್ಚು ಅವರ ಉತ್ಪನ್ನದ ಶೇಕಡಾ ಎಷ್ಟು ಇದೆ.

ಉತ್ತರ: ಖರ್ಚಿನ ಉತ್ಪನ್ನದ ಜೊತೆ ಇರುವ ಗುಣೋತ್ತರ 3.5 ಇದೆ. ಇದರ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡುವದು ಅಂದರೆ ಎರಡನೆಯ ಪದ 100 ಮಾಡುವದು.

$\frac{3}{5} = \frac{3\times 20}{5\times 20} = \frac{60}{100}$ ಅಂದರೆ $\frac{\text{ಖರ್ಚು}}{\text{ಉತ್ಪನ್ನ}} = \frac{60}{100} = 60\%$ $\therefore$ ಮಹೇಶ ಇವರ ಖರ್ಚು ಉತ್ಪನ್ನದ 60% ಇದೆ

ಉದಾ. (4) ಒಂದು ತೋಟದಲ್ಲಿ ಮಾವಿನ ಮತ್ತು ಚಿಕ್ಕು ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 2:3 ಇದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಆ ಉದ್ಯಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಕಾರದ 5 ಗಿಡಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ನೆಟ್ಟಾಗ ಅವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 5:7 ಆಗುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಉದ್ಯಾನದಲ್ಲಿ ಮಾವಿನ ಮತ್ತು ಚಿಕ್ಕುವಿನ ಎಷ್ಟು ಗಿಡಗಳು ಇರುವವು ?

ಉತ್ತರ : ಪ್ರಾರಂಭದ ಗುಣೋತ್ತರ 2:3 ಇದೆ.

ಉದ್ಯಾನದಲ್ಲಿ ಮಾವಿನ ಗಿಡಗಳು = $2x$ ಮತ್ತು ಚಿಕ್ಕುವಿನ ಗಿಡಗಳು = $3x$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟ ಕರಾರಿಗೆ ಅನುಸಾರ, $\frac{2x+5}{3x+5} = \frac{5}{7}$

$$14x + 35 = 15x + 25$$

$$\therefore x = 10$$

$\therefore$ ಉದ್ಯಾನದಲ್ಲಿ ಮಾವಿನ ಮರಗಳು = $2x = 2 \times 10 = 20$

$\therefore$ ಉದ್ಯಾನದಲ್ಲಿ ಚಿಕ್ಕು ಗಿಡಗಳು = $3x = 3 \times 10 = 30$

ಉದಾ. (5) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 5:7 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 40ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಬೇರೀಜಿನ ಗುಣೋತ್ತರ 25:31 ಆಗುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ = $5x$ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ = $7x$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟ ಕರಾರಿಗೆ ಅನುಸಾರ,

$$\frac{5x+40}{7x+40}=\frac{25}{31}$$

$$31(5x+40)=25(7x+40)$$

$$155x+1240=175x+1000$$

$$1240-1000 = 175x-155x$$

$$240=20x$$

$$x=12$$

$\therefore$ ಮೊದಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ = $5 \times 12 = 60$

ಎರಡನೆ ಸಂಖ್ಯೆ = $7 \times 12 = 84$

$\therefore$ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 60 ಮತ್ತು 84 ಇವೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.1

(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಿರುವ ಗುಣೋತ್ತರವನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) 72, 60 (ii) 38,57 (iii) 52,78

(2) ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಗೆ ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಗಿರುವ ಗುಣೋತ್ತರವನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) 700 ರೂಗಳು 308 ರೂಗಳು (ii) 14 ರೂ, 12 ರೂ. 40 ಪೈಸೆ

(iii) 5 ಲೀಟರ 2500 ಮಿಲಿ ಲೀಟರ (iv) 3 ವರ್ಷ 4 ತಿಂಗಳು, 5 ವರ್ಷ 8 ತಿಂಗಳು

(v) 3.8 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ, 1900 ಗ್ರಾಂ (vi) 7 ಮಿನಿಟು 20 ಸೆಕೆಂದು 5 ಮಿನಿಟು 6 ಸೆಕೆಂದು

(3) ಕೆಳಗಿನ ಶತಮಾನಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ, ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) 75 : 100 (ii) 44 : 100 (iii) 6.25% (iv) 52 : 100 (v) 0.64%

(4) ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಮನೆಯನ್ನು 3 ಜನರು 8 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅದೇ ಮನೆಯನ್ನು 6 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಲು ಎಷ್ಟು ಜನರು ಬೇಕಾಗುವರು ?

(5) ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಶತಮಾನಗಳಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರಿಸಿರಿ.

(i) 15 : 25 (ii) 47 : 50 (iii) $\frac{7}{10}$ (iv) $\frac{546}{600}$ (v) $\frac{7}{16}$

(6) ಆಭಾ ಮತ್ತು ಅತನ ತಾಯಿಯ ವಯಸ್ಸಿನ ಗುಣೋತ್ತರ 2:5 ಇದೆ. ಅಭಾನ ಜನ್ಮದ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಆತನ ತಾಯಿಯ ವಯಸ್ಸು 27 ವರ್ಷ ಇತ್ತು. ಹಾಗಾದರೆ ಆಭಾ ಮತ್ತು ಆತನ ತಾಯಿಯ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ?

(7) ವತ್ಸಲಾ ಮತ್ತು ಸಾರಾ ಇವರ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 14 ವರ್ಷ ಮತ್ತು 10 ವರ್ಷಗಳು ಇವೆ. ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 5:4 ಆಗುವದು ?

(8) ರೇಹಾನಾ ಮತ್ತು ಅವಳ ತಾಯಿ ಇವರ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 2 : 7 ಇದೆ. 2 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 1 : 3 ಆಗುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ರೇಹಾನಾಳ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ತುಲನೆ

ಒಂದು ವೇಳೆ $b > 0, d > 0$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ತುಲನೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಾನುಸಾರ ಮಾಡಲು ಬರುವದು

(i) ಒಂದು ವೇಳೆ $ad > bc$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (ii) ಒಂದು ವೇಳೆ $ad < bc$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

(iii) ಒಂದು ವೇಳೆ $ad = bc$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

ಉದಾ. (1) $\frac{4}{9}, \frac{7}{8}$

ಉತ್ತರ : $4 \times 8 \ \boxed{?} \ 7 \times 9$

$32 < 63$

$\therefore \ \frac{4}{9} < \frac{7}{8}$

ಉದಾ. (2) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{13} \times \sqrt{5}, \ \boxed{?} \ \sqrt{8} \times \sqrt{7}$

$\sqrt{65} \ \boxed{?} \ \sqrt{56}$

$\sqrt{65} > \sqrt{56}$

$\therefore \ \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} > \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

ಉದಾ. (3) ಒಂದು ವೇಳೆ a ಮತ್ತು b ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $a < b, b > 1$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a-1}{b-1}, \frac{a+1}{b+1}$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರಗಳಲ್ಲಿಯ ಕ್ರಮ ಸಂಬಂಧ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $a < b$

$\therefore \ a - 1 < b - 1$ ಈಗ $\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1}$ ಈ ವಜಾಬಾಕಿಯ ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{(a-1)(b+1)-(a+1)(b-1)}{(b-1)(b+1)}$$

$$= \frac{(ab-b+a-1)-(ab+b-a-1)}{b^2-1}$$

$$= \frac{ab-b+a-1-ab-b+a+1}{b^2-1}$$

$$= \frac{2a-2b}{b^2-1}$$

$$= \frac{2(a-b)}{b^2-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ಈಗ $a < b$ $\therefore \ a - b < 0$

ರಂತೆ $b^2-1 > 0$ ಕಾರಣ $b > 1$

$\frac{2(a-b)}{b^2-1} < 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} < 0$ .....(1) ಹಾಗೂ (2)ರ ಮೇಲಿಂದ

$\frac{a-1}{b-1} < \frac{a+1}{b+1}$

ಉದಾ. **(4)** $a : b = 2 : 1$ ಮತ್ತು $b : c = 4 : 1$ ಇದ್ದರೆ $\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3$ ಈ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

ಉತ್ತರ : $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$ $\therefore a = 2b$ $\frac{b}{c} = \frac{4}{1}$ $\therefore b = 4c$

$a = 2b = 2 \times 4c = 8c$ $\therefore a = 8c$

ಈಗ $a = 8c, b = 4c$ ಈ ಬೆಲೆ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = \left(\frac{(8c)^4}{32 \times 4^2 \times c^2 \times c^2}\right)^3$$

$$= \left[\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times c^4}{32 \times 16 \times c^2 \times c^2}\right]^3$$

$$= (8)^3$$

$$\therefore \left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = 512$$

ಉದಾಹರಣೆ ಸಂಗ್ರಹ 4.2

(1) $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆಯಿರಿ

(i) $\frac{5}{7} = \frac{....}{28} = \frac{35}{....} = \frac{....}{3.5}$ (ii) $\frac{9}{14} = \frac{4.5}{....} = \frac{....}{42} = \frac{....}{3.5}$

(2) ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅದರ ಪರಿಘದೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಗುಣೋತ್ತರ

(ii) r ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಪರಿಘದ, ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಗುಣೋತ್ತರ

(iii) ಭುಜ 7 ಸೆಮಿ ಇರುವ ಚೌರಸದ ಕರ್ಣದೊಂದಿಗೆ ಅದರ ಭುಜಕ್ಕೆ ಇರುವ ಗುಣೋತ್ತರ

(iv) ಉದ್ದ 5 ಸೆಮಿ ಮತ್ತು ಅಗಲ 3.5 ಸೆ.ಮಿ. ಇರುವ ಆಯತದ ಪರಿಮಿತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲದೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಗುಣೋತ್ತರ.

(3) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಚಿಕ್ಕತನ ದೊಡ್ಡತನ ಸಂಬಂಧ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

(i) $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18}, \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1}, \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) □ABCD ಇದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ ಅದರ $\angle A$ ಮತ್ತು $\angle B$ ಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 5 : 4 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ $\angle B$ ದ ಅಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) ಅಲ್ಬರ್ಟ ಮತ್ತು ಸಲೀಮ ಇವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 5 : 9 ಇದೆ ಐದು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 3 : 5 ಆಗುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iii) ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು 3.1 ಇದೆ. ಆಯತದ ಪರಿಮಿತಿ 36 ಸೆಮಿ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iv) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು 31 : 23 ಇದ್ದು ಅವುಗಳ ಬೇರೀಜು 216 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(v) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ 360 ಇದೆ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು 10 : 9 ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5*) $a : b = 3 : 1$ ಮತ್ತು $b : c = 5 : 1$ ಇದ್ದರೆ (i) $\left(\frac{a^3}{15b^2c}\right)^3$ (ii) $\frac{a^2}{7bc}$ ಈ ರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6*) $\sqrt{0.04 \times 0.4 \times a} = 0.4 \times 0.04 \times \sqrt{b}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a}{b}$ ಗುಣೋತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(7) $(x + 3) : (x + 11) = (x - 2) : (x + 1)$ ಇದ್ದರೆ x ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು

ಸಮಾನತೆಯ ಗುಣಧರ್ಮದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಎರಡು ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಮೇಲಿನ ಕೆಲವು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಅದರ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೋಣ.

ಒಂದು ವೇಳೆ a , b, c, d ಇವು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದರೆ ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(I) ವ್ಯಸ್ತ ಕ್ರಿಯೆ (Invertendo) ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad a \times d = b \times c$$

$$\therefore \quad b \times c = a \times d$$

$$\therefore \quad \frac{b \times c}{a \times c} = \frac{a \times d}{a \times c}$$ (ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ $a \times c$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ)

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$\therefore$ ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ **ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ 'ವ್ಯಸ್ತ ಕ್ರಿಯೆ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.**

(II) ಏಕಾಂತರ ಕ್ರಿಯೆ (Alternando) ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad a \times d = b \times c$$

$$\frac{a \times d}{c \times d} = \frac{b \times c}{c \times d}$$ (ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ $c \times d$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ)

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ **ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ 'ಏಕಾಂತರ ಕ್ರಿಯೆ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.**

(III) ಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ (Componendo) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$ (ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸಲಾಗಿದೆ)

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ **ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ 'ಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ' ಎನ್ನುವರು**

(IV) ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ (Dividendo) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$ (ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ 1ನ್ನು ವಜಾ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ)

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ **(ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ 'ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ' ಎನ್ನುವರು)**

(V) ಯೋಗ ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ (Componendo–dividendo) ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, $a \neq b, c \neq d$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$ (ಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಲಾಗಿ) ....(1)

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$ (ಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಲಾಗಿ) ....(2)

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$ (1) ಕ್ಕೆ (2) ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ **ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ 'ಯೋಗ ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ' ಎನ್ನುವರು**

ಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಮತ್ತು ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಇವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (ಒಂದು ಸಲ ಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಲಾಗಿ)

$$\frac{a+2b}{b}=\frac{c+2d}{d}$$ (ಎರಡು ಸಲ ಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಲಾಗಿ)

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $\frac{a+mb}{b}=\frac{c+md}{d}$ (m ಸಲ ಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಲಾಗಿ) ...(1)

ಅದರಂತೆ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a-mb}{b}=\frac{c-md}{d}$ (m ಸಲ ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಿದಾಗ) ...(2)

ಮತ್ತು ಇದ್ದರೆ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a+mb}{a-mb}=\frac{c+md}{c-md}$ ...((1) ಮತ್ತು (2) ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿ)

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (ವ್ಯಸ್ತ ಕ್ರಿಯೆ)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (ಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (ಏಕಾಂತರ ಕ್ರಿಯೆ)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (ಯೋಗ-ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ)

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. (1) ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a+7b}{7b}$ = ಈ ಗುಣೋತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪದ್ಧತಿ I

ಉತ್ತರ : ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=k$,

$\therefore\ a = 5k,\ b = 3k$

$\therefore\ \frac{a+7b}{7b}=\frac{5k+7\times 3k}{7\times 3k}$

$=\frac{5k+21k}{21k}$

$=\frac{26k}{21k}\quad=\frac{26}{21}$

ಪದ್ಧತಿ II

$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$

$\therefore\ \frac{a}{7b}=\frac{5}{21}$

$\therefore\ \frac{a+7b}{7b}=\frac{5+21}{21}$ (ಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಿ)

$\therefore\ \frac{a+7b}{7b}=\frac{26}{21}$

ಉದಾ. (2) $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{5a-b}{b}$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪದ್ಧತಿ I

ಉತ್ತರ : $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$

$\therefore\ \frac{a}{7}=\frac{b}{4}$ ಏಕಾಂತರ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಲಾಗಿ

$\therefore\ \frac{a}{7}=\frac{b}{4}=m$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ

$\therefore\ a = 7m,\quad b = 4m$

$\therefore\ \frac{5a-b}{b}=\frac{5(7m)-4m}{4m}$

$=\frac{35m-4m}{4m}$

$=\frac{31}{4}$

ಪದ್ಧತಿ II

$\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$

$\frac{5a}{b}=\frac{5\times 7}{4}$

$=\frac{35}{4}$

$\frac{5a-b}{b}=\frac{35-4}{4}$ (ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಿ)

$\frac{5a-b}{b}=\frac{31}{4}$

ಉದಾ. (3) $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a+2b}{a-2b}$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಪದ್ಧತಿ I: $a = 7m$, $b = 3m$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7m+2\times 3m}{7m-2\times 3m}$$

$$= \frac{7m+6m}{7m-6m}$$

$$= \frac{13m}{m} = \frac{13}{1}$$

ಪದ್ಧತಿ II : $\therefore \frac{a}{b} = \frac{7}{3}$

$\therefore \frac{a}{2b} = \frac{7}{6}$ …… ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ $\frac{1}{2}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7+6}{7-6}$ (ಯೋಗ ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಿ)

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{13}{1}$$

ಉದಾ. (4) ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ :

ಪದ್ಧತಿ I

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ …….. ಏಕಾಂತರ ಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ

ಈಗ $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ ದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದಕ್ಕೆ b ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ

$$\frac{\frac{5a}{b}+\frac{3b}{b}}{\frac{7a}{b}-\frac{2b}{b}} = \frac{5\left(\frac{a}{b}\right)+3}{7\left(\frac{a}{b}\right)-2}$$

$$= \frac{5\left(\frac{3}{2}\right)+3}{7\left(\frac{3}{2}\right)-2}$$

$$= \frac{\frac{15}{2}+3}{\frac{21}{2}-2}$$

$$= \frac{15+6}{21-4}$$

$$= \frac{21}{17}$$

ಪದ್ಧತಿ II

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$$

$\therefore \frac{a}{3} = \frac{b}{2}$ = t ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ

$\therefore$ a = 3t ಮತ್ತು b = 2t ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತುಂಬಲಾಗಿ

$$\frac{5a+3b}{7a-2b} = \frac{5(3t)+3(2t)}{7(3t)-2(2t)} \quad (t \neq 0)$$

$$= \frac{15t+6t}{21t-4t}$$

$$= \frac{21t}{17t}$$

$$= \frac{21}{17}$$

ಉದಾ. (5) $\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{4x-y}{4x+y}$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4x}{y} = \frac{16}{5} \quad \text{...(ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ 4 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ)}$$

$$\therefore \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{16+5}{16-5} \quad \text{...(ಯೋಗ-ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಲಾಗಿ)}$$

$$\therefore \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{21}{11}$$

$$\therefore \frac{4x-y}{4x+y} = \frac{11}{21}$$

$\therefore$

ಉದಾ. (6) $5x = 4y$ ಇದ್ದರೆ $\frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2}$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \frac{3x^2}{y^2} = \frac{48}{25} \quad \text{...(ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ 3ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ)}$$

$$\therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{48+25}{48-25} \quad \text{...(ಯೋಗ-ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ)}$$

$$\therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{73}{23}$$

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳ ಉಪಯೋಗ (Use of Properties of equal ratios)

ಕೆಲವು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಬೇರೆ ಪದ್ಧತಿಗಿಂತ ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡುವುದು ಅನುಕೂಲಕರ ಇರುವದು.

ಉದಾ. (1) ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿರಿ $\frac{3x^2+5x+7}{10x+14}=\frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$

ಉತ್ತರ : $\frac{3x^2+5x+7}{10x+14}=\frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$

$$\frac{(6x^2+10x+14)}{10x+14}=\frac{(6x^2+8x+6)}{8x+6} \quad \text{(ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ)}$$

$$\frac{(6x^2+10x+14)-(10x+14)}{10x+14}=\frac{(6x^2+8x+6)-(8x+6)}{8x+6}$$ (ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಲಾಗಿ)

$$\therefore \quad \frac{6x^2}{10x+14}=\frac{6x^2}{8x+6}$$

ಈ ಸಮೀಕರಣ $x=0$ ಈ ಬೆಲೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಸತ್ಯ ಇದೆ $\therefore$ $x=0$ (ಇದು ಒಂದು ಉತ್ತರ ಇದೆ)

$x \neq 0$ ಇದ್ದರೆ $x^2 \neq 0$, $\therefore 6x^2$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ $\frac{1}{10x+14}=\frac{1}{8x+6}$

$$\therefore \quad 8x+6=10x+14$$

$$\therefore \quad 6-14=10x-8x$$

$$\therefore \quad -8=2x$$

$$\therefore \quad x=-4$$

$\therefore$ $x=-4$ ಅಥವಾ $x=0$ ಇವು ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರಗಳಿವೆ

ಉದಾ. (2) ಬಿಡಿಸಿರಿ $\frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}}=\frac{5}{1}$

$$\frac{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}=\frac{5+1}{5-1}$$ (ಯೋಗ-ವಿಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಲಾಗಿ)

$$\therefore \quad \frac{2\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x-2}}=\frac{6}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}}=\frac{3}{2}$$ (ಎರಡೂ ಬದಿಗಳ ವರ್ಗ ಮಾಡಲಾಗಿ)

$$\therefore \quad \frac{x+7}{x-2}=\frac{9}{4}$$

$$\therefore \quad 4x+28=9x-18$$

$$\therefore \quad 28+18=9x-4x$$

$$\therefore \quad 46=5x$$

$$\therefore \quad \frac{46}{5}=x$$

$\therefore$ $x=\frac{46}{5}$ ಇದು ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರ ಇದೆ

ಕೃತಿ:-

ದಪ್ಪ ಕಾಗದದ ಐದು ತುಣುಕುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದೊಂದು ವಿಧಾನ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (ii) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (iii) $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bd}$ (iv) $\frac{c}{d}=\frac{c-a}{d-b}$ (v) $\frac{a}{b}=\frac{rc}{rd}$

a, b, c, d ಇವು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ಮತ್ತು $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಈ ಮಾಹಿತಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಮೇಲಿನವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಧಾನ ಸತ್ಯ ಅಥವಾ ಅಸತ್ಯ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾರ್ಡಿನ ಹಿಂದೆ ಬರೆಯಿರಿ. ವಿಧಾನವು ಅಸತ್ಯ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಕಾರಣ ಸಹಿತ ಬರೆಯಿರಿ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.3

(1) $\frac{a}{b}=\frac{7}{3}$ ಇದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\frac{5a+3b}{5a-3b}$ (ii) $\frac{2a^2+3b^2}{2a^2-3b^2}$ (iii) $\frac{a^3-b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7a+9b}{7a-9b}$

(2) $\frac{15a^2+4b^2}{15a^2-4b^2}=\frac{47}{7}$ ಇದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\frac{a}{b}$ (ii) $\frac{7a-3b}{7a+3b}$ (iii) $\frac{b^2-2a^2}{b^2+2a^2}$ (iv) $\frac{b^3-2a^3}{b^3+2a^3}$

(3) $\frac{3a+7b}{3a-7b}=\frac{4}{3}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{3a^2-7b^2}{3a^2+7b^2}$ ಈ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $\frac{x^2+12x-20}{3x-5}=\frac{x^2+8x+12}{2x+3}$ (ii) $\frac{10x^2+15x+63}{5x^2-25x+12}=\frac{2x+3}{x-5}$

(iii) $\frac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x+1)^2-(2x-1)^2}=\frac{17}{8}$ (iv*) $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}}=\frac{4}{1}$

(v) $\frac{(4x+1)^2+(2x+3)^2}{4x^2+12x+9}=\frac{61}{36}$ (vi) $\frac{(3x-4)^3-(x+1)^3}{(3x-4)^3+(x+1)^3}=\frac{61}{189}$

ಕೃತಿ : ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿಯ ಚೌಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿಯ a ಮತ್ತು b ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಅಂದರೆ, a : b ಗುಣೋತ್ತರ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಬರುವದು. ಹೀಗೆ ಬದಲು ಮಾಡಿ ಶಿಕ್ಷಕರು ಸಾಕಷ್ಟು ರೂಢಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ →

- $\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}=$ -----
- $\frac{3a}{4b}=$ -----
- $\frac{2a-b}{2a+b}=$ -----
- $\frac{a^2+b^2}{b^2}=$ ---
- $\frac{a}{2b}=$ -----

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತ (Theorem on equal ratios)

ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$ ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಎನ್ನುವರು.

ಸಿದ್ಧತೆ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ $\therefore$ $a=bk$ ಮತ್ತು $c=dk$

$$\therefore \frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವ ಪ್ರಕಾರ $\frac{a}{b}=\frac{al}{bl}$

$\therefore$ ಇದ್ದರೆ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$, ಇದ್ದರೆ $\frac{al}{bl}=\frac{cm}{dm}=\frac{al+cm}{bl+dm}=k$

ಇದೇ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=$........ (ಸಾಂತ ಪದಗಳು) ಮತ್ತು l, m, n ಮತ್ತು ಇವು ಶೂನ್ಯೇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣೋತ್ತರ = $\frac{al+cm+en+...}{bl+dm+fn+...}$ (ಸಾಂತ ಪದಗಳು) ಈ ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ ದೊರೆಯುವದು

ಬನ್ನಿ ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ.

ಒಂದು ವ್ಯಾಯಾಮ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಶಿಶು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 35 ಹುಡುಗಿಯರು ಮತ್ತು 42 ಹುಡುಗರು ಬಾಲ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 30 ಹುಡುಗಿಯರು ಮತ್ತು 36 ಹುಡುಗರು, ಮತ್ತು ತರುಣ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 20 ಹುಡುಗಿಯರು ಮತ್ತು 24 ಹುಡುಗರು ಇದ್ದಾರೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿಯ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಗುಣೋತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ.

ಸಾಮೂಹಿಕ ಕವಾಯತ ಸಲುವಾಗಿ ಮೂರೂ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮೈದಾನದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಮಾಡಲಾಯಿತು ಈಗ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಮಾಡಿದ ಸಮೂಹದಲ್ಲಿಯ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು ಎಷ್ಟು ಇದೆ. ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಉತ್ತರ ನಿಮಗೆ ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ತಾಳೆ ಬಂದಿತೆ?

ಉದಾ. (1) ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿಯ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ.

(i) $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=\frac{4a+9b}{..........}$ (ii) $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{4}=\frac{5x-3y+4z}{..............}$

ಉತ್ತರ : (i) $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=\frac{4a+9b}{4\times3+9\times7}=\frac{4a+9b}{12+63}=\frac{4a+9b}{75}$

(ii) $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{4}=\frac{5\times x}{5\times 3}=\frac{-3\times y}{-3\times 5}=\frac{4\times z}{4\times 4}$

$$\therefore \quad =\frac{5x}{15}=\frac{-3y}{-15}=\frac{4z}{16}$$

$$=\frac{5x-3y+4z}{15-15+16}$$ ----ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರದ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಮೇಲಿಂದ

$$=\frac{5x-3y+4z}{16}$$

ಉದಾ. (2) ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{a}{(x-2y+3z)} = \frac{b}{(y-2z+3x)} = \frac{c}{(z-2x+3y)}$ ಒಂದು $x + y + z \neq 0$ ಇದ್ದರೆ,

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣೋತ್ತರ = $\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ

ಉತ್ತರ : $\frac{a}{(x-2y+3z)} = \frac{b}{(y-2z+3x)} = \frac{c}{(z-2x+3y)}$ = k ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ

$\therefore$ ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮೇಲಿಂದ

$$k = \frac{a+b+c}{(x-2y+3z)+(y-2z+3x)+(z-2x+3y)}$$

$$= \frac{a+b+c}{2x+2y+2z}$$

$$= \frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

$$\therefore \frac{a}{x-2y+3z} = \frac{b}{y-2z+3x} = \frac{c}{z-2x+3y} = \frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

ಉದಾ. (3) ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{y}{b+c-a} = \frac{z}{c+a-b} = \frac{x}{a+b-c}$ ಇದ್ದರೆ, $\frac{a}{z+x} = \frac{b}{x+y} = \frac{c}{y+z}$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ

ಉತ್ತರ : ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟ ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರ ವ್ಯಸ್ತ (ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಲಾಗಿ)

$$\frac{b+c-a}{y} = \frac{c+a-b}{z} = \frac{a+b-c}{x}$$

ಒಂದು $\frac{b+c-a}{y} = \frac{c+a-b}{z} = \frac{a+b-c}{x}$ = k ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ

$\therefore$ ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರದ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮೇಲಿಂದ

$$k = \frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{z+x} = \frac{2a}{z+x} \quad .....(I)$$

$$k = \frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{x+y} = \frac{2b}{x+y} \quad ....(II)$$

$$k = \frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{y+z} = \frac{2c}{y+z} \quad ......(III)$$

$$\therefore \frac{2a}{z+x} = \frac{2b}{x+y} = \frac{2c}{y+z}$$ (ವಿಧಾನ (I) (II) ಮತ್ತು (III)ರ ಮೇಲಿಂದ)

$$\therefore \frac{a}{z+x} = \frac{b}{x+y} = \frac{c}{y+z}$$

ಉದಾ. (4) ಬಿಡಿಸಿರಿ $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{7x-3}{5x+2}$

ಉತ್ತರ: ಈ ಉದಾಹರಣೆಯ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಬಲಬದಿಯ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿಯ ಪೂರ್ವಪದಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಉತ್ತರ ಪದಕ್ಕೆ $2x$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಮೊದಲನೆಯ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿ ಎರಡು ಪದಗಳು ದೊರೆಯುವದು ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡನೆಯ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿಯ ಎರಡೂ ಪದಗಳಿಗೆ $2x$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸುವಾ ಆದರೆ ಅದಕ್ಕೂ ಮೊದಲು x ಶೂನ್ಯ ಇಲ್ಲ. ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವಾ.

$x = 0$ ಇದ್ದರೆ $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{8}{7}$ ಮತ್ತು $\frac{7x-3}{5x+2} = \frac{-3}{2}$

$\therefore \frac{8}{7} = \frac{-3}{2}$ ಈ ವಿಧಾನವು ವಿಸಂಗತ ಇದೆ.

$\therefore x \neq 0$

$\therefore$ ಎರಡನೆಯ ಗುಣೋತ್ತರದ ಎರಡೂ ಪದಗಳಿಗೆ $2x$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

$$\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{2x(7x-3)}{2x(5x+2)} = k$$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{14x^2-6x}{10x^2+4x} = k$$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8-14x^2+6x}{10x^2+4x+7-10x^2-4x} = \frac{8}{7} = k$$

$$\therefore \quad k = \frac{8}{7}$$

$$\therefore \quad \frac{7x-3}{5x+2} = \frac{8}{7}$$

$$\therefore \quad 49x-21 = 40x+16$$

$$\therefore \quad 49x-40x = 16+21$$

$$\therefore \quad 9x = 37 \qquad \therefore \quad x = \frac{37}{9}$$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.4

(1) ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿಯ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳ ತುಂಬಿರಿ.

(i) $\frac{x}{7} = \frac{y}{3} = \frac{3x+5y}{.......} = \frac{7x-9y}{......}$ (ii) $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7} = \frac{a-2b+3c}{......} = \frac{......}{6-8+14}$

(2) $5m - n = 3m + 4n$ ಇದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ,

(i) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ (ii) $\frac{3m+4n}{3m-4n}$

(3) (i) ಒಂದು ವೇಳೆ $a(y+z)=b(z+x) = c(x+y)$ ಮತ್ತು a, b, c ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವಿಲ್ಲ ಹಾಗಾದರೆ,

ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ

(ii) ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{x}{3x-y-z} = \frac{y}{3y-z-x} = \frac{z}{3z-x-y}$ ಮತ್ತು $x+y+z \neq 0$ ಇದ್ದರೆ,

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣೋತ್ತರದ ಬೆಲೆ 1 ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(iii) ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{ax+by}{x+y}=\frac{bx+az}{x+z}=\frac{ay+bz}{y+z}$ ಮತ್ತು $x+y+z \neq 0$ ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣೋತ್ತರ $\frac{a+b}{2}$ ಇದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

(iv) ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{y+z}{a}=\frac{z+x}{b}=\frac{x+y}{c}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ

(v) ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{3x-5y}{5z+3y}=\frac{x+5z}{y-5x}=\frac{y-z}{x-z}$ ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣೋತ್ತರ $\frac{x}{y}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(4) ಬಿಡಿಸಿರಿ (i) $\frac{16x^2-20x+9}{8x^2+12x+21}=\frac{4x-5}{2x+3}$ (ii) $\frac{5y^2+40y-12}{5y+10y^2-4}=\frac{y+8}{1+2y}$

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣ (Continued Proportion)

ಮುಂದಿನ ಗುಣೋತ್ತರದ ಬಗ್ಗೆ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿರಿ. 4 : 12 ಮತ್ತು 12 : 36 ಈ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು ಸಮಾನ ಇವೆ ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಉತ್ತರ ಮತ್ತು ಎರಡನೇಯ ಪೂರ್ವ ಪದಗಳು ಸಮಾನ ಇವೆ ಅಂದರೆ., 4, 12, 36 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇವೆ ಎಂದು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ **ಇದ್ದಾಗ a, b, c ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ.**

$ac = b^2$, ಇದ್ದರೆ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ bc ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ಈ ಸಮೀಕರಣ ಸಿಗುವದು.

$\therefore$ $ac = b^2$ ಇದ್ದರೆ a, b, c ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

a, b, c ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾಗ b ಗೆ a ಮತ್ತು c ಗಳ ಭೂಮಿತಿ ಮಧ್ಯದ (Geometric mean) ಅಥವಾ 'ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣ ಪದ' (Mean proportional) ಎನ್ನುವರು.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ವಿಧಾನಗಳು ಸಮಾನ ಅರ್ಥವುಳ್ಳವು ಇವೆ.

$\therefore$ (1) $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ (2) $b^2 = ac$ (3) a, b, c ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇವೆ.

(4) b ಇದು a ಮತ್ತು c ಗಳ ಭೂಮಿತಿ ಮಧ್ಯ ಇದೆ. (5) b ಇದು a ಮತ್ತು c ಗಳ ಮಧ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ ಪದ ಇದೆ

ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಂಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಸಹ ವಿಸ್ತಾರಿತ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\frac{e}{f}$ ಇದ್ದರೆ a, b, c, d, e ಮತ್ತು f ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾ. (1) x ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು 25 ಮತ್ತು 4 ಇವುಗಳ ಭೂಮಿತಿ ಮಧ್ಯ ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ x ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ: x ಇದು 25 ಮತ್ತು 4 ಅವುಗಳ ಭೂಮಿತಿ ಮಧ್ಯ ಇದೆ.

$$\therefore \quad x^2 = 25 \times 4$$
$$\therefore \quad x^2 = 100$$
$$\therefore \quad x = 10$$

ಉದಾ. (2) ಒಂದು ವೇಳೆ 4 a^2b, 8 ab^2, p ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದರೆ p ದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ

ಉತ್ತರ : ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ 4 a^2b, 8 ab^2, p ಅವು ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿವೆ

$$\therefore \quad \frac{4a^2b}{8ab^2} = \frac{8ab^2}{p}$$

$$p = \frac{8ab^2 \times 8ab^2}{4a^2b} = 16b^3$$

ಉದಾ. (3) 7, 12 ಮತ್ತು 18 ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವಜಾ ಮಾಡಿದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುವವು?

