ગણિત ભાગ-II

ધોરણ - નવમું

ભારતનું સંવિધાન

ભાગ ૪ ક

નાગરિકોના મૂળભૂત કર્તવ્યો

અનુચ્છેદ ૫૧ ક

મૂળભૂત કર્તવ્ય – ભારતના પ્રત્યેક નાગરિકનું એ કર્તવ્ય છે કે તેણે –

(ક) સંવિધાનનું પાલન કરવું. સંવિધાનના આદર્શો, રાષ્ટ્રધ્વજ અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવો.

(ખ) સ્વાતંત્ર્ય ચળવળની પ્રેરણા આપનારા આદર્શોનું પાલન કરવું.

(ગ) દેશના સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડતા સુરક્ષિત રાખવા પ્રયત્નશીલ રહેવું.

(ઘ) આપણા દેશનું રક્ષણ કરવું, દેશની સેવા કરવી.

(ઙ) દરેક પ્રકારના ભેદભાવને ભૂલીને એકતા અને બંધુત્વની ભાવના વિકસાવવી. સ્ત્રીઓના સન્માનને ઠેસ પહોંચાડનારી પ્રથાઓનો ત્યાગ કરવો.

(ચ) આપણી સંમિશ્ર સંસ્કૃતિના વારસાનું જતન કરવું.

(છ) નૈસર્ગિક પર્યાવરણનું જતન કરવું. સજીવ પ્રાણીઓ પ્રત્યે દયાભાવ રાખવો.

(જ) વૈજ્ઞાનિક દૃષ્ટિ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસાવૃત્તિ કેળવવી.

(ઝ) સાર્વજનિક માલમત્તાનું જતન કરવું. હિંસાનો ત્યાગ કરવો.

(ઞ) દેશની ઉત્તરોત્તર પ્રગતિ માટે વ્યક્તિગત તેમજ સામૂહિક કાર્યમાં ઉત્તમતા-શ્રેષ્ઠતાનું સ્તર જાળવી રાખવાનો પ્રયત્ન કરવો.

(ટ) ૬થી ૧૪ વય જૂથના બાળકોને તેમના વાલીએ શિક્ષણની તક પૂરી પાડવી.

શાસન નિર્ણય ક્રમાંક : અભ્યાસ - 2116/(પ્ર.ક્ર. 43/16) એસડી-4 દિનાંક 25-4-2016 અન્વયે સ્થાપિત થયેલ સમન્વય સમિતિની દિનાંક 3-3-2017 રોજની બેઠકમાં આ પાઠ્યપુસ્તક નિર્ધારિત કરવાની માન્યતા આપવામાં આવી છે.

ગણિત

ભાગ-II

ધોરણ-નવમું

મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ, પુણે - 411 004.

659HS3

તમારાં સ્માર્ટફોનમાં DIKSHA App દ્વારા પાઠ્યપુસ્તકનાં પહેલા પાનાં પરનાં Q.R. Codeથી ડિજિટલ પાઠ્યપુસ્તક અને દરેક પાઠમાં આપેલા Q.R. Codeથી તે સંબંધિત પાઠનાં અધ્યયન-અધ્યાપન માટે ઉપયોગી દશ્ય-શ્રાવ્ય સાહિત્ય ઉપલબ્ધ થશે.

પ્રથમાવૃત્તિ : 2017
પુનર્મુદ્રણ : 2022

ગણિત વિષયતજ્ઞ સમિતિ

ડૉ. મંગલા નારળીકર (અધ્યક્ષ)
ડૉ. જયશ્રી અત્રે (સદસ્ય)
શ્રી. રમાકાંત સરોદે (સદસ્ય)
શ્રી. દાદાસો સરડે (સદસ્ય)
શ્રી. સંદીપ પંચભાઈ (સદસ્ય)
શ્રીમતી લતા ટિળેકર (સદસ્ય)
શ્રીમતી ઉજ્જવલા ગોડબોલે (સદસ્ય, સચિવ)

ગણિત વિષય - રાજ્ય અભ્યાસમંડળના સદસ્ય

શ્રીમતી પૂજા જાધવ
શ્રી. ગણેશ કોલતે
શ્રી. રામા વ્હન્યાળકર
શ્રીમતી સુવર્ણા દેશપાંડે
શ્રી. ઉમેશ રેળે
શ્રી. આણણાપા પરીટ
શ્રી. શ્રીપાદ દેશપાંડે
શ્રી. રાજેન્દ્ર ચૌધરી
શ્રી. ચંદન કુલકર્ણી
શ્રીમતી અનિતા જાવે
શ્રીમતી બાગેશ્રી ચવ્હાણ
શ્રી. કલ્યાણ કડેકર
શ્રી. સંદેશ સોનવણે
શ્રી. સુજિત શિંદે
ડૉ. હનુમંત જગતાપ
શ્રી. પ્રતાપ કાશિદ
શ્રી. કાશિરામ બાવિસાને
શ્રી. પપ્પુ ગાડે
શ્રી. અન્સાર શેખ
શ્રી. પ્રમોદ ઠોંબરે
શ્રી. પ્રકાશ ઝેંડે
શ્રી. બન્સી હાવળે
શ્રી. શ્રીકાંત રત્નપારખી
શ્રી. સૂર્યકાંત શહાણે
શ્રી. સુરેશ દાતે
શ્રી. પ્રકાશ કાપસે
શ્રી. સલીમ હાશ્મી
શ્રીમતી આર્યા ભિડે
શ્રી. મિલિંદ ભાકરે
શ્રી. જ્ઞાનેશ્વર માશાળકર
શ્રી. લક્ષ્મણ દાવણકર
શ્રી. સુધીર પાટીલ
શ્રી. રાજારામ બંડગર
શ્રીમતી રોહિણી શિર્કે
શ્રી. સાગર સકુડે
શ્રી. પ્રદીપ ગોડસે
શ્રી. રવિન્દ્ર ખંદારે

શ્રીમતી પ્રાજક્તી ગોખલે (નિમંત્રિત સદસ્ય)
શ્રી. વિ. દિ. ગોડબોલે (નિમંત્રિત સદસ્ય)
શ્રીમતી તરૂબેન પોપટ (નિમંત્રિત સદસ્ય)

સંયોજક : ઉજ્જવલા શ્રીકાંત ગોડબોલે
પ્ર.વિશેષાધિકારી,ગણિત વિભાગ
પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, પુણે.

મુખપૃષ્ઠ અને સજાવટ : ધનશ્રી મોકાશી
સંગણકીય આલેખન : સંદીપ કોળી, મુંબઈ.
અક્ષર ગૂંથણી : સમર્થ ગ્રાફિક્સ,
522, નારાયણ પેઠ, પુણે-30.

ભાષાંતર : **શ્રીમતી તરૂબેન પોપટ,**
ધીરેન મનસુખલાલ દોશી,
ધર્મિકા ધીરેન દોશી

ભાષાંતર સંયોજક : **કેતકી નિતેશ જાની**
વિશેષાધિકારી,
ગુજરાતી વિભાગ
પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, પુણે.

નિર્મિતિ : **શ્રી. સચિન મેહતા**
મુખ્ય નિર્મિતિ અધિકારી
સંજય કાંબળે
નિર્મિતિ અધિકારી
પ્રશાંત હરણે
સહાયક નિર્મિતિ અધિકારી

કાગળ : 70 જી.એસ.એમ. ક્રીમવ્હોવ
મુદ્રણાદેશ : N/PB/
મુદ્રક :

પ્રકાશક

શ્રી. વિવેક ઉત્તમ ગોસાવી, નિયંત્રક
પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ મંડળ,
પ્રભાદેવી, મુંબઈ - 25.