ಉತ್ತರ : 7, 12 ಮತ್ತು 18 ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ x ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವಜಾ ಮಾಡಿದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬರುವವು ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

$(7-x), (12-x), (18-x)$ ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿವೆ

$\therefore \quad (12-x)^2 = (7-x)(18-x)$

$\therefore \quad 144-24x+x^2 = 126-25x+x^2$

$\therefore \quad -24x+25x = 126-144$

$\therefore \quad x = -18$

ತಾಳೆ

$(7-x) = 7-(-18) = 25$

$(12-x) = 12-(-18) = 30$

$(18-x) = 18-(-18) = 36$

$30^2 = 900$ ಮತ್ತು $25 \times 36 = 900$

25, 30, 36 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇವೆ.

$\therefore$ 7, 12, 18 ಇವುಗಳಲ್ಲಿಂದ -18 ವಜಾ ಮಾಡಲಾಗಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಂಪರತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುವವು.

k – ಪದ್ಧತಿ (k –method)

ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿಯ k – ಇದು ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಮೇಲಿನ ಅಂದರೆ ಪ್ರಮಾಣದ ಮೇಲಿನ ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಒಂದು ಸುಲಭ ಪದ್ಧತಿ ಇದೆ ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಸಮಾನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆ k ತಿಳಿಯುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾ. (1) ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ $\therefore a = bk, c = dk$

a ಮತ್ತು c ಗಳ ಬೆಲೆ ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ ತುಂಬಲಾಗಿ.

$$\text{ಎಡ ಬದಿ} = \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{5(bk)-3(dk)}{5b-3d} = \frac{k(5b-3d)}{(5b-3d)} = k$$

$$\text{ಬಲ ಬದಿ} = \frac{7a-2c}{7b-2d} = \frac{7(bk)-2(dk)}{7b-2d} = \frac{k(7b-2d)}{7b-2d} = k$$

$\therefore$ ಎಡ ಬದಿ = ಬಲ ಬದಿ.

$$\therefore \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$$

ಉದಾ. (2) ಒಂದು ವೇಳೆ a, b, c ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದರೆ $\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(b+c)^2}{bc}$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ : a, b, c ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿವೆ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$\therefore b=ck, a=bk=ck\times k=ck^2$

a ಮತ್ತು b ಗಳ ಬೆಲೆ ತುಂಬಲಾಗಿ

ಎಡ ಬದಿ = $\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(ck^2+ck)^2}{(ck^2)(ck)}=\frac{c^2k^2(k+1)^2}{c^2k^3}=\frac{(k+1)^2}{k}$

ಬಲ ಬದಿ = $\frac{(b+c)^2}{bc}=\frac{(ck+c)^2}{(ck)c}=\frac{c^2(k+1)^2}{c^2k}=\frac{(k+1)^2}{k}$

$\therefore$ ಎಡ ಬದಿ. = ಬಲ ಬದಿ. $\qquad \therefore \frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(b+c)^2}{bc}$

ಉದಾ. (3) ಒಂದು ವೇಳೆ a, b, c ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದರೆ,

$\frac{a}{c}=\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ : a, b, c ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿವೆ $\therefore \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\mathrm{k}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ $\therefore b=ck$ ಮತ್ತು $a=ck^2$

ಎಡ ಬದಿ $=\frac{a}{c}=\frac{ck^2}{c}=k^2$

ಬಲ ಬದಿ = $\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

$=\frac{(k^2c)^2+k^2c(ck)+(ck)^2}{(ck)^2+(ck)(c)+c^2}$

$=\frac{k^4c^2+k^3c^2+c^2k^2}{c^2k^2+c^2k+c^2}$

$=\frac{c^2k^2(k^2+k+1)}{c^2(k^2+k+1)}$

$=k^2$

$\therefore$ ಎಡ ಬದಿ = ಬಲ ಬದಿ

$\therefore \frac{a}{c}=\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

ಉದಾ. (4) ಐದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದು ಮೊದಲನೆಯ ಪದ 5 ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ 80 ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣ ಬರುವ ಐದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a, ak, ak^2, ak^3, ak^4 ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ $a=5$ ಮತ್ತು $ak^4=80$

$\therefore 5\times k^4=80$

$\therefore k^4=16$

$\therefore k=2 \quad \because 2^4=16$

$ak=5\times 2=10 \qquad ak^2=5\times 4=20$

$ak^3=5\times 8=40 \qquad ak^4=5\times 16=80$

$\therefore$ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 5, 10, 20, 40, 80 ಇವೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.5

(1) 12, 16 ಮತ್ತು 21 ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದು ?

(2) $(23-x)$ ಮತ್ತು $(19-x)$ ಇವುಗಳ $(28-x)$ ಇದು ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣ ಪದ ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ x ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿವೆ ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣಪದ 12 ಇದ್ದು ಉಳಿದೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು 26 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) ಒಂದು ವೇಳೆ $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$ ಇದ್ದರೆ a, b, c ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(5) ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ಮತ್ತು $a, b, c > 0$ ಇದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

(i) $(a + b + c)(b - c) = ab - c^2$

(ii) $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$

(iii) $\frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a+c}{b}$

(6) $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣ ಪದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೃತಿ : ಭೂಗೋಲದ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿಯ ಭಾರತದ ರಾಜಕೀಯ ನಕಾಶೆ ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಅಂತರದ ಪ್ರಮಾಣ ಗಮನದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪಟ್ಟಣಗಳಲ್ಲಿಯ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿಯ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಹಾಗೆಯೇ (i) ಹೊಸ ದಿಲ್ಲಿಯಿಂದ ಬೆಂಗಳೂರು (ii) ಮುಂಬಯಿಯಿಂದ ಕೊಲಕತ್ತಾ (iii) ಜಯಪೂರದಿಂದ ಭುವನೇಶ್ವರ

ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಗ್ರಹ 4

(1) ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಬಹು ಪರ್ಯಾಯ ಉತ್ತರಗಳಲ್ಲಿಂದ ಸರಿಯಾದ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ

(i) ಒಂದು ವೇಳೆ 6 : 5 = y : 20 ಹಾಗಾದರೆ y ದ ಬೆಲೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದು ?

(A) 15 (B) 24 (C) 18 (D) 22.5

(ii) 1 ಮಿಲೀ ಮೀಟರದ 1 ಸೆಂಟಿ ಮಿಟರದೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದು ?

(A) 1 : 100 (B) 10 : 1 (C) 1 : 10 (D) 100 : 1

(iii*) ಜತಿನ, ನಿತಿನ ಮತ್ತು ಮೊಹಸೀನ ಇವರ ವಯಸ್ಸುಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 16, 24 ಮತ್ತು 36 ಇವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ನಿತಿನನ ವಯಸ್ಸಿನ ಮೊಹಸೀನನ ವಯಸ್ಸಿನೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಯಾವದು ?

(A) 3 : 2 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

(iv) ಶುಭಮ್ ಮತ್ತು ಅನೀಲ ಇವರಿಗೆ 3 : 5 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ 24 ಬಾಳೆಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಹಂಚಲಾಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಶುಭಮನಿಗೆ ದೊರೆತ ಬಾಳೆಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

(A) 8 (B) 15 (C) 12 (D) 9

(v) 4 ಮತ್ತು 25 ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಮಾಣ ಪದ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದು ?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

(2) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಿರುವ ಗುಣೋತ್ತರವನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) 21, 48 (ii) 36, 90 (iii) 65, 117 (iv) 138, 161 (v) 114, 133

(3) ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಗುಣೋತ್ತರ

(ii) ಆಯತದ ಉದ್ದ 4 ಸೆಮೀ. ಮತ್ತು ಅಗಲ 3 ಸೆ.ಮೀ. ಇದ್ದರೆ ಆಯತದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದದೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಗುಣೋತ್ತರ

(iii) ಚೌರಸದ ಭುಜ 4 ಸೆಮೀ. ಇದ್ದರೆ ಚೌರಸದ ಪರಿಮಿತಿಯ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಗುಣೋತ್ತರ

(4) ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

(i) 2, 4, 8 (ii) 1, 2, 3 (iii) 9, 12, 16 (iv) 3, 5, 8

(5) a, b, c ಈ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿವೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ $a = 3$ ಮತ್ತು $c = 27$ ಇದ್ದರೆ b = ಎಷ್ಟು?

(6) ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರಿಸಿರಿ.

(i) 37 : 500 (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{22}{30}$ (iv) $\frac{5}{16}$ (v) $\frac{144}{1200}$

(7) ಮೊದಲನೆಯ ರಾಶಿಗೆ ಎರಡನೆಯ ರಾಶಿಯೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಗುಣೋತ್ತರವನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) 1024 MB, 1.2 GB [(1024 MB = 1 GB)]

(ii) 17 ರೂಪಾಯಿ, 25 ರೂ, 60 ಪೈಸೆ (iii) 5 ಡಝನ್ 120 ವಸ್ತುಗಳು

(iv) 4 ಚೌಮೀ 800 ಚೌಸೆಮಿ (v) 1.5 ಕಿಗ್ರ್ಯಾಮ್ 2500 ಗ್ರ್ಯಾಮ್

(8) ಒಂದು ವೇಳೆ $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ಇದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನ ರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\frac{4a+3b}{3b}$ (ii) $\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}$

(iii) $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7b-4a}{7b+4a}$

(9) a, b, c, d ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

(i) $\frac{11a^2+9ac}{11b^2+9bd} = \frac{a^2+3ac}{b^2+3bd}$

(ii*) $\sqrt{\frac{a^2+5c^2}{b^2+5d^2}} = \frac{a}{b}$

(iii) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\dfrac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

(10) a, b, c ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

(i) $\dfrac{a}{a+2b}=\dfrac{a-2b}{a-4c}$ (ii) $\dfrac{b}{b+c}=\dfrac{a-b}{a-c}$

(11) ಬಿಡಿಸಿರಿ $\dfrac{12x^2+18x+42}{18x^2+12x+58}=\dfrac{2x+3}{3x+2}$

(12) ಒಂದು ವೇಳೆ $\dfrac{2x-3y}{3z+y}=\dfrac{z-y}{z-x}=\dfrac{x+3z}{2y-3x}$ ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣೋತ್ತರ $\dfrac{x}{y}$ ಇದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

(13*) ಒಂದು ವೇಳೆ $\dfrac{by+cz}{b^2+c^2}=\dfrac{cz+ax}{c^2+a^2}=\dfrac{ax+by}{a^2+b^2}$ ಇದ್ದರೆ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

5 ದ್ವಿಚಲಗಳಲ್ಲಿಯ ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

EL5H33

ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

- ದ್ವಿಚಲಗಳಲ್ಲಿಯ ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣ
- ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವದು
- ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣ
- ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣದ ಮೇಲಿನ ಶಾಬ್ದಿಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಸ್ವಲ್ಪ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾ. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ

(1) $m+3=5$ (2) $3y+8=22$ (3) $\frac{x}{3}=2$ (4) $2p=p+\frac{4}{9}$

$m=\square$ $y=\square$ $x=\square$ $p=\square$

(5) ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 5ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

14 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊರೆಯುವದು

$\square + 5 = 14$

$x + 5 = 14$

$x = \square$

(6) 8 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಎಷ್ಟು ವಜಾ ಮಾಡಿದರೆ 2 ಬರುವದು?

$8 - \square = 2$

$8 - y = 2$

$y = \square$

ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಚಲದ ಘಾತಾಂಕ 1 ಇದೆ. ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಚಲದಲ್ಲಿಯ ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುವರು.

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ದ್ವಿಚಲದಲ್ಲಿಯ ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು (Linear equations in two variables)

ಯಾವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು 14 ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಲುವಾಗಿ x ಮತ್ತು y ಈ ಚಲಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಉದಾಹರಣೆಯು ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿ $x + y = 14$ ಹೀಗೆ ಆಗುವುದು.

ಇದು ದ್ವಿಚಲದಲ್ಲಿಯ ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣ ಇದೆ, ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಈ ಎರಡೂ ಚಲಗಳ ಅನೇಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಬರುವದು.

ಹೀಗೆ, $9 + 5 = 14$	$7 + 7 = 14$	$8 + 6 = 14$	$4 + 10 = 14$
$(-1) + 15 = 14$	$15 + (-1) = 14$	$2.6 + 11.4 = 14$	$0 + 14 = 14$
$100 + (-86) = 14$	$(-100) + (114) = 14$	$\square + \square = 14$	$\square + \square = 14$

ಅಂದರೆ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ $(x = 9, y = 5)$ $(x = 7, y = 7)$ $(x = 8, y = 6)$ ಇತ್ಯಾದಿ ಉತ್ತರಗಳು ದೊರೆಯುವವು.

$x = 9, y = 5$ ಈ ಉತ್ತರ (9, 5) ಈ ರೀತಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕಂಸಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಸಂಕೇತ ಇದೆ. ಈ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ x ದ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ y ದ ಬೆಲೆ ಇರುವದು. $x + y = 14$ ಈ ಸಮೀಕರಣ ಸತ್ಯ ಇದೆ ಎಂದು ನಿಶ್ಚಯಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ (9,5), (7,7), (8,6), (4,10), (10,4), (−1,15), (2.6, 11.4), ... ಇಂತಹ ಅನಂತ ಕ್ರಮಿಕ ಜೋಡಿ ಎಂದರೆ ಅನಂತ ಉತ್ತರಗಳು ಇವೆ.

ಈಗ ಎರಡನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಯಾವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಜಾಬಾಕಿ 2 ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿರಿ.

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ x ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ y ತಿಳಿದರೆ $x-y = 2$ ಈ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವದು.

x ಮತ್ತು y ಬೆಲೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಅನೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುವವು

$10 - 8 = 2$	$9 - 7 = 2$	$8 - 6 = 2$	$(-3) - (-5) = 2$	$5.3-3.3=2$
$15 - 13 = 2$	$100 - 98 = 2$	$\square - \square = 2$	$\square - \square = 2$	

ಇಲ್ಲಿ $x = 10$ ಮತ್ತು $y = 8$ ಈ ಬೆಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ (10,8) ಈ ಕ್ರಮಿತ ಜೋಡಿಯ ಈ ಯಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಮಾಧಾನ ಮಾಡುವದು. ಅಂದರೆ ಈ ಜೋಡಿಯು ಆ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರ ಇದೆ (10,8) ಈ ಜೋಡಿಯು (8, 10) ಹೀಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಕಾರಣ (8, 10) ಇದರ ಅರ್ಥ $x = 8, y = 10$ ಹೀಗೆ ಇದೆ. ಈ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $x-y = 2$ ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಸಮಾಧಾನ ಅಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಮ ಮಹತ್ವದ್ದು ಇರುತ್ತದೆ ಇದನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಈಗ $x-y = 2$ ಈ ಸಮೀಕರಣ ಉತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮಿತ ಜೋಡಿಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ

(7, 5), (−2, −4), (0, −2), (5.2, 3.2), (8, 6) ಇತ್ಯಾದಿ. ಅನಂತ ಉತ್ತರಗಳು ಇವೆ.

$4m - 3n = 2$ ಈ ಸಮೀಕರಣ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನೀವೂ ಸಹ ಇಂತಹ ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ

$x + y = 14$ I

$x - y = 2$ II

ಸಮೀಕರಣ I ರ ಉತ್ತರ (9, 5), (7, 7), (8, 6)...

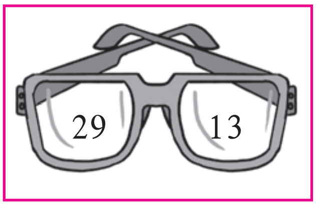
ಸಮೀಕರಣ II ರ ಉತ್ತರಗಳು (7, 5), (−2, −4), (0, −2), (5.2, 3.2), (8, 6)...

(8, 6) ಈ ಜೋಡಿ ಉತ್ತರಗಳ ಎರಡೂ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಿದೆ ಈ ಜೋಡಿ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಮಾಧಾನ ಮಾಡುವದು ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಉತ್ತರ ಆಗಿದೆ.

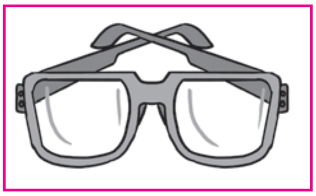
ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಿ.

ದ್ವಿಚಲದಲ್ಲಿಯ ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದೇ ಸಲ ವಿಚಾರ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಆವಾಗ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು (Simultaneous equations) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

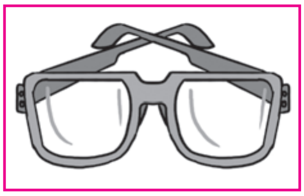
ಕೃತಿ : ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಕನ್ನಡಕಗಳ ಗಾಜಿನ ಮೇಲೆ ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ,



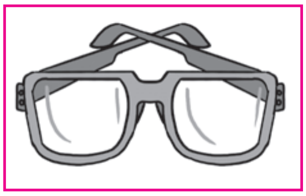
(i) ಬೇರಿಜು 42 ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ 16 ಇದೆ.



(ii) ಬೇರೀಜ 37 ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ 11 ಇದೆ.



(iii) ಬೇರೀಜು 54 ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ 20 ಇದೆ



(iv) ಬೇರೀಜು .... ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ...

ಬನ್ನಿ ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ.

$x+y = 5$ ಮತ್ತು $2x + 2y = 10$ ಇವು ಎರಡು ಚಲಗಳಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿವೆ

$x+y = 5$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಐದು ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಆ ಉತ್ತರಗಳಿಂದ $2x + 2y = 10$ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಮಾಧಾನ ಅಗುವುದೊ ಹೇಗೆ ನೋಡಿರಿ.

ಈ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

ಎರಡು ಚಲಗಳಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉತ್ತರಗಳು ಸಮಾನವಿರುವದು ಇದರ ಸಲುವಾಗಿ ಆವಶ್ಯಕ ಇರುವ ಕರಾರು ಸಿಗುವದೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಚಲದ ಲೋಪ ಮಾಡಿ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವ ಪದ್ಧತಿ (Elimination method)

$x + y = 14$ ಮತ್ತು $x - y = 2$ ಏಕ ಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಚಲಗಳ ಬೆಲೆ ತುಂಬಿ ನಾವು ಬಿಡಿಸಿದ್ದೆವೆ. ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಈ ಪದ್ಧತಿ ಸುಲಭ ಆಗುವದು ಎಂದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $2x + 3y = -4$ ಮತ್ತು $x - 5y = 11$ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ x ಮತ್ತು y ಗಳಿಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಿರಿ.

ಅಂದರೆ, ಏಕ-ಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಬೇರೆ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವದು. ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚಲಗಳ ಬದಲು ಒಂದು ಚಲವನ್ನು ಲೋಪ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಒಂದೇ ಚಲದಲ್ಲಿಯ ಸಮೀಕರಣ ದೊರಕಿಸಿಕೊಳ್ಳುವರು. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಆ ಚಲದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವರು. ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದಾಗ ಎರಡನೇಯ ಚಲದ ಬೆಲೆ ಸಿಗುವುದು.

ಈ ಪದ್ಧತಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಲುವಾಗಿ ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸೋಣ.

ಉದಾ. (1) ಬಿಡಿಸಿರಿ : $x + y = 14$ ಮತ್ತು $x - y = 2$.

ಉತ್ತರ : ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿ ಒಂದೇ ಚಲದಲ್ಲಿಯ ಸಮೀಕರಣ ದೊರಕಿಸೋಣ

$$\begin{array}{rrcl} & x + y & = & 14 \quad \ldots\ldots\ldots \text{I} \\ + & x - y & = & 2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{II} \\ \hline & 2x + 0 & = & 16 \\ & 2x & = & 16 \\ & x & = & 8 \end{array}$$

$x = 8$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (I) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ,

$$x + y = 14$$

$$\therefore\ 8 + y = 14$$

$$\therefore\ y = 6$$

ಇಲ್ಲಿ (8, 6) ಇದು ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರಗಳಿವೆ. ಇವೇ ಉತ್ತರಗಳು ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರ ಇದೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡೋಣ.

$x - y = 8 - 6 = 2$ ಇದು ಸತ್ಯ ಇದೆ.

(8,6) ಇದು ಕೊಟ್ಟ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಉತ್ತರ ಇದೆ.

ಅಂದರೆ $x + y = 14$ ಮತ್ತು $x - y = 2$ ಈ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ (8, 6) ಉತ್ತರ ಇದೆ.

ಉದಾ. (2) ತಾಯಿ ಮತ್ತು ಮಗ ಇವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಬೇರೀಜು 45 ಇದೆ. ತಾಯಿಯ ವಯಸ್ಸಿನ ಇಮ್ಮಡಿಯಲ್ಲಿಂದ ಮಗನ ವಯಸ್ಸನ್ನು ವಜಾ ಮಾಡಲಾಗಿ 54 ಬರುವದು ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಇಬ್ಬರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ ಚಲದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಬರೆದಾಗ ಉದಾಹರಣೆ ಬಿಡಿಸುವದು ಸುಲಭವಾಗುವದು.

ಉತ್ತರ : ತಾಯಿಯ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು x ವರ್ಷಗಳು ಮತ್ತು ಮಗನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು y ವರ್ಷಗಳು ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

ಮೊದಲನೆಯ ಕರಾರಿಗೆ ಅನುಸಾರ $x + y = 45$ ………I

ಎರಡನೆಯ ಕರಾರಿಗೆ ಅನುಸಾರ $2x - y = 54$ ………II

ಸಮೀಕರಣ (I) ಮತ್ತು (II) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿ $3x + 0 = 99$

$$3x = 99$$

$$x = 33$$

$x = 33$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$33 + y = 45$$

$$y = 45 - 33$$

$$y = 12$$

$x = 33$ ಮತ್ತು $y = 12$ ಈ ಉತ್ತರ ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಸಮಾಧಾನ ಮಾಡುವದು. ಇದರ ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.

ತಾಯಿಯ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು ಮತ್ತು ಮಗನ ವಯಸ್ಸು 12 ವರ್ಷ ಇದೆ.

ದ್ವಿಚಲಗಳಲ್ಲಿಯ ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ

$ax + by + c = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ a,b,c ಈ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದರೆ a ಮತ್ತು b ಒಂದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ 0 ಇರದಿದ್ದರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ದ್ವಿಚಲ ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ ಇರುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಚಲಗಳ ಘಾತಾಂಕ 1 ಇದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣ ರೇಷೀಯ ಇದೆ.

ಉದಾ. (1) ಕೆಳಗಿನ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿರಿ

$$3x + y = 5 \quad \ldots\ldots\ldots (I)$$

$$2x + 3y = 1 \quad \ldots\ldots (II)$$

ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚಲದ ಲೋಪ ಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಚಲದ ಸಣ ಗುಣಕ ಸಮಾನ ಅಥವಾ ವಿರುದ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವಾ

ಸಮೀಕರಣ I ರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

$$\therefore\ 3x \times 3 + 3 \times y = 5 \times 3$$

$$\therefore\ 9x + 3y = 15 \quad \ldots\ldots (III)$$

$$2x + 3y = 1 \quad \ldots\ldots (II)$$

ಈಗ ಸಮೀಕರಣ II ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ IIIದಲ್ಲಿಂದ ವಜಾ ಮಾಡಲಾಗಿ

$$\begin{array}{rcl} 9x + 3y & = & 15 \\ +\ 2x + 3y & = & 1 \\ -\quad -\quad\quad - & & \\ \hline 7x & = & 14 \\ x & = & 2 \end{array}$$

$x = 2$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$\begin{array}{rrcl} & 2x + 3y & = & 1 \\ \therefore & 2 \times 2 + 3y & = & 1 \\ \therefore & 4 + 3y & = & 1 \\ \therefore & 3y & = & -3 \\ \therefore & y & = & -1 \end{array}$$

ಇಲ್ಲಿ (2, −1) ಈ ಉತ್ತರಗಳು ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಸಲುವಾಗಿ ಸತ್ಯ ಇದೆ. ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ಮಾಡಿರಿ.

ಉದಾ. (2) ಕೆಳಗಿನ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$3x - 4y - 15 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (I)$$

$$y + x + 2 = 0 \quad \ldots\ldots (II)$$

ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಲಬದಿಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬರೆಯೋಣ

$$3x - 4y = 15 \quad \ldots\ldots (I)$$

$$x + y = -2 \quad \ldots\ldots\ldots (II)$$

y ಚಲದ ಲೋಪ ಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಸಮೀಕರಣ II ಕ್ಕೆ 4 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣ I ರಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ

$$\begin{array}{rrcl} & 3x - 4y & = & 15 \\ + & 4x + 4y & = & -8 \\ \hline & 7x & = & 7 \\ & x & = & 1 \end{array}$$

$x = 1$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ IIರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & -2 \\ \therefore 1 + y & = & -2 \\ \therefore y & = & -2 - 1 \\ \therefore y & = & -3 \end{array}$$

(1, −3) ಇವು ಉತ್ತರಗಳಿವೆ ಈ ಉತ್ತರಗಳು ಸಮೀಕರಣ I ರ ಸಲುವಾಗಿ ಸಹಿತ ಸತ್ಯ ಇದೆ. ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ಹಾಕಿರಿ.

ವಿಚಾರ ಮಾಡಿರಿ

$3x - 4y - 15 = 0$ ಮತ್ತು $y + x + 2 = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು x ಚಲದ ಲೋಪ ಮಾಡಿ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದೇ ಅದರ ಉತ್ತರ ಅದೇ ಬರುವದೇ ?

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಒಂದು ಚಲದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಚಲದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿ ಚಲದ ಲೋಪ ಮಾಡುವುದು (Substitution method)

ಚಲದ ಲೋಪ ಮಾಡುವ ಇನ್ನೊಂದು ಪದ್ಧತಿ ಇದೆ. ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಚಲದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಚಲದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದು ಅದನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿ ಮೊದಲನೆಯ ಚಲವನ್ನು ಲೋಪ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾ. (1) ಬಿಡಿಸಿರಿ $8x + 3y = 11$; $3x - y = 2$

ಉತ್ತರ : $8x + 3y = 11$.................. (I)

$3x - y = 2$.......................(II)

ಸಮೀಕರಣ (II) ರಲ್ಲಿ y ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು x ದ ಚಲದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಸುಲಭವಾಗುವುದು.

$3x - y = 2$

$3x - 2 = y$

ಈಗ $y = 3x - 2$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (I) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$8x + 3y = 11$

$\therefore\ 8x + 3(3x-2) = 11$

$\therefore\ 8x + 9x - 6 = 11$

$\therefore\ 17x - 6 = 11$

$\therefore\ 17x = 11 + 6 = 17$

$\therefore\ x = 1$

x ದ ಈ ಬೆಲೆ $y = 3x - 2$ ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$\therefore\ y = 3 \times 1 - 2$

$\therefore\ y = 1$

$\therefore$ (1, 1) ಇದು ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರ ಇದೆ.

ಉದಾ. (2) ಬಿಡಿಸಿರಿ $3x - 4y = 16$; $2x - 3y = 10$

ಉತ್ತರ : $3x - 4y = 16$..........(I)

$2x - 3y = 10$.............(II)

ಸಮೀಕರಣ I ರ ಮೇಲಿಂದ x ಈ ಚಲದ ಬೆಲೆಯನ್ನು y ದಲ್ಲಿ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಾ.

$3x - 4y = 16$

$3x = 16 + 4y$

$$x = \frac{16+4y}{3}$$

x ದ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (II) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ.

$$2x - 3y = 10$$

$$2\left(\frac{16+4y}{3}\right) - 3y = 10$$

$$\frac{32+8y}{3} - 3y = 10$$

$$\frac{32+8y-9y}{3} = 10$$

$32 + 8y - 9y = 30$

$32 - y = 30 \qquad \therefore\ y = 2$

ಈಗ $y = 2$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (I) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$3x - 4y = 16$

$\therefore\ 3x - 4 \times 2 = 16$

$\therefore\ 3x - 8 = 16$

$\therefore\ 3x = 16 + 8$

$\therefore\ 3x = 24$

$\therefore\ x = 8$

$\therefore\ x = 8$ ಮತ್ತು $y = 2$

$\therefore$ (8, 2) ಇದು ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರ ಇದೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.1

(1) x ಮತ್ತು y ಈ ಚಲಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ದ್ವಿಚಲದಲ್ಲಿಯ 5 ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(2) $x + y = 7$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ 5 ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(3) ಕೆಳಗಿನ ಏಕ ಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $x + y = 4$; $2x - 5y = 1$

(ii) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$

(iii) $3x - 5y = 16$; $x - 3y = 8$

(iv) $2y - x = 0$; $10x + 15y = 105$

(v) $2x + 3y + 4 = 0$; $x - 5y = 11$

(vi) $2x - 7y = 7$; $3x + y = 22$

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಏಕ-ಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಶಾಬ್ದಿಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಶಾಬ್ದಿಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಸಮೀಕರಣ ತಯಾರಿಸುವದು ಇದೊಂದು ಅತೀ ಮಹತ್ವದ ಹಂತ ಇದೆ. ಸಮೀಕರಣ ಉತ್ತರ ತೆಗೆಯುವ ಪ್ರಣಾಲಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಹಂತಗಳು	ಉದಾಹರಣೆ
ಶಾಬ್ದಿಕ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನುಕಾಳಜಿ ಪೂರ್ವಕ ಓದಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.	ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು 36 ಇದೆ. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎಂಟು ಪಟ್ಟಿನಿಂದ 9ನ್ನು ವಜಾ ಮಾಡಲಾಗಿ ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊರೆಯುವದು
↓	↓
ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ರಾಶಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಚಲಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ	ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ $= x$ ತಿಳಿಯುವಾ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ $= y$ ತಿಳಿಯುವಾ
↓	↓
ಚಲಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.	ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರಿಜು 36 $\therefore x + y = 36$ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ 8 ಪಟ್ಟು $= 8x$ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ 8 ಪಟ್ಟು $- 9 = 8x - 9$ $\therefore$ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ $= y = 8x - 9$
↓	↓
ಯೋಗ್ಯ ಪದ್ಧತಿಯ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿರಿ	$x + y = 36$ $\therefore 8x - y = 9$ $\therefore 9x = 45$ $\therefore x = 5$ $\therefore 5 + y = 36$ $\therefore y = 36 - 5$ $\therefore y = 31$
↓	↓
ಉತ್ತರ ದೊರಕಿಸಿರಿ	$x = 5, \; y = 31$
↓	↓
ಬಂದ ಉತ್ತರ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿ ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ	$31 + 5 = 36$ ....(I) $31 = 8 \times 5 - 9$ ....(II)
↓	↓
ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ.	$\therefore$ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 5 ಮತ್ತು 31 ಇವೆ.

ಶಾಬ್ದಿಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಈಗ ನಾವು ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರದ ಶಾಬ್ದಿಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವಾ

(1) ವಯಸ್ಸಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(2) ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(3) ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಮೇಲಿನ ಆಧಾರಿತ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(4) ಆರ್ಥಿಕ ವ್ಯವಹಾರದ ಮೇಲಿನ ಆಧಾರಿತ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(5) ಭೌಮಿತಿಕ ಆಕೃತಿಗಳ ಗುಣಧರ್ಮದ ಮೇಲಿನ ಆಧಾರಿತ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(6) ವೇಗ, ಅಂತರ, ವೇಳೆ ಇವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಆಧಾರಿತ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. (1) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು 103 ಇದೆ. ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಾಕಾರವು 2 ಬರುವದು ಮತ್ತು ಶೇಷ 19 ಉಳಿಯುವದು, ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಹಂತ 1 : ಶಾಬ್ದಿಕ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವದು

ಹಂತ 2 : ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವದು.

ಅದರಂತೆ ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ ಈ ನಿಯಮ ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವದು

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ x ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ y ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ

ಹಂತ 3 : ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿ : ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು = 103

ಆದ್ದರಿಂದ $x + y = 103$ ಈ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯಿತು.

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ ಭಾಗಾಕಾರ 2 ಬರುವದು ಮತ್ತು ಶೇಷ 19 ಉಳಿಯುವದು, ಅದ್ದರಿಂದ $x = 2 \times y + 19$ ...(ಭಾಜ್ಯ = ಭಾಜಕ × ಭಾಗಾಕಾರ + ಶೇಷ)

ಅಂದರೆ, $x - 2y = 19$ ಇದು ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವದು

ಹಂತ 4 : ಈಗ ತಯಾರಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರ ತೆಗೆಯುವಾ.

$$x + y = 103 \quad \text{................(I)}$$
$$x - 2y = 19 \quad \text{................(II)}$$

ಸಮೀಕರಣ (I) ರಲ್ಲಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (II) ವಜಾ ಮಾಡುವಾ

$$\begin{array}{rcl} & x + y & = 103 \\ - & x - 2y & = 19 \\ & + \quad\ \ & - \\ \hline & 0 + 3y & = 84 \\ & \therefore\ y & = 28 \end{array}$$

ಹಂತ 5 : $x + y = 103$ ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ y ದ ಬೆಲೆ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$\therefore\ x + 28 = 103$$
$$\therefore\ x = 103 - 28$$
$$\therefore\ x = 75$$

ಹಂತ 5 : ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 75 ಮತ್ತು 28 ಇವೆ.