ભારતનું સંવિધાન

આમુખ

અમે ભારતના લોકો ભારતને એક સાર્વભૌમ સમાજવાદી બિનસાંપ્રદાયિક લોકતંત્રાત્મક પ્રજાસત્તાક તરીકે સંસ્થાપિત કરવાનો
તથા તેના સર્વ નાગરિકોને :
સામાજિક, આર્થિક અને રાજકીય ....ન્યાય
વિચાર, અભિવ્યક્તિ, માન્યતા,
ધર્મ અને ઉપાસનાની ....સ્વતંત્રતા
દરજ્જા અને તકની ....સમાનતા
પ્રાપ્ત થાય તેમ કરવાનો
અને તેઓ સર્વમાં
વ્યક્તિનું ગૌરવ અને રાષ્ટ્રની
એકતા અને અખંડતા સુદૃઢ કરે એવી ....બંધુતા
વિકસાવવાનો
ગંભીરતાપૂર્વક સંકલ્પ કરીને

અમારી સંવિધાનસભામાં ૨૬ નવેમ્બર, ૧૯૪૯ના રોજ આથી આ સંવિધાન અપનાવી, તેને અધિનિયમિત કરી અમને પોતાને અર્પિત કરીએ છીએ.

રાષ્ટ્રગીત

જનગણમન - અધિનાયક જય હે
ભારત - ભાગ્યવિધાતા.
પંજાબ, સિંધુ, ગુજરાત, મરાઠા,
દ્રાવિડ, ઉત્કલ, બંગ,
વિંધ્ય, હિમાચલ, યમુના, ગંગા,
ઉચ્છલ જલધિતરંગ,
તવ શુભ નામે જાગે, તવ શુભ આશિષ માગે,
ગાહે તવ જયગાથા.
જનગણ મંગલદાયક જય હે,
ભારત - ભાગ્યવિધાતા.
જય હે, જય હે, જય હે,
જય જય જય, જય હે.

પ્રતિજ્ઞા

ભારત મારો દેશ છે. બધા ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.

હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે. હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.

હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.

હું મારા દેશ અને દેશબાંધવો પ્રત્યે વફાદારી રાખવાની પ્રતિજ્ઞા લઉં છું. તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ સમાયેલું છે.

પ્રસ્તાવના

વિદ્યાર્થીમિત્રો,

ધોરણ નવનાં વર્ગમાં તમારું સ્વાગત !

પ્રાથમિક શિક્ષણનો અભ્યાસક્રમ પૂરો કરીને તમે માધ્યમિક સ્તરે અભ્યાસની શરૂઆત કરી રહ્યાં છો. આઠમાં ધોરણ સુધી ગણિતના અભ્યાસ માટે એક જ પાઠ્યપુસ્તક હતું. હવે ગણિત ભાગ I અને ગણિત ભાગ II એવા બે પાઠ્યપુસ્તકોનો તમારે અભ્યાસ કરવાનો છે.

ધોરણ આઠ સુધીના ગણિતના પાઠ્યપુસ્તકમાં તમે રેખા ત્રિકોણ, ચતુષ્કોણ, વર્તુળ વગેરેના ગુણધર્મો તપાસ્યા છે. અહીં હજુ કેટલાંક ગુણધર્મો તર્કસંગત રીતે સાબિત કરતાં શીખવાના છો. તર્કસંગત રીતે માંડણી કરવાનું આ કૌશલ્ય તમને વ્યવહારમાં બધાં જ ક્ષેત્રોમાં ઉપયોગી થાય છે. પાઠ્યપુસ્તક દ્વારા આ કૌશલ્ય તમે સહેલાઈથી આત્મસાત કરશો એ રીતે શીખવાની તક આપેલી છે.

પાઠ્યપુસ્તકમાં નમૂના તરીકે આપેલી કૃતિઓ વિશે શિક્ષકો સાથે, વર્ગમાંના સહપાઠીઓ સાથે ચર્ચા કરો અને સાબિતીના દરેક પગથિયે આપેલાં કારણોની ચર્ચા કરી તે ગુણધર્મ સમજી લો.

આ પાઠ્યપુસ્તકમાં ગણિતના ઉચ્ચ શિક્ષણ માટે એવા ત્રિકોણમિતિ અને નિર્દેશક-ભૂમિતિ જેવા ઘટકોનો સમાવેશ કર્યો છે. તે સાથે જ વ્યવહારમાં ઉપયોગી એવા પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ જેવા ઘટકોનો પણ અભ્યાસ કરવાના છો.

ઇન્ટરનેટનો ઉપયોગ કરી અનેક કૃતિ સમજી લો. પાઠ્યપુસ્તકનું ઝીણવટભર્યું વાંચન, કૃતિયુક્ત અધ્યયન અને પ્રેક્ટિસ (મહાવરો) આ ત્રિસૂત્રની મદદથી ગણિતની યાત્રા આનંદદાયક રીતે પાર પાડશો એમાં લેશમાત્ર શંકા નથી.

ચાલો તો પછી ! શિક્ષક, વાલી, મિત્રો-સખીઓ, ઇન્ટરનેટ આ બધાનો સાથ લઈને ગણિતનો અભ્યાસ કરીએ. આ અભ્યાસ માટે તમને અનેક શુભેચ્છાઓ !

(ડૉ. સુનિલ મગર)
સંચાલક
મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ
અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ, પુણે.

પુણે
દિનાંક : ૨૮ એપ્રિલ ૨૦૧૭, અખાત્રીજ
ભારતીય સૌર દિનાંક ૮ વૈશાખ ૧૯૩૯

ધોરણ-નવમું ગણિત ભાગ II અભ્યાસક્રમ વિદ્યાર્થીઓમાં નીચેની ક્ષમતા વિકસિત થશે.

ક્ષેત્ર	ઘટક	ક્ષમતા વિધાનો
1. ભૂમિતિ	1.1 યુક્લિડની ભૂમિતિ	• આપેલા વિધાન પરથી પક્ષ અને સાધ્ય લખતાં આવડે. • તર્કસંગત માંડણીથી 'સાધ્ય' વિધાન સાબિત કરવાની ક્ષમતા વિકસિત થાય.
	1.2 સમાંતર રેખા અને ખૂણાની જોડ	• સમાંતર રેખા અને તેની છેદિકાને લીધે તૈયાર થતાં ખૂણાઓની વિવિધ જોડીઓ ઓળખતાં આવડે. • આ ખૂણાઓની જોડીઓના ગુણધર્મ સમજીને તેનો ઉપયોગ કરતાં આવડે.
	1.3 ત્રિકોણના ખૂણા અને બાજુ પરના પ્રમેયો	• આપેલ માહિતી પક્ષ અને સાધ્ય રૂપમાં લખીને સાબિતી આપતાં આવડે.
	1.4 સરૂપ ત્રિકોણો	• સરૂપ ત્રિકોણો ઓળખીને તેની બાજુઓના ગુણોત્તર લખતાં આવડે.
	1.5 વર્તુળ	• એકરૂપ ત્રિકોણોની કસોટીઓ વાપરીને વર્તુળના ગુણધર્મો સાબિત કરતાં આવડે. • અંતઃવર્તુળ, પરિવર્તુળ દોરતાં આવડે.
	1.6 ભૌમિતિક રચના	• ત્રિકોણની વિશિષ્ટ બાબતો આપી હોય ત્યારે ત્રિકોણ દોરતાં આવડે.
	1.7 ચતુષ્કોણ	• વિશિષ્ટ ચતુષ્કોણના ગુણધર્મોની સાબિતી લખતાં આવડે. • ICT Tools ની મદદથી ત્રિકોણ, ચતુષ્કોણ વર્તુળના ગુણધર્મો ચકાસતાં આવડે.
2. નિર્દેશક ભૂમિતિ	2.1 નિર્દેશક ભૂમિતિ	• સમતલમાં દરેક બિંદુ સંબંધિત નિર્દેશકોની જોડીનો અર્થ કહેતા આવડે. • નિર્દેશકોનો ઉપયોગ કરીને બિંદુના સ્થાનનું વર્ણન કરતાં આવડે. • ICT Tools વાપરીને સમતલમાંના બિંદુઓના નિર્દેશકો શોધતાં આવડે.
3. મહત્ત્વમાપન	3.1 પૃષ્ઠફળ-ઘનફળ	• ગોળો અને શંકુનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધતાં આવડે.
4. ત્રિકોણમિતિ	4.1 ત્રિકોણમિતિ	• સરૂપ ત્રિકોણો અને પાયથાગોરસનો પ્રમેય વાપરીને ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તર કહેતાં આવડે અને તેનો ઉપયોગ કરતાં આવડે.

શિક્ષકો માટે સૂચના

ધોરણ નવના ગણિત ભાગ II આ પાઠચપુસ્તકનું શિક્ષકોએ ધ્યાનથી ઝીણવટભર્યું વાંચન કરવું. તેમાં આપેલી બધી કૃતિઓ, પ્રાત્યક્ષિકો સમજી લેવાં. કૃતિના બે ભાગ છે. એક એટલે સાબિતી લખવી અને બીજો એટલે ગુણધર્મો અને શીખેલા તારણોનો પ્રત્યક્ષ કૃતિ કરી તાળો મેળવવો. આ કૃતિઓ કરતી વખતે અને પુસ્તક વધુ પ્રમાણમાં ઉદ્બોધક બને તે માટે ચર્ચા, પ્રશ્નોત્તરો, સામૂહિક ઉપક્રમો જેવી વિવિધ કૃતિઓ કરાવવી શિક્ષકો પાસેથી અપેક્ષિત છે. પાઠચપુસ્તકની કૃતિઓ વિદ્યાર્થીઓએ કરવી અને તેના જેવી અનેક કૃતિઓ તૈયાર કરવા માટે વિદ્યાર્થીઓને માર્ગદર્શન આપવું.

પ્રમેયની સાબિતી મોઢે કરવા કરતાં, તે માટે તર્કબધ્ધ વિચાર કરીને માંડણી કરવી વધુ જરૂરી છે તર્કશુધ્ધ વિચારશક્તિને પ્રોત્સાહન આપે તેવા વિવિધ ઉદાહરણોનો પાઠચપુસ્તકમાં સમાવેશ કર્યો છે. આવાં અનેક અન્ય ઉદાહરણો શિક્ષકો અને વિદ્યાર્થીઓએ સાથે મળીને તૈયાર કરવા. આવ્હાનાત્મક ઉદાહરણો પાઠચપુસ્તકમાં તારાંકિત કરીને આપ્યા છે. વિદ્યાર્થીઓ જુદી રીતે વિચાર કરી, તર્કસંગત રીતે એકાદ સાબિતી લખી, કૃતિ કરી અથવા ઉદાહરણ ગણ્યા હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓને શાબાશી આપવી.

મૂલ્યમાપન કરતી વખતે મુક્ત પ્રશ્નો અને કૃતિપત્રિકાનો પણ શિક્ષકોએ વિચાર કરવો અપેક્ષિત છે. આવી મૂલ્યમાપન પધ્ધતિ વિકસિત કરવાનો શિક્ષકોએ જરૂર પ્રયત્ન કરવો. આ સાથે પાઠચપુસ્તકમાં નમૂના પ્રાત્યક્ષિકોની યાદી આપી છે. તે ઉપરાંત ઉપલબ્ધ સાહિત્ય અનુસાર તમે પોતે જુદા-જુદા પ્રેકટિકલ્સ તૈયાર કરી શકો છો. તેમજ સાધન-સાહિત્ય નિર્મિતિ કરી શકો છો. પાઠચપુસ્તકમાંની વિવિધ કૃતિઓ, પ્રાત્યક્ષિકમાં અંતર્ભૂત કરેલી છે. તેના પર આધારિત મૂલ્યમાપન પધ્ધતિ, આગળના અભ્યાસ માટેની ક્ષમતા વિકસાવવા નિશ્ચિત ઉપયોગી થશે એવી અમોને આશા છે.

નમૂના પ્રાત્યક્ષિકોની યાદી

(1) સંખ્યારેખા પરના બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર શોધવું.

(2) સમાંતર રેખા અને છેદિકાને લીધે બનતા ખૂણાઓના ગુણધર્મ સાધનોની મદદથી ચકાસવા.

(3) વિવિધ સાધનો વાપરીને ત્રિકોણની બાજુઓ અને ખૂણાના ગુણધર્મો તપાસવા.

(4) કાટકોણ ત્રિકોણ અને મધ્યગાના ગુણધર્મ ચકાસવા.

(5) ત્રિકોણની રચના માટે જુદાં જુદાં માપ લઈ બધા પ્રકારની ભૌમિતિક રચનાઓ કરી જોવી.

(6) શંકુના વક્રપૃષ્ઠફળનો અંદાજ બાંધવા માટે કૃતિ આપેલી છે. તે કૃતિ 'r' ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ માટે કરવી અને વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ πr^2 છે તે ચકાસવું.

(7) એકાદ ઓરડાનો, તેમાં રહેલી બધી વસ્તુઓના માપ ધ્યાનમાં લઈને પ્રમાણસર નકશો, આલેખપત્ર ઉપર દોરવો.

(8) શાળાના મેદાન પર અક્ષ x અને y દોરીને વિદ્યાર્થીઓના સ્થાન નિર્દેશકો નક્કી કરવાની કૃતિ કરવી.

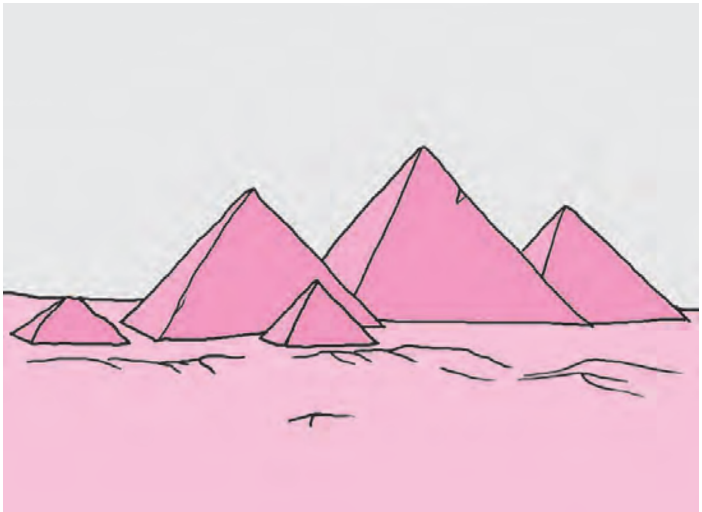
(9) નળાકાર ડબ્બાનું ઘનફળ સૂત્રની મદદથી શોધવું તે જ ડબ્બામાં છલોછલ પાણી ભરી, પાણીનું ઘનફળ માપવું. બન્ને જવાબની તુલના કરવી. અનેક ત્રિમિતિય આકારની વસ્તુના ઘનફળ અને પૃષ્ઠફળ ચકાસવા.