ಉದಾ. (2) ಸಲೀಲನ ವಯಸ್ಸು ಸಂಗ್ರಾಮನ ವಯಸ್ಸಿನ ಅರ್ಧಕ್ಕಿಂತ 23 ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಗಿದೆ ಐದು ವರ್ಷದ ಮೊದಲು ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಬೇರೀಜು 55 ವರ್ಷವಿದ್ದರೆ ಅವರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಸಲೀಲನ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸು x ವರ್ಷ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ ಮತ್ತು ಸಂಗ್ರಾಮನ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸು y ವರ್ಷ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಸಲೀಲನ ವಯಸ್ಸು ಸಂಗ್ರಾಮನ ವಯಸ್ಸಿನ ಅರ್ಧಕ್ಕಿಂತ 23ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x = \frac{y}{2} + \square$

ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಮೊದಲಿನ ಸಂಗ್ರಾಮನ ವಯಸ್ಸು $= x - 5$. ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಮೊದಲಿನ ಸಂಗ್ರಾಮನ ವಯಸ್ಸು $= y - 5$

ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಮೊದಲಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಬೇರೀಜು = 55

$\square + \square = 55$

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಉತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವದು

$2x = y + 46 \qquad 2x - y = 46$ ....(I)

$(x - 5) + (y-5) = 55$

$x + y = 65$ ....(II)

ಸಮೀಕರಣ (I) ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣ (II) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡುವಾ

$$
\begin{aligned}
2x - y &= 46 \\
+ \quad x + y &= 65 \\
\hline
\therefore 3x &= 111 \\
\therefore x &= 37
\end{aligned}
$$

$x = 37$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು (II) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿದೆ

$$
\begin{aligned}
x+y &= 65 \\
\therefore 37 + y &= 65 \\
\therefore y &= 65 - 37 \\
\therefore y &= 28
\end{aligned}
$$

ಸಲೀಲನ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸು 37 ವರ್ಷ ಇದೆ. ಮತ್ತು ಸಂಗ್ರಾಮನ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸು 28 ವರ್ಷ ಇವೆ.

ಉದಾ. (3) ಒಂದು ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅದರ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟು ಇದೆ. ಅದರ ಅಂಕಗಳ ಅದವು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ 9 ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ಏಕಕ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆ x ಮತ್ತು ದಶಕ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆ y ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

	ದಶಕ-ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕ	ಏಕಕ-ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕ	ಸಂಖ್ಯೆ	ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು
ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಲುವಾಗಿ	y	x	$10y + x$	$y + x$
ಅಂಕಗಳ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಲುವಾಗಿ	x	y	$10x + y$	$x + y$

ಮೊದಲನೆಯ ಕರಾರಿಗೆ ಅನುಸಾರ

$10y + x = 4\,(y+x)$

$\therefore 10y + x = 4y + 4x$

$\therefore x - 4x + 10y - 4y = 0$

$\therefore -3x + 6y = 0 \quad \therefore -3x = -6y \qquad \therefore x = 2y$ .....(I)

ಎರಡನೆಯ ಕರಾರಿಗೆ ಅನುಸಾರ $10x + y = 2(10y+x)-9$

$$10x+y = 20y + 2x-9$$

$$10x-2x+y-20y = -9$$

$$8x - 19y = -9 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

$$x = 2y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$x = 2y$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (II) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$16y - 19y = -9 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$\therefore \ -3y = -9$$

$$\therefore \ y = 3$$

$y = 3$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (I) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ $x - 2y = 0$

$$x - 2 \times 3 = 0 \qquad \therefore \ x - 6 = 0 \qquad \therefore \ x = 6$$

ಮೂಲ ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆ : $10y + x = 10 \times 3 + 6$

$$= 36$$

ಉದಾ. (4) ಒಂದು ಊರಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆ 50,000 ಇತ್ತು ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಪುರುಷರ ಸಂಖ್ಯೆ 5% ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಯಿತು ಮತ್ತು ಸ್ತ್ರಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ 3% ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಯಿತು. ಅದರಿಂದಾಗಿ ಈ ವರ್ಷ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು 52,020 ಆಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಊರಿನಲ್ಲಿಯ (ಕಳೆದ ವರ್ಷ)ಗತ ವರ್ಷದ ಪುರುಷರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಮತ್ತು ಸ್ತ್ರೀಯರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಇತ್ತು ?

ಉತ್ತರ : ಮೊದಲಿನ ವರ್ಷ ಊರಿನಲ್ಲಿಯ ಪುರುಷರ ಸಂಖ್ಯೆ x ಮತ್ತು ಸ್ತ್ರೀಯರ ಸಂಖ್ಯೆ y ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ

ಮೊದಲನೆಯ ಕರಾರಿಗೆ ಅನುಸಾರ $\square + \square = 50000$ ....(I)

ಪುರುಷರ ಸಂಖ್ಯೆ 5%ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಯಿತು, ಪುರುಷರ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{\square}{\square}x$ ಆಯಿತು.

ಸ್ತ್ರೀಯರ ಸಂಖ್ಯೆ 3%ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿತು, ಸ್ತ್ರೀಯರ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{\square}{\square}y$ ಆಯಿತು.

ಎರಡನೆಯ ಕರಾರಿಗೆ ಅನುಸಾರ $\frac{\square}{\square}x + \frac{\square}{\square}y = 52020$

$$\square x + \square y = 5202000 \quad \ldots\ldots.(II)$$

ಸಮೀಕರಣ (I)ನ್ನು 103 ರಂದು ಗುಣಿಸಿ

$$\square x + \square y = 5150000 \quad \ldots\ldots.(III)$$

ಸಮೀಕರಣ (II) ರಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ (III)ನ್ನು ವಜಾ ಮಾಡಲಾಗಿ

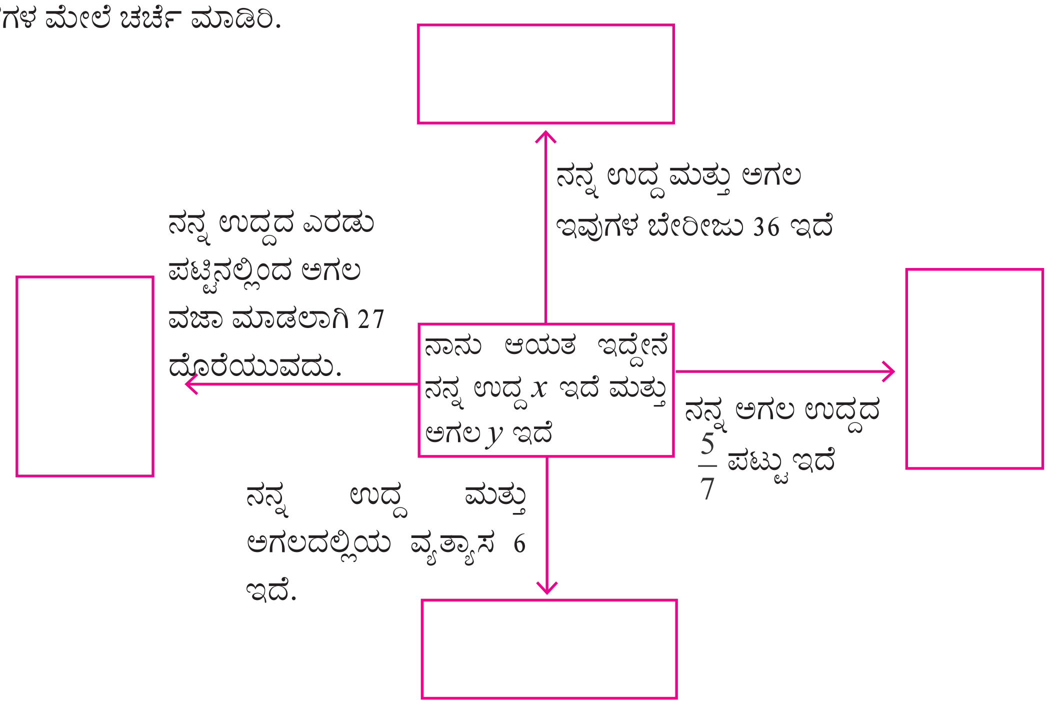
$$2x = 5202000 - 5150000$$

$$2x = 52000$$

$\therefore$ ಪುರುಷರ ಸಂಖ್ಯೆ $= x = \square$ $\therefore$ ಸ್ತ್ರೀಯರ ಸಂಖ್ಯೆ $= y = \square$

ಕೃತಿ 1 ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬಾಣಗಳ ಹತ್ತಿರ ಕೆಲವು ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣವು ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಮುಂದಿನ ಚೌಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಚೌಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಉತ್ತರಗಳ ತಾಳೆ ಹಾಕಿರಿ.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ – ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಹೀಗೆ ಎಷ್ಟು ಜೋಡಿಗಳು ಸಿಗುವವು ? ಅವುಗಳ ಉತ್ತರಗಳ ಮೇಲೆ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಿರಿ.



ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.2

(1) ಒಂದು ಪಾಕೀಟಿನಲ್ಲಿ ಕೆಲವು 5 ರೂ ಗಳ ಮತ್ತು 10 ರೂಗಳ ನೋಟುಗಳಿವೆ ನೋಟುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ 350 ರೂ ಇದೆ. 5 ರೂಪಾಯಿಯ ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 10 ರೂಪಾಯಿಯ ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ 10 ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಪಾಕೀಟಿನಲ್ಲಿ 5 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಮತ್ತು 10 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಎಷ್ಟು ನೋಟುಗಳು ಇರುತ್ತವೆ ?

(2) ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಛೇದವು ಅಂಶದ ಇಮ್ಮಡಿಗಿಂತ 1ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ. ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 3 : 5 ಆಗುವದು. ಹಾಗಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(3) ಪ್ರಿಯಾಂಕಾ ಮತ್ತು ದೀಪಿಕಾ ಇವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಬೇರೀಜು 34 ವರ್ಷ ಇದೆ. ಪ್ರಿಯಾಂಕಾಳು ದೀಪಿಕಾಗಿಂತ 6 ವರ್ಷ ದೊಡ್ಡವಳಿದ್ದಾಳೆ ಹಾಗಾದರೆ ಅವರ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) ಒಂದು ಪ್ರಾಣಿ ಸಂಗ್ರಾಲಯದಲ್ಲಿ ಸಿಂಹ ಮತ್ತು ನವಿಲುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ 50 ಇದೆ. ಅವುಗಳ ಕಾಲುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ 140 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರಾಣಿಸಂಗ್ರಾಲಯದಲ್ಲಿಯ ಸಿಂಹಗಳ ಮತ್ತು ನವಿಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5) ಸಂಜಯನಿಗೆ ನೌಕರಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ತಿಂಗಳುಗಳ ಸಂಬಳ ಸಿಗುವದು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಆತನ ಸಂಬಳದಲ್ಲಿ ನಿಶ್ಚಿತ ರಕಮಿನ ಹೆಚ್ಚಳವಾಗುವದು ಒಂದು ವೇಳೆ ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಆತನ ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳ 4500ರೂ ಆಯಿತು ಮತ್ತು 10 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳ 5400 ರೂ ಆಯಿತು ಹಾಗಾದರೆ ಅವರ ಪ್ರಾರಂಭದ ಸಂಬಳ ಮತ್ತು ವಾರ್ಷಿಕ ಹೆಚ್ಚಳದ ರಕಮನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6) 3 ಖುರ್ಚಿ ಮತ್ತು 2 ಟೇಬಲಗಳ ಬೆಲೆ 4500 ರೂಪಾಯಿ ಇದೆ 5 ಖುರ್ಚು ಮತ್ತು 3 ಟೇಬಲಗಳ ಬೆಲೆ 7000 ರೂಪಾಯಿ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ 2 ಖುರ್ಚಿ ಮತ್ತು 2 ಟೇಬಲಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(7) ಒಂದು ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ಅಂಕಿಗಳ ಬೇರೀಜು 9 ಇದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಅಂಕೆಗಳ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೊದಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 27 ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(8*) Δ ABC ಯಲ್ಲಿ ಕೋನ A ದ ಅಳತೆಯು ಕೋನ $\angle$ B ದ ಮತ್ತು ಕೋನ $\angle$ C ಅಳತೆಯ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇದೆ. ಅದರಂತೆ ಕೋನ $\angle$ B ಕೋನ ಮತ್ತು $\angle$ C ದ ಅಳತೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 4 : 5 ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(9*) ಒಂದು 560 ಸೆ.ಮೀ. ಉದ್ದಳತೆಯ ದಾರದ ಎರಡು ತುಂಡುಗಳು ಹೀಗೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ ದಾರದ ಸಣ್ಣ ತುಂಡಿನ ಉದ್ದಳತೆಯ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಇದು ದೊಡ್ಡ ತುಂಡಿನ ಉದ್ದಳತೆಯ $\frac{1}{3}$ ಪಟ್ಟು ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ದೊಡ್ಡ ತುಂಡಿನ ಉದ್ದಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

(10) ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಧಾ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 60 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೇಳಿದ್ದಾರೆ. ಸರಿ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 2 ಗುಣ ಮತ್ತು ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 1 ಗುಣ ಕಡಿಮೆ ಕೊಡುವವರಿದ್ದರು ಯಶವಂತನು ಎಲ್ಲ 60 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದನು ಆವಾಗ ಆತನಿಗೆ ಒಟ್ಟು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 90 ಗುಣಗಳು ದೊರೆತವು ಹಾಗಾದರೆ ಆತನ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉತ್ತರಗಳು ತಪ್ಪಿದ್ದವು ?

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ 5

(1) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ ?

(i) $3x + 5y = 9$ ಮತ್ತು $5x + 3y = 7$ ಇದ್ದರೆ $x + y$ ದ ಬೆಲೆ ಯಾವದಿದೆ ?

(A) 2 (B) 16 (C) 9 (D) 7

(ii) ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಿನಿಂದ 5ನ್ನು ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡಲಾಗಿ ಅದರ ಪರಿಮಿತಿ 26 ಬರುವದು ಈ ಮಾಹಿತಿಯ ಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿಯ ರೂಪಾಂತರ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದು ?

(A) $x - y = 8$ (B) $x + y = 8$ (C) $x + y = 23$ (D) $2x + y = 21$

(iii) ಅಜಯನು ವಿಜಯನಿಗಿಂತ 5 ವರ್ಷದಿಂದ ಚಿಕ್ಕವನಿದ್ದಾನೆ. ಅವರ ಇಬ್ಬರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಬೇರೀಜು 25 ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಅಜಯನ ವಯಸ್ಸು ಎಷ್ಟು ?

(A) 20 (B) 15 (C) 10 (D) 5

(2) ಕೆಳಗಿನ ಏಕ ಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$ (ii) $x - 2y = -1$; $2x - y = 7$

(iii) $x + y = 11$; $2x - 3y = 7$ (iv) $2x + y = -2$; $3x - y = 7$

(v) $2x - y = 5$; $3x + 2y = 11$ (vi) $x - 2y = -2$; $x + 2y = 10$

(3) ಚಲದ ಸಹ ಗುಣಕವನ್ನು ಸಮಾನ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $3x-4y=7$; $5x+2y=3$ (ii) $5x + 7y=17$; $3x-2y=4$

(iii) $x-2y= -10$; $3x-5y= -12$ (iv) $4x + y=34$; $x+4y= 16$

(4) ಕೆಳಗಿನ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=4$; $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$ (ii) $\frac{x}{3}+5y=13$; $2x+\frac{y}{2}=19$

(iii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$; $\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$

(5*) ಒಂದು ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅದರ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ 3ರಿಂದ ದೊಡ್ಡದಿದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ 18ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಬೇರೀಜು ಇದು ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ಅಂಕೆಗಳ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವದು ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6) 8 ಪುಸ್ತಕ ಮತ್ತು 5 ಪೆನ್ನುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ 420 ರೂಪಾಯಿ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ 5 ಪುಸ್ತಕಗಳು ಮತ್ತು 8 ಪೆನ್ನುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ 321 ಇದ್ದರೆ ಒಂದು ಪುಸ್ತಕ ಮತ್ತು ಎರಡು ಪೆನ್ನುಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(7*) ಎರಡು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 9:7 ಇದೆ. ಮತ್ತು ಅವರ ಖರ್ಚಿನ ಗುಣೋತ್ತರ 4 : 3 ಇದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಉಳಿತಾಯ 200 ರೂಪಾಯಿ ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಉತ್ಪನ್ನ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(8*) ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದವನ್ನು 5 ಮೂಲಮಾನದಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಮತ್ತು ಅಗಲವನ್ನು 2 ಮೂಲಮಾನದಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 9 ಚೌರಸ ಮೂಲಮಾನದಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಆಗುವದು. ಒಂದು ವೇಳೆ ಉದ್ದ 3 ಮೂಲಮಾನದಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಮತ್ತು ಅಗಲವನ್ನು 2 ಮೂಲಮಾನದಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 67 ಚೌರಸ ಮೂಲಮಾನದಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗುವದು ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(9*) ಒಂದು ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲೆ A ಮತ್ತು B ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ 70 ಕಿ.ಮೀ ಇದೆ ಒಂದು ಕಾರು A ಸ್ಥಳದಿಂದ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಕಾರು B ಸ್ಥಳದಿಂದ ಹೊರಡುವವು ಒಂದು ವೇಳೆ ಅವು ಒಂದೇ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಹೊರಟಿದ್ದರೆ ಒಂದನ್ನೊಂದು 7 ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಭೆಟ್ಟಿಯಾಗುತ್ತವೆ.ಮತ್ತು ಅವು ಒಂದನ್ನೊಂದು ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಹೊರಟಿದ್ದರೆ 1 ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಭೆಟ್ಟಿಯಾಗುವವು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವುಗಳ ವೇಗ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(10*) ಒಂದು ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ಅಂಕೆಗಳ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು 99 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕೃತಿ : ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ-ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{\text{ಅಂಶ } x}{\text{ಅಂಶ } y}$$

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶಕ್ಕೆ 3ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮತ್ತು ಛೇದದಿಂದ 3 ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ $\frac{18}{11}$ ಇದೆ.

↓ ಸಮೀಕರಣ I

$11x - 6y + 18 = 0$

ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಅಂಶ 8ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಛೇದ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಮಾಡಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ $\frac{1}{2}$ ಇದೆ.

↓ ಸಮೀಕರಣ II

$x - y + 8 = 0$

∴ ಕೊಟ್ಟ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ = $\frac{\square}{\square}$

ಬಂದ ಉತ್ತರದ ತಾಳೆ ಹಾಕಿರಿ

6 ಆರ್ಥಿಕ ನಿಯೋಜನೆ

ELES40

ಬನ್ನಿ ಕಲಿಯೋಣ.

- ಆರ್ಥಿಕ ನಿಯೋಜನೆಯ ಪರಿಚಯ
- ಹೂಡಿಕೆ ಮತ್ತು ಉಳಿತಾಯ
- ತೆರಿಗೆ ರಚನೆ
- ತೆರಿಗೆ - ಗಣನೆ

ಬನ್ನಿ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ರಾಧಾ : ಅಮ್ಮಾ ನಾವು ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಕೊಂಡು ಕೊಳ್ಳೋಣವೇ ?

ಅಮ್ಮ : ಹೌದು, ಮುಂದಿನ ವರ್ಷ ಕೊಂಡು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

ರಾಧಾ : ಅಮ್ಮ, ಈ ವರ್ಷ ಏಕೆ ಬೇಡ ಅನ್ನುತ್ತಿಯಾ ?

ಅಮ್ಮ : ಅದರ ಬೆಲೆ ಕಡಿಮೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ

ರಾಧಾ : ಅಂದರೆ, ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಹಣ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದೇ?

ಅಮ್ಮ : ಹೌದು.

ನಮ್ಮ ನೆರೆಹೊರೆಯವರಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಭಾಷಣೆಗಳು ನಮ್ಮ ಕಿವಿಗೆ ಬೀಳುತ್ತವೆ.

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ವಿವಿಧ ಆವಶ್ಯಕತೆಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸಿ ಕೊಳ್ಳಲು ಹಣದ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇರುತ್ತದೆ, ಅದಕ್ಕಾಗಿ ವರ್ತಮಾನದಲ್ಲಿಯ ಆವಶ್ಯಕತೆಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸಿಕೊಂಡು ಅದರೊಂದಿಗೆ ಇತರ ಆವಶ್ಯಕತೆಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸಿಕೊಡುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ಹಣದ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವರು. ಅದಕ್ಕೆ ನಾವು ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುವದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಉಳಿತಾಯ ಸುರಕ್ಷಿತವಾಗಿ ಉಳಿದು ಅದರಲ್ಲಿಯೇ ಹೆಚ್ಚಳವಾಗುವುದಕ್ಕೆ ಇಡುಗಂಟು ಠೇವು ಎಂದು ಇಡುತ್ತೇವೆ ಅಥವಾ ಭೂಮಿ (ಜಮೀನು) ಮನೆ ಇಂತಹ ಸ್ಥಾವರ ಸಂಪತ್ತನ್ನು ಕೊಂಡು ಕೊಳ್ಳುವುದಕ್ಕೆ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುವುದು ಎನ್ನುವರು.

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುವವವನು ಆವಶ್ಯಕತೆಯಷ್ಟೇ ಹಣ ಖರ್ಚು ಮಾಡಿ ಉಳಿದ ಹಣವನ್ನು ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುವನು. ಅದರಂತೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಹಣವನ್ನು ವಿಚಾರ ಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಲಾಭ ಬರುವಂತೆ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುವನು. ಅದಕ್ಕೆ ಅರ್ಥ ನಿಯೋಜನೆ ಎನ್ನುವರು. ಸಂಪತ್ತಿಯ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮತ್ತು ಸುರಕ್ಷಿತತೆ ಇವುಗಳು ಅರ್ಥ ನಿಯೋಜನೆಯ ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶಗಳಾಗಿವೆ

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಅಥವಾ ಅನಪೇಕ್ಷಿತವಾಗಿ ಬರುವ ಘಟನೆಗಳಿಗಾಗಿ ಬೇಕಾಗುವ ಹಣದ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಅರ್ಥ ನಿಯೋಜನೆಯಿಂದ ಉಪಯೋಗವಾಗುವದು. ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಘಟನೆ

(1) ಮಕ್ಕಳ ಶಿಕ್ಷಣ ಮತ್ತು ಅವರಿಗಾಗಿ ಇತರ ಖರ್ಚು

(2) ವ್ಯವಸಾಯದ ಸಲುವಾಗಿ ಬಂಡವಾಳ

(3) ವಾಹನವನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದು.

(4) ಮನೆ ಕಟ್ಟುವುದು, ಅಥವಾ ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದು

(5) ವೃದ್ಧಾವಸ್ಥೆಯ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯ ಅಗತ್ಯಗಳು

ಅನಪೇಕ್ಷಿತ ಘಟನೆ

(1) ನೈಸರ್ಗಿಕ ಆಪತ್ತುಗಳು

(2) ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಅನಾರೋಗ್ಯ

(3) ಅಪಘಾತದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಹಾನಿ

(4) ಆಕಸ್ಮಿಕ ಮೃತ್ಯು

ಅರ್ಥನಿಯೋಜನೆಯನ್ನು ಏಕೆ ಮಾಡಬೇಕು ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಈ ಮೇಲಿನ ಘಟನೆ ಹಾಗೂ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಉತ್ತರ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅರ್ಥ ನಿಯೋಜನೆ ಮಾಡುವಾಗ ಕೆಲವು ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಡುವದು ಅವಶ್ಯವಾಗಿದೆ.

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಉಳಿತಾಯ (Savings)

(1) ಉಳಿತಾಯ ಸುರಕ್ಷಿತವಾಗಿದ್ದು ಅದರಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಳವಾಗುವುದು ಹಿತಕರವಾಗಿರುವುದು, ನಾವು ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದ ಹಣ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಪೋಸ್ಟದಲ್ಲಿ ಸುರಕ್ಷಿತವಾಗಿರುವುದು. ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿತಾಯ ಖಾತೆಯಲ್ಲಿ ಉಳಿತಾಯವಾದ ಹಣದಿಂದ "ನಗದು ರಹಿತ" "Cashless" ವ್ಯವಹಾರ ಮಾಡುವುದು ಸುಲಭವಾಗುವುದು. ಈ ರೀತಿಯ ವ್ಯವಹಾರದಿಂದ ಸ್ವಂತದ ಹತ್ತಿರ ಹೆಚ್ಚಿನ ಹಣ ಇಡಬೇಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಮತ್ತು ಹಣವನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಅಥವಾ ಕಳ್ಳತನವಾಗುವ ಭಯವೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(2) ನಮಗೆ ದೊರೆತ ಹಣ ರೋಖ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ತೊಡಗಿಸದೇ ಹಾಗೇ ಇಡುವುದರಿಂದ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಕಾಲಾಂತರದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು, ಅಂದರೆ ವಸ್ತುವನ್ನು ಕೊಂಡು ಕೊಳ್ಳುವ ಆ ಹಣದ ಶಕ್ತಿ ಅಂದರೆ ಹಣದ ಕೊಂಡು ಕೊಳ್ಳುವಿಕೆಯ ಶಕ್ತಿ ಎಂದರೆ ಹಣದ ಕ್ರಯಶಕ್ತಿ (Purchasing power) ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. (ಉದಾ. ಇಂದು 10 ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ 2 ಪೆನ್ಸಿಲ್ ದೊರೆಯುತ್ತಿದ್ದರೆ ಕೆಲವು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅದೇ ಹಣದಿಂದ ಒಂದೇ ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಕೊಂಡು ಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು) ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಹಣ ಉಳಿತಾಯ ಅಗತ್ಯ.

(3) ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದ ಹಣ ವ್ಯವಸಾಯ ವೃದ್ಧಿಗಾಗಿ ಹೊಸ ಉದ್ಯೋಗ ಆರಂಭಿಸಲು ಇಂತಹ ಕಾರ್ಯಗಳಿಗಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಅದರಿಂದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಉತ್ಪಾದನೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಳವಾಗುವುದು.

(4) ಒಟ್ಟು ದೊರೆಯುವ ಹಣದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಭಾಗ ಸಮಾಜ ಕಾರ್ಯದ ಸಲುವಾಗಿ ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದಾಗ ಭವಿಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಅದರ ಲಾಭ ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಆಗುವುದು.

(5) ಆವಶ್ಯಕವಿದ್ದಷ್ಟೇ ಖರ್ಚು ಮಾಡಿ, ಅನಾವಶ್ಯಕ ಮೇಲಿನ ಖರ್ಚು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ, ಶಿಕ್ಷಣ, ವೈದ್ಯಕೀಯ ಉಪಚಾರ, ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುವುದು ಹಿತಕರವಾಗಿರುವುದು.

ಬನ್ನಿ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡೋಣ.

ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿ, ಉಳಿತಾಯದ ಕೆಲವು ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಿಂದ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ ಇದರ ಹೊರತು ಇನ್ನೂ ಯಾವ ಮಾರ್ಗಗಳಿವೆ ಎಂಬುದರ ಮಾಹಿತಿ ದೊರಕಿಸಿ, ಅದನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿಯ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿರಿ.

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಹಣ ತೊಡಗಿಸುವುದು (Investments)

ಹಣ ತೊಡಗಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಪ್ರಕಾರಗಳಿವೆ, ಹಣ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಬ್ಯಾಂಕು, ಪೋಸ್ಟ್, ಇಂತಹ ಆರ್ಥಿಕ ವ್ಯವಹಾರ ಮಾಡುವ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ ಹಣ ತೊಡಗಿಸುವಿಕೆಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಾಧಾನ್ಯ ಕೊಡುವರು, ಕಾರಣ ಇದರಲ್ಲಿ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಹಣದ ಸುರಕ್ಷಿತತೆ ಇರುವುದು. ಶೇಅರ್ಸ, ಮ್ಯೂಚಅಲ್ ಫಂಡ್ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಲ್ಲಿ ಹಣ ತೊಡಗಿಸುವಿಕೆ ಮಾಡುವುದು ಸ್ವಲ್ಪ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಅಸುರಕ್ಷಿತತೆ ಎಣಿಸುವುದು. ಏಕೆಂದರೆ ಯಾವ ಉದ್ಯೋಗದಲ್ಲಿ ಹಣ ತೊಡಗಿಸಲಾಗಿದೆಯೋ ಆ ಉದ್ಯೋಗ ಹಾನಿಗೊಳಗಾದರೆ, ತೊಡಗಿಸಿದ ಹಣ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. ಒಂದು ವೇಳೆ ಉದ್ಯೋಗದಲ್ಲಿ ಲಾಭವಾದಾಗ ಹಣ ಸುರಕ್ಷಿತ ಉಳಿಯುವುದು, ಮತ್ತು ಲಾಭಾಂಶವೂ ದೊರೆಯುವುದು.

ಹಣ ತೊಡಗಿಸಿದ ವ್ಯಕ್ತಿ ಹಣ ತೊಡಗಿಸುವಾಗ ಎರಡು ಮುಖ್ಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ಎದುರಿಸಬೇಕಾದ ಗಂಡಾಂತರ, ಇನ್ನೊಂದು ಲಾಭ, ಗಂಡಾಂತರ ಎದುರಿಸಿ ಹಣ ತೊಡಗಿಸುವವನು ಅಧಿಕ ಲಾಭ ಪಡೆಯಬಹುದು, ಆದರೆ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿನ ಗಂಡಾಂತರದಿಂದಲೂ ಹಾನಿಯೂ ಆಗಬಹುದು. ಈ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಬೇಕು.

ಉತ್ಪನ್ನ ಮತ್ತು ಹಣ ತೊಡಗಿಸುವಿಕೆ ಆಧರಿತ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ ಅದನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿ.

ಉದಾ. (1) ಶ್ಯಾಮರಾವರು 2015-2016ರ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಕಾರದ ಕರವನ್ನು ತುಂಬಿದ ನಂತರ ಅವರ ವಾರ್ಷಿಕ ಉತ್ಪನ್ನವು 6,40,000 ರೂ. ಇರುವುದು. ಅವರು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ವಿಮೆಯ 2000 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಕಂತುಗಳನ್ನು ತುಂಬುವರು. ವಾರ್ಷಿಕ ಉತ್ಪನ್ನದ 20% ಭಾಗ ಅವರು ಭವಿಷ್ಯ ನಿಧಿಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸುವರು. ಅಪತ್ಕಾಲೀನ ಖರ್ಚುಗಳಿಗಾಗಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ 500 ರೂ. ಬೇರೆ ಇಡುವರು. ಹಾಗಾದರೆ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಖರ್ಚಿನ ಸಲುವಾಗಿ ಅವರ ಹತ್ತಿರ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಉಳಿಯುವುದು?

ಉತ್ತರ : (i) ಶ್ಯಾಮರಾವರ ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯ = 6,40,000 ರೂಪಾಯಿ

(ii) ವಿಮೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ನಿಯೋಜನೆ = 2000 × 12 = 24,000 ರೂಪಾಯಿಗಳು.

(iii) ಭವಿಷ್ಯ ನಿರ್ವಾಹ ನಿಧಿಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿದ ಹಣ = $6,40,000 \times \frac{20}{100}$ = 1,28,000 ರೂ.

(iv) ಆಪತ್ಕಾಲೀನ ಖರ್ಚುಗಳಿಗಾಗಿ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದು ಇಟ್ಟಿರುವ ಹಣ = 500 × 12 = 6000 ರೂ.

∴ ಒಟ್ಟು ನಿಯೋಜಿತ ಹಣ = 24,000 + 1,28,000 + 6,000 = 1,58,000 ರೂಪಾಯಿ

∴ ವರ್ಷವಿಡೀ ಖರ್ಚುಗಳಿಗಾಗಿ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದು ಇಟ್ಟಿರುವ ಹಣ = 6,40,000 − 1,58,000 = 4,82,000 ರೂಪಾಯಿಗಳು.

ಉದಾ. (2) ಶ್ರೀ ಶಹಾ ಇವರು 3,20,000 ರೂಗಳನ್ನು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ 10% ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿಯಂತೆ 2 ವರ್ಷಗಳಿಗಾಗಿ ತೊಡಗಿಸಿದರು. ಅದರಂತೆ ಅವರು 2, 40, 000 ರೂಪಾಯಿ ಕರಮುಕ್ತ ಮ್ಯೂಚಅಲ ಫಂಡದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿದರು. ಬಜಾರ ಬೆಲೆಯ ಪ್ರಕಾರ 2 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರಿಗೆ 3, 05, 000 ರೂಪಾಯಿ ದೊರೆಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರಿಗೆ ಯಾವ ಹೂಡಿಕೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಲಾಭವಾಯಿತು ?

ಉತ್ತರ : (i) ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಂತೆ ತೊಡಗಿಸಿದ ಹಣದ ಬಡ್ಡಿ ಮೊದಲು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿ = ರಾಸು − ಅಸಲು

ಅಂದರೆ $I = A - P$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - P$$

$$= P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right]$$

$$= 3,20,000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 - 1\right]$$

$$= 3,20,000 \left[(1.1)^2 - 1\right]$$

$$= 3,20,000 \ [1.21 - 1]$$

$$= 3,20,000 \times 0.21$$

$= 67,200$ ರೂಪಾಯಿಗಳು

ಶಹಾ ಇವರು 3,20,000 ರೂ. ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ 67,200 ರೂ. ಬಡ್ಡಿ ದೊರೆಯುವುದು. ದೊರೆತ ಬಡ್ಡಿ ತೊಡಗಿಸಿದ ಹಣದ ಪ್ರತಿಶತ ಎಷ್ಟು ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

ಬಡ್ಡಿಯ ಪ್ರತಿಶತ $= \dfrac{100 \times 67200}{3,20,000} = 21$ $\therefore$ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸುವದರಿಂದ 21% ಲಾಭವಾಯಿತು.