અનુક્રમણિકા

1 ભૂમિતિની મૂળભૂત સંકલ્પના

ચાલો શીખીએ.

- બિંદુ, રેખા, સમતલ
- બિંદુના નિર્દેશક અને અંતર
- વચ્ચે હોવું (દરમ્યાનતા)
- શરતી વિધાનો
- સાબિતી



બાજુમાં આપેલ ચિત્રમાં શું દેખાય છે ? ચિત્રમાં ઈજીપ્તના પિરામીડ છે. ઇ.સ.પૂર્વે 3000 વર્ષ પહેલાં પ્રચંડ મોટા પિરામિડોની રચના તે કાળના લોકોએ કેવી રીતે કરી હશે ?

સ્થાપત્યશાસ્ત્ર અને ભૂમિતિના ક્ષેત્રે વિકાસ સાધ્યા વગર આ પ્રકારની રચનાઓ કરવાનું શક્ય જ નથી.

'ભૂમિતિ' આ નામ પરથી જ તે વિષયનો ઉગમ સમજી શકાય છે. 'ભૂ' એટલે 'જમીન' અને 'મિતિ' એટલે 'માપન'. એટલે જમીન માપનની જરૂરિયાતમાંથી જ આ વિષયનું નિર્માણ થયું હશે.

અનેક દેશોમાં ભૂમિતિનો વિકાસ જુદા-જુદા સમયે અને જુદી-જુદી રચનાઓ માટે થયો. 'થેલ્સ' નામના આદ્ય ગ્રીક ગણિતજ્ઞ ઈજીપ્તમાં ગયા હતાં, ત્યારે તેમણે પિરામીડના પડછાયાના માપન પરથી સરૂપ ત્રિકોણોના ગુણધર્મ વાપરીને પિરામીડની ઊંચાઈ નક્કી કરી હતી, એવી કથા છે. પાયથાગોરસ, એ થેલ્સના શિષ્ય હતાં એવું કહેવાય છે.

પ્રાચીન ભારતીયોને પણ ભૂમિતિ આ વિષયનું ઊંડું જ્ઞાન હતું. વૈદિક કાળમાં ભારતીય લોકો યજ્ઞકુંડની રચના કરવા માટે ભૌમિતિક ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરતા હતા. દોરીની મદદથી માપન કેવી રીતે કરવું અને વિવિધ આકાર કેવી રીતે તૈયાર કરવા તેનો ઉલ્લેખ શૂલ્વસૂત્રમાં જોવા મળે છે. તે પછીના સમયમાં આર્યભટ્ટ, વરાહમિહીર, બ્રહ્મગુપ્ત, ભાસ્કરાચાર્ય વગેરે ગણિતજ્ઞોએ આ વિષયમાં મહત્ત્વનું યોગદાન આપ્યું.

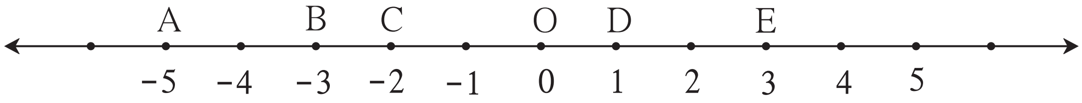
જાણી લઈએ.

ભૂમિતિની મૂળભૂત સંકલ્પના : બિંદુ, રેખા અને સમતલ (Basic concepts in geometry : point, line and plane)

જે રીતે આપણે સંખ્યાની વ્યાખ્યા કરતા નથી તે પ્રમાણે બિંદુ, રેખા અને સમતલની પણ વ્યાખ્યા પણ થતી નથી. એટલે કે આ ભૂમિતિમાંની મૂળભૂત સંકલ્પના છે. રેખા અને સમતલ એ બિંદુઓનો ગણ છે. આપણા અભ્યાસમાં રેખા એટલે સીધી રેખા, તે ધ્યાનમાં રાખો.

બિંદુના નિર્દેશક અને અંતર (Co-ordinates of points and distance)

નીચે આપેલી સંખ્યારેખા જુઓ.



આકૃતિ 1.1

અહીં બિંદુ D, રેખા પરની 1 સંખ્યા દર્શાવે છે. એટલે 1 આ સંખ્યા ‘બિંદુ D’ નો **નિર્દેશક** છે એમ કહેવાય છે. બિંદુ B સંખ્યારેખા પર (−3) આ સંખ્યા દર્શાવે છે. માટે બિંદુ B નો નિર્દેશક (−3) છે. તે જ પ્રમાણે બિંદુ A નો નિર્દેશક (−5) અને E નો નિર્દેશક 3 છે.

D બિંદુથી E બિંદુ તે 2 એકમ અંતરે છે. એટલે કે, E અને D વચ્ચેનું અંતર 2 એકમ છે. બે બિંદુઓ વચ્ચેના એકમો ગણીને તેમના વચ્ચેનું ‘અંતર’ કાઢી શકાય છે. આ સંખ્યારેખા પર A અને B બિંદુ વચ્ચેનું અંતર પણ 2 એકમ છે.

હવે બિંદુના નિર્દેશકો પરથી અંતર કેવી રીતે શોધવું, તે જોઈએ.

બે બિંદુ વચ્ચેનું અંતર શોધવું એટલે તે બિંદુના નિર્દેશકો પૈકી, મોટા નિર્દેશકમાંથી નાનો નિર્દેશક બાદ કરવો.

D બિંદુનો નિર્દેશક 1 છે, E નો નિર્દેશક 3 છે. અને $3 > 1$ તે આપણને ખબર છે.

બિંદુ E અને D વચ્ચેનું અંતર $3-1$ એટલે 2 છે.

બિંદુ E અને D વચ્ચેનું અંતર d (E,D) એમ દર્શાવાય. આ અંતર એટલે જ l(ED), જે રેખ ED ની લંબાઈ છે.

$d\,(E, D) = 3 - 1 = 2$

$\therefore\ l(ED) = 2$

$d\,(E, D) = l(ED) = 2$

તેમજ $d\,(D, E) = 2$

$d\,(C, D) = 1 - (-2)$

$= 1 + 2 = 3$

$\therefore\ d\,(C, D) = l(CD) = 3$

તેમજ $d\,(D, C) = 3$

હવે $d(A,B)$ શોધીએ, A નો નિર્દેશક -5 છે, B નો નિર્દેશક -3 છે અને $-3 > -5$

$\therefore\ d\,(A, B) = -3 - (-5) = -3+5 = 2.$

ઉપરના દરેક ઉદાહરણ જોતા, બે ભિન્ન બિંદુ વચ્ચેનું અંતર એ ધન સંખ્યા હોય છે તેમ જ P અને Q એક જ બિંદુ હોય તો $d(P, Q) = 0$, એ ધ્યાનમાં રાખો.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

- બે બિંદુઓ વચ્ચેનુ અંતર, તેમના નિર્દેશકો પૈકી મોટાં નિર્દેશકમાંથી નાનો નિર્દેશક બાદ કરવાથી મળે છે.
- કોઈપણ બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર ઋણેત્તર વાસ્તવિક સંખ્યા હોય છે.

જાણી લઈએ.

વચ્ચે હોવું (Betweenness)

જો P, Q, R સમરેખ બિંદુઓ હોય તો નીચે પ્રમાણે ત્રણ શક્યતા સંભવે છે.

આકૃતિ 1.2

(i) બિંદુ Q આ P અને R ની વચ્ચે છે.

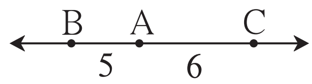
(ii) બિંદુ R આ P અને Q ની વચ્ચે છે.

(iii) બિંદુ P આ R અને Q ની વચ્ચે છે.

જો d (P, Q) + d (Q, R) = d (P, R) હોય તો Q બિંદુ એ P અને R ની વચ્ચે છે, એમ કહેવાય છે. વચ્ચે હોવુંને P - Q - R એમ દર્શાવાય છે.

ઉદા. (1) એક સંખ્યારેખા પર A, B અને C બિંદુઓ એ રીતે છે. કે જેથી d (A, B) = 5, d (B,C) = 11 અને d (A, C) = 6, તો ક્યું બિંદુ ક્યા અન્ય બે બિંદુઓની વચ્ચે છે?

ઉકેલ : અહીં A, B અને C પૈકી ક્યું બિંદુ અન્ય કયા બે બિંદુઓની વચ્ચે છે તે નીચે પ્રમાણે નક્કી કરી શકાશે.



આકૃતિ 1.3

d(B,C) = 11 . . . . (I)

d(A,B) + d(A,C)= 5+6 = 11 . . . . (II)

$\therefore$ d (B, C) = d (A, B) + d (A, C) . . . . (I) અને (II) પરથી

એટલે કે બિંદુ A, એ બિંદુ B અને બિંદુ C ની વચ્ચે છે.

ઉદા. (2) એક રસ્તા પર સીધી રેખામાં U, V અને A એમ ત્રણ શહેરો છે. U અને A વચ્ચેનું અંતર 215 કિમી, V અને A વચ્ચેનું અંતર 140 કિમી અને U અને V વચ્ચેનું અંતર 75 કિમી છે. તો ક્યું શહેર, ક્યા બે શહેરોની વચ્ચે છે? તે શોધો.

ઉકેલ : d (U,A) = 215; d (V,A) = 140; d (U,V) = 75

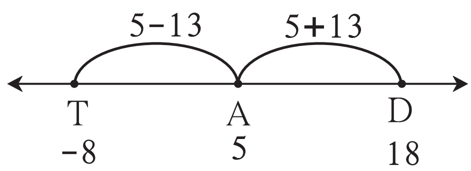
d (U,V) + d (V,A) = 75 + 140 = 215; d (U,A) = 215

$\therefore$ d (U,A) = d (U,V) + d (V,A)

$\therefore$ V શહેર U અને A શહેરની વચ્ચે છે.

ઉદા.(3) એક સંખ્યારેખા પર A બિંદુનો નિર્દેશક 5 છે. તે જ રેખા પર A થી 13 એકમ અંતરે આવેલા બિંદુના નિર્દેશક શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સંખ્યારેખા પર A થી 13 એકમ અંતરે આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે A ની ડાબી બાજુ T અને જમણી બાજુ D એમ બે બિંદુઓ લઈએ.



આકૃતિ 1.4

બિંદુ A ની ડાબી બાજુએ બિંદુ T નો નિર્દેશક 5 − 13 = −8 હશે.

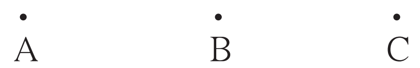
બિંદુ A ની જમણી બાજુએ બિંદુ D નો નિર્દેશક 5 + 13 = 18 હશે.

∴ બિંદુ A થી 13 એકમ અંતરે આવેલા બિંદુના નિર્દેશકો −8 અને 18 હશે.

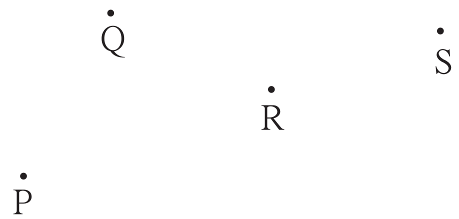
ચકાસો : d (A,D) = d(A,T) = 13

કૃતિ :

(1) બાજુની આકૃતિમાં આપેલ A, B, C બિંદુઓ સમરેખ છે કે, તે દોરો તાણીને તપાસો. જો તે ઓ સમરેખ હોય તો કયું બિંદુ, કયા બે બિંદુઓની વચ્ચે છે? તે લખો.



(2) બાજુની આકૃતિમાં આપેલ P, Q, R, S આ ચાર બિંદુઓ છે તે પૈકી કયા ત્રણ સમરેખ છે અને કયા ત્રણ સમરેખ નથી તે તપાસો. સમરેખ હોય તેવા ત્રણ બિંદુઓમાં કયું બિંદુ કયા બે બિંદુની વચ્ચે છે તે લખો.

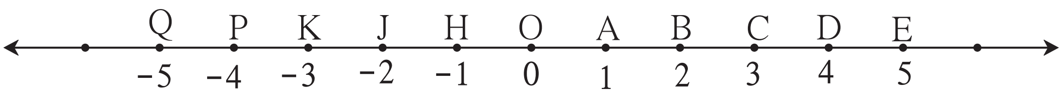


(3) કવાયત માટે વિદ્યાર્થીઓને સીધી રેખામાં ઊભા રહેવા કહેવું. દરેક હારમાંના વિદ્યાર્થી સીધી રેખામાં છે કે કેમ? તે કેવી રીતે જોશો?

(4) પ્રકાશ કિરણ હંમેશા સીધી રેખામાં જાય છે. તે તમે કઈ રીતે ચકાસ્યું હતું? આગળના ધોરણમાં વિજ્ઞાનમાં કરેલો આ પ્રયોગ યાદ કરો.

મહાવરાસંગ્રહ 1.1

1. સંખ્યારેખાને આધારે નીચેના અંતર શોધો.



આકૃતિ 1.5

(i) d(B,E)	(ii) d(J, A)	(iii) d(P, C)	(iv) d(J, H)
(v) d(K, O)	(vi) d(O, E)	(vii) d(P, J)	(viii) d(Q, B)

2. બિંદુ A નો નિર્દેશક x અને બિંદુ B નો નિર્દેશક y છે તો આપેલી માહિતી પરથી d(A, B) શોધો.

(i) $x = 1, y = 7$	(ii) $x = 6, y = -2$	(iii) $x = -3, y = 7$
(iv) $x = -4, y = -5$	(v) $x = -3, y = -6$	(vi) $x = 4, y = -8$

3. નીચે આપેલી માહિતી પરથી કયા બિંદુઓ કયા અન્ય બે બિંદુની વચ્ચે છે તે નક્કી કરો, આપેલા બિંદુ સમરેખ ન હોય તો તમે લખો.

(i) d(P, R) = 7,	d(P, Q) = 10,	d(Q, R) = 3
(ii) d(R, S) = 8,	d(S, T) = 6,	d(R, T) = 4
(iii) d(A, B) = 16,	d(C, A) = 9,	d(B, C) = 7
(iv) d(L, M) = 11,	d(M, N) = 12,	d(N, L) = 8
(v) d(X, Y) = 15,	d(Y, Z) = 7,	d(X, Z) = 8
(vi) d(D, E) = 5,	d(E, F) = 8,	d(D, F) = 6

4. એક સંખ્યા રેખા પર A, B, C બિંદુઓ એવી રીતે છે કે, d(A,C) = 10, d(C,B) = 8 તો d(A, B) શોધો. બધા પર્યાયોનો વિચાર કરો.

5. X, Y, Z સમરેખ બિંદુઓ છે, d(X,Y) = 17, d(Y,Z) = 8 તો d(X,Z) શોધો.

6. આકૃતિ દોરીને પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

   (i) જો A−B−C અને l(AC) = 11, l(BC) = 6.5, તો l(AB) = ?

   (ii) જો R−S−T અને l(ST) = 3.7, l(RS) = 2.5, તો l(RT) = ?

   (iii) જો X−Y−Z અને l(XZ) = $3\sqrt{7}$, l(XY) = $\sqrt{7}$, તો l(YZ) = ?

7. સમરેખ ન હોય તેવા ત્રણ બિંદુની કોઈ આકૃતિ તૈયાર કરો.

જાણી લઈએ.

ધોરણ - 9 ના ગણિત ભાગ -I માં ગણ પ્રકરણમાં આપણે યોગગણ, છેદગણ શીખ્યા છીએ તેનો ઉપયોગ, કરીને રેખાખંડ, કિરણ, રેખાનું વર્ણન બિંદુ ગણ ના રૂપમાં કરીએ.

(1) **રેખાખંડ (Line segment) :**

બિંદુ A, બિંદુ B અને તેમની વચ્ચે આવેલા બધાં બિંદુઓનો યોગગણ એટલે રેખાખંડ AB છે.

રેખાખંડ AB ને ટૂંકમાં રેખ AB એમ લખાય છે.

રેખ AB એટલે જ રેખ BA.

આકૃતિ 1.6

બિંદુ A અને બિંદુ B એ રેખ AB ના અંતિમ બિંદુ છે.

રેખાખંડના અંતિમ બિંદુઓ વચ્ચેના અંતરને રેખાખંડની લંબાઈ કહે છે. $l(AB) = d(A,B)$

$l(AB) = 5$ એ $AB = 5$ એમ પણ લખાય છે.

(2) **કિરણ AB (Ray AB) :**

ધારો કે A અને B બે ભિન્ન બિંદુઓ છે. રેખ AB પરનું બિંદુ અને A-B-P એમ બધા બિંદુ P નો યોગગણ એટલે કે કિરણ AB છે. અહીં બિંદુ A ને કિરણનું આરંભબિંદુ કહે છે.

આકૃતિ 1.7

(3) **રેખા AB (Line AB) :**

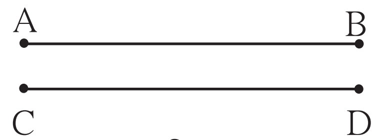
કિરણ AB નો બિંદુગણ અને તેના વિરુદ્ધ કિરણનો બિંદુગણ મળીને જે યોગગણ તૈયાર થાય છે તેને રેખા AB નો બિંદુગણ કહે છે.

રેખ AB નો બિંદુગણ એ રેખા AB ના બિંદુગણનો ઉપગણ (પેટાગણ) હોય છે.

(4) **એકરૂપ રેખાખંડ (Congruent segments) :**

જો બે રેખાખંડની લંબાઈ સમાન હોય તો તે રેખાખંડ એકરૂપ હોય છે.

જો $l(AB) = l(CD)$ તો રેખ AB $\cong$ રેખ CD



આકૃતિ 1.8

(5) **રેખાખંડની એકરૂપતાના ગુણધર્મ (Properties of congruent segements) :**

(i) પરાવર્તનતા (Reflexivity) રેખ AB $\cong$ રેખ AB

(ii) સંમિતતા (Symmetry) જો રેખ AB $\cong$ રેખCD તો રેખ CD $\cong$ રેખ AB

(iii) સંક્રામકતા (Transitivity) જો રેખ AB $\cong$ રેખ CD અને રેખ CD $\cong$ રેખ EF તો રેખ AB $\cong$ રેખ EF

(6) **રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ (Midpoint of a segment) :**

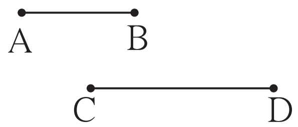
જો A-M-B અને રેખ AM $\cong$ રેખ MB, તો M બિંદુને રેખ AB નું મધ્યબિંદુ કહે છે. દરેક રેખાખંડને એક અને ફક્ત એક જ મધ્યબિંદુ હોય છે.

આકૃતિ 1.9

(7) **રેખાખંડની તુલના (Comparison of segments) :**

રેખ AB ની લંબાઈ, રેખ CD કરતાં ઓછી હોય એટલે કે, જો $l(AB) < l(CD)$ તો રેખ AB < રેખ CD અથવા રેખ CD > રેખ AB એમ લખાય છે.

રેખાખંડનું નાના-મોટાંપણું તેની લંબાઈ પર આધાર રાખે છે.

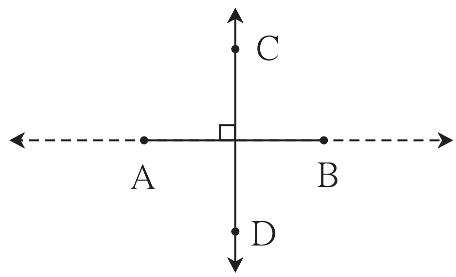


આકૃતિ 1.10

(8) **રેખાખંડોનું અથવા કિરણોનું લંબત્વ**
(Perpendicularity of segments or rays) :

બે રેખાખંડ, બે કિરણો, અથવા એક રેખાખંડ અને એક કિરણનો સમાવેશ કરતી રેખાઓ જો પરસ્પર લંબ હોય તો તે બે રેખાખંડ, બે કિરણો અથવા એક રેખાખંડ અને એક કિરણ પરસ્પર લંબ છે એમ કહેવાય છે.

આકૃતિ 1.11 માં, રેખ AB $\perp$ રેખા CD,
રેખા AB $\perp$ કિરણ CD.



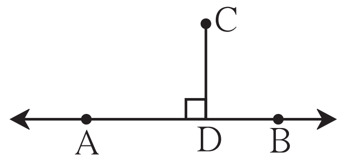
આકૃતિ 1.11

(9) **બિંદુનું રેખાથી અંતર (Distance of a point from a line) :**

જો રેખ CD $\perp$ રેખા AB અને બિંદુ D એ રેખા AB પર હોય તો રેખ CD ની લંબાઈને, બિંદુ C રેખા AB થી લંબ અંતરે છે એમ કહેવાય.

બિંદુ D ને CD લંબનો લંબપાદ કહે છે.

જો $l(CD) = a$, તો બિંદુ C રેખા AB થી a અંતરે છે એમ કહેવાય.



આકૃતિ 1.12

મહાવરાસંગ્રહ 1.2

1. નીચેના કોઠામાં સંખ્યારેખા પરના બિંદુના નિર્દેશક આપેલા છે તે પરથી આપેલા રેખાખંડો એકરૂપ છે કે નહીં? તે નક્કી કરો.