(ii) ಮ್ಯುಚುಅಲ ಫಂಡದಲ್ಲಿ 2 ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ ಹಣ = 3,05,000 ರೂಪಾಯಿ

$\therefore$ ಮ್ಯುಚುಅಲ ಫಂಡದಲ್ಲಿಯ ಲಾಭಾಂಶ = 3,05,000 – 2,40,000 = 65,000 ರೂಪಾಯಿ

$\therefore$ ಲಾಭಾಂಶದ ಪ್ರತಿಶತ $= \dfrac{65000 \times 100}{2,40,000} = 27.08$

ಮ್ಯುಚುಅಲ ಫಂಡದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸುವುದರಿಂದ ಅವರಿಗೆ 27.08% ಲಾಭ ವಾಯಿತು.

ಇದರಿಂದ ಕಂಡು ಬರುವುದೇನೆಂದರೆ ಶ್ರೀ ಶಹಾ ಅವರಿಗೆ ಮ್ಯೂಚುಅಲ ಫಂಡದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸುವುದು ಹೆಚ್ಚು ಲಾಭದಾಯಕವಾಗಿತ್ತು.

ಉದಾ. (3) ಕರೀಮ ಭಾಯಿ ಇವರು ಗಾಜು ಉದ್ಯಮದಲ್ಲಿ 4,00,000 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ತೊಡಗಿಸಿದರು, 2 ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಅವರಿಗೆ ಆ ವ್ಯವಸಾಯದಲ್ಲಿ 5,20,000 ರೂ. ದೊರೆಯಿತು, ತೊಡಗಿಸಿದ ಹಣ ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ದೊರೆತ ಲಾಭ 3 :2 ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಅವಧಿಗಾಗಿ ಠೇವಣಿ (ಮುದತ ಠೇವಣಿ) ಮತ್ತು ಶೇಅರ್ಸಗಳಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿರುವುದು ಹಾಗಾದರೆ ಅವರು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣ ತೊಡಗಿಸಿದರು ?

ಉತ್ತರ : ಕರೀಮ ಭಾಯಿ ಅವರಿಗೆ 2 ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಲಾಭ = 5,20,000 – 4,00,000 = 1,20,000 ರೂಪಾಯಿಗಳು.

ಅವಧಿಗಾಗಿ ಠೇವಣಿ (ಮುದತ ಠೇವಣಿ) $= \dfrac{3}{5} \times 1,20,000$

$= 3 \times 24,000$

$= 72,000$ ರೂಪಾಯಿಗಳು

ಶೇಅರ್ಸದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿದ ಹಣ $= \dfrac{2}{5} \times 1,20,000$

$= 2 \times 24,000$

$= 48,000$ ರೂಪಾಯಿಗಳು

ಕರೀಮ ಭಾಯಿ ಅವರು ಮುದತ ಠೇವಣಿ ಮತ್ತು ಶೇಅರ್ಸ ಈ ಎರಡರಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 72,000 ಮತ್ತು 48,000 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ತೊಡಗಿಸಿದರು.

ಉದಾ. (4) ಶ್ರೀ ಅನಿಲರವರ ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಖರ್ಚುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 5 : 4 ಇದೆ. ಶ್ರೀ ಅಮನರವರ ಅದೇ ಸಂಗತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರ 3 : 2 ಇದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ ಅಮನರವರ ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯದ 4% ಆದಾಯ ಇದು ಅನಿಲರವರ ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯದ 7% ದಷ್ಟು ಇದೆ. ಅನಿಲರವರ ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯ 9600 ರೂಪಾಯಿ ಇದ್ದಾಗ

(i) ಅಮನರವರ ಮಾಸಿಕ ಅದಾಯ ತೆಗೆಯಿರಿ (ii) ಶ್ರೀ ಅನಿಲರವರ ಮತ್ತು ಅಮನರವರ ಉಳಿತಾಯ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವ ಹಾಗೆ, ಉಳಿತಾಯ = ಆದಾಯ – ಖರ್ಚು.

ಅನಿಲ ಇವರ ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಖರ್ಚು ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 5 : 4

ಅನಿಲರವರ ಆದಾಯ $5x$ ತಿಳಿಯುವಾ.

ಅನಿಲರವರ ಖರ್ಚು $4x$ ತಿಳಿಯುವಾ.

ಅಮನರವರ ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಖರ್ಚು ಗುಣೋತ್ತರ 3 : 2

ಅಮನರವರ ಆದಾಯ $3y$ ತಿಳಿಯುವಾ.

ಅಮನರವರ ಖರ್ಚು $2y$ ತಿಳಿಯುವಾ. .

ಅನಿಲರವರ ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯ 9600 ರೂಪಾಯಿ ಅಂದರೆ $5x = 9600$ ಇದರಿಂದ x ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ

$$\therefore\ 5x = 9600$$

$$x = 1920$$

ಮಾಸಿಕ ಖರ್ಚು $= 4x = 4 \times 1920 = 7680$ ರೂಪಾಯಿಗಳು

ಅನಿಲವರವರ ಮಾಸಿಕ ಖರ್ಚು 7680 ರೂಪಾಯಿಗಳು $\therefore$ ಅನಿಲರವರ ಉಳಿತಾಯ 1920 ರೂಪಾಯಿಗಳು.

ಅಮನರವರ ಅದಾಯದ 4% = ಅನಿಲರವರ ಆದಾಯದ 7% ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಗತಿ.

$$\therefore\ \frac{4}{100} \times 3y = 9600 \times \frac{7}{100}$$

$$\therefore\ 12y = 9600 \times 7$$

$$\therefore\ y = \frac{9600 \times 7}{12} = 5600$$

ಅಮನರವರ ಆದಾಯ $= 3y = 3 \times 5600 = 16,800$ ರೂಪಾಯಿಗಳು.

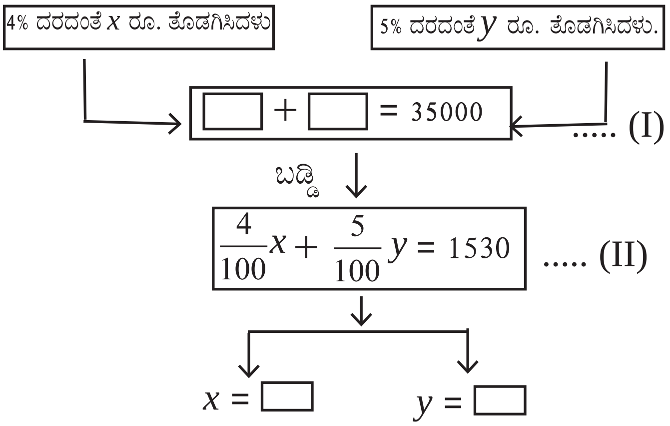
ಅಮನರವರ ಖರ್ಚು $= 2y = 2 \times 5600 = 11,200$ ರೂಪಾಯಿಗಳು.

$\therefore$ ಅಮನರವರ ಉಳಿತಾಯ $16,800 - 11,200 = 5,600$ ರೂಪಾಯಿಗಳು.

ಅಮನರವರ ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯ 16,800 ರೂಪಾಯಿಗಳು ಅಮನರವರ ಉಳಿತಾಯ 5,600 ರೂಪಾಯಿಗಳು.

ಅನಿಲರವರ ಮಾಸಿಕ ಉಳಿತಾಯ 1,920 ರೂಪಾಯಿಗಳು

ಕೃತಿ : ಅಮಿತಳು 35000 ರೂಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೆಲವು ಹಣ 4% ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಹಣದ 5% ಬಡ್ಡಿಯ 1 ವರ್ಷದ ಸಲುವಾಗಿ ತೊಡಗಿಸಿದಳು, ಅವಳಿಗೆ ಒಟ್ಟು ಬಡ್ಡಿ 1530 ರೂ. ದೊರೆತವು, ಹಾಗಾದರೆ ಅವಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಡ್ಡಿಯಿಂದ ತೊಡಗಿಸಿದ ಹಣ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಉಪಕ್ರಮ (1) ಪಾಲಕರ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಿಮ್ಮ ಮನೆಯಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ವಾರದ ಜಮಾ-ಖರ್ಚು ಬರೆಯಿರಿ. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಆರು ವಾರಗಳ ಸ್ತಂಭ ತಯಾರಿಸಿರಿ, ಅನ್ನಧಾನ್ಯ, ಶಿಕ್ಷಣ, ವೈದ್ಯಕೀಯ ಖರ್ಚು, ಪ್ರವಾಸ, ಬಟ್ಟೆ, ಮತ್ತು ಇನ್ನಿತರ ಖರ್ಚು ಈ ಸಂಗತಿಗಳ ಯೋಚನೆ ಮಾಡಿ, ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳ ಖರ್ಚು ಬರೆಯಿರಿ. ಉಳಿತಾಯದ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಮನೆ ಖರ್ಚುಗಾಗಿ ದೊರೆತ ಹಣ, ಮೊದಲಿನ ಉಳಿದ ಹಣ, ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಹೊಸದಾಗಿ ದೊರೆತ ಹಣ ಇದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ನೋಂದಾಯಿಸಿರಿ.

(2) ರಜೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಪೂರ್ಣ ತಿಂಗಳಿನ ಜಮಾ ಖರ್ಚು ಬರೆಯಿರಿ

ಪೃಷ್ಠ 52ರ ಮೇಲಿನ ಗೋವಿಂದನ ಜಮಾ ಖರ್ಚು ಅಭ್ಯಸಿಸಿರಿ

ಕೃತಿ II : ಒಣ ಭೂಮಿ ಇರುವ ರೈತರ ಉತ್ಪನ್ನ (ಅದಾಯ) ಹೆಚ್ಚಿಸಲು ಯಾವ ಉಪಾಯ ಯೋಜನೆ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು ಈ ಬಗ್ಗೆ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿ, ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತಮ್ಮ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತ ಪಡಿಸಿದರು.

ಸೊಹಲ : ರೈತರಿಗೆ ಅವರು ತಮ್ಮ ಗದ್ದೆಯಲ್ಲಿ ಬೆಳೆದ ಬೆಳೆಯನ್ನು ಮಾರಿದಾಗ ಮಾತ್ರ ಹಣ ದೊರೆಯುವುದು. ಆ ಹಣ ಇಡೀ ವರ್ಷ ಸಾಕಾಗುವ ಸಲುವಾಗಿ ಆರ್ಥಿಕ ನಿಯೋಜನೆ ಹೆಚ್ಚು ಮಹತ್ವದ್ದಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಕಾಶ : ಬೇಸಾಯದ ಬೆಳೆಗೆ ತಕ್ಕ ಮತ್ತು ಯೋಗ್ಯ ಬೆಲೆ ದೊರೆತರೆ ರೈತರ ಉತ್ಪನ್ನ ಹೆಚ್ಚುವುದು.

ನರ್ಗೀಸ್ : ಅರ್ಥ ಶಾಸ್ತ್ರದ ನಿಯಮದಂತೆ ಯಾವುದೊಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಪೂರೈಕೆಯು ಬೇಡಿಕೆಗಿಂತ ಬಹಳ ಹೆಚ್ಚಿಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆ ಕಡಿಮೆಯಾದಾಗ ಖಂಡಿತ ಅದರ ಲಾಭ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

ರೀಟಾ : ಒಂದು ವೇಳೆ ಬೇಸಾಯದ ಉತ್ಪನ್ನ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ಮತ್ತು ಬೆಲೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವ ಭಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಪ್ರಮಾಣದಷ್ಟು ಬೆಳೆಯ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬೇಕು. ಯೋಗ್ಯ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಲು ತೆಗೆಯಬೇಕು.

ಆಝುಮ : ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಸಲುವಾಗಿ ಉತ್ತಮ ಗೋದಾಮುಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟಬೇಕು.

ರೇಷ್ಮಾ : ರೈತರಿಗೆ ಕಡಿಮೆ ಬಡ್ಡಿ ದರದಲ್ಲಿ ಸಹಜವಾಗಿ ಸಾಲ ದೊರೆಯಬೇಕು.

ವತ್ಸಲಾ : ಹಾಲಿನ ವ್ಯವಸಾಯ, ಕೋಳಿ ಸಾಕಣಿಕೆ, ಇಂತಹ ಬೇಸಾಯದ ಪೂರಕ ವ್ಯವಸಾಯ ಮಾಡಿದಾಗ ಅಧಿಕ ಪ್ರಮಾಣದ ಆದಾಯ ದೊರೆಯುವದು. ಅದರೊಂದಿಗೆ ದನ ಕರುಗಳ ಮಲ ಮೂತ್ರದಿಂದ ಉತ್ತಮ ಸೇಂದ್ರೀಯ ಗೊಬ್ಬರ ದೊರೆಯುವದು.

ಕುಣಾಲ : ಬೇಸಾಯದ ಬೆಳಗಳ ಮೇಲೆ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡುವ ಕಾರಖಾನೆಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿ. ಪಾನೀಯ ಜ್ಯಾಮ, ಉಪ್ಪಿನಕಾಯಿ, ಒಣಗಿಸಿದ ಕಾಯಿಪಲ್ಲೆ, ಹಣ್ಣಿನ ತಿರುಳು ಇಂತಹ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ಯಾಕಿಂಗ್ ಮಾಡಿ ಇಡುವುದರಿಂದ ಇಡೀ ವರ್ಷ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು. ನಿರ್ಯಾತ ಮಾಡಿದ ಬೇಸಾಯದ ಬೆಳೆಗೆ ಯೋಗ್ಯ ಮತ್ತು ಅಧಿಕ ಉತ್ಪನ್ನ ಪಡೆಯಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.1

1. ಅಲಕಾಳಿಗೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಕಳುಹಿಸಿದ ಹಣದಲ್ಲಿ 90% ಹಣ ಅವಳು ಖರ್ಚು ಮಾಡಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು 120 ರೂ. ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುವಳು ಹಾಗಾದರೆ ಅವಳಿಗೆ ಕಳುಹಿಸಲಾಗುವ ಹಣ ಎಷ್ಟು ?

2. ಸುಮಿತನು 50,000 ರೂಪಾಯಿ ಬಂಡವಾಳದಿಂದ ಖಾದ್ಯ ಪದಾರ್ಥದ ವ್ಯವಸಾಯ ಆರಂಭ ಮಾಡಿದನು ಅದರಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲಿನ ವರ್ಷ 20% ಹಾನಿಯಾಯಿತು. ಉಳಿದ ಬಂಡವಾಳದಿಂದ ಎರಡನೆಯ ವರ್ಷ ಮಿಠಾಯಿಯ ವ್ಯವಸಾಯ ಆರಂಭಿಸಿದನು, ಅದರಲ್ಲಿ ಅವನಿಗೆ 5% ಲಾಭವಾಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಮೂಲ ಬಂಡವಾಳದ ಮೇಲೆ ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಹಾನಿ ಅಥವಾ ಲಾಭವಾಯಿತು ?

3. ನಿಖಿಲನು ತನ್ನ ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯದ 5% ಭಾಗ ಮಕ್ಕಳ ಶಿಕ್ಷಣದ ಸಲುವಾಗಿ ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದನು, 14% ಭಾಗದಷ್ಟು ಶೇಲರ್ಸದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿದನು, 3% ರಷ್ಟು ಭಾಗದಷ್ಟು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟನು, ಮತ್ತು 40% ಭಾಗ ದೈನಂದಿನ ಖರ್ಚಿನಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದನು, ಹೂಡಿಕೆ ಮತ್ತು ಖರ್ಚು ಹೋಗಿ 19000 ರೂಪಾಯಿ ಉಳಿಯಿತು ಹಾಗಾದರೆ ಆತನ ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಶ್ರೀ ಸಯ್ಯದ ಭಾಯಿ ಇವರು ತಮ್ಮ ಆದಾಯದ 40,000 ರೂಪಾಯಿ 8% ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಿಂದ 2 ವರ್ಷಗಳಿಗಾಗಿ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿದರು. ಶ್ರೀ ಫರ್ನಾಂಡಿಸ್‌ರು 1,20,000 ರೂಗಳನ್ನು ಮ್ಯೂಚುಅಲ್ ಫಂಡಿನಲ್ಲಿ 2 ವರ್ಷಗಳಿಗಾಗಿ ತೊಡಗಿಸಿದರು, 2 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಶ್ರೀ ಫರ್ನಾಂಡಿಸ್‌ರವರಿಗೆ 1,92,000 ರೂಪಾಯಿ ದೊರೆತವು ಹಾಗಾದರೆ ಶ್ರೀ ಸಯ್ಯದ ಭಾಯಿ ಮತ್ತು ಶ್ರೀ ಫರ್ನಾಂಡಿಸ್ ಇವರಲ್ಲಿಯ ಯಾರು ತೊಡಗಿಸಿದ ಹಣ ಹೆಚ್ಚು ಲಾಭದಾಯಕವಿರುವುದು

5. ಸಮೀರಾಳು ತನ್ನ ಆದಾಯದ 3% ಆದಾಯ ಸಮಾಜಕಾರ್ಯದ ಸಲುವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಳು ಮತ್ತು 90%ದಷ್ಟು ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದಳು, ಅವಳ ಹತ್ತಿರ 1750 ರೂಪಾಯಿ ಉಳಿದವು ಹಾಗಾದರೆ ಅವಳ ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯ ಎಷ್ಟು ?

ಬನ್ನಿ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡೋಣ.

ತೆರಿಗೆ ಎಂದರೇನು ? ಯಾವ ಯಾವ ಪ್ರಕಾರಗಳ ತೆರಿಗೆ ಇರುವವು ? ಈ ಬಗ್ಗೆ ಮಾಹಿತಿ ಕೆಳಗಿನ website ದಿಂದ ದೊರಕಿಸಿರಿ.

ICT Tools or Links www.incometaxindia.gov.in, www.mahavat.gov.in

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ತೆರಿಗೆ ಆಕರಿಸುವದು

ರಾಷ್ಟ್ರದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗಾಗಿ ಸರಕಾರವು ವಿವಿಧ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಜಾರಿಗೆ ತರುವುದು. ಈ ಯೋಜನೆಗಳು ಪೂರ್ಣಗೊಳ್ಳಲು ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಮಾಣದ ಹಣದ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇರುವುದು, ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಅನೇಕ ಪ್ರಕಾರದ ತೆರಿಗೆಗಳನ್ನು ತುಂಬಿಸಿಕೊಂಡು ಹಣದ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದು.

ತೆರಿಗೆಯ ಉಪಯುಕ್ತತೆ (Utility of taxes)

- ಮೂಲಭೂತ ಆವಶ್ಯಕತೆಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸುವುದು.
- ವಿವಿಧ ಜನಹಿತ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಜಾರಗೆ ತರುವುದು.
- ವಿವಿಧ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳ ವಿಕಾಸ ಕಾರ್ಯ ಮತ್ತು ಸಂಶೋಧನೆ ಈ ವಿಷಯಗಳ ಕುರಿತು ಯೋಜನೆ ಮಾಡುವುದು.
- ಕಾಯ್ದೆ ಮತ್ತು ಸುವ್ಯವಸ್ಥೆ ಕಾಪಾಡುವುದು.
- ನೈಸರ್ಗಿಕ ಆಪತ್ತುಗಳಿಂದ ತೊಂದರೆಗೊಳಗಾದ ಜನರಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುವುದು.
- ರಾಷ್ಟ್ರದ ಮತ್ತು ನಾಗರಿಕರ ಸಂರಕ್ಷಣೆ ಮಾಡುವುದು, ಇತ್ಯಾದಿ.

ತೆರಿಗೆಯ ಪ್ರಕಾರಗಳು (Types of taxes)

ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ತೆರಿಗೆ (Direct taxes)	ಅಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ತೆರಿಗೆ (Indirect taxes)
ಯಾವ ತೆರಿಗೆಯ ಭಾರ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದು ಅಂತಹ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ತೆರಿಗೆ ಎನ್ನುವರು. ಉದಾ. ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ, ಸಂಪತ್ತಿನ ತೆರಿಗೆ, ವೃತ್ತಿ ತೆರಿಗೆ, ಇತ್ಯಾದಿ.	ಯಾವ ತೆರಿಗೆಯ ಭಾರ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದಿಲ್ಲವೋ ಅಂತಹ ತೆರಿಗೆಗೆ ಅಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ತೆರಿಗೆ ಎನ್ನುವರು. ಉದಾ. ಕೇಂದ್ರೀಯ ವಿಕ್ರಿ ತೆರಿಗೆ ಮೂಲ್ಯವರ್ಧಿತ ತೆರಿಗೆ. ಅಬಕಾರಿ ತೆರಿಗೆ, ಕಸ್ಟಮ ಡ್ಯೂಟಿ, ಸೇವಾ ತೆರಿಗೆ ಇತ್ಯಾದಿ.

2017ರಲ್ಲಿ ಯಾವ ರೀತಿಯ ತೆರಿಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದು ಆ ಪ್ರಕಾರಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ನಮೂದಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉಪಕ್ರಮ: ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರಗಳ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬುವ ನೌಕರಿದಾರರು ಅಥವಾ ವ್ಯವಸಾಯಕರಿಂದ ವಿವಿಧ ತೆರಿಗೆ ವಿಷಯಗಳ ಮಾಹಿತಿ ದೊರಕಿಸಿರಿ.

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ (Income tax)

ವ್ಯಕ್ತಿಯ, ಸಂಸ್ಥೆಯ ಅಥವಾ ಇತರ ಕಾಯ್ದೆಗಳನುಸಾರ ಭಾರತದಲ್ಲಿಯ ಆದಾಯ, ತೆರಿಗೆಯ ನಿಯಮಕ್ಕನುಸಾರ ಮರ್ಯಾದೆಗಿಂತ ಅಧಿಕ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಮೇಲೆ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದು.

ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ನಾವು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ತೆರಿಗೆಯು ಕೇವಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದರ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ ಕುರಿತು ವಿಚಾರ ಮಾಡಲಿದ್ದೇವೆ.

ತೆರಿಗೆ ಆಕರಣೆ ಕೇಂದ್ರ ಸರಕಾರವು ಮಾಡುವುದು. ಭಾರತದಲ್ಲಿ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬಿಕೊಳ್ಳುವಿಕೆ ಎರಡು ಅಧಿನಿಯಮಗಳನುಸಾರ ಮಾಡಲಾಗುವುದು.

(1) ತೆರಿಗೆ ಕಾಯ್ದೆ 1961 ಇದು ದಿ. 01.04.1962 ದಿಂದ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿ ಬಂದಿತು.

(2) ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಸಂಸತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಸಮ್ಮತ ಮಾಡುವ ಆರ್ಥಿಕ ವಿಷಯದ ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾಡುವ ಕಾಯ್ದೆ.

ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಫೆಬ್ರುವರಿ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಥ ಮಂತ್ರಿಯವರು ಮುಂಬರುವ ಆರ್ಥಿಕ ವರ್ಷದ ನಿಗದಿ ಪಡಿಸಿದ ಅಂದಾಜು ಪತ್ರಿಕೆಯನ್ನು ಸಾದರ ಪಡಿಸುವರು. ಅದರಲ್ಲಿ ತೆರಿಗೆಯ ದರ ಸೂಚಿಸಲಾಗುವುದು. ಸಂಸತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಅಂದಾಜು ಪತ್ರಿಕೆ ಮಂಜೂರು ಮಾಡಿದಾಗ, ಆ ದರವನ್ನು ಮುಂಬರುವ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅನ್ವಯಿಸಲಾಗುವುದು.

ತೆರಿಗೆಯ ದರವನ್ನು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಅರ್ಥ ಸಂಕಲ್ಪದಲ್ಲಿ ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸಲಾಗುವುದು.

ತೆರಿಗೆ ಸಂದರ್ಭದ ಅಂಶಗಳು :

- **ತೆರಿಗೆದಾರ** (An assessee) : ತೆರಿಗೆ ನಿಯಮದಲ್ಲಿ ಸಮಾವಿಷ್ಟವಾದ ನಿಯಮಕ್ಕನುಸಾರ ಯಾವ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬಬೇಕಾಗಿರುವುದೋ ಆ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ತೆರಿಗೆದಾರ ಎನ್ನುವರು.
- **ಆರ್ಥಿಕ ವರ್ಷ** (Financial year) : ಯಾವ ಒಂದು ವರ್ಷದ ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ತೇರಿಗೆ ಪಾತ್ರವಿರುವಂತಹ ಆದಾಯ ಪಡೆಯಲಾಗುವುದೋ ಆ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಆರ್ಥಿಕ ವರ್ಷ ಎನ್ನುವರು. ನಮ್ಮ ದೇಶದಲ್ಲಿ 1 ಎಪ್ರೀಲದಿಂದ 31 ಮಾರ್ಚ ಆರ್ಥಿಕ ವರ್ಷ ಇರುವದು.
- **ತೆರಿಗೆ ಆಕರಣೆಯ ವರ್ಷ** (Assessment year) : ಅರ್ಥಿಕ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವ ಮುಂದಿನ ಆರ್ಥಿಕ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ವರ್ಷ ಎನ್ನುವರು. ಸದ್ಯದ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿರುವ ಹಿಂದಿನ ಅರ್ಥಿಕ ವರ್ಷದ ಸಲುವಾಗಿ ತೆರಿಗೆ ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾಡಲಾಗುವುದು.

ಆರ್ಥಿಕ ವರ್ಷ ಮತ್ತು ತುಂಬಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ವರ್ಷ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಲಾಗಿದೆ

ಆರ್ಥಿಕ ವರ್ಷ (Financial Year)	ಸಂಬಂಧಿತ ತೆರಿಗೆ ಆಕರಣೆಯ ವರ್ಷ (Assessment Year)
2016-17 ಅಂದರೆ 01-04-2016 ತೆ 31-03-17	2017-18
2017-18 ಅಂದರೆ 01-04-2017 ತೆ 31-03-18	2018-19

- **ಶಾಶ್ವತ ಸ್ವರೂಪದ ಖಾತೆ ಕ್ರಮಾಂಕ** (PAN) : ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ತೆರಿಗೆದಾರನು ಅರ್ಜಿಯನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸಿದಾಗ ತೆರಿಗೆ ವಿಭಾಗದ ಕಡೆಯಿಂದ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಸ್ವರೂಪದ ಹತ್ತು ಅಂಕೆಗಳುಳ್ಳ ಕ್ರಮಾಂಕವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುವುದು ಅದಕ್ಕೆ ಶಾಶ್ವತ ಸ್ವರೂಪ ಖಾತೆ ಕ್ರಮಾಂಕ ಅಂದರೆ 'Permanent Account Number (PAN)' ಎನ್ನುವರು. ಅನೇಕ ಮಹತ್ವವಿರುವ ಕಾಗದ ಪತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಅದರಂತೆ ಆರ್ಥಿಕ ವ್ಯವಹಾರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಈ ಕ್ರಮಾಂಕವನ್ನು ನಮೂದಿಸುವುದು ಆವಶ್ಯಕವಾಗಿರುವುದು.

ಪ್ಯಾನ ಕಾರ್ಡದ ಉಪಯೋಗ : ತೆರಿಗೆ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ತೆರಿಗೆ ವಿತರಣೆ ಪತ್ರ (ರಿಟರ್ನ್ ಫಾರ್ಮ) ಇತರ ಪತ್ರ ವ್ಯವಹಾರ ಇವುಗಳ ಮೇಲೆ ಪ್ಯಾನ ಕ್ರಮಾಂಕ ಬರೆಯುವದು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿರುವುದು. ಅದಲ್ಲದೆ ದೊಡ್ಡ ಆರ್ಥಿಕ ವ್ಯವಹಾರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಪ್ಯಾನ ಕ್ರಮಾಂಕ ನಮೂದಿಸ ಬೇಕಾಗುವುದು. ಅನೇಕ ಸಲ ಪ್ಯಾನ ಕಾರ್ಡನ್ನು ಗುರುತು ಪುರಾವೆಯೆಂದು (Identity proof) ಸಹಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು.

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಆದಯ ತೆರಿಗೆಯ ಸಂದಾಯ

ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ ಸಂದಾಯವು ಆದಾಯದ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಆದಾಯದ ವಿವಿಧ ಮೂಲಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಆವಶ್ಯಕವಿದೆ.

ಆದಾಯದ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಐದು ಮೂಲಗಳಿವೆ.

(1) ಸಂಬಳದಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಆದಾಯ

(2) ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆಯಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಆದಾಯ

(3) ವ್ಯವಹಾರ ಮತ್ತು ವ್ಯವಸಾಯಗಳಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಆದಾಯ

(4) ಬಂಡವಾಳ ಲಾಭದಿಂದ (Capital gain) ದೊರೆಯುವ ಆದಾಯ.

(5) ಇತರ ಮೂಲಗಳಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಆದಾಯ

ಸಂಬಳ ಪಡೆಯುವ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿತ ಅಂಶಗಳು :

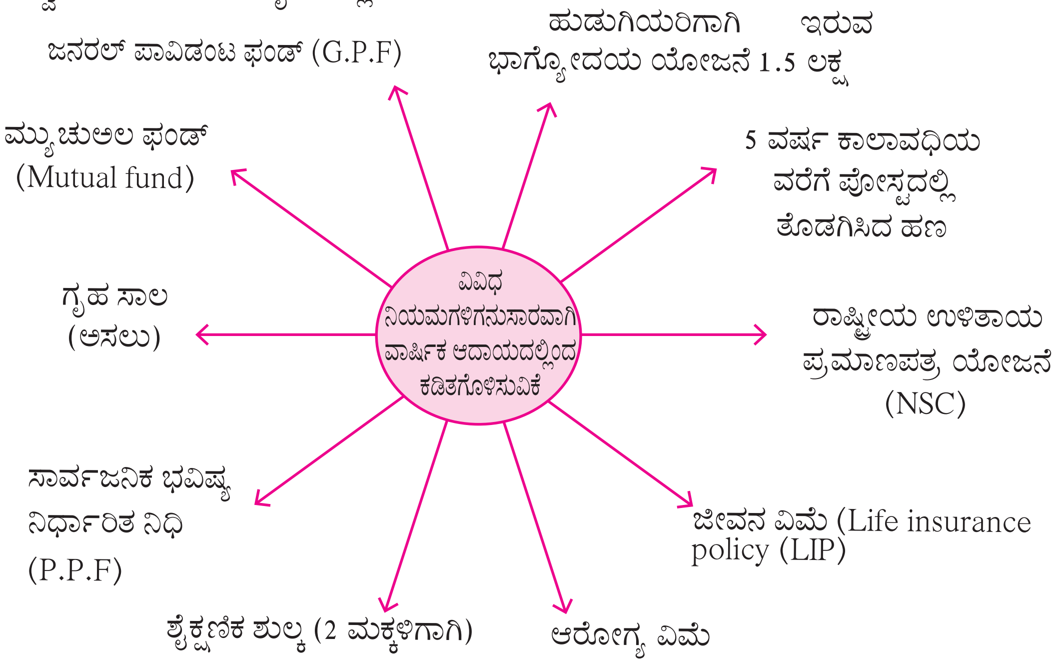
ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸಲು ಒಟ್ಟು ಆರ್ಥಿಕ ವರ್ಷದ ಆದಾಯದ ವಿಚಾರ ಮಾಡಲಾಗುವುದು. ತೆರಿಗೆ ಅಧಿನಿಯಮಕ್ಕನುಸಾರ 80C, 80D, 80G ಇತ್ಯಾದಿ ಕಲಮುಗಳ ಅನುಸಾರ ಒಟ್ಟು ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯದಲ್ಲಿ ಕೆಲವೊಂದನ್ನು ಕಡಿತ ಮಾಡಲಾಗುವುದು. ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡಿ ಉಳಿದ ಆದಾಯಕ್ಕೆ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಗೆ ಪಾತ್ರವಾಗಿರುವ ಆದಾಯ ಎನ್ನುವರು. ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಿಕೆಯು ಇದೇ ಆದಾಯದ ಮೇಲಿಂದ ಮಾಡಲಾಗುವುದು.

ತೆರಿಗೆ ಸಂದಾಯದ ನಿಯಮ ಕೆಲವು ಸಲ ಬದಲಾಗುವದು ಆದ್ದರಿಂದ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಬದಲಾದ ನಿಯಮಗಳ ಸದ್ಯದ ಮಾಹಿತಿ ಇರುವುದು. ಆವಶ್ಯಕವಾಗಿರುವುದು.

ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮರ್ಯಾದೆಯ ವರೆಗಿನ ರಕಮಿನ ಮೇಲೆ ತೆರಿಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಹಣಕ್ಕೆ ತೆರಿಗೆಯ ಆದಾಯದ ಮೂಲ ಸವಲತ್ತಿನ ಹಣ ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

- ರೈತರಿಗೆ ಬೇಸಾಯದ ಆದಾಯದ ಮೇಲೆ ತೆರಿಗೆಯ ಸೂಟು ಇರುವುದು.
- ತೆರಿಗೆಯ ಕಲಮು 80 G ಅನುಸಾರ ಪ್ರಧಾನ ಮಂತ್ರಿ ಸಹಾಯ ನಿಧಿ, ಮುಖ್ಯ ಮಂತ್ರಿ ಸಹಾಯ ನಿಧಿ ಅಥವಾ ಮಾನ್ಯತೆವುಳ್ಳ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಿಗೆ ದೇಣಗಿ ಕೊಟ್ಟರೆ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯಲ್ಲಿ 100% ರಿಯಾಯತಿ ದೊರೆಯುವದು.
- 80 D ಕಲಮು ಪ್ರಕಾರ ಆರೋಗ್ಯದ ಸಲುವಾಗಿ ತೇರಿಗೆ ರಿಯಾಯತಿ ಕೊಡಲಾಗುವುದು.
- ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಟ್ಟು ಹೂಡಿಕೆಯ ವಿಮೆಯ ಕಂತಿನ ಮೇಲೆ ತೆರಿಗೆ 80C ಈ ಕಲಮು ಪ್ರಕಾರ ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರದ ಹಣ ಹೂಡಿಕೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ 1,50,000 ರೂಪಾಯಿಗಳ ವರೆಗೆ ಕಡಿತ ದೊರೆಯುವದು.

2017-2018ರ ಅರ್ಥ ಸಂಕಲ್ಪನೆಗನುಸಾರ ಯಾವುದು ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವದನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು ಅಂತಹ ಕೆಲವು ಮಹತ್ವದ ಹೂಡಿಕೆ ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ತೆರಿಗೆದಾರನ ವಯಸ್ಸಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ತೆರಿಗೆಯ ದರವನ್ನು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷದ ಅರ್ಥ ಸಂಕಲ್ಪನೆಯಲ್ಲಿ ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸಲಾಗುವುದು. ಆದಾಯ ಹಂತಗಳ ಅನುಸಾರ ತೆರಿಗೆಯ ದರ ತೋರಿಸುವ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ I

60 ವರ್ಷಗಳ ವರೆಗಿನ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗಾಗಿ			
ತೆರಿಗೆಯ ಆದಾಯದ ಹಂತ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ)	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ	ಶಿಕ್ಷಣ ಉಪ ತೆರಿಗೆ	ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಮತ್ತು ಉಚ್ಚ ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ತೆರಿಗೆ
2,50,000 ವರೆಗೆ	ತೆರಿಗೆ ಮುಕ್ತ	ತೆರಿಗೆ ಮುಕ್ತ	ತೆರಿಗೆ ಮುಕ್ತ
2,50,001 ರಿಂದ 5,00,000	5 ಪ್ರತಿಶತ ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ ವಜಾ ಎರಡುವರೆ ಲಕ್ಷ ರೂ. ಇದರ ಮೇಲೆ	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ 2 ಪ್ರತಿಶತ	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 1 ಪ್ರತಿಶತ
5,00,001 ರಿಂದ 10,00,000	₹ 12,500 + 20 ಪ್ರತಿಶತ ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ ವಜಾ ಐದು ಲಕ್ಷ ರೂ. ಇದರ ಮೇಲೆ.	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 2 ಪ್ರತಿಶತ	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 1 ಪ್ರತಿಶತ
10,00,000 ಗಿಂತ ಅಧಿಕ	₹ 1,12,500 + 30 ಪ್ರತಿಶತ ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ ವಜಾ ಹತ್ತು ಲಕ್ಷ ಇದರ ಮೇಲೆ	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 2 ಪ್ರತಿಶತ	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 1 ಪ್ರತಿಶತ
ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯ 50 ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಗಳಿಂದ ಒಂದು ಕೋಟಿ ರೂಪಾಯಿಗಳ ವರೆಗಿನ ಒಟ್ಟು ತೆರಿಗೆಯ ಮೇಲೆ 10 ಪ್ರತಿಶತ ಸರ್ ಚಾರ್ಜ್ ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋಟಿ ರೂಪಾಯಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವವರೆಗೆ ತೆರಿಗೆಯ ಮೇಲೆ 15 ಪ್ರತಿಶತ ಸರ್‌ಚಾರ್ಜ್ ಇರುವುದು.			

ಕೃತಿ : ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕ (I) ರ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆಯಿರಿ.

ಉದಾ.
- ಮೇಹತಾ ಇವರ ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯ ಎರಡುವರೆ ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿ ಇದೆ. ಅವರು ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯದಲ್ಲಿ ಕಡಿತಗೊಳ್ಳುವಂತಹ ಯಾವುದೇ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿರಲಿಲ್ಲ ಹಾಗಾದರೆ ಅವರ ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ ಯಾವ ಹಂತಕ್ಕೆ ಹೋಲಿಕೆಯಾಗುವುದು? [ ]
- ಅವರು ಎಷ್ಟು ರಕಮುಗಳ ಮೇಲೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರತಿಶತ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬಬೇಕಾಗುವುದು ? ₹ [ ] ಮೇಲೆ [ ] ದರದಂತೆ
- ಉಪಕರವನ್ನು ಎಷ್ಟು ರಕಮಿನ ಮೇಲೆ ತುಂಬಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದು ? [ ]

ಕೋಷ್ಟಕ II

ಜ್ಯೇಷ್ಠ ನಾಗರಿಕರಿಗಾಗಿ (ವಯಸ್ಸು 60 ರಿಂದ 80ರ ವರೆಗಿನ)			
ತೇರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯದ ಹಂತ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ)	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ	ಶಿಕ್ಷಣ ಉಪ ತೆರಿಗೆ	ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಮತ್ತು ಉಚ್ಚ-ಶಿಕ್ಷಣದ ತೆರಿಗೆ
3,00,000ದ ವರೆಗೆ	ತೆರಿಗೆ ಮುಕ್ತ	ತೆರಿಗೆ ಮುಕ್ತ	ತೆರಿಗೆ ಮುಕ್ತ
3,00,001 ರಿಂದ 5,00,000	5 ಪ್ರತಿಶತ (ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ ವಜಾ ಮೂರು ಲಕ್ಷ ಇದರ ಮೇಲೆ)	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 2 ತೆರಿಗೆ ಪ್ರತಿಶತ	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 1 ಪ್ರತಿಶತ
5,00,001 ರಿಂದ 10,00,000	₹ 10,000 + 20 ಪ್ರತಿಶತ (ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ ವಜಾ ಐದು ಲಕ್ಷ ಇದರ ಮೇಲೆ)	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 2 ಪ್ರತಿಶತ	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 1 ಪ್ರತಿಶತ
10,00,000 ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	₹ 1,10,000 + 30 ಪ್ರತಿಶತ (ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ ವಜಾ ಹತ್ತು ಲಕ್ಷ ಇದರ ಮೇಲೆ)	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 2 ಪ್ರತಿಶತ	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 1 ಪ್ರತಿಶತ
(ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯ 50 ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಗಳಿಂದ ಒಂದು ಕೋಟಿ ರೂಪಾಯಿಗಳ ವರೆಗೆ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ತೆರಿಗೆಯ ಮೇಲೆ 10 ಪ್ರತಿಶತ ಸರಚಾರ್ಜ ಮತ್ತು ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯ ಒಂದು ಕೋಟಿಗಿಂತ ಅಧಿಕ ಇರುವ ತೆರಿಗೆಯ ಮೇಲೆ 15 ಪ್ರತಿಶತ ಸರ್‌ಚಾರ್ಜ್)			

ಕೃತಿ : ಕೋಷ್ಟಕ II ರ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿಯನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಉದಾ. ಶ್ರೀ ಪಂಡಿತರವರ ವಯಸ್ಸು 67 ವರ್ಷ ಇದೆ. ಕಳೆದ ವರ್ಷ ಅವರ ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯ 13,25000 ರೂಪಾಯಿ ಇತ್ತು ಎಷ್ಟು ತೆರಿಗೆ ತುಂಬಬೇಕಾಗುವುದು? ಹಾಗಾದರೆ ಅವರ ಕರಪಾತ್ರ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಷ್ಟು ಇತ್ತು ?

13,25,000 – 10,00,000 = 3,25,000

ಅವರಿಗೆ ಕೋಷ್ಟಕದ ಪ್ರಕಾರ 1,10,000 ರೂ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬಬೇಕಾಗುವುದು, ಅದಲ್ಲದೆ 3,25000 ರೂಗಳ ಮೇಲೆ 30%

ಅಂದರೆ 3,25,000 $\times \frac{30}{100}$ = ☐ ರೂ. ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬಬೇಕಾಗುವುದು

ಅಂದರೆ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ ಹಣ ☐ + ☐ = ☐

ಕೊಡಬೇಕಾದ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 2% ಶಿಕ್ಷಣ ಉಪತೆರಿಗೆ ಅಂದರೆ ☐ $\times \frac{2}{100}$ = ☐. ಇದು ಶಿಕ್ಷಣ ಉಪತೆರಿಗೆ ಇರುವುದು.

ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 1%ದಷ್ಟು ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಮತ್ತು ಉಚ್ಚಮಾಧ್ಯಮಿಕ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬಬೇಕಾಗುವುದು, ಅಂದರೆ ☐ $\times \frac{1}{100}$ = ☐ ಇದು ದ್ವಿತೀಯ ತೆರಿಗೆ ಇರುವುದು.

∴ ಒಟ್ಟು ತೆರಿಗೆ = ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ + ಶಿಕ್ಷಣ ಉಪ ತೆರಿಗೆ + ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಮತ್ತು ಶಿಕ್ಷಣ ಉಪ ತೆರಿಗೆ

= ☐ + ☐ + ☐

= ₹ 2,13,725

ಕೋಷ್ಟಕ III

ಅತೀ ಜ್ಯೇಷ್ಠ ನಾಗರಿಕರಿಗಾಗಿ			
ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ ಹಂತ	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ	ಶಿಕ್ಷಣ ಉಪ ತೆರಿಗೆ	ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಮತ್ತು ಉಚ್ಚ ಶಿಕ್ಷಣದ ಉಪ ತೆರಿಗೆ.
5,00,000 ವರೆಗೆ	ತೆರಿಗೆ ಮುಕ್ತ	ತೆರಿಗೆ ಮುಕ್ತ	ತೆರಿಗೆ ಮುಕ್ತ
5,00,001 ತೆರಿಗೆ ರಿಂದ 10,00,000	20 ಪ್ರತಿಶತ (ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ ವಜಾ ಐದು ಲಕ್ಷ ಇದರ ಮೇಲೆ)	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 2 ಪ್ರತಿಶತ	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 1 ಪ್ರತಿಶತ
10,00,000ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ	₹ 1,00,000 + 30 ಪ್ರತಿಶತ ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ ವಜಾ ಹತ್ತು ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿ	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 2 ಪ್ರತಿಶತ	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ 1 ಪ್ರತಿಶತ
ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯ 50 ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಯಿಂದ ಒಂದು ಕೋಟಿ ರೂಪಾಯಿಗಳ ವರೆಗಿನ ತೆರಿಗೆಯ ಮೇಲೆ 10 ಪ್ರತಿಶತ ಸರಚಾರ್ಜ್ ಮತ್ತು ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯದ ಒಂದು ಕೋಟಿಗಿಂತ ಅಧಿಕ ಇರುವವರೆಗೆ ತೆರಿಗೆಯ ಮೇಲೆ 15 ಪ್ರತಿಶತ ಸರಚಾರ್ಜ.			

ಉಪಕ್ರಮ : 80C, 80G, 80D ಈ ಅಧಿನಿಯಮಗಳ ಮಾಹಿತಿ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.
ಪ್ಯಾನ ಕಾರ್ಡ್ ನೋಡಿರಿ ಅದರ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಮಾಹಿತಿ ನೋಂದಾಯಿಸಿರಿ.
ನಗದು ರಹಿತ (Cashless) ವ್ಯವಹಾರಕ್ಕಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸಾಧನಗಳ ಮಾಹಿತಿ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಂತೆ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ದೊರೆಯುವ ವಿವಿಧ ಸವಲತ್ತುಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ತೆರಿಗೆಯ ಗಣನೆ ಯಾವ ರೀತಿ ಮಾಡುವರು ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಉದಾ. (1) ಶ್ರೀ ಮ್ಹಾತ್ರೆಯವರ ವಯಸ್ಸು 50 ವರ್ಷಗಳಿವೆ. ಅವರ ಒಟ್ಟು ವಾರ್ಷಿಕ ₹ 12,00,000 ಇದೆ. ಶ್ರೀ ಮ್ಹಾತ್ರೆಯವರು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಹಣ ತೊಡಗಿಸಿದರು.

(i) ವಿಮಾ ಕಂತು : ₹ 90,000 (ii) ಭವಿಷ್ಯ ನಿರ್ವಾಹ ನಿಧಿ ಉಳಿತಾಯ ₹ 25,000

(iii) ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಭವಿಷ್ಯ ನಿರ್ವಾಹ ನಿಧಿ ₹ 15,000 (iv) ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಉಳಿತಾಯ ಪ್ರಮಾಣ ಪತ್ರ : ₹ 20,000 ಯೋಜನೆ

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಮಾನ್ಯತೆ ಇರುವ ಕಡಿತ, ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ ಮತ್ತು ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ: (1) ಒಟ್ಟು ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯ = ₹ 12,00,000 ರೂಪಾಯಿ ಇದೆ.

(2) 80C ಅನುಸಾರ ಒಟ್ಟು ಉಳಿತಾಯ

ಉಳಿತಾಯ	ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ
(i) ವಿಮೆ ಕಂತು	90,000
(ii) ಭವಿಷ್ಯ ನಿರ್ವಾಹ ನಿಧಿಯಲ್ಲಿ ಉಳಿತಾಯ	25,000
(iii) ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಭವಿಷ್ಯ ನಿರ್ವಾಹ ನಿಧಿ	15,000
(iv) ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಉಳಿತಾಯ ಪ್ರಮಾಣ ಪತ್ರ	20,000
ಒಟ್ಟು	1,50,000

ನಿಯಮ 80C ಅನುಸಾರ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ 1,50,000 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಕಡಿತಕ್ಕೆ ಮಾನ್ಯತೆ ಇದೆ.

(3) ∴ ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ = [1] ರಲ್ಲಿಯ ಹಣ – [2] ರಲ್ಲಿಯ ಹಣ

= 12,00,000 – 1,50,000 = 10,50,000

(4) ಶ್ರೀ ಮ್ಹಾತ್ರೆಯವರು ತುಂಬಬೇಕಾಗಿರುವ ತೆರಿಗೆಯ ಗಣನೆ ಕೋಷ್ಟಕ (I)ರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಾಡುವಾ.

ಶ್ರೀ ಮ್ಹಾತ್ರೆಯವರ ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ = ₹10,50,000 ಅಂದರೆ ಹತ್ತು ಲಕ್ಷಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕವಿದೆ.

∴ ಕೋಷ್ಟಕ (I) ಅನುಸಾರ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ = ₹ 1,12,500 + 30% (ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ವಜಾ ಹತ್ತು ಲಕ್ಷದ ಮೇಲೆ 30%)

∴ 10,50,000 – 10,00,000 = 50,000

∴ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ = $1,12,500 + 50,000 \times \frac{30}{100}$

$= 1,12,500 + 15,000$

$= 1,27,500$

ಇದರ ಹೊರತು 2% ಶಿಕ್ಷಣ ಉಪತೆರಿಗೆ ಮತ್ತು 1% ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಮತ್ತು ಉಚ್ಚ ಶಿಕ್ಷಣದ ಉಪ ತೆರಿಗೆ ಇವುಗಳ ಸಮಾವೇಷ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿರುವುದು.

ಶಿಕ್ಷಣ ಉಪ ತೆರಿಗೆ = $1,27,500 \times \frac{2}{100}$ = 2550 ರೂಪಾಯಿಗಳು.

ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಮತ್ತು ಉಚ್ಚ ಶಿಕ್ಷಣ ಉಪ ತೆರಿಗೆ = $1,27,500 \times \frac{1}{100}$ = 1275 ರೂಪಾಯಿಗಳು.

∴ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ಉಪ ತೆರಿಗೆ = 1,27,500 + 2550 + 1275 = 1,31,325 ರೂಪಾಯಿಗಳು.

ಶ್ರೀ ಮ್ಹಾತ್ರೆಯವರು ತುಂಬಬೇಕಾಗಿರುವ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ = 1,31,325 ರೂಪಾಯಿಗಳು.

ಉದಾ. (2) ಶ್ರೀ ಅಹಮದರವರು 62 ವರ್ಷದ ಜೇಷ್ಠ ನಾಗರಿಕರು, ಒಂದು ಕಂಪೆನಿಯಲ್ಲಿ ನೌಕರಿ ಮಾಡುವರು. ಅವರ ಒಟ್ಟು ವಾರ್ಷಿಕ ಅದಾಯ 6,20,000 ರೂಪಾಯಿ ಇತ್ತು. ಅವರು ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಭವಿಷ್ಯ ನಿರ್ವಾಹನಿಧಿಯಲ್ಲಿ 1,00,000 ರೂಪಾಯಿ ತೊಡಗಿಸಿದರು, ಅದರಂತೆ ವಿಮೆ ವಾರ್ಷಿಕ ಕಂತು 80,000 ರೂಪಾಯಿ ತುಂಬಿದರು ಮತ್ತು ಮುಖ್ಯ ಮಂತ್ರಿ ಸಹಾಯ ನಿಧಿಗೆ 10,000 ರೂಪಾಯಿ ದೇಣಿಗೆ ನೀಡಿದರು. ಹಾಗಾದರೆ ಅಹಮದರು ಎಷ್ಟು ತೆರಿಗೆ ತುಂಬಬೇಕಾಗುವದು ?

ಉತ್ತರ (1) ಒಟ್ಟು ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯ = 6,20,000 ರೂಪಾಯಿ

(2) ಒಟ್ಟು ಕಡಿತ (ನಿಯಮ 80C ಪ್ರಕಾರ)

(i) ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಭವಿಷ್ಯ ನಿರ್ವಾಹ ನಿಧಿ = 1,00,000 ರೂಪಾಯಿಗಳು

(ii) ವಿಮೆ = 80,000 ರೂಪಾಯಿಗಳು

1,80,000 ರೂಪಾಯಿಗಳು

(iii) 80C ಅನುಸಾರ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ 1,50,000 ರೂಪಾಯಿ ಕಡಿತ ಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವುದು.

(3) ಮುಖ್ಯಮಂತ್ರಿ ನಿಧಿಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಹಣ (80 G ರಂತೆ ಕಡಿತ) = 10000 ರೂಪಾಯಿಗಳು

(4) ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಉಳಿತಾಯ = (1) – [(2) + (3)]

= 6,20,000 – [1,50,000 + 10000]

= 4,60,000 ರೂಪಾಯಿಗಳು

ಕೋಷ್ಟಕ (II) ಪ್ರಕಾರ ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ ಮೂರು ಲಕ್ಷರಿಂದ ಐದು ಲಕ್ಷದ ವರೆಗೆ ಸೀಮಿತ ಇರುವುದು

$\therefore$ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ = (ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ – 3,00,000) $\times \frac{5}{100}$

$= (4,60,000 - 3,00,000) \times \frac{5}{100}$

$= 1,60,000 \times \frac{5}{100}$

= 8000 ರೂಪಾಯಿಗಳು

ಶಿಕ್ಷಣ ಉಪತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದು ಆದ್ದರಿಂದ

ಶಿಕ್ಷಣದ ಉಪ ತೆರಿಗೆ : $8,000 \times \frac{2}{100} = 160$ ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಮತ್ತು ಉಚ್ಚ ಶಿಕ್ಷಣದ ಉಪ ತೆರಿಗೆ : $8,000 \times \frac{1}{100} = 80$

$\therefore$ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ = 8000 + 160 + 80 = ₹ 8,240

$\therefore$ ಅಹಮದರು ಒಟ್ಟು 8240 ರೂಗಳಷ್ಟು ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬಿರಬೇಕು.

ಉದಾ. (3) ಶ್ರೀಮತಿ ಹಿಂದುಜಾ ಇವರ ವಯಸ್ಸು 50 ವರ್ಷವಿದೆ. ಕಳೆದ ವರ್ಷ ಅವರ ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ 16,30,000 ರೂಪಾಯಿ ಇತ್ತು, ಹಾಗಾದರೆ ಅವರಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬಬೇಕಾಗುವುದು ?

ಉತ್ತರ : ಶ್ರೀಮತಿ ಹಿಂದುಜಾರವರ ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ ಹತ್ತು ಲಕ್ಷಕ್ಕಿಂತಲೂ ಎಷ್ಟು ಈ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಇರುವುದು.

ಈಗ ನಾವು ಕೋಷ್ಟಕ I ರಿಂದ ಅವರ ತೆರಿಗೆಯನ್ನ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡೋಣ.

ಕೋಷ್ಟಕ I ರ ಪ್ರಕಾರ ಹತ್ತು ಲಕ್ಷಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ಆದಾಯಕ್ಕಾಗಿ

ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ = ರೂ. 1,12,500 + (ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ ವಜಾ ಹತ್ತು ಲಕ್ಷದ ಮೇಲೆ 30%)

ಶ್ರೀಮತಿ ಹಿಂದುಜಾರವರ ಆದಾಯ - ಹತ್ತು ಲಕ್ಷ $= 16,30,000 - 10,00,000$

$= 6,30,000$ ರೂಪಾಯಿಗಳು

ಕೋಷ್ಟಕ I ರ ಅನುಸಾರ

ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ $= 1,12,500 + 6,30,000 \times \frac{30}{100}$

$= 1,12,500 + 30 \times 6,300$

$= 1,12,500 + 1,89,000$

$= 3,01,500$ ರೂಪಾಯಿಗಳು

ಇದರ ಮೇಲೆ 1% ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಮತ್ತು ಉಚ್ಚ ಶಿಕ್ಷಣದ ತೆರಿಗೆ $= \frac{1}{100} \times 3,01,500 =$ ₹ 3015

2% ಶಿಕ್ಷಣ ತೆರಿಗೆ $= \frac{2}{100} \times 3,01,500$ = ₹ 6030

$\therefore$ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ $= 3,01,500 + 3015 + 6030$

$= 3,10,545$

$\therefore$ ಒಟ್ಟು ತುಂಬಬೇಕಾಗುವ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ 3,10,545 ರೂಪಾಯಿಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 6.2

(1) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿ, ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ವಿರುವ ಆದಾಯದ ಮೇಲೆ ಆದಯ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬಬೇಕಾಗುವುದೋ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಅ.ಕ್ರ.	ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು	ವಯಸ್ಸು	ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ (₹) ಆದಾಯ	ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬಬೇಕಾಗುವುದೋ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೋ
(i)	ಕು. ನಿಕಿತಾ	27	₹ 2,34,000	
(ii)	ಶ್ರೀ. ಕುಲಕರ್ಣಿ	36	₹ 3,27,000	
(iii)	ಸೌ. ಮೆಹತಾ	44	₹ 5,82,000	
(iv)	ಶ್ರೀ ಬಜಾಜ	64	₹ 8,40,000	
(v)	ಶ್ರೀ. ಡಿಸಿಲ್ವಾ	81	₹ 4,50,000	

(2) ಶ್ರೀ ಕರ್ತಾರ ಸಿಂಗರವರು (ವಯಸ್ಸು 48 ವರ್ಷ) ಖಾಜಗಿ ಕಂಪನಿಯಲ್ಲಿ ನೌಕರಿ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರವಾಸ ಭತ್ತೆ ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ ಅವರ ಮಾಸಿಕ ಸಂಬಳ 42,000 ರೂ. ಇದೆ. ಭವಿಷ್ಯ ನಿರ್ವಾಹ ನಿಧಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು 3000 ರೂಪಾಯಿ ತೊಡಗಿಸುವರು. ಅವರು 15,000 ರೂಪಾಯಿಗಳ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಉಳಿತಾಯ ಪ್ರಮಾಣ ಪತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದರೆ. ಮತ್ತು ಅವರು 12,000 ರೂಪಾಯಿ ದೇಣಗಿಯನ್ನು ಪ್ರಧಾನ ಮಂತ್ರಿ ಸಹಾಯ ನಿಧಿಗೆ ಕೊಟ್ಟರು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಿರಿ.

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 6.

(1) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ.

(i) ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರದ ಹಣ ತೊಡಗಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ 80 C ಕಲಮಿನ ಅನುಸಾರ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ ಲೆಕ್ಕದ ಸಲುವಾಗಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಕಡಿಮೆ ಸಿಗುವುದು?

(A) ಒಂದೂವರೆ ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿ (B) ಎರಡೂವರೆ ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿ (C) ಒಂದು ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿ (D) ಎರಡು ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿ

(ii) ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು 2017-18ರಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಆದಾಯಕರ ಆಕರಣೆಯ ವರ್ಷ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದು ?

(A) 2016-17 (B) 2018-19 (C) 2017-18 (D) 2015-16

(2) ಶ್ರೀ ಶೇಖರ ಆದಾಯದ 60% ಖರ್ಚು ಮಾಡುವರು. ಅದರಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಆದಾಯದಲ್ಲಿಂದ 300 ರೂಪಾಯಿ ಅನಾಥಾಶ್ರಮಕ್ಕೆ ದೇಣಗಿ ಕೊಡುವರು. ಆಗ ಅವರ ಕಡೆ 3200 ರೂಪಾಯಿ ಉಳಿಯುವುದು, ಹಾಗಾದರೆ ಅವರ ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಶ್ರೀ ಹೀರಾಲಾಲ ಇವರು 2,15,000 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಮ್ಯೂಚುಅಲ ಫಂಡದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿದರು. ಅದರ 2 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರಿಗೆ 3,05,000 ರೂಪಾಯಿ ದೊರೆತವು. ಶ್ರೀ ರಮಣಿಕಲಾಲ ಇವರು 1,40,000 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು 8% ದರದಂತೆ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ 2 ವರ್ಷಗಳಿಗಾಗಿ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿದರು, ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೆ ಉಂಟಾದ ಪ್ರತಿಶತ ಲಾಭ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಯಾರು ತೊಡಗಿಸಿದ ಹಣ ಹೆಚ್ಚು ಲಾಭದಾಯಕವಾಗಿರುವುದು ?

(4) ಒಂದು ಉಳಿತಾಯ ಖಾತೆಯಲ್ಲಿ ವರ್ಷದ 24,000 ರೂಪಾಯಿಗಳಿದ್ದವು. ಅದರಲ್ಲಿಯ 56,000 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ತುಂಬಿ ಮತ್ತು ಆ ಒಟ್ಟು ಹಣವನ್ನು 7.5% ದರದಿಂದ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಂತೆ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಲಾಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ 3 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಹಣ ಮರಳಿ ದೊರೆಯುವುದು ?

(5) ಶ್ರೀ ಮನೋಹರರವರು ತಮ್ಮ ಆದಾಯದ 20% ಭಾಗವನ್ನು ತಮ್ಮ ದೊಡ್ಡ ಮಗನಿಗೆ ಮತ್ತು 30% ಭಾಗ ಚಿಕ್ಕ ಮಗನಿಗೆ ಕೊಟ್ಟನು. ಅದರಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಹಣದ 10% ಹಣ ದೇಣಿಗೆಯೆಂದು ಶಾಲೆಗೆ ಕೊಟ್ಟರು. ಆಗ ಅವರ ಹತ್ತಿರ 1,80,000 ರೂಪಾಯಿ ಉಳಿದವು ಹಾಗಾದರೆ ಶ್ರೀ ಮನೋಹರರವರ ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6*) ಕೈಲಾಸನ ಆದಾಯದ 85% ಖರ್ಚಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಅವನ ಆದಾಯವು ಖರ್ಚು ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದನು. 36%ರಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಯಿತು. ಆಗ ಅವನ ಖರ್ಚು ಮೊದಲಿನ ಖರ್ಚಿಗಿಂತ 40% ಹೆಚ್ಚಾಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನ ಈಗ ಆಗುವ ಪ್ರತಿಶತ ಉಳಿತಾಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(7*) ರಮೇಶ, ಸುರೇಶ ಮತ್ತು ಪ್ರೀತಿ ಈ ಮೂರು ಜನರ ಒಟ್ಟು ವಾರ್ಷಿಕ ಆದಾಯ 7,98,000 ರೂಪಾಯಿ ಇದೆ. ಈ ಮೂವರು ಅವರ ಆದಾಯದ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 75%, 80%, ಮತ್ತು 90% ಖರ್ಚು ಮಾಡುವರು, ಹಾಗಾದರೆ ಅವರ ಉಳಿತಾಯದ ಗುಣೋತ್ತರ 16:17:12 ಇದ್ದಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ವಾರ್ಷಿಕ ಉಳಿತಾಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(8) ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಕೊಡಬೇಕಾಗುವ ತೆರಿಗೆ ಗಣನೆ ಮಾಡಿರಿ.

(i) ಶ್ರೀ ಕದಮ ಇವರ ವಯಸ್ಸು 35 ವರ್ಷವಿದ್ದು ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ 13,35,000 ರೂಪಾಯಿಗಳು ಇದೆ.

(ii) ಶ್ರೀ ಖಾನ ಇವರ ವಯಸ್ಸು 65 ವರ್ಷವಿದ್ದು ಅವರ ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ 4,50,000 ರೂಪಾಯಿಗಳು ಇದೆ.

(iii) ಕುಮಾರಿ ವರ್ಷಾ (ವಯಸ್ಸು 26 ವರ್ಷ) ಇವಳ ತೆರಿಗೆ ಪಾತ್ರ ಆದಾಯ 2,30,000 ರೂಪಾಯಿಗಳು ಇದೆ.

◈◈◈

ICT Tools or Links

ಭಾರತ ಸರಕಾರದ www.incometaxindia.gov.in ಈ ವೆಬಸಾಯಿಟಗೆ ಭೇಟಿ ಕೊಡಿ ಈ ಸಾಯಿಟ ಮೇಲೆ incometax calculator ಈ ಮೇನುದ ಮೇಲೆ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿರಿ, ಕೆಳಕಂಡ ಫಾರ್ಮದಲ್ಲಿ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಉತ್ಪನ್ನ ಮತ್ತು ಕಡಿತದ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಹಣವನ್ನು ಬರೆದು ತೆರಿಗೆಯ ಹಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.

7 ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ

ಬನ್ನಿ ಕಲಿಯೋಣ.

- ಜೋಡಿ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ
- ವಿಭಜಿತ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ
- ಶತಮಾನ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ
- ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮತ್ತು ದ್ವಿತೀಯ ಸಾಮಗ್ರಿ
- ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಮತ್ತು ವರ್ಗೀಕೃತ ಅವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ
- ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕ
- ಮಧ್ಯ, ಮಧ್ಯಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕ (ಆವರ್ಗೀಕೃತ ಸಾಮಗ್ರಿ, ಸಲುವಾಗಿ)

ಸ್ವಲ್ಪ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಾದಾ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ಮತ್ತು ಜೋಡಿ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದರಂತೆ ವರ್ತಮಾನ ಪತ್ರಿಕೆ, ಮಾಸಿಕಗಳು, ದೂರದರ್ಶನ ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಮಾಧ್ಯಮದಿಂದ ವಿವಿಧ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ನೋಡಿ ಅದರ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ.

ಮಾಹಿತಿಯ ಸ್ವರೂಪಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಆ ಮಾಹಿತಿಯ ಯೋಗ್ಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾದರಪಡಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಮಹತ್ವದಾಗಿರುವುದು.

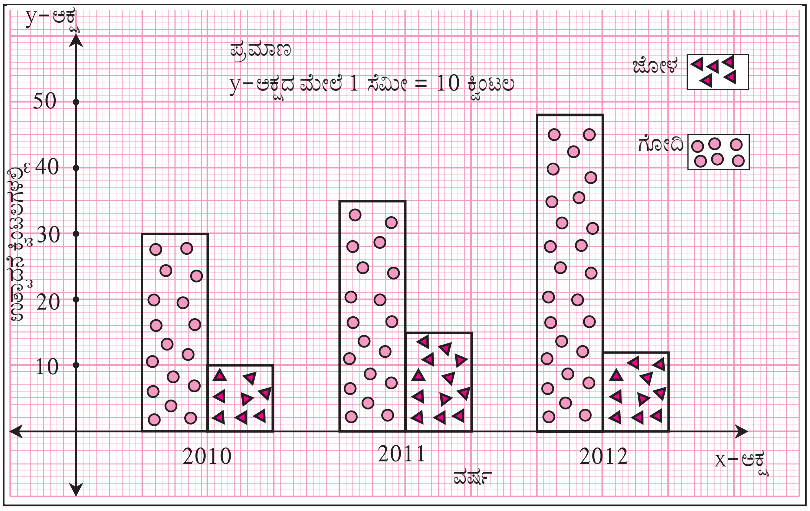
ಉದಾ. ಒಬ್ಬ ರೈತನಿಗೆ ಅವನ ಗದ್ದೆಯಲ್ಲಿ ಗೋದಿ ಮತ್ತು ಜೋಳ ಈ ಎರಡು ಬೆಳೆಗಳ ಮೂರು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಜೋಡಿ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ತೆಗೆದು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.

(i) ಮೂರು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಧಾನ್ಯದ ಉತ್ಪಾದನೆ ಸತತವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ.?

(ii) 2012ರಲ್ಲಿ 2011ಕ್ಕಿಂತ ಜೋಳದ ಉತ್ಪಾದನೆ ಎಷ್ಟರಿಂದ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ?

(iii) 2010ರಲ್ಲಿಯ ಗೋದಿಯ ಉತ್ಪಾದನೆ ಮತ್ತು 2012ರಲ್ಲಿಯ ಗೋದಿಯ ಉತ್ಪಾದನೆ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೆಷ್ಟು ?