બિંદુ	A	B	C	D	E
નિર્દેશક	–3	5	2	–7	9

(i) રેખ DE અને રેખ AB (ii) રેખ BC અને રેખ AD (iii) રેખ BE અને રેખ AD

2. બિંદુ M એ રેખ AB નું મધ્યબિંદુ છે અને AB = 8 તો AM = કેટલા?
3. બિંદુ P એ રેખ CD નું મધ્યબિંદુ છે અને CP = 2.5 તો રેખ CD ની લંબાઈ શોધો.
4. જો AB = 5 સેમી , BP = 2 સેમી અને AP = 3.4 સેમી તો આ રેખાખંડો વચ્ચેનું નાના-મોટાંપણું લખો.

5. આકૃતિ 1.13 ને આધારે નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર લખો.

આકૃતિ 1.13

(i) કિરણ RP ના વિરુદ્ધ કિરણનું નામ લખો.

(ii) કિરણ PQ અને કિરણ RP નો છેદગણ લખો.

(iii) રેખ PQ અને રેખ QR નો યોગગણ લખો.

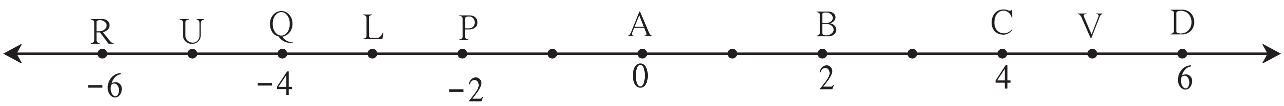
(iv) રેખ QR કયા કયા કિરણોનો ઉપગણ છે?

(v) આરંભબિંદુ R હોય તેવા વિરુદ્ધ કિરણોની જોડી લખો.

(vi) આરંભબિંદુ S હોય તેવા કોઇપણ બે કિરણોના નામ લખો.

(vii) કિરણ SP અને કિરણ ST નો છેદગણ લખો.

6. આકૃતિ 1.14 પરથી તેની નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર લખો.



આકૃતિ 1.14

(i) બિંદુ B થી સરખે અંતરે હોય તેવા બિંદુઓ કયા?

(ii) બિંદુ Q થી સરખે અંતરે હોય તેવા બિંદુની એક જોડી લખો.

(iii) d (U,V), d (P,C), d (V,B), d (U, L) શોધો.

જાણી લઈએ.

શરતી વિધાનો અને પ્રતિ વિધાન (Conditional statements and converse)

જે વિધાનો ‘જો-તો’ ના રૂપમાં લખી શકાય તેને શરતી વિધાન કહે છે. શરતી વિધાનમાં ‘જો’ થી શરૂ થતાં વિધાનને પક્ષ અથવા પૂર્વાર્ધ કહે છે. અને‘તો’ પછી આવતા વિધાનને સાધ્ય અથવા ઉત્તરાર્ધ કહે છે.

દા.ત. સમભુજ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પરનાં લંબદુભાજક છે. આ વિધાન છે.

શરતી વિધાન : જો આપેલો ચતુષ્કોણ સમભુજ હોય તો તેના વિકર્ણો પરસ્પર લંબદુભાજક હોય છે.

શરતી વિધાનમા આપેલા પૂર્વાર્ધ (પક્ષ) અને ઉત્તરાર્ધ (સાધ્ય) ની અદલાબદલ કરવાથી મળતાં નવા વિધાનને મૂળ વિધાનનું પ્રતિ વિધાન (Converse) કહે છે.

એકાદું શરતી વિધાન સત્ય હોય તો તેનું પ્રતિ વિધાન સત્ય હોય જ એવું નથી. તેને માટે નીચેના ઉદાહરણો જુઓ.

શરતી વિધાન : જો આપેલો ચતુષ્કોણ સમભુજ હોય તો તેનાં વિકર્ણો પરસ્પર લંબદુભાજક હોય છે.

પ્રતિ વિધાન : જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર લંબદુભાજક હોય તો તે ચતુષ્કોણ સમભુજ હોય છે.
અહીં મૂળવિધાન અને તેનું પ્રતિ વિધાન બન્ને સત્ય છે.

શરતી વિધાન : જો કોઈપણ સંખ્યા મૂળ સંખ્યા હોય તો તે સમ અથવા વિષમ હશે.

પ્રતિ વિધાન : જો કોઈપણ સંખ્યા સમ અથવા વિષમ સંખ્યા હોય તો તે મૂળ સંખ્યા હશે.
અહીં મૂળ વિધાન સત્ય છે પરંતુ પ્રતિ વિધાન અસત્ય છે.

જાણી લઈએ.

સાબિતી (Proofs)

આપણે ખૂણા, ત્રિકોણ, ચતુષ્કોણ વગેરે અનેક આકૃતિઓનાં ગુણધર્મનો અભ્યાસ કર્યો છે. આ ગુણધર્મ આપણે પ્રાયોગિક પદ્ધતિથી શીખ્યા. આ ધોરણમાં આપણે ભૂમિતિ વિષયનો જુદાં દષ્ટિકોણથી વિચાર કરીશું. આ દષ્ટિકોણનું શ્રેય ઇ.સ. પૂર્વે ત્રીજા સૈકામાં થઇ ગયેલા ગ્રીક ગણિતજ્ઞ યુક્લિડને ફાળે જાય છે. તે સમયે ભૂમિતિ વિષયની જે માહિતી ઉપલબ્ધ હતી તેનું સુસંગત સંકલન યુક્લિડે કર્યુ અને તેમાં સુસૂત્રતા લાવી તેમણે મુખ્યત્વે કેટલાંક સ્વયંસિદ્ધ અને સર્વમાન્ય વિધાનો **પૂર્વધારણાં** (Postulates) તરીકે સ્વીકાર્યા. યુક્લિડે દર્શાવ્યુ કે, કેટલાંક સહજમાન્ય સત્યો ગૃહિત ધરવાથી તર્ક સંગત માંડણી કરી નવા ગુણધર્મ સાબિત કરી શકાય છે સાબિત કરેલા ગુણધર્મોને **પ્રમેય** (Theorems) કહેવાય છે.

યુક્લિડ

યુક્લિડની પૂર્વધારણાઓ પૈકી કેટલીક પૂર્વધારણા નીચે પ્રમાણે છે.

(1) એક બિંદુમાંથી અસંખ્ય રેખાઓ પસાર થાય છે.
(2) બે બિંદુમાંથી એક અને ફકત એક જ રેખા પસાર થાય છે.
(3) કોઈપણ બિંદુને કેન્દ્ર માનીને આપેલી ત્રિજ્યાનું વર્તુળ દોરી શકાય છે.
(4) બધા કાટખૂણા પરસ્પર એકરૂપ હોય છે.
(5) બે રેખા અને તેની છેદિકાથી તૈયાર થતાં એક બાજુના અંતઃકોણોનો સરવાળો બે કાટકોણ કરતાં ઓછો થાય તો તે બે રેખાઓ તે જ દિશામાં લંબાવતા પરસ્પર છેદે છે.

આ પૂર્વધારણા આપણે કૃતિ દ્વારા ચકાસી છે.

પૂર્વધારણાને આધારે તર્કસંગત માંડણીથી નવા ગુણધર્મો સાબિત કરી શકાય છે. તેને **પ્રમેયની** સાબિતી (Proof) કહે છે.

શરતી વિધાન સત્ય છે. એમ સાબિત કરવું હોય ત્યારે તેમાંના પૂર્વાર્ધને પક્ષ અને ઉત્તરાર્ધને **સાધ્ય** કહે છે.

સાબિતીના **પ્રત્યક્ષ સાબિતી** અને **પરોક્ષ સાબિતી** એમ બે પ્રકાર છે.

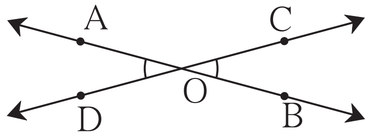
આપણને છેદતી રેખાઓ ખબર છે. છેદતી રેખાઓ ને લીધે બનતા ખૂણાઓનો ગુણ**ધર્મ પ્રત્યક્ષ સાબિતીથી** સાબિત કરીએ.

પ્રમેય : જ્યારે બે રેખાઓ પરસ્પર છેદે છે.ત્યારે તેથી બનતા અભિકોણો સમાન માપના હોય છે.

પક્ષ : રેખા AB અને રેખા CD પરસ્પર બિંદુ O માં છેદે છે. A – O – B, C – O – D

સાધ્ય : (i) $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) $\angle BOC = \angle AOD$



આકૃતિ 1.15

સાબિતી : $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ . . . . (I) સુરેખખૂણાની જોડ

$\angle BOC + \angle BOD = 180^\circ$ . . . . (II) સુરેખખૂણાની જોડ

$\angle AOC + \angle BOC = \angle BOC + \angle BOD$ . . . . વિધાન(I) અને (II) પરથી

$\therefore \angle AOC = \angle BOD$. . . . . . . $\angle BOC$ નો લોપ કરીને.

તેજ પ્રમાણે $\angle BOC = \angle AOD$ સાબિત કરી શકાશે.

પરોક્ષ સાબિતી (Indirect proof) :

આ સાબિતીમાં સાધ્ય અસત્ય છે એમ માનીને સાબિતીની શરૂઆત કરવામાં આવે છે. તે પરથી તર્કને આધારે તેમજ પહેલાં માન્ય કરેલા સત્યો પરથી એક પછી એક પગથિયે આગળ વધતાં અંતમાં એક નિષ્કર્ષ પર પહોંચવામાં આવે છે. ત્યારે જણાય છે કે આ નિષ્કર્ષ સત્ય માનેલાં ગુણધર્મો અથવા પક્ષમાં આપેલી માહિતી સાથે વિસંગત છે તેથી, આપણી માન્યતા ખોટી છે એટલે કે સાધ્ય સત્ય છે એમ સાબિત થાય છે. નીચેના ઉદાહરણોનો અભ્યાસ કરો.

વિધાન : બે કરતાં મોટી હોય તેવી મૂળ સંખ્યા વિષમ હોય છે.

શરતી વિધાન : જો p એ 2 કરતાં મોટી મૂળ સંખ્યા હોય તો p એ વિષમ સંખ્યા હશે.

પક્ષ : p એ 2 કરતાં મોટી મૂળ સંખ્યા છે. એટલે p એ 1 અને p એ બે વિભાજક છે.

સાધ્ય : p એ વિષમ સંખ્યા છે.

સાબિતી : ધારો કે p એ વિષમ સંખ્યા નથી. એમ ધારો.

એટલે કે p એ સમ સંખ્યા છે.

$\therefore$ 2 એ p નો વિભાજક છે. ..... (I)

પરંતુ p એ 2 કરતાં મોટી મૂળ સંખ્યા છે. ....(પક્ષ)

$\therefore$ p નો 1 અને p એ બે વિભાજક છે. ..... (II)

વિધાન (I) અને (II) પક્ષ સાથે વિસંગત છે.

તેથી આપણી માન્યતા ખોટી છે.

એટલે p એ 2 કરતાં મોટી મૂળસંખ્યા હોય તો તે વિષમ સંખ્યા છે તે સાબિત થયું.

મહાવરાસંગ્રહ 1.3

1. નીચેના વિધાનો 'જો-તો' રૂપમાં લખો.
   (i) સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા એકરૂપ હોય છે.
   (ii) લંબચોરસના વિકર્ણો એકરૂપ હોય છે.
   (iii) સમદ્વિભુજ ત્રિકોણમાં શિરોબિંદુ અને પાયાના મધ્યબિંદુને જોડતો રેખાખંડ પાયાને લંબ હોય છે.
2. નીચેના વિધાનોનું 'પ્રતિવિધાન' લખો.
   (i) બે સમાંતર રેખા અને તેની છેદિકાથી બનતા વ્યુત્ક્રમકોણો એકરૂપ હોય છે.
   (ii) બે રેખાને એક છેદિકા છેદે ત્યારે બનતાં અંતઃકોણોની એક જોડી પૂરક હોય તો તે રેખાઓ સમાંતર હોય છે.
   (iii) લંબચોરસના વિકર્ણો એકરૂપ હોય છે.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 1

1. યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

   (i) દરેક રેખાખંડને કેટલાં મધ્યબિંદુઓ હોય છે?
   (A) એક જ (B) બે (C) ત્રણ (D) અનેક

   (ii) બે ભિન્ન રેખાઓ પરસ્પર છેદે ત્યારે તેમનાં છેદગણમાં કેટલા બિંદુ છે ?
   (A) અસંખ્ય (B) બે (C) એક જ (D) એક પણ નહીં

   (iii) ત્રણ ભિન્ન બિંદુઓનો સમાવેશ કરનારી કેટલી રેખા હોય છે?
   (A) બે (B) ત્રણ (C) એક અથવા ત્રણ (D) છ

   (iv) બિંદુ A નો નિર્દેશક -2 અને B નો નિર્દેશક 5 હોય તો $d(A,B) = ?$
   (A) -2 (B) 5 (C) 7 (D) 3

   (v) જો P-Q-R અને $d(P,Q) = 2$, $d(P,R) = 10$, તો $d(Q,R) = ?$
   (A) 12 (B) 8 (C) $\sqrt{96}$ (D) 20

2. સંખ્યારેખા પર P,Q,R બિંદુના નિર્દેશકો અનુક્રમે 3, -5 અને 6 છે તો નીચેના વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે લખો અને સ્પષ્ટીકરણ લખો.

   (i) $d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$ (ii) $d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)$
   (iii) $d(R,P) + d(P,Q) = d(R,Q)$ (iv) $d(P,Q) - d(P,R) = d(Q,R)$

3. નીચે કેટલાંક બિંદુના નિર્દેશકોની જોડીઓ આપી છે તે પરથી દરેક જોડી વચ્ચેનું અંતર શોધો.

   (i) 3, 6 (ii) -9, -1 (iii) -4, 5 (iv) 0, -2
   (v) $x + 3$, $x - 3$ (vi) -25, -47 (vii) 80, -85

4. સંખ્યારેખા પર P બિંદુનો નિર્દેશક −7 છે તો P થી 8 એકમ અંતરે આવેલાં બિંદુના નિર્દેશક શોધો.

5. આપેલી માહિતી પ્રમાણે નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ શોધો.
   (i) જો A−B−C અને d(A,C) = 17, d(B,C) = 6.5 તો d (A,B) = ?
   (ii) જો P−Q−R અને d(P,Q) = 3.4, d(Q,R)= 5.7 તો d(P,R) = ?

6. સંખ્યા રેખા પર A બિંદુનો નિર્દેશક 1 છે. A થી 7 સેંમી અંતરે