(iv) ಈ ಆಲೇಖದ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.



ಉತ್ಪಾದನೆ (ಕ್ವಿಂಟಲ) / ವರ್ಷ	ಗೋದಿ	ಜೋಳ	ಒಟ್ಟು
2010			
2011			
2012	48	12	60

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

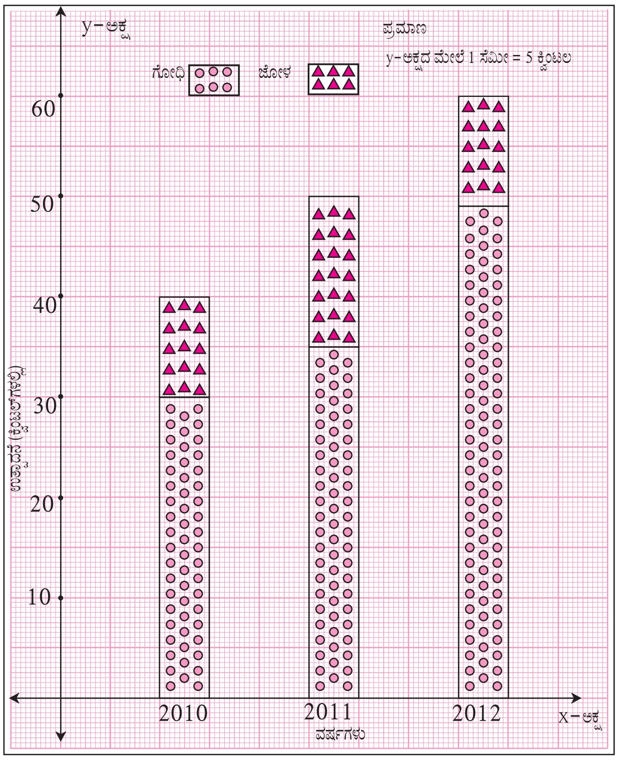
ವಿಭಜಿತ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ (Sub–divided bar diagram)

ಸಾಮಗ್ರಿಯಲ್ಲಿಯ ಮಾಹಿತಿಯ ಹೋಲಿಕೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ಬೇರೆ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದಲೂ ತೋರಿಸಲು ಬರುವುದು. ಅದಕ್ಕೆ ವಿಭಜಿತ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದೇ ಪ್ರಕಾರದ ಎರಡು ಸಂಗತಿಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡುವರು. ಬರುವ ಬೇರೀಜಿನ ಯೋಗ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದೇ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು. ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಗತಿ ಪ್ರಮಾಣ ಬದ್ಧ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಬರುವದು. ಹಿಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯ ಮಾಹಿತಿ ತೋರಿಸುವ ವಿಭಜಿತ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ಹೇಗೆ ರಚಿಸುವುದು ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(i) ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆಯಷ್ಟು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ ಯೋಗ್ಯ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಬೇಕು.

(ii) ಅದರಲ್ಲಿ ಗೋದಿಯ ಉತ್ಪಾದನೆ ಇದು ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಭಾಗ ಇರುವುದು. ಅದನ್ನು ವಿಶಿಷ್ಟ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಬೇಕು.

(iii) ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿಯ ಉಳಿದ ಭಾಗ ಇದು ಜೋಳದ ಉತ್ಪಾದನೆ ತೋರಿಸುವುದು ಅದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯ ವಿಶಿಷ್ಟ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ತೋರಿಸಬೇಕು.



ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಬದಿಗೆ ತಡೆದ ವಿಭಜಿತ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ನೋಡಿರಿ.

ಎರಡು ಸಂಗತಿಗಳ ವರ್ಗೀಕರಣವು ಶತಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಅಧಿಕ ಸ್ಪಷ್ಟಗೊಳ್ಳುವುದು. ಇದನ್ನು ನಾವು ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಉದಾ: 2000 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಮೇಲೆ 600 ರೂಪಾಯಿ ಲಾಭ ಮತ್ತು 1500 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಮೇಲೆ 510 ರೂಪಾಯಿ ಇದರಲ್ಲಿ 600 ರೂಪಾಯಿ ಲಾಭ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಕಂಡು ಬರುವುದು. ಆದರೆ ಎರಡೂ ಲಾಭಗಳ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 30% ಮತ್ತು 34% ಈ ಶತಮಾನವನ್ನು ಗಮನಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿ 1500 ರೂಪಾಯಿಯ ಮೇಲೆ 510 ರೂಪಾಯಿ ಲಾಭ ಈ ವ್ಯವಹಾರವು ಹೆಚ್ಚು ಲಾಭದಾಯಕ ಇರುವುದು, ಎಂದು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಬರುವದು.

ಶತಮಾನ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ(Percentage bar diagram)

ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯ ಹೋಲಿಕೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರಿಸಿ ಅದರ ವಿಭಜಿತ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ತೆಗೆಯುವರು, ಅದನ್ನು ಶತಮಾನ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ಎನ್ನುವರು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯ ಮಾಹಿತಿಯ ಶತಮಾನಗಳು ಬದಿಯ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವರ್ಷ	ಗೋದಿ ಉತ್ಪಾದನೆ (ಕ್ವಿಂಟಲ್)	ಜೋಳದ ಉತ್ಪಾದನೆ (ಕ್ವಿಂಟಲ್)	ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಗೋದಿಯ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಶತಮಾನ
2010	30	10	$\frac{30}{40} \times 100 = 75\%$
2011	35	15	$\frac{35}{50} \times 100 = 70\%$
2012	48	12	$\frac{48}{60} \times 100 = 80\%$

ಈ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗುವುದು.

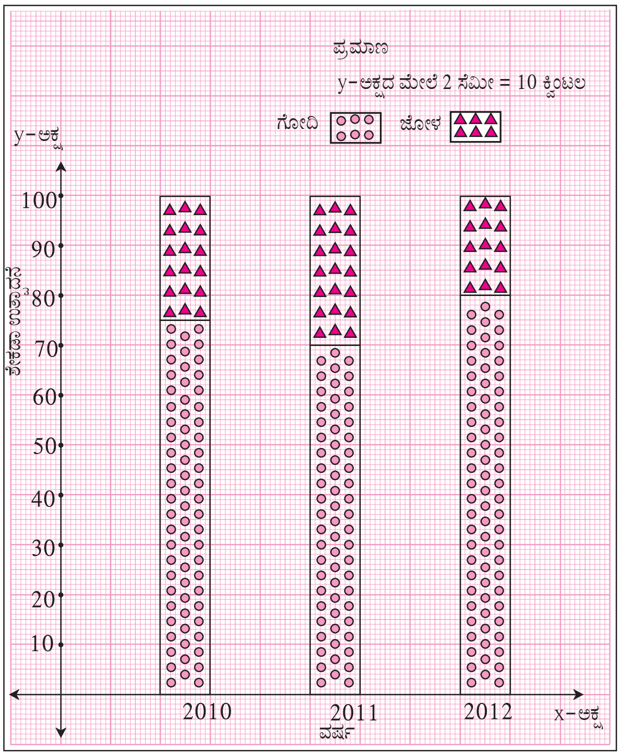
(i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿಯ ಗೋದಿ ಮತ್ತು ಜೋಳದ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆಯೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಗೋದಿ ಮತ್ತು ಜೋಳದ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಶತಮಾನವನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ.

(ii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ತಂಭದ Y−ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಎತ್ತರ ಪ್ರಮಾಣಬದ್ಧವಾಗಿ 100 ರಷ್ಟು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

(iii) ಗೋದಿಯ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆಯೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಶತಮಾನ, ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಸ್ತಂಭದ ಭಾಗ ಮಾಡಿ ವಿಶಿಷ್ಟ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(iv) ಸ್ತಂಭದ ಉಳಿದ ಭಾಗ ಇದು ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆಯಲ್ಲಿಯ ಜೋಳದ ಶತಮಾನ ತೋರಿಸುವದು.

ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ಸಂಗತಿಗಳ ಮಾಹಿತಿ ಕೂಡ ವಿಭಜಿತ ಅಥವಾ ಶತಮಾನ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖದಿಂದ ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು.



ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆ

ಉದಾ. (1) ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಶತಮಾನ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕುಟುಂಬಗಳ ವಿವಿಧ ಸಂಗತಿಗಳಿಗಾಗಿ ಮಾಡಿದ ಖರ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ.

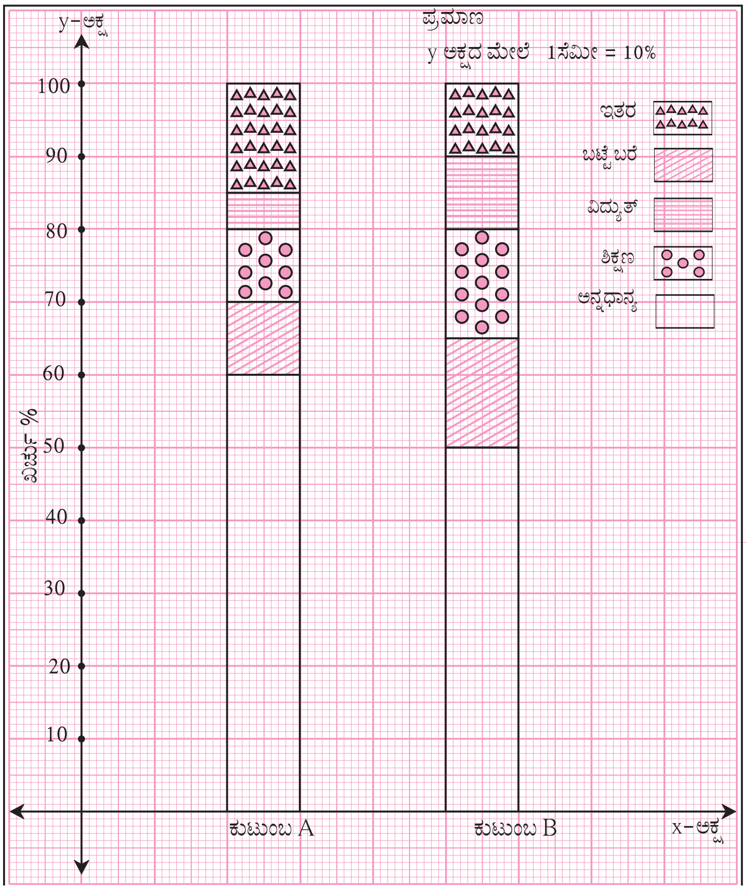
(i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕುಟುಂಬದ ವಿವಿಧ ಬಾಬತ್ತುಗಳ ಮೇಲಿನ ಖರ್ಚಿನ ಶತಮಾನ ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) ಯಾವ ಕುಟುಂಬದ ಅನ್ನಧಾನ್ಯದ ಖರ್ಚು ಅದರ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚಿನ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಧಿಕವಿದೆ ? ಎಷ್ಟು ಪ್ರತಿಶತ ಅಧಿಕವಿದೆ ?

(iii) ಎರಡೂ ಕುಟುಂಬದ ಅನ್ನಧಾನ್ಯದ ಖರ್ಚು ಇತರ ಖರ್ಚುಗಳ ಪ್ರತಿಶತ ಎಷ್ಟು ಇದೆ ?

(iv) ಯಾವ ಕುಟುಂಬದವರ ವಿದ್ಯುತ್ತಿನ ಖರ್ಚಿನ ಪ್ರತಿಶತ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ ?

(v) ಯಾವ ಕುಟುಂಬದವರ ಶಿಕ್ಷಣದ ಖರ್ಚಿನ ಪ್ರತಿಶತ ಪ್ರಮಾಣ ಅಧಿಕವಿದೆ ?



ಉತ್ತರ : (i)

ಖರ್ಚು / ಕುಟುಂಬ	ಅನ್ನಧಾನ್ಯ	ಬಟ್ಟೆ	ಶಿಕ್ಷಣ	ವಿದ್ಯುತ್ತು	ಇತರ
A	60%	10%	10%	5%	15%
B	50%	15%	15%	10%	10%

(ii) ಕುಟುಂಬ A ದ ಅನ್ನಧಾನ್ಯದ ಖರ್ಚು ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚಿನ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಕುಟುಂಬ B ಯ ಖರ್ಚಿಗಿಂತ 10% ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಇದೆ.

(iii) ಕುಟುಂಬ A ದ ಇತರ ಖರ್ಚು 15% ಮತ್ತು ಕುಟುಂಬ B ಯ ಇತರ ಖರ್ಚು 10% ಇದೆ.

(iv) ಕುಟುಂಬ B ಯ ವಿದ್ಯುತ ಖರ್ಚಿನ ಶತಮಾನ ಅಧಿಕವಿದೆ. (v) ಕುಟುಂಬ B ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಖರ್ಚಿನ ಶತಮಾನ ಅಧಿಕವಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

(1) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಭಾರತದಲ್ಲಿಯ ಟ್ರಕ್ ಮತ್ತು ಬಸ್ಸು ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆ ಮಾಹಿತಿಯ ಶತಮಾನ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ. (ಶತಮಾನ ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕದವರೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ)

ವರ್ಷ	ಟ್ರಕ್ಕುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಬಸ್ಸುಗಳ ಸಂಖೆ
2006-2007	47	9
2007-2008	56	13
2008-2009	60	16
2009-2010	63	18

(2) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಭಾರತದಲ್ಲಿಯ ಪಕ್ಕಾ ರಸ್ತೆ ಮತ್ತು ಕಚ್ಚಾ ರಸ್ತೆಗಳ ಮಾಹಿತಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ ವಿಭಜಿತ ಹಾಗೂ ಶತಮಾನ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ರಚಿಸಿರಿ. (ಶತಮಾನ ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕದವರೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.)

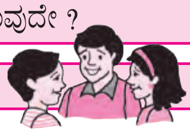
ವರ್ಷ	ಪಕ್ಕಾ ರಸ್ತೆ ಲಕ್ಷ ಕಿಮೀ	ಕಚ್ಚಾ ರಸ್ತೆ ಲಕ್ಷ ಕಿಮೀ
2000-2001	14	10
2001-2002	15	11
2002-2003	17	13
2003-2004	20	19

ಕೃತಿ : ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ರಾಜ್ಯಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿ 1000 ಹುಡುಗರ ಹಿಂದೆ ಇರುವ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ, ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ.

ರಾಜ್ಯಗಳು	ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆ	ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ	ಒಟ್ಟು	ಹುಡುಗರ ಶತಮಾನ (ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕದವರೆಗೆ)	ಹುಡುಗಿಯರ ಶತಮಾನ (ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕದವರೆಗೆ)
ಆಸಾಮ	1000	960	1960	$\frac{1000}{1960}\times\frac{100}{1} = = 51\%$	100 - 51 = 49%
ಬಿಹಾರ	1000	840	1840		
ಪಂಜಾಬ	1000	900			
ಕೇರಳ	1000	1080			
ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ	1000	900			

ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ದೊರೆತ ಮಾಹಿತಿಯ ಶತಮಾನ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ, ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ನಿಷ್ಕರ್ಷ ತೆಗೆದು ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಿರಿ.

ಯೋಚನೆ ಮಾಡಿರಿ: ಪೃಷ್ಠ ಕ್ರಮಾಂಕ 111ರ ಕೃತಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿಯ ಐದು ರಾಜ್ಯಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿ ಹತ್ತು ಸಾವಿರ ಹುಡುಗರ ಹಿಂದೆ ಇರುವ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದೇ ರಾಜ್ಯಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಾಕ್ಷರತೆಯ ಪ್ರಮಾಣ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅಸಾಮ (73%), ಬಿಹಾರ್ (64%), ಪಂಜಾಬ (77%), ಕೇರಳ (94%), ಮತ್ತು ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ (83%) ಆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿಯ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಆ ರಾಜ್ಯಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಾಕ್ಷರತೆಯ ಪ್ರಮಾಣ ಇವುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಯೋಚನೆ ಮಾಡಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಏನಾದರೂ ನಿಷ್ಕರ್ಷೆ ದೊರೆಯುವುದೇ ?



ಬನ್ನಿ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡೋಣ.

ಕೆಳಗಿನ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಯಾವ ಪ್ರಕಾರದ ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ರಚಿಸುವುದು ಯೋಗ್ಯವಿರುವುದು ?

(1) ನಾಲ್ಕು ಊರುಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಾಕ್ಷರತೆಯ ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣ.
(2) ಒಂದು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿಯ ವಿವಿಧ ಘಟಕಗಳ ಮೇಲೆ ಆಗುವ ಖರ್ಚು.
(3) ಐದು ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿ ವಿಭಾಗದ ಹುಡುಗ ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ.
(4) ಮೂರು ದಿವಸ ನಡೆಯುತ್ತಿರುವ ವಿಜ್ಞಾನ ಪ್ರದರ್ಶನಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿದಿನ ಭೇಟಿ ಕೊಡುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.
(5) ಜನೇವರಿಯಿಂದ ಜೂನ ಈ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿಯ ನಿಮ್ಮ ಊರಿನ ಕನಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಉಷ್ಣತಾಮಾನ.
(6) ದ್ವಿಚಕ್ರ ವಾಹನ ನಡೆಸುವಾಗ ಹೆಲ್ಮೆಟ್ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮತ್ತು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾರದ 100 ಕುಟುಂಬಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ (Statistics)

ಯಾವುದೊಂದು ದೊಡ್ಡ ಸಮೂಹದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವಾಗ ಅದರಲ್ಲಿಯ ಕೆಲವು ಘಟಕಗಳ ಸಾಕಾಗುವಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕ ಗುಂಪುಗಳು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವರು. ಅದು ಈ ದೊಡ್ಡ ಸಮೂಹದ ಪ್ರತಿನಿಧಿ ಗುಂಪು ಇರುವುದು, ಈ ಪ್ರತಿನಿಧಿ ಗುಂಪಿನ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿತ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಒಟ್ಟು ಗೂಡಿಸುವರು. ಈ ಮಾಹಿತಿಯು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುವುದು. ಅದರ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡಿ ನಿಷ್ಕರ್ಷೆ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರದ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ (Statistics) ಎನ್ನುವರು.

Statistics ಈ ಶಬ್ದ Status ಈ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಶಬ್ದದಿಂದ ತಯಾರಾದ ಶಬ್ದವಿದೆ. ಇದರ ಅರ್ಥ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿಯ ಸ್ಥಿತಿ ಎಂದು ಆಗುವದು ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲು ಈ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ರಾಜ್ಯದ ಶಾಸಕೀಯ ವ್ಯವಹಾರಕ್ಕಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಈಗ ಈ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಎಲ್ಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. **ಸರ್ ರೋನಾಲ್ಡ್ ಆಯಮ್ಲರ್ ಫಿಶರ್ (Sir Ronald Aylmer Fisher)** (17 ಫೆಬ್ರವರಿ 1890-29 ಜುಲೈ 1962) ಇವರಿಗೆ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಜನಕ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವರು.

ಮಾಹಿತಿಯ ಸಂಗ್ರಹಣೆ (Data collection)

ಶಿಕ್ಷಕ : ಒಂದು ಊರಿನಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿ ಕುಟುಂಬದ ಹತ್ತಿರ ಎಷ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರದ ಹೊಲವಿದೆ ಎಂಬ ಈ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಏನು ಮಾಡುವಿರಿ ?

ರಾಬರ್ಟ : ಗುರುಗಳೇ, ಊರಿನಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮನೆಗೆ ಹೋಗಿ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಹತ್ತಿರ ಎಷ್ಟು ಹೊಲಗಳಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೊಂದಾಯಿಸುವೆವು.

ಶಿಕ್ಷಕ : ಸರಿಯಾಗಿ ಉತ್ತರಿಸಿದೆ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮಿತ್ರರೇ, ಯಾವುದೊಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಸಮೂಹದ ಬಗ್ಗೆ, ನಾವು ಸಂಗ್ರಹಿಸುವ ಮಾಹಿತಿಯು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುವುದು. ಅದಕ್ಕೆ ಸಾಮಗ್ರಿ ಎನ್ನುವರು. ಸಾಮಗ್ರಿ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮಾಡುವ ಮುಂಚೆ ನಾವು ಅದನ್ನು ಯಾವುದಕ್ಕಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವವರಿದ್ದೇವೆ ಎಂದ ಬಗ್ಗೆ ಗೊತ್ತಿರಬೇಕು. ಒಂದು ವೇಳೆ ಯಾವನೊಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ಮಾಹಿತಿ ಪಡೆಯುವ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆ ಕೇಳುವದು, ಅಳತೆ ಮಾಡುವದು ಇತ್ಯಾದಿ ಪ್ರಕಾರ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸಾಮಗ್ರಿ ಎನ್ನುವರು.

ಆಫರಿನ್ : ಅಂದರೆ, ರಾಬರ್ಟನು ಹೇಳಿದ ಪ್ರಕಾರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮನೆಗೆ ಹೋಗಿ ಹೊಲಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಯು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸಾಮಗ್ರಿಯೇ ಆಗಿರುವುದು.

ಶಿಕ್ಷಕ : ಶಬ್ಬಾಸ್ ಆಫರಿನ್ !

ರಮೇಶ : ಸರ್, ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿ ಒಂದು ವೇಳೆ ಕಡಿಮೆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮಾಡುವುದಿದ್ದರೆ ಹೇಗೆ !

ಶಿಕ್ಷಕ : ರಮೇಶನು ಕೇಳಿದ್ದು ಸರಿ, ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮಾಹಿತಿ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ಮಾರ್ಗವಿದ್ದರೆ ಆ ಬಗ್ಗೆಯೂ ಯೋಚಿಸಿರಿ.

ಕೇತಕಿ : ಸರ್, ನಾವು ತಲಾಟಿ ಕಾರ್ಯಾಲಯಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಅವರಲ್ಲಿ ಉಪಲಬ್ಧವಿರುವ ನೊಂದಣಿಯಿಂದ ಹೊಲದ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮಾಡಬಹುದು.

ಶಿಕ್ಷಕ : ಸರಿಯಾಗಿ ಹೇಳಿದೆ, ಕೆಲವು ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಯದ ಉಪಲಬ್ಧತೆ, ಸಾಧನೆಗಳ ಅಭಾವ, ಈ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಬ್ಬರು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಸಾಮಗ್ರಿ, ಕಾರ್ಯಾಲಯದ ದಾಖಲಾತಿಗಳಿಂದ ಪ್ರಸಿದ್ಧಗೊಂಡ ಸಾಮಗ್ರಿ, ಸರಕಾರಿ ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಲಬ್ಧವಾದ ಅಹವಾಲು, ಶೋಧ ಪ್ರಬಂಧ, ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುತ್ತದೆ ಇಂಥ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳಿಗೆ "ದ್ವಿತೀಯ ಸಾಮಗ್ರಿ" ಎನ್ನುವರು. ಅಂದರೆ ಕೇತಕಿ ಸೂಚಿಸಿದಂತೆ ತಲಾಠಿ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಹೋಗಿ ಹೊಲದ ಮಾಹಿತಿ ಇದು ದ್ವಿತೀಯ ಸಾಮಗ್ರಿ ಇರುವದು.

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

(i) ವರ್ತಮಾನ ಪತ್ರದಲ್ಲಿಯ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತಯಾರಿಸಿದ ಕೋಷ್ಟಕವು ದ್ವಿತೀಯ ಸಾಮಗ್ರಿ ಆಗುವುದು

(ii) ಉಪಹಾರ ಗೃಹಗಳಲ್ಲಿಯ ಪದಾರ್ಥದ ದರ್ಜೆಯನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ ಅವರ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಕೇಳಿ ತಿಳಿದ ಮಾಹಿತಿ, ಇದು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸಾಮಗ್ರಿ ಆಗುವುದು.

(iii) ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಅಳತೆಮಾಡಿ ನೊಂದಾಯಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸಾಮಗ್ರಿ ಆಗುವುದು.

ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸಾಮಗ್ರಿ	ದ್ವಿತೀಯ ಸಾಮಗ್ರಿ
1. ಸಂಗ್ರಹಿಸಲು ಹೆಚ್ಚು ಸಮಯ ಬೇಕಾಗುವುದು	1. ತಕ್ಷಣವೇ ಉಪಲಬ್ಧವಾಗುವುದು.
2. ಪ್ರಚಲಿತ ಮತ್ತು ವಿವರವಾದ ಮಾಹಿತಿ	2. ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಸಂಕಲನೆ ಮಾಡಿದ ಮಾಹಿತಿಯು ಪ್ರಚಲಿತವಾಗಿ ಇರುವುದು ಎಂದು ಖಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ, ಮಾಹಿತಿಯ ವಿವರಣೆ ಕೆಲವು ಸಲ ಕಡಿಮೆ ದೊರೆಯುವುದು.
3. ಇದು ಸರಿಯಾದ ಮತ್ತು ವಿಶ್ವಸನೀಯ ಸಾಮಾಗ್ರಿ ಇರುವುದು.	3. ಇದು ಕಡಿಮೆ ವಿಶ್ವಸನೀಯ ಇರುವ ಸಂಭವವಿದೆ.

ಕೃತಿ : ನೀವು ಅನೇಕ ಸಲ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕಾರಣಕ್ಕಾಗಿ ಮಾಹಿತಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸುವಿರಿ ಅಂತಹ 3 ರಿಂದ 4 ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಸಾಮಗ್ರಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಇದೆಯೋ ಅಥವಾ ದ್ವಿತೀಯ ಇದೆಯೋ ಈ ಕುರಿತು ಯೋಚನೆ ಮಾಡಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ ಸಂಗ್ರಹ 7.2

(1) ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಸಾಮಗ್ರಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸಾಮಗ್ರಿ ಅಥವಾ ದ್ವಿತೀಯ ಸಾಮಗ್ರಿ ಎಂಬುದರ ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡಿರಿ.

(i) ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಹೋಗಿ ಶಾಲೆಯ ಪ್ರಯೊಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಉಪಸ್ಥಿತಿಯ ಮಾಹಿತಿ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. (ii) ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಎತ್ತರದ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಅತೀ ಬೇಗ ವರಿಷ್ಠ ಕಾರ್ಯಾಲಯಕ್ಕೆ ಕಳುಹಿಸುವುದಿದ್ದರೆ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ಶಾರೀರಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿಯ ನೋಂದಣಿಯಿಂದ ಮಾಹಿತಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸುವುದು.

(iii) ನಾಂದಪೂರದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿಯ ಶಾಲಾಬಾಹ್ಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮಾಹಿತಿ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಮನೆ ಮನೆಗೆ ಹೋಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸುವುದು.

(iv) ವಿಜ್ಞಾನ ಪ್ರಕಲ್ಪದ ಸಲುವಾಗಿ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಅರಣ್ಯದಲ್ಲಿ ಹೋಗಿ ಗಿಡಗಳ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸುವದು.

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ವರ್ಗೀಕರಣ (Classification of data)

ಉದಾ. (1) ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ 9ನೇ ತರಗತಿಯ 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಪ್ರಥಮ ಘಟಕ ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ 20ರಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಗುಣಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

20, 6, 14, 10, 13, 15, 12, 14, 17, 17, 18, 11, 19, 9, 16, 18, 14, 7, 17, 20,
8, 15, 16, 10, 15, 12, 18, 17, 12, 11, 11, 10, 16, 14, 16, 18, 10, 7, 17, 14,
20, 17, 13, 15, 18, 20, 12, 12, 15, 10

ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕಲತ ಮಾಡಿದ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಮಾಹಿತಿಗೆ ಏನು ಹೇಳುವರು ?...... ಕಚ್ಚಾ ಸಾಮಗ್ರಿ

ಇದರಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಏನು ಹೇಳುವರು ?....... ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ

ಮೇಲಿನ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.

(i) 15 ಗುಣ ಪಡೆದಿರುವ ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟು?

(ii) 15ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣ ಪಡೆದಿರುವ ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟು?

(iii) 16ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ ಪಡೆದಿರುವ ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟು ?

(iv) ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಗುಣ ಎಷ್ಟು ?

(v) ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವ ಗುಣ ಎಷ್ಟು ?

ಬನ್ನಿ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡೋಣ.

(1) ನಿಮಗೆ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉತ್ತರ ಸಹಜವಾಗಿ ದೊರೆಯಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಲ ಗುಣಗಳ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಬೇಕಾಯಿತೆ?

(2) ಮೇಲಿನ ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಾಗಲು ಏನು ಮಾಡಬಹುದು?

ಶಮೀಮ: ಮೇಲಿನ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಲ ನಿರೀಕ್ಷಣೆಯಿಂದಲೇ ದೊರೆಯುತ್ತಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಕೆಲಸವನ್ನು ಕ್ಲಿಷ್ಟ ಮತ್ತು ಬೇಸರವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವಂತಹದ್ದಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕಚ್ಚಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಮತ್ತು ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ ಈ ಕೆಲಸವು ಸುಲಭ ಆಗಬಹುದು.

ಶಮೀಮನು ಹೇಳಿದಂತೆ ಸಾಮಗ್ರಿಯಲ್ಲಿಯ ಗುಣ ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13,
14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17,
18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ ಉದಾ. 1ರಲ್ಲಿಯ ಐದು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉತ್ತರಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿ ದೊರೆಯುವವೇ? ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ ಐದು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉತ್ತರಗಳು ಸಹಜವಾಗಿ ದೊರೆಯುವವು ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದು.

ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ (Ungrouped Frequency distribution table)

ಮಾರ್ಟಿನ್ : ಸರ್, ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನು ಆವೃತ್ತತೆಯ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿದಾಗ ಮೇಲಿನ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಸುಲಬತೆ ತರಲು ಬರುವದು ಇದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದಿನ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಆವೃತ್ತಿಗೆ ವರ್ಗೀಕೃತ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ ಎನ್ನುವರು.

ಶಿಕ್ಷಿಕಾ : ಮಾರ್ಟಿನ್, ಸರಿಯಾಗಿ ಹೇಳಿದೆ, ಈಗ ಈ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಮೊದಲಿನ ಉದಾ 1ರ ಸಹಾಯದಿಂದ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ (1)ರಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ 6 ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಗುಣ 20 ಇದೆ. ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ 6 ರಿಂದ 20 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಎರಡನೇಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ತಾಳೆಯ ಗುರುತು ಮಾಡಿ. ಕೊನೆಯ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ತಾಳೆಯ ಗುರುತು ಎಣಿಕೆ ಮಾಡಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕ

ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಗುಣ	ತಾಳೆಯ ಗುರುತು	ಆವೃತ್ತತೆ (f)(ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ)
6	|	1
7	||	2
8		
9		
10	卌	5
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17	卌 |	6
18		
19		
20	||||	4
		ಒಟ್ಟು N = 50

N ಇದು ಎಲ್ಲ ಆವೃತ್ತತೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಇದೆ.

ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ (Grouped frequency distribution table)

ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ

(1) ಈ ಕೋಷ್ಟಕ ಅತೀ ದೊಡ್ಡದಾದಂತೆ ಎನಿಸುವುದೆ ?

(2) ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದಾಗ ಈ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸಲು ಕಠಿಣವಾಗುವುದೇ?

ಶಿಕ್ಷಕ : ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವುದೇನೆಂದರೆ, ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದಾಗ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕದ ವಿಸ್ತಾರ ದೊಡ್ಡದಾಗುವುದು. ಅದನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಬಹಳ ಸಮಯ ಬೇಕಾಗುವುದು, ಕೋಷ್ಟಕದ ವಿಸ್ತಾರ ಮತ್ತು ವೇಳೆ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಲು ಉಪಾಯ ಸೂಚಿಸಲು ಬರುವುದೇ ?

ರೋಹಿತ : ಸರ್, ಇಂತಹ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಗುಂಪು ಮಾಡಬೇಕು.

ಶಿಕ್ಷಕಿ : ಶಬ್ಬಾಸ್ ರೋಹಿತ, ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಗುಂಪು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಸಾಮಗ್ರಿ ವ್ಯವಸ್ಥಿತಗೊಂಡು ಸಮಯವೂ ಕಡಿಮೆ ಬೇಕಾಗುವುದು. ಇಂತಹ ಕೋಷ್ಟಕಕ್ಕೆ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕ ಎನ್ನುವರು.

ಈ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಎರಡು ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸುವರು (1) ಸಮಾವೇಶ ಪದ್ಧತಿ (2) ಅಸಮಾವೇಶ ಪದ್ಧತಿ

(1) ಸಮಾವೇಶ ಪದ್ಧತಿ (Inclusive method)

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

ಮೇಲಿನ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಲಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ☐ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ☐ ಇದೆ. ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 25−06=14 ಇದೆ. ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ **ಸಾಮಗ್ರಿಯ ವಿಸ್ತಾರ** ಎನ್ನುವರು. ಈ ವಿಸ್ತಾರ ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟು ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಅನುಕೂಲಕರವಾದ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬಹುದು?

(i) 6 ರಿಂದ 8, 9 ರಿಂದ 11, 12 ರಿಂದ 14, 15 ರಿಂದ 17, 18 ರಿಂದ 20 ಅಥವಾ

(ii) 6 ರಿಂದ 10, 11 ರಿಂದ 15, 16 ರಿಂದ 20 ಹೀಗೆ ವರ್ಗ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು.

6 ರಿಂದ 10, 11 ರಿಂದ 15 ಮತ್ತು 16 ರಿಂದ 20 ಈ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸುವಾ.

ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕ (ಸಮಾವೇಶಕ ಪದ್ಧತಿ)

ವರ್ಗ	ತಾಳೆಯ ಗುರುತು	ಆವೃತ್ತತೆ (f) (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ)
6 ರಿಂದ 10	卌 卌	**10**
11 ರಿಂದ 15	.....	.....
16 ರಿಂದ 20	.....	20
		N = 50

ಈ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸುವಾಗ 6, 10 ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ 6 ರಿಂದ 10 ಈ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಸಮಾವೇಶ ಆಗಿದೆ. ಎಂದು ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸುವ ಈ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಸಮಾವೇಶಕ ಪದ್ಧತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ, 6 ರಿಂದ 10, 11 ರಿಂದ 15, 16 ರಿಂದ 20 ಈ ವರ್ಗಗಳಿಗೆ ಖಂಡಿತ ವರ್ಗ ಎನ್ನುವರು.

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿಯ ಕೆಲವು ಸಂಜ್ಞೆಗಳು (Basic terms in statistics)

(1) **ವರ್ಗ (Class):** ನಾವು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಅನುಕೂಲವಾದ ಅಂತರದ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ವರ್ಗಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. 6 ರಿಂದ 10, 11 ರಿಂದ 15, ಈ ವರ್ಗಗಳನ್ನು 6−10, 11−15 ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯುವರು.

(2) **ವರ್ಗ ಮರ್ಯಾದೆ (Class limits):** ವರ್ಗ ತೋರಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ವರ್ಗ ಮರ್ಯಾದೆ ಎನ್ನುವರು.

6 ರಿಂದ 10 ಇದರಲ್ಲಿ 6 ಇದು ಕೆಳಗಿನ ಮಿತಿ ಮತ್ತು 10 ವರ್ಗದ ಮೇಲಿನ ಮಿತಿ ಇದೆ.

(3) **ಆವೃತ್ತತೆ : (Frequency) :** ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿರುವವೋ ಆ ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಆ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ ಎನ್ನುವರು.

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 11 ರಿಂದ 15 ಈ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ 20 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿವೆ. 11 ರಿಂದ 15 ಈ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ 20 ಇದೆ. ಎನ್ನುವರು.

4. **ವರ್ಗಾಂತರ ಅಥವಾ ವರ್ಗ ಅವಕಾಶ (Class width) :** ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಬರುವ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಮಿತಿ ಅಥವಾ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಮಿತಿ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾಂತರ ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾ. 5 - 10, 10 - 15, 15 - 20,.... ಈ ರೀತಿ ವರ್ಗಗಳಿದ್ದರೆ. 5-10 ವರ್ಗಾಂತರ = 10 - 5 = 5 ಎನ್ನುವರು.

5. **ವರ್ಗಮಧ್ಯ : (Class mark) :** ಯಾವುದೇ ವರ್ಗದ ಕೆಳಗಿನ ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಮಿತಿಗಳ ಸರಾಸರಿ ವರ್ಗ ಮಧ್ಯ ಎನ್ನುವರು.

$$\text{ವರ್ಗಮಧ್ಯ} = \frac{\text{ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಮಿತಿ} + \text{ಮೇಲಿನ ವರ್ಗ ಮಿತಿ}}{2}$$

ಉದಾ. 11 ರಿಂದ 15 ಈ ವರ್ಗದ ವರ್ಗಮಧ್ಯ $= \frac{\Box + \Box}{2} = \frac{26}{2} = 13$

(2) ಅಸಮಾವೇಶ ಪದ್ಧತಿ (ಅಖಂಡಿತ ವರ್ಗ) (Exclusive method)

ಉದಾ. 6, 10, 10.3, 11, 15.7, 19, 20, 12, 13 ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

6-10, 11-15, 16-20 ಹೀಗೆ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ :

ವರ್ಗ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ	ತಾಳೆಯ ಗುರುತು	ಆವೃತ್ತತೆ (f)
6-10	||	2
11-15	|||	3
16-20	||	2

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ 10.3 ಮತ್ತು 15.7 ಈ ಎರಡು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಮಾಡಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ 10.3 ಮತ್ತು 15.7 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 6-10, 11-15, 16-20 ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಸಮಾವಿಷ್ಟವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ವರ್ಗ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು. ಆ ವರ್ಗಗಳು 5-10, 10-15, 15-20.... ಈ ರೀತಿ ನಿರಂತರ ಬರೆದಾಗ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆ ಉಂಟಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ 10 ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ನೋಂದಣಿ 5-10, 10-15 ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬೇಕು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಉಂಟಾಗುವುದು. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನಿವಾರಿಸಲು 10 ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು 5-10 ಈ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಸಮಾವೇಶ ಮಾಡಬಾರದು ಅಂದರೆ 10 ಇದರ ನೋಂದಣಿ 10-15ರಲ್ಲಿ ಆಗುವುದು ಈ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಅಸಮಾವೇಶ ಪದ್ಧತಿ ಎನ್ನುವರು. ಈ ರೀತಿಯ ವರ್ಗ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ 10.3 ಮತ್ತು 15.7 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಸಮಾವೇಶ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು.

ಈಗ ಈ ರೀತಿ ವರ್ಗ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಂಕೇತ ಪಾಲಿಸಿ ತಯಾರಿಸಿದ ಕೋಷ್ಟಕ ನೋಡಿರಿ.

ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ. (ಅಸಮಾವೇಶ ಪದ್ಧತಿ)

ವರ್ಗ (ಅಖಂಡಿತ) ಗುಣ	ತಾಳೆಯ ಗುರುತು	ಆವೃತ್ತತೆ (f) (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಖ್ಯೆ)
5-10	|	1
10-15	||||̸	5
15-20	||	2
20-25	|	1

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ

→ ಅವರ್ಗೀಕೃತ

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ವಯಸ್ಸು	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
14	12
15	23
16	10

→ ವರ್ಗೀಕೃತ

ಸಮಾವೇಶ ಪದ್ಧತಿ (ಖಂಡಿತ ವರ್ಗ)

ಬೂಟುಗಳ ಕ್ರಮಾಂಕ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಖ್ಯೆ
2-4	12
5-7	29
8-10	7

ಅಸಮಾವೇಶ ಪದ್ಧತಿ (ಅಖಂಡಿತ ವರ್ಗ)

ಎತ್ತರ (ಸೆಮೀ)	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಖ್ಯೆ
145-150	18
150-155	27
155-160	3

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3

(1) 20 ರಿಂದ 25 ಈ ವರ್ಗದ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಮಿತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(2) 35 ರಿಂದ 40 ಈ ವರ್ಗದ ವರ್ಗಮಧ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3*) ಒಂದು ವರ್ಗದ ಮಧ್ಯ 10 ಇದೆ, ವರ್ಗ ಅವಕಾಶ 6 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅದು ಯಾವ ವರ್ಗ ಇರುವುದು ?

(4) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

ವರ್ಗ (ವಯಸ್ಸು-ವರ್ಷದಲ್ಲಿ)	ತಾಳೆಯ ಗುರುತು	ಆವೃತ್ತತೆ (f) (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಖ್ಯೆ)
12-13	𝍸	☐
13-14	𝍸 𝍸 ||||	☐
14-15		☐
15-16	||||	☐
		$N=\sum f = 35$

(5) ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ಹರಿತ ಸೇನೆಯ 45 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ಮಾಡಿದ ವೃಕ್ಷಾರೋಪಣ ಮಾಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇದೆ.

3, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 3, 5, 4, 7, 5 , 3, 6, 6, 5, 3, 4, 5, 7, 3, 5, 6, 4, 4, 3, 5, 6, 6, 4, 3, 5, 7, 3, 4, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 4, 7.

ಈ ಮಾಹಿತಿಯ ಆಧಾರದಿಂದ ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

(6) π ದ 50 ದಶಾಂಶ ಸ್ಥಳದ ವರೆಗಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ದಶಾಂಕ ಚಿಹ್ನೆಯ ನಂತರ ಬರುವ ಅಂಕೆಗಳ ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

(7*) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮಾಹಿತಿಯ ಆಧಾರದಿಂದ ವರ್ಗಾಂತರ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅಖಂಡಿತ ವರ್ಗ ಅದರಂತೆ ಖಂಡಿತ ವರ್ಗ ಇರುವ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

(ii)

ವರ್ಗಮಧ್ಯ	ಆವೃತ್ತತೆ
5	3
15	9
25	15
35	13

ವರ್ಗಮಧ್ಯ	ಆವೃತ್ತತೆ
22	6
24	7
26	13
28	4

(8) ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ತರಗತಿ 9ನೇಯ 46 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅವರ ಕಂಪಾಸ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿಯ ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳ ಉದ್ದ ಅಳೆಯಲು ಹೇಳಲಾಗಿ ಅವುಗಳ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇವೆ.

16, 15, 7, 4.5, 8.5, 5.5, 5, 6.5, 6, 10, 12,
13, 4.5, 4.9, 16, 11, 9.2, 7.3, 11.4, 12.7, 13.9, 16, 5.5,
9.9, 8.4, 11.4, 13.1, 15, 4.8, 10, 7.5, 8.5, 6.5, 7.2,
4.5, 5.7, 16, 5.7, 6.9, 8.9, 9.2, 10.2, 12.3, 13.7, 14.5, 10

0-5, 5-10, 10-15, ... ಈ ರೀತಿಯ ವರ್ಗ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅಸಮಾವೇಶಕ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ವರ್ಗೀಕೃತ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

(9) ಒಂದು ಊರಿನ ಸಹಕಾರಿ ಹಾಲು ಸಂಕಲನ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 50 ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ ಹಾಲು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದೆ ಎಬುದರ ಮಾಹಿತಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

27, 75, 5, 99, 70, 12, 15, 20, 30, 35, 45, 80,
77, 90, 92, 72, 4, 33, 22, 15, 20, 28, 29, 14,
16, 20, 72, 81, 85, 10, 16, 9, 25, 23, 26, 46,
55, 56, 66, 67, 51, 57, 44, 43, 6, 65, 42, 36,
7, 35

ಯೋಗ್ಯ ವರ್ಗ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ವರ್ಗೀಕೃತ ಅವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

(10) ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯು ಊರಿನಲ್ಲಿಯ 38 ಜನರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ದಿವ್ಯಾಂಗ ವಿಕಾಸ ನಿಧಿಯ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

101, 500, 401, 201, 301, 160, 210, 125, 175, 190, 450, 151,
101, 351, 251, 451, 151, 260, 360, 410, 150, 125, 161, 195,
351, 170, 225, 260, 290, 310, 360, 425, 420, 100, 105, 170,
250, 100

(i) 100-149, 150-199, 200-249, ... ಈ ರೀತಿಯ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

(ii) ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ 350 ರೂ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ನಿಧಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಮೇಲಿನ ವರ್ಗ ಮಿತಿಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ (Less than cumulative frequency)

ಉದಾ. ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 9ನೇ ತರಗತಿಯ 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಪ್ರಥಮ ಘಟಕ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 40ರ ಪೈಕಿ ದೊರೆತ ಗುಣಗಳ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ವರ್ಗ	ಆವೃತ್ತತೆ (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಖ್ಯೆ) (f)
0-10	02
10-20	12
20-30	20
30-40	16
	ಒಟ್ಟು N = 50

(1) ಕೋಷ್ಟಕದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ.

(i) 10 ರಿಂದ 20 ಈ ವರ್ಗದ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಮಿತಿ ☐ ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ವರ್ಗ ಮಿತಿ ☐ ಇರುವುದು.

(ii) 10ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ ಪಡೆದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟು [2]

(iii) 20ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ ಪಡೆದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟು 2 + ☐ = 14

(iv) 30ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ ಪಡೆದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟು ? ☐ + ☐ = 34

(v) 40ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ ಪಡೆದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಎಷ್ಟು ? ☐ + ☐ = 50

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ ಮತ್ತು ಆ ವರ್ಗದ ಎಲ್ಲ ವರ್ಗಗಳ ಆವೃತ್ತತೆಗಳ ಬೇರಿಜಿಗೆ ಆ ವರ್ಗದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ (Less than cumulative frequency) ಎನ್ನುವರು. 'ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ' ಎನ್ನುವರು.

ಮೇಲಿನ ವರ್ಗ ಮಿತಿಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕದ ಅರ್ಥ

ವರ್ಗ (ಗುಣಗಳು)	ಆವೃತ್ತತೆ	ಮೇಲಿನ ವರ್ಗ ಮಿತಿಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಆವೃತ್ತತೆ
0-10	2	2
10-20	12	2 + 12 = ☐
20-30	20	☐ +20=34
30-40	16	34 + ☐ =50
ಒಟ್ಟು 50		

ವರ್ಗ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ	ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಮಿತಿಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಇದರ ಅರ್ಥ
0-10	2	2 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ
10-20	14	14 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 20ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ
20-30	34	34 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 30ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ
30-40	50	50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 40ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ
ಒಟ್ಟು 50		

(2) ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಮರ್ಯಾದೆಯಷ್ಟು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕ

ವರ್ಗ	ಆವೃತ್ತತೆ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ
0-10	2	50
10-20	12	50 - 2 = 48
20-30	20	48 - 12 = 36
30-40	16	36 - 20 = 16
ಒಟ್ಟು 50		

ವರ್ಗ	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ	ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಮಿತಿ ಅಥವಾ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಮಿತಿಗಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು (ಇದರ ಅರ್ಥ)
0-10	50	50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 0 ಅಥವಾ 0ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ಗುಣಗಳು ದೊರೆತವು.
10-20	48	48 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 10 ಅಥವಾ 10ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ಗುಣಗಳು ದೊರೆತವು.
20-30	36	36 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 20 ಅಥವಾ 20ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ಗುಣಗಳು ದೊರೆತವು.
30-40	16	16 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 30 ಅಥವಾ 30ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ಗುಣಗಳು ದೊರೆತವು.

ಉದಾ. ಒಂದು ಸ್ಪೋರ್ಟ್ಸ್ ಕ್ಲಬ್‌ದ ಟೇಬಲ್ ಟೇನಿಸ್ ಪಂದ್ಯದ ಸಲುವಾಗಿ ಬಂದಿರುವ ಆಟಗಾರರ ವಯಸ್ಸಿನ ವರ್ಗೀಕರಣ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಮಿತಿ ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಮರ್ಯಾದೆಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷ)	ತಾಳೆಯ ಗುರುತು	ಆವೃತ್ತತೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಅಥವಾ ಸಂಖ್ಯೆ	ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ
10-12	卌 ||||	09	50
12 – 14	卌 卌 卌 卌 |||	☐	☐ - 9 = 41
14-16	卌 卌 |||	☐	41 - 23 = ☐
16 – 18	卌	05	☐ - 13 = ☐
		ಒಟ್ಟು N = 50	

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.4

(1) ಕೆಳಗಿನ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ವರ್ಗ (ಎತ್ತರ-ಸೆಂ.ಮೀದಲ್ಲಿ)	ಆವೃತ್ತತೆ (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ)	ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ
150-153	05	05
153-156	07	05+ ☐ = ☐
156-159	15	☐ + 15 = ☐
159-162	10	☐ + ☐ = 37
162-165	05	37+5=42
165-168	03	☐ + ☐ = 45
	ಒಟ್ಟು N = 45	

(2) ಕೆಳಗಿನ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ವರ್ಗ (ಮಾಸಿಕ ಉತ್ಪನ್ನ ರೂಪಾಯಿ)	ಆವೃತ್ತತೆ (ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ)	ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ
1000–5000	45	....
5000–10000	19	....
10000–15000	16	....
15000–20000	02	....
20000–25000	05	....
	ಒಟ್ಟು N = 87	

(3) ಒಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ 62 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣಿತ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ 100ರಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಗುಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.
0–10, 10–20 ..... ಈ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆವೃತ್ತತೆಯ ಕೊಷ್ಟಕ ಮತ್ತು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕ (ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು) ತಯಾರಿಸಿರಿ

55,	60,	81,	90,	45,	65,	45,	52,	30,	85,	20,	10,
75,	95,	09,	20,	25,	39,	45,	50,	78,	70,	46,	64,
42,	58,	31,	82,	27,	11,	78,	97,	07,	22,	27,	36,
35,	40,	75,	80,	47,	69,	48,	59,	32,	83,	23,	17,
77,	45,	05,	23,	37,	38,	35,	25,	46,	57,	68,	45,
47,	49										

ಈ ಮಾಹಿತಿಯ ಆಧಾರದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.

(i) 40 ಅಥವಾ 40 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣ ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟು ?

(ii) 90 ಅಥವಾ 90 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣ ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟು ?

(iii) 60 ಅಥವಾ 60 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣ ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟು ?

(iv) 0–10 ಈ ವರ್ಗದ ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ ಎಷ್ಟು ?

(4) ಉದಾಹರಣೆ (3)ರಲ್ಲಿಯ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ 0–10, 10–20, ... ಹೀಗೆ ವರ್ಗ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕ ಮತ್ತು ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸಿ ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.

(i) 40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ ದೊರೆತ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

(ii) 10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ ದೊರೆತ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

(iii) 60 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ ದೊರೆತ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

(iv) 50–60 ಈ ವರ್ಗದ ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ ಎಷ್ಟು ?

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಪರಿಣಾಮಗಳು (Measures of central tendancy)

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ : ಸರ್ವೇಕ್ಷಣೆಯಿಂದ ದೊರೆತ ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಸಾಮಗ್ರಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಗುಣಧರ್ಮ ಕಂಡು ಬರುವದು. ಸಾಮಗ್ರಿಯಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸುತ್ತಲೂ ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಟ್ಟತೆ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವದು ಕಾಣಿಸುವದು. ಸಮೂಹದ ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಸಮೂಹದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಎನ್ನುವರು.

ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸುತ್ತಲೂ ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಟ್ಟತೆ ಇರುವುದೋ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಆ ಸಮೂಹವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ ಎನ್ನುವರು.

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ: ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪರಿಮಾಣವೆಂದು ಮುಂದಿನ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವರು.

(1) ಮಧ್ಯ (Mean) : ಸಾಮಗ್ರಿಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕ ಗಣೀತಿಯ ಸರಾಸರಿ ಎಂದರೆ ಆ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯ ಎಂದು ಅನ್ನುತ್ತಾರೆ

$$\text{ಸಾಮಗ್ರಿಯ ‘ಮಧ್ಯ’} = \frac{\text{ಸಾಮಗ್ರಿಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು}}{\text{ಸಾಮಗ್ರಿಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

ಉದಾ. (1) 25, 30, 27, 23 ಮತ್ತು 25 ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಂಕಗಳ ಮಧ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $\frac{25+30+27+23+25}{5} = \frac{130}{5} = 26$

ಉದಾ. (2) 9ನೇ ತರಗತಿಯ 35 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಪ್ರಥಮ ಘಟಕ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ 40ರಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಗುಣಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ, ಇದರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಗುಣಗಳ ಮಧ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

40, 35, 30, 25, 23, 20, 14, 15, 16, 20, 17, 37,
37, 20, 36, 16, 30, 25, 25, 36, 37, 39, 39, 40,
15, 16, 17, 30, 16, 39, 40, 35, 37, 23, 16.

ಉತ್ತರ : ಇದರಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಇರುವುದರಿಂದ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಲು ಬರುವುದು. ಆದರೆ ಈ ಕ್ರಿಯೆ ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾಗುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ 3 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೂ 30 ಗುಣ ದೊರೆತಿವೆ. ಅವರ ಗುಣಗಳ ಬೇರೀಜು 30 + 30 + 30 = 90 ಈ ರೀತಿ ಮಾಡುವುದಕ್ಕಿಂತ 30 × 3 = 90 ಹೀಗೆ ಮಾಡುವುದು ಸುಲಭವಾಗುವುದು.

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿಯ $\sum_{i=1}^{n}$ ಈ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವದು ಅನುಕೂಲ ಇರುತ್ತದೆ.

$\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$ ಇದರ ಅರ್ಥ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ

i ಇದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಇದೆ.

f_i ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ದೊರೆತ ಗುಣ x_i ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ Σ (ಸಿಗ್ಮಾ) ಈ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬೇರೀಜಿನ ಸಲುವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವರು.

$\sum_{i=1}^{n}$ ಈ ಚಿಹ್ನೆ i ದ i ರಿಂದ n ರಿಂದ ಈ ಬೆಲೆಯ ಸಲುವಾಗಿ n ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ನಿಶ್ಚಿಸುವರು.

ಗುಣ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಖ್ಯೆ	$f_i \times x_i$
14	1	14 × 1 = 14
15	2	15 × 2 = ...
16	5	16 × .... = ...
17	2	17 × 2 = 34
20	3	.... × 3 = ...
23	2	23 × 2 = ...
25	3	25 × 3 = ...
30	3	.... × .... = ...
35	2	35 × 2 = 70
36	2	.... × .... = ...
37	4	..... × .... = ...
39	3	39 × 3 = 117
40	3	.... × .... = 120
	N= ☐	$\sum f_i x_i = 956$

ಮಧ್ಯ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{956}{35}$

$= 27.31$ (ಹತ್ತಿರ)

∴ ಕೊಟ್ಟ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯ 27.31 ಇದೆ.

(2) ಮಧ್ಯಕ (Median) : ಸಾಮಾಗ್ರಿಯಲ್ಲಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಅಥವಾ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿದಾಗ ಮಧ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಆ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯಕ ಎನ್ನುವರು.

ಸಾಮಗ್ರಿಯಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದಾಗ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಮಧ್ಯಕ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವರು.

ಉದಾ. (1) 72, 66, 87, 92, 63, 78, 54 ಈ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಮಧ್ಯಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿದಾಗ

54, 63, 66, **72,** 78, 87, 92

ಈ ರೀತಿ ಮಂಡಿಸಿದಾಗ 4ನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವುದು ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 72 ಇದೆ.

$\therefore$ ಕೊಟ್ಟ ಸಾಮಾಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯಕ = 72

ಉದಾ. (2) 30, 25, 32, 23, 42, 36, 40, 33, 21, 43 ಈ ಸಾಮಾಗ್ರಿಗಳ ಮಧ್ಯಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗಿ

21, 23, 25, 30, **32, 33,** 36, 40, 42, 43

ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 10, ಅಂದರೆ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

$\therefore$ ನಾಲ್ಕನೇ ಮತ್ತು ಐದನೇ ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವವು, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 32 ಮತ್ತು 33 ಇವೆ.

$\therefore$ ಸಾಮಾಗ್ರಿಗಳ ಮಧ್ಯಕ $= \frac{32+33}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$

ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಸಾಮಾಗ್ರಿಗಳ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಇದ್ದಾಗ

(i) n ವಿಷಮ ಇದ್ದಾಗ ಎಷ್ಟನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು ಆ ಸಾಮಾಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯಕ ಇರುವುದು ?

(ii) n ಇದು ಸಮ ಇದ್ದಾಗ ಎಷ್ಟನೇ ಎರಡು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ ಆ ಸಾಮಾಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯಕ ಇರುವುದು ?

(3) ಬಹುಲಕ (Mode) : ಸಾಮಾಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಲ ಬಂದಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಕ್ಕೆ ಆ ಸಾಮಾಗ್ರಿಯ ಬಹುಲಕ ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾ. (1) 90, 55, 67, 55, 75, 75, 40, 35, 55, 95 ಈ ಸಾಮಾಗ್ರಿಯ ಬಹುಲಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಸಾಮಾಗ್ರಿಯಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿದಾಗ ಯಾವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವು ಅತೀ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಬಂದಿದೆ ಎಂದು ಗುರುತಿಸುವದು ಸುಲಭವಾಗುವುದು.

ಕೊಟ್ಟ ಸಾಮಾಗ್ರಿಯ ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮ : 35, 40, 55, 55, 55, 67, 75, 75 90, 95

ಇದರಿಂದ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಬಂದಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ = 55

$\therefore$ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಾಮಾಗ್ರಿಯ ಬಹುಲಕ 55.

ಉದಾ. (2) ಒಂದು ಕಾರಖಾನೆಯಲ್ಲಿಯ ಕಾರ್ಮಿಕರ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷ)	19	21	25	27	30
ಕಾರ್ಮಿಕರು	5	15	13	15	7

ಈ ಮಾಹಿತಿಯ ಆಧಾರದಿಂದ ವಯಸ್ಸಿನ ಬಹುಲಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

ಉತ್ತರ : ಇದರಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಆವೃತ್ತತೆ 15, ಆದರೆ ಈ ಆವೃತ್ತತೆಯು ಎರಡು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳದ್ದು ಇದೆ

$\therefore$ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಬಹುಲಕ = 21 ಹಾಗೂ 27 $\therefore$ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಬಹುಲಕ 21 ವರ್ಷ ಮತ್ತು 27 ವರ್ಷ ಇದೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.5

(1) ಮುಕುಂದನ 7 ವರ್ಷಗಳ ಸೋಯಾಬಿನದ ಪ್ರತಿ ಎಕರೆ ಉತ್ಪನ್ನ ಕ್ವಿಂಟಲ್‌ನಲ್ಲಿ 10,7,5,3,9,6,9 ಇದ್ದಾಗ ಪ್ರತಿ ಎಕರ್ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಧ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಕೆಳಗಿನ ಸಾಮಾಗ್ರಿಗಳ ಮಧ್ಯಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. 59,75,68,70,74,75,80

(3) ಗಣಿತದ ಗೃಹಪಾಠದಲ್ಲಿ 7 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ 100ರಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಗುಣಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.
99, 100, 95, 100, 100, 80, 90 ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ದೊರೆತ ಗುಣಗಳ ಬಹುಲಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) ಒಂದು ಕಾರಖಾನೆಯಲ್ಲಿ 30 ಕಾರ್ಮಿಕರಿಗೆ ದೊರೆಯುವ ಮಾಸಿಕ ಸಂಬಳ ರೂಪಾಯಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇದೆ
5000, 7000, 3000, 4000, 4000, 3000, 3000, 3000, 8000, 4000,
4000, 9000, 3000, 5000, 5000, 4000, 4000, 3000, 5000, 5000,
6000, 8000, 3000, 3000, 6000, 7000, 7000, 6000, 6000, 4000
ಈ ಮಾಹಿತಿಯ ಆಧಾರದಿಂದ ಕಾರ್ಮಿಕರ ಮಾಸಿಕ ಸಂಬಳದ ಮಧ್ಯ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

(5) ಒಂದು ಬುಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 10 ಟೊಮೆಟೊಗಳ ಗ್ರಾ ್ಯಂಗಳಲ್ಲಿಯ ತೂಕ 60, 70, 90, 95, 50, 65,70, 80, 85, 95 ಈ ರೀತಿ ಇದ್ದರೆ ಟೊಮೆಟೊಗಳ ತೂಕದ ಮಧ್ಯಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6) ಒಬ್ಬ ಹಾಕಿ ಆಟಗಾರನ 9 ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಅವನು ಮಾಡಿದ ಗೋಲ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇದೆ.
5, 4, 0, 2, 2, 4, 4, 3, 3 ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಮಧ್ಯ, ಮಧ್ಯಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(7) 50 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮಧ್ಯ 80 ಇದೆ, ಆದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ 19 ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ತಪ್ಪಾಗಿ 91 ಈ ರೀತಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿತ್ತು, ತಪ್ಪಾಗಿರುವುದನ್ನು ಸರಿಪಡಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಮಧ್ಯ ಎಷ್ಟು ?

(8) ಕೆಳಗಿನ 10 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನುಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಕ 18 ಇದೆ. 2, 3, 5, 9, $x + 1$, $x + 3$, 14, 16, 19, 20 ಈ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ x ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(9*) 35 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮಧ್ಯ 20 ಇದೆ, ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲಿನ 18 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮಧ್ಯ 15 ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ 18 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮಧ್ಯ 25 ಇದ್ದರೆ 18ನೇಯ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(10) ಐದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮಧ್ಯ 50 ಇದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ ಮಧ್ಯ 45 ಆಗುವುದು ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಯಾವುದು ?

(11*) ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದು ಅವರಲ್ಲಿ 15 ಹುಡುಗರಿದ್ದಾರೆ. ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಹುಡುಗರಿಗೆ ದೊರೆತ ಗುಣಗಳ ಮಧ್ಯ 33 ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯರಿಗೆ ದೊರೆತ ಗುಣಗಳ ಮಧ್ಯ 35 ಇದ್ದರೆ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿಯ ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ದೊರೆತ ಗುಣಗಳ ಮಧ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(12) 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕ ಕಿಲೋ ಗ್ರಾ ್ಯಂಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇವೆ.
40, 35, 42, 43, 37, 35, 37, 37, 42, 37 ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಬಹುಲಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(13) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಕುಟುಂಬಗಳಲ್ಲಿಯ 14 ವರ್ಷಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ, ಇದರ ಮೇಲಿಂದ 14 ವರ್ಷಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಹುಲಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ	1	2	3	4
ಕುಟುಂಬ	15	25	5	5

(14) ಕೆಳಗಿನ ಸಾಮಾಗ್ರಿಯ ಬಹುಲಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ (ಗುಣಗಳು)	35	36	37	38	39	40
ಆವೃತ್ತತೆ (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ)	09	07	09	04	04	02

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಯಾವ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಯೋಗ್ಯ ಇರುವುದೆ ? ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಉತ್ತರ, ಅದು ಯಾವ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ಪರಿಮಾಣದ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದೊ ಅದಕ್ಕೆ ಈ ಸಂಗತಿ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವದು.

ಒಬ್ಬ ಕ್ರಿಕೇಟ ಆಟಗಾರನು ಸತತವಾಗಿ ಹನ್ನೊಂದು ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 41, 58, 35, 80, 23, 12, 63, 48, 107, 9 ಮತ್ತು 73 ಓಟುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದನು, ಅವನ ಒಟ್ಟು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸುವಾಗ ಅವನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಂದ್ಯದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದ ಓಟುಗಳ ಯೋಚನೆ ಮಾಡುವದು ಅಗತ್ಯವಿರುವದು ಆಗ ಅವನು ಹೊಡೆದ ಓಟುಗಳ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಮಧ್ಯ ಪರಿಮಾಣದಿಂದ ನಿಶ್ಚಯಿಸುವುದು ಯೋಗ್ಯವಾಗುವುದು.

ಬಟ್ಟೆ ತಯಾರಿಸುವ ಯಾವದೊಂದು ಕಂಪನಿಯ ಯಾವ ಅಳತೆಯ ಶರ್ಟುಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಹೊಲಿಯಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸುವುದಿದೆ ಅದಕ್ಕಾಗಿ (34, 36, 38, 40, 42, 44 ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ) ಯಾವ ಅಳತೆಯ ಶರ್ಟನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಜನರು ಉಪಯೋಗಿಸುವರು ಎಂಬುದನ್ನು ಸರ್ವೇಕ್ಷಣೆಯಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುವುದು, ಆಗ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಬಹುಲಕ ಈ ಪರಿಮಾಣ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದು ಯೋಗ್ಯವಿರುವುದು.

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 7

(1) ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ.

(i) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸಾಮಗ್ರಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ ?

(A) ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಭೇಟಿ ಕೊಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಉಪಸ್ಥಿತಿಯ ಮಾಹಿತಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸುವುದು.

(B) ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಭೇಟಿ ಕೊಟ್ಟು ಮನೆಯಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಾಹಿತಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸುವುದು.

(C) ತಲಾಠಿ ಕಡೆಗೆ ಹೋಗಿ ಊರಿನಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ರೈತರ ಸೋಯಾಬೀನ ಬೆಳೆಸಿದ ಭೂಮಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರ ನೋಂದಾಯಿಸುವುದು.

(D) ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿ ಚರಂಡಿಗಳ ಸ್ವಚ್ಛತೆಯ ಮಾಹಿತಿ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು.

(ii) 25-35 ಈ ವರ್ಗದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಮಿತಿ ಯಾವುದು ?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iii) 25-35 ಈ ವರ್ಗದ ವರ್ಗಮಧ್ಯ ಯಾವುದು ?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iv) 0-10, 10-20, 20-30 .... ಹೀಗೆ ವರ್ಗಗಳಿರುವ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 10 ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಯಾವ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಸಮಾವಿಷ್ಟವಾಗುವುದು ?

(A) 0-10 (B) 10-20 (C) 0-10 ಹಾಗೂ 10-20 ಈ ಎರಡೂ ವರ್ಗಗಳಲ್ಲಿ (D) 20-30

(v*) ಒಂದು ವೇಳೆ $\bar{x}$ ಇದು $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n$ ಮತ್ತು $\bar{y}$ ಇದು $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_n$ ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯ ಇದ್ದರೆ $\bar{z}$ ಇದು $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_n$ ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯ ಇದ್ದಾಗ $\bar{z}$ = ?

(A) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$ (B) $\bar{x}+\bar{y}$ (C) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{n}$ (D) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2n}$

(vi*) ಐದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯ 50 ಇದ್ದು, ಅದರಲ್ಲಿಯ 4 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯ 46 ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಐದನೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

(A) 4 (B) 20 (C) 434 (D) 66

(vii*) 100 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮಧ್ಯ 40 ಇದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ 30 ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಬದಲಾಗಿ 70 ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಹೊಸ ಮಧ್ಯ ಎಷ್ಟು? (A) 40.6 (B) 40.4 (C) 40.3 (D) 40.7

(viii) 19, 19, 15, 20, 25, 15, 20, 15 ಈ ಸಾಮಾಗ್ರಿಗಳ ಬಹುಲಕ ಯಾವುದು ?

(A) 15 (B) 20 (C) 19 (D) 25

(ix) 7, 10, 7, 5, 9, 10 ಈ ಸಾಮಾಗ್ರಿಗಳ ಮಧ್ಯಕ ಯಾವುದು ?

(A) 7 (B) 9 (C) 8 (D) 10

(x) ಕೆಳಗಿನ ಕೊಷ್ಟಕದ ಅನುಸಾರ 30-40 ಈ ವರ್ಗದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗ ಮಿತಿಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ ಎಷ್ಟು?

ವರ್ಗ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ಆವೃತ್ತತೆ	7	3	12	13	2

(A) 13 (B) 15 (C) 35 (D) 22

(2) 20 ಕಾರ್ಮಿಕರ ಸಂಬಳದ ಮಧ್ಯ 10.250 ರೂಪಾಯಿ ಇದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಯಾಲಯ ಪ್ರಮುಖರ ಸಂಬಳ ಕೂಡಿದಾಗ ಮಧ್ಯ 750 ರೂ ಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಆಗುವುದು ಹಾಗಾದರೆ ಕಾರ್ಯಾಲಯ ಪ್ರಮುಖರ ಸಂಬಳ ಎಷ್ಟು ?

(3) 9 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯ 77 ಇದೆ, ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಮಧ್ಯ 5 ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

(4) ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದ ಒಂದು ತಿಂಗಳಿನ ದಿನ ನಿತ್ಯದ ಗರಿಷ್ಠ ಉಷ್ಣತಾಮಾನವು ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್ ಅಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇದೆ. ಯೋಗ್ಯ ವರ್ಗ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ (ನಿರಂತರ ವರ್ಗ) ತಯಾರಿಸಿರಿ.

29.2, 29.0, 28.1, 28.5, 32.9, 29.2, 34.2, 36.8, 32.0, 31.0,
30.5, 30.0, 33, 32.5, 35.5, 34.0, 32.9, 31.5, 30.3, 31.4,
30.3, 34.7, 35.0, 32.5, 33.5, 29.0, 29.5, 29.9, 33.2, 30.2

ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.

(i) ಗರಿಷ್ಠ ಉಷ್ಣತಾಮಾನ $34^{\circ}c$ ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ದಿನಗಳು ಎಷ್ಟು ?

(ii) ಗರಿಷ್ಠ ಉಷ್ಣತಾಮಾನ $34^{\circ}c$ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವ ದಿನಗಳು ಎಷ್ಟು ?

(5) ಒಂದು ವೇಳೆ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಮಧ್ಯ 20.2 ಇದ್ದರೆ p ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ-

x_i	10	15	20	25	30
f_i	6	8	p	10	6

(6) ಮಾಡೆಲ್ ಹೈಸ್ಕೂಲ್ ನಾಂದಪೂರದ 9ನೇ ತರಗತಿಯ 68 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಲಿಖಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ವಿಷಯದ 80ರಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಗುಣಗಳು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

70, 50, 60, 66, 45, 46, 38, 30, 40, 47, 56, 68,
80, 79, 39, 43, 57, 61, 51, 32, 42, 43, 75, 43,
36, 37, 61, 71, 32, 40, 45, 32, 36, 42, 43, 55,
56, 62, 66, 72, 73, 78, 36, 46, 47, 52, 68, 78,
80, 49, 59, 69, 65, 35, 46, 56, 57, 60, 36, 37,
45, 42, 70, 37, 45, 66, 56, 47

30-40, 40-50 ...... ಈ ವರ್ಗ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ವರ್ಗ ಮಿತಿಗಿಂತಲೂ ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸಿರಿ. ಕೋಷ್ಟಕದ ಆಧಾರದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.

(i) 80 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ ಪಡೆದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

(ii) 40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ ಪಡೆದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

(iii) 60 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ ಪಡೆದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

(7) ಉದಾ. 6 ರಲ್ಲಿಯ ಸಾಮಾಗ್ರಿಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ 30-40, 40-50 .... ಹೀಗೆ ವರ್ಗ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಮಿತಿಗಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸಿ ಕೋಷ್ಟಕದ ಆಧಾರದಿಂದ ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.

(i) 70 ಅಥವಾ 70 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣ ಪಡೆದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟು ?

(ii) 30 ಅಥವಾ 30 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಗುಣ ಪಡೆದಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟು ?

(8) ಕೆಳಗಿನ 10 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ

45,47,50,52,x, x+2, 60,62,63,74 ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಕ 53 ಇದೆ ಇದರ ಮೇಲಿಂದ x ದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ ಅದರಂತೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಾಮಾಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಣಿತದ ಮೋಜು

ಪಾಸ್ಕಲನ ತ್ರಿಕೋನ ಅಥವಾ ಮೇರು ಪ್ರಸ್ತರ

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
....
....
....

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಈ ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯ ಬಂಧ ತ್ರಿಕೋನಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ, ಈ ರಚನೆಯನ್ನು ಪಾಸ್ಕಲನ ತ್ರಿಕೋನವೆಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗುವುದು. ಈ ರಚನೆಯಲ್ಲಿಯ ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಯೋಗ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆಯಿರಿ. ಈ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖೆಗಳ್ಳು $(x+y)$ ಈ ದ್ವಿಪದಿಯ ಘಾತಾಂಕದ ವಿಸ್ತಾರದ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರುವ ಸಣಗಣಕಗಳಾಗಿರುವವು.

ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತಾರ ಗಮನಿಸಿರಿ.

$(x + y)^0 = 1$

$(x + y)^1 = 1x + 1y$

$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$

$(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$

$(x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$

ಈ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿಯ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಘಾತಕಗಳ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ ಇದರ ಮೇಲಿಂದ $(x + y)^{10}$ ಈ ವಿಸ್ತಾರ ಬರೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ ಸೂಚಿ

1. ಗಣಗಳು

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.1

(1) (i) {2, 4, 6, 8, ...} (ii) {2} (iii) {−1, −2, −3, ...} (iv) {ಸಾ, ರೆ, ಗ, ಮ, ಪ, ಧ, ನಿ}

(2) (i) $\frac{4}{3}$ ಈ ಗಣವು Q ದ ಘಟಕವಿದೆ. (ii) −2 ಇದು ಗಣ N ದ ಘಟಕವಿಲ್ಲ.

(iii) ಗಣ P ಯ ಘಟಕ p ಹೀಗೆ ಇದೆ p ಇದು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

(4) (i) A = {ಚೈತ್ರ, ವೈಶಾಖ, ಜೇಷ್ಠ, ಆಷಾಢ, ಶ್ರಾವಣ, ಭಾದ್ರಪದ, ಆಶ್ವೀನ, ಕಾರ್ತಿಕ, ಮಾರ್ಗಶಿರ, ಪೌಷ, ಮಾಘ, ಪಾಲ್ಗುಣ}

(ii) X = {C, O, M, P, L, E, N, T} (iii) Y = {ಮೂಗು, ಕಿವಿ, ಕಣ್ಣು, ನಾಲಿಗೆ, ತ್ವಚೆ}

(iv) Z = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}

(v) E = {ಏಶಿಯಾ, ಆಫ್ರಿಕಾ, ಯುರೋಪ, ಆಸ್ಟ್ರೇಲಿಯಾ, ಅಂಟಾರ್ಕ್ಟಿಕಾ, ದಕ್ಷಿಣ ಅಮೇರಿಕಾ, ಉತ್ತರ ಅಮೇರಿಕಾ}

(5) (i) $A = \{x \mid x = n^2, n \in N, n \leq 10\}$ (ii) $B = \{x \mid x = 6n, n \in N, n < 9\}$

(iii) C = {y | y ಇದು 'SMILE' ಈ ಶಬ್ದದಲ್ಲಿಯ ಅಕ್ಷರ ಇವೆ}

(iv) D = {z | z ಇದು ವಾರದಲ್ಲಿಯ ದಿನಗಳಿವೆ} (v) X = {y | y ಇದು 'eat' ಈ ಶಬ್ದದಲ್ಲಿಯ ಅಕ್ಷರ ಇವೆ}

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.2

(1) A = B = C (2) A = B (3) ಗಣ A ಮತ್ತು C ಇವುಗಳು ರಿಕ್ತ ಗಣಗಳಾಗಿವೆ.

(4) (i), (iii), (iv), (v) ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯ ಸಾಂತ ಗಣ ಇವೆ, (ii), (vi), (vii) ಇವುಗಳು ಅನಂತ ಗಣಗಳಿವೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.3

(1) (i), (ii), (iii), (v) ಈ ವಿಧಾನಗಳು ಅಸತ್ಯ ಇವೆ, (iv), (vi) ಈ ವಿಧಾನಗಳು ಸತ್ಯ ಇವೆ.

(4) {1}, {3}, {2}, {7}, {1, 3}, {1, 2}, {1, 7}, {3, 2}, {3, 7}, {2, 7}, {1, 3, 2}, {1, 2, 7}, {3, 2, 7}, {1, 3, 2, 7} ಇಂತಹಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ 3.

(5) (i) $P \subseteq H$, $P \subseteq B$, $I \subseteq M$, $I \subseteq B$, $H \subseteq B$, $M \subseteq B$ (ii) ಗಣ B

(6) (i) N, W, I ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಗಣ (ii) N, W, I ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಗಣ

(7) ಗಣಿತದಲ್ಲಿ 50% ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಗುಣ ಪಡೆಯುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.4

(1) n (B) = 21 (2) ಒಂದೂ ಪೇಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾರದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 5

(3) ಒಟ್ಟು ಉತ್ತೀರ್ಣ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 70

(4) ಗಿರ್ಯಾರೋಹಣ ಮತ್ತು ಆಕಾಶದರ್ಶನ ಇವೆರಡರ ಪೈಕಿ ಯಾವುದರಲ್ಲಿಯೂ ಇಷ್ಟವಿರದೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 20

ಕೇವಲ ಗಿರ್ಯಾರೋಹಣ ಇಷ್ಟಪಡುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ = 20, ಕೇವಲ ಆಕಾಶದರ್ಶನ ಇಷ್ಟಪಡುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ = 70

(5) (i) $A = \{x, y, z, m, n\}$ (ii) $B = \{p, q, r, m, n\}$

(iii) $A \cup B = \{x, y, z, m, n, p, q, r\}$ (iv) $U = \{x, y, z, m, n, p, q, r, s, t\}$

(v) $A' = \{p, q, r, s, t\}$ (vi) $B' = \{x, y, z, s, t\}$ (vii) $(A \cup B)' = \{s, t\}$

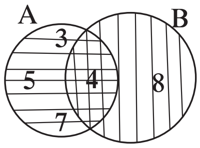
ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 1

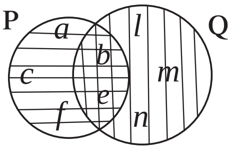
(1) (i) (C) (ii) (D) (iii) (C) (iv) (B) (v) (A) (vi) (A)

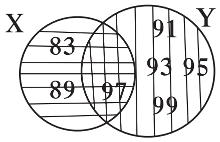
(2) (i) (A) (ii) (A) (iii) (B) (iv) (C)

(3) ಕೇವಲ ಇಂಗ್ಲೀಷ ಮಾತನಾಡುವವರು 57, ಕೇವಲ ಫ್ರೆಂಚ್ ಮಾತನಾಡುವವರು 28, ಎರಡು ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ಮಾತನಾಡುವವರು 15.

(4) 135 (5) 12 (6) 4

(7) (i)


(ii)


(iii)


(8) $S \subseteq X$, $V \subseteq X$, $S \subseteq X$, $T \subseteq X$, $S \subseteq Y$, $S \subseteq V$, $S \subseteq T$, $V \subseteq T$, $Y \subseteq T$,

(9) $M \cup \phi = M$, $M \cap \phi = \phi$

(10) U = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13}, A = {1, 2, 3, 5, 7} B = {1, 5, 8, 9, 10}
$M \cup B$ = {1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10}, $A \cap B$ = {1, 5}

(11) $n(A \cup B) = 16$

2. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.1

(1) ಖಂಡಿತ : (i), (iii), (iv) ಅಖಂಡ ಆವರ್ತಿ : (ii), (v)

(2) (i) 0.635 (ii) $0.\overline{25}$ (iii) $3.2\overline{85714}$ (iv) 0.8 (v) 2.125

(3) (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{37}{99}$ (iii) $\frac{314}{99}$ (iv) $\frac{1574}{99}$ (v) $\frac{2512}{999}$

ಉದಾಹರಣೆ ಸಂಗ್ರಹ 2.2

(4) (i) −0.4, −0.3, 0.2 ಇಂತಹ ಅಸಂಖ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

(ii) −2.310, −2.320, −2.325 ಇಂತಹ ಅಸಂಖ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

(iii) 5.21, 5.22, 5.23 ಇಂತಹ ಅಸಂಖ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

(iv) −4.51, −4.55, −4.58 ಇಂತಹ ಅಸಂಖ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.3

(1) (i) 3 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 2 (v) 3

(2) (i), (iii), (vi) ಕರಣಿಗಳು ಇವೆ. ಮತ್ತು (ii), (iv), (v) ಕರಣಿಗಳು ಇಲ್ಲ.

(3) ಸಜಾತಿಯ ಕರಣಿಗಳು : (i), (iii), (iv) ಮತ್ತು ವಿಜಾತಿಯ ಕರಣಿಗಳು : (ii), (v), (vi)

(4) (i) $3\sqrt{3}$ (ii) $5\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{10}$ (iv) $4\sqrt{7}$ (v) $2\sqrt{42}$

(5) (i) $7\sqrt{2} > 5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247} < \sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$

(iv) $5\sqrt{5} < 7\sqrt{5}$ (v) $4\sqrt{42} > 9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3} < 9$ (vii) $7 > 2\sqrt{5}$

(6) (i) $13\sqrt{5}$ (ii) $10\sqrt{5}$ (iii) $24\sqrt{3}$ (iv) $\frac{12}{5}\sqrt{7}$

(7) (i) $18\sqrt{6}$ (ii) $126\sqrt{5}$ (iii) $6\sqrt{10}$ (iv) 80

(8) (i) 7 (ii) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (iii) $\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{62}$.

(9) (i) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{14}}{14}$ (iii) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$ (iv) $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ (v) $\frac{11}{3}\sqrt{3}$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.4

(1) (i) $-3+\sqrt{21}$ (ii) $\sqrt{10}-\sqrt{14}$ (iii) $-18+13\sqrt{6}$

(2) (i) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$ (ii) $\frac{3\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)}{2}$ (iii) $28-16\sqrt{3}$ (iv) $4-\sqrt{15}$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.5

(1) (i) 13 (ii) 5 (iii) 28 (2) 2 ಅಥವಾ $\frac{4}{3}$ (ii) 1 ಅಥವಾ 6 (iii) -2 ಅಥವಾ 18 (iv) 0 ಅಥವಾ -40

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 2

(1) (i) B (ii) D (iii) C (iv) D (v) A

(vi) C (vii) C (viii) C (ix) A (x) B

(2) (i) $\frac{555}{1000}$ (ii) $\frac{29539}{999}$ (iii) $\frac{9306}{999}$ (iv) $\frac{357060}{999}$ (v) $\frac{30189}{999}$

(3) (i) $-0.\overline{714285}$ (ii) $0.\overline{81}$ (iii) 2.2360679... (iv) $9.\overline{307692}$ (v) 3.625

(5) (i) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (ii) $-\frac{5}{3}\sqrt{5}$

(6) (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{10}$ (v) $\sqrt{2}$ (vi) $\sqrt{11}$

(7) (i) $6\sqrt{3}$ (ii) $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ (iii) $\frac{15}{2}\sqrt{6}$ (iv) $-25\sqrt{3}$ (v) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

(8) (i) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ii) $\frac{2\sqrt{7}}{21}$ (iii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (iv) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{37}$ (v) $\frac{6\left(4\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{23}$

3. ಬಹುಪದಿಗಳು

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.1

(1) (i) ಇರುವುದಿಲ್ಲ, ಕಾರಣ $\frac{1}{y}$ ದಲ್ಲಿ y ದ ಘಾತಾಂಕ (-1) ಇದೆ.

(ii) ಇರುವುದಿಲ್ಲ, ಕಾರಣ $5\sqrt{x}$ ಇದರಲ್ಲಿ x ದ ಘಾತಾಂಕ $\left(\frac{1}{2}\right)$ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ ಇದೆ.

(iii) ಇದೆ (iv) ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಕಾರಣ $2m^{-2}$ ದ ಘಾತಾಜಕ (-2) ಇದೆ (v) ಇರುವುದು.

(2) (i) 1 (ii) $-\sqrt{3}$, (iii) $-\frac{2}{3}$

(3) (i) x^7 (ii) $2x^{35}-7$ (iii) x^8-2x^5+3 ಈ ಮೂರು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಅನೇಕ ಉತ್ತರ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯ

(4) (i) 0 (ii) 0 (iii) 2 (iv) 10 (v) 1 (vi) 5 (vii) 3 (viii) 10

(5) (i) ವರ್ಗ (ii) ರೇಷೀಯ (iii) ರೇಷೀಯ (iv) ಘನ (v) ವರ್ಗ (vi) ಘನ

(6) (i) $m^3 + 5m + 3$ (ii) $y^5 + 2y^4 + 3y^3 - y^2 - 7y - \frac{1}{2}$

(7) (i) (1, 0, 0, −2) (ii) (5, 0) (iii) (2, 0, −3, 0, 7) (iv) $\left(\frac{-2}{3}\right)$

(8) (i) $x^2 + 2x + 3$ (ii) $5x^4 - 1$ (iii) $-2x^3 + 2x^2 - 2x + 2$

(9) ವರ್ಗ ಬಹುಪದಿ : x^2; $2x^2 + 5x + 10$; $3x^2 + 5x$; ಘನ ಬಹುಪದಿ : $x^3 + x^2 + x + 5$; $x^3 + 9$

ರೇಷೀಯ ಬಹುಪದಿ : $x + 7$; ದ್ವಿಪದಿ : : $x + 7$, $x^3 + 9$; ತ್ರಿಪದಿ : $2x^2 + 5x + 10$; ಏಕಪದಿ x^2

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.2

(1) (i) $a + bx$ (ii) xy (iii) $10n + m$

(2) (i) $6x^3 - 2x^2 + 2x$ (ii) $-2m^4 + 2m^3 + 2m^2 + 3m - 6 + \sqrt{2}$ (iii) $5y^2 + 6y + 11$

(3) (i) $-6x^2 + 10x$ (ii) $10ab^2 + a^2b - 7ab$

(4) (i) $2x^3 - 4x^2 - 2x$ (ii) $x^8 + 2x^7 + 2x^5 - x^3 - 2x^2 - 2$ (iii) $-4y^4 + 7y^2 + 3y$

(5) (i) $x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 0$

(ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2 = (x^2 - x)(5x^3 + 9x^2 + 6x + 8) + (8x + 2)$

(6) $a^4 + 7a^2b^2 + 2b^4$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.3

(1) (i) ಭಾಗಾಕಾರ = $2m + 7$, ಶೇಷ = 45

(ii) ಭಾಗಾಕಾರ = $x^3 + 3x - 2$, ಶೇಷ = 9

(iii) ಭಾಗಾಕಾರ = $y^2 + 6y + 36$, ಶೇಷ = 0

(iv) ಭಾಗಾಕಾರ = $2x^3 - 3x^2 + 7x - 17$, ಶೇಷ = 51

(v) ಭಾಗಾಕಾರ = $x^3 - 4x^2 + 13x - 52$, ಶೇಷ = 200

(vi) ಭಾಗಾಕಾರ = $y^2 - 2y + 3$, ಶೇಷ = 2

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.4

(1) 5 (2) 1 (3) $4a^2 + 20$ (4) −11

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.5

(1) (i) −41 (ii) 7 (iii) 7 (2) (i) 1, 0, −8 (ii) 4, 5, 13 (iii) −2, 0, 10

(3) 0 (4) 2 (5) (i) 17 (ii) $2a^3 - a^2 - a$ (iii) 1544 (6) 92 (7) ಇರುವುದು

(8) 2 (9) (i) ಇರುವುಲ್ಲ (ii) ಇರುವುದು (10) 30 (11) ಇದೆ.

(13) (i) −3 (ii) 80

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.6

(1) (i) $(x + 1)(2x - 1)$ (ii) $(m + 3)(2m - 1)$ (iii) $(3x + 7)(4x + 11)$

(iv) $(y - 1)(3y + 1)$ (v) $(x + \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 1)$ (vi) $(x - 4)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

(2) (i) $(x - 3)(x + 2)(x - 2)(x + 1)$ (ii) $(x - 13)(x - 2)$

(iii) $(x - 8)(x + 2)(x - 4)(x - 2)$ (iv) $(x^2 - 2x + 10)(x^2 - 2x - 2)$

(v) $(y^2 + 5y - 22)(y + 4)(y + 1)$ (vi) $(y + 6)(y - 1)(y + 4)(y + 1)$

(v) $(x^2 - 8x + 18)(x^2 - 8x + 13)$

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 3

(1) (i) D (ii) D (iii) C (iv) A (v) C (vi) A (vii) D (viii) C (ix) A (x) A

(2) (i) 4 (ii) 0 (iii) 9

(3) (i) $7x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 9$ (ii) $5p^4 + 2p^3 + 10p^2 + p - 8$

(4) (i) (1, 0, 0, 0, 16) (ii) (1, 0, 0, 2, 3, 15)

(5) (i) $3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 7x + 18$ (ii) $6x^3 + x^2 + 0x + 7$ (iii) $4x^3 + 5x^2 - 3x + 0$

(6) (i) $10x^4 + 13x^3 + 9x^2 - 7x + 12$ (ii) $p^3q + 4p^2q + 4pq + 7$

(7) (i) $2x^2 - 7y + 16$ (ii) $x^2 + 5x + 2$

(8) (i) $m^7 - 4m^5 + 6m^4 + 6m^3 - 12m^2 + 5m + 6$

(ii) $5m^5 - 5m^4 + 15m^3 - 2m^2 + 2m - 6$

(9) ಶೇಷ = 19 (10) $m = 1$ (11) ಒಟ್ಟು ಜನಸಂಖ್ಯೆ $= 10x^2 + 5y^2 - xy$

(12) $b = \frac{1}{2}$ (13) $11m^2 - 8m + 5$ (14) $-2x^2 + 8x + 11$ (15) $2m + n + 7$

4. ಗುಣೋತ್ತರ ಪ್ರಮಾಣ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.1

(1) (i) 6 : 5 (ii) 2 : 3 (iii) 2 : 3

(2) (i) 25 : 11 (ii) 35 : 31 (iii) 2 : 1 (iv) 10 : 17 (v) 2 : 1 (vi) 220 : 153

(3) (i) 3 : 4 (ii) 11 : 25 (iii) 1 : 16 (iv) 13 : 25 (v) 4 : 625

(4) 4 ಜನರು (5) (i) 60% (ii) 94% (iii) 70% (iv) 91% (v) 43.75%

(6) ಆಭಾನ ವಯಸ್ಸು 18 ವರ್ಷ ತಾಯಿಯ ವಯಸ್ಸು 45 ವರ್ಷಗಳು (7) 6 ವರ್ಷಗಳಿಂದ (8) ರೇಹಾನಳ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸು 8 ವರ್ಷಗಳು

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.2

(1) (i) ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 20, 49, 2.5 (ii) ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 7, 27, 2.25

(2) (i) $1 : 2\pi$ (ii) $2 : r$ (iii) $\sqrt{2} : 1$ (iv) 34 : 35

(3) (i) $\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18} > \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1} > \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) 80° (ii) ಅಲ್ಬರ್ಟನ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸು 25 ವರ್ಷಗಳು, ಸಲೀಮನ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸು 45 ವರ್ಷಗಳು

(iii) ಉದ್ದ 13.5 ಸೆಮೀ, ಅಗಲ 4.5 ಸೆಮೀ, (iv) 124, 92 (v) 20, 18

(5) (i) 729 (ii) 45 : 7 (6) 2 : 125 (7) $x = 5$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.3

(1) (i) 22 : 13 (ii) 125 : 71 (iii) 316 : 27 (iv) 38 : 11

(2) (i) 3 : 5 (ii) 1 : 6 (iii) 7 : 43 (iv) 71 : 179 (3) 170 : 173

(4) (i) $x = 8$ (ii) $x = 9$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = 6$ (v) $x = \frac{9}{14}$ (vi) $x = 3$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.4

(1) (i) 36, 22 (ii) 16, $2a - 2b + 2c$

(2) (i) 29 : 21 (ii) 23 : 7 (4) (i) $x = 2$ (ii) $y = 1$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.5

(1) $x = 4$ (2) $x = \frac{347}{14}$ (3) 18, 12, 8 ಅಥವಾ 8, 12, 18 (6) $\frac{x+y}{xy}$

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 4

(1) (i) B (ii) C (iii) B (iv) D (v) C

(2) (i) 7 : 16 (ii) 2 : 5 (iii) 5 : 9 (iv) 6 : 7 (v) 6 : 7

(3) (i) 1 : 2 (ii) 5 : 4 (iii) 1 : 1

(4) (i) ಹಾಗೂ (iii) ಪರಂಪರೀತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿವೆ (ii) ಹಾಗೂ (iv) ಪರಂಪರಿತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ. (5) $b = 9$

(6) (i) 7.4% (ii) 62.5% (iii) 73.33% (iv) 31.25% (v) 12%

(7) (i) 5 : 6 (ii) 85 : 128 (iii) 1 : 2 (iv) 50 : 1 (v) 3 : 5

(8) (i) $\frac{17}{9}$ (ii) 19 (iii) $\frac{35}{27}$ (iv) $\frac{13}{29}$

(11) $x = 9$

5. ದ್ವಿಚಲ ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.1

(3) (i) $x = 3$; $y = 1$ (ii) $x = 2$; $y = 1$ (iii) $x = 2$; $y = -2$
(iv) $x = 6$; $y = 3$ (v) $x = 1$; $y = -2$ (vi) $x = 7$; $y = 1$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.2

(1) 5 ರೂಪಾಯಿಗಳ 30 ನೋಟುಗಳು ಮತ್ತು 10 ರೂಪಾಯಿಗಳ 20 ನೋಟುಗಳು ಇವೆ.

(2) $\frac{5}{9}$ (3) ಪ್ರಿಯಾಂಕಾಳ ವಯಸ್ಸು 20 ವರ್ಷಗಳು, ದೀಪಿಕಾಳ ವಯಸ್ಸು 14 ವರ್ಷಗಳು (4) 20 ಸಿಂಹ, 30 ನವಿಲುಗಳು

(5) ಪ್ರಾರಂಭದ ವೇತನ ₹ 3900 ವಾರ್ಷಿಕ ಹೆಚ್ಚಳ ₹ 150

(6) ₹ 4000 (7) 36 (8) $\angle A = 90^0$, $\angle B = 40^0$, $\angle C = 50^0$

(9) 420 ಸೇಮಿ (10) 10

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 5

(1) (i) A (ii) C (iii) C

(2) (i) $x = 2;\ y = 1$ (ii) $x = 5;\ y = 3$ (iii) $x = 8;\ y = 3$

(iv) $x = 1;\ y = -4$ (v) $x = 3;\ y = 1$ (vi) $x = 4;\ y = 3$

(3) (i) $x = 1;\ y = -1$ (ii) $x = 2;\ y = 1$ (iii) $x = 26;\ y = 18$ (iv) $x = 8;\ y = 2$

(4) (i) $x = 6;\ y = 8$ (ii) $x = 9;\ y = 2$ (iii) $x = \frac{1}{2};\ y = \frac{1}{3}$ (5) 35

(6) ₹ 69 (7) ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ತಿಂಗಳ ಉತ್ಪನ್ನ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ₹ 1800 ಮತ್ತು ₹ 1400

(8) ಉದ್ದ 347 ಮೂಲಮಾನ, ಅಗಲ 207 ಮೂಲಮಾನ (9) 40 ಕಿಮಿ/ಗಂಟೆ, 30 ಕಿಮಿ/ಗಂಟೆ

(10) (i) 54, 45 (ii) 36, 63 ಇತ್ಯಾದಿ.

6. ಆರ್ಥಿಕ ನಿಯೋಜನೆ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.1

(1) ₹ 1200 (2) ಎರಡನೆಯ ವರ್ಷದ ನಂತರದ ಬಂಡವಾಳ ₹ 42,000, ಮೂಲ ಬಂಡವಾಳದ ಮೇಲೆ ಶೇಕಡಾ 16 ಹಾನಿಯಾಯಿತು.

(3) ಮಾಸಿಕ ಉತ್ಪನ್ನ ₹ 50,000 (4) ಶ್ರೀ ಫರ್ನಾಂಡಿಸ್ (5) ₹ 25,000

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.2

(1) (i) ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ ತುಂಬಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. (ii) ತುಂಬಬಲು ಹತ್ತುವದು (iii) ತುಂಬಲು ಹತ್ತುವದು

(iv) ತುಂಬಲು ಹತ್ತುವದು (v) ತುಂಬಲು ಹತ್ತುವದಿಲ್ಲ

(2) ₹ 9836.50

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 6

(1) (i) A (ii) B (2) ಉತ್ಪನ್ನ ₹ 8750

(3) ಹೀರಾಲಾಲನ ಪ್ರತಿಶತ ಲಾಭ 36.73, ರಮಣಿಕಲಾಲನ ಪ್ರತಿಶತ ಲಾಭ 16.64, ಹೀರಾಲಾಲ

(4) ₹ 99383.75 (5) ₹ 4,00,000 (6) 12.5%

(7) ರಮೇಶನ ಉಳಿತಾಯ ₹ 48000 ; ಸುರೇಶನ ಉಳಿತಾಯ ₹ 51000 ; ಪ್ರಿತಿಯ ಉಳಿತಾಯ ₹ 36000

(8) (i) ₹ 213000 (ii) ₹ 7500 (iii) ತೆರಿಗೆ ಇಲ್ಲ.

7. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.2

(1) ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಸಾಮುಗ್ರಿ : (i), (iii), (iv) ದ್ವಿತೀಯ ಸಾಮುಗ್ರಿ : (ii)

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.3

(1) ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಮರ್ಯಾದೆ = 20, ಮೇಲಿನ ವರ್ಗ ಮರ್ಯಾದೆ = 25 (2) 37.5 (3) 7-13

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.4

(3) (i) 38 (ii) 3 (iii) 19 (iv) 62 (4) (i) 24 (ii) 3 (iii) 43 (iv) 43

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.5

(1) 7 ಕ್ವಿಂಟಲ (2) 74 (3) 100 (4) ₹ 4900 (5) 75 ಗ್ರ್ಯಾಮ

(6) ಮಧ್ಯ = 3, ಮಧ್ಯಕ = 3, ಬಹುಲಕ = 4 (7) 78.56 (8) $x = 9$ (9) 20 (10) 70

(11) 34.25 (12) 37 ಕಿಗ್ರಾಂ (13) 2 (14) 35 ಮತ್ತು 37

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 7

(1) (i) C (ii) B (iii) D (iv) B (v) A (vi) D

(vii) B (viii) A (ix) C (x) C

(2) ₹ 26000 (3) ₹ 127

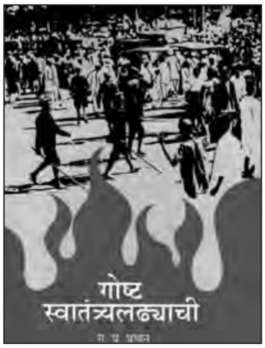
(4) (i) 24 (ii) 06

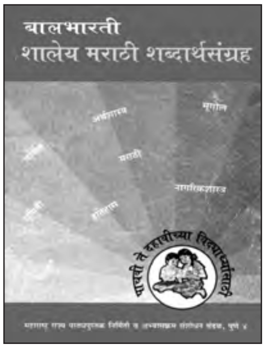
(5) P = 20

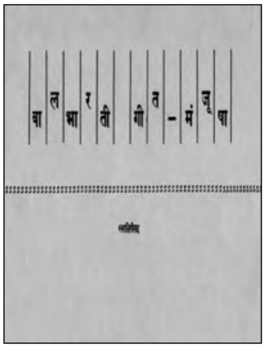
(6) (i) 66 (ii) 14 (iii) 45

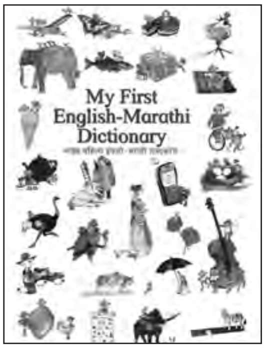
(7) (i) 11 (ii) 68

(8) $x = 52$, ಮಧ್ಯ = 55.9, ಬಹುಲಕ = 52









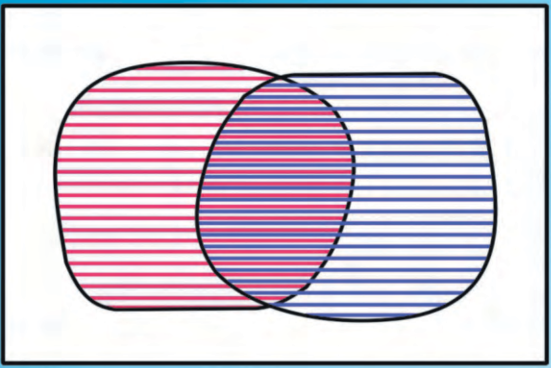
- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.

पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५



$x + y = 4$

$2x + 3y = 3$

$x = \square$, $y = \square$

ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ, ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು
ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳ,
ಪುಣೆ – 411004.

कन्नड गणित इ.९वी भाग-१ ₹ 64.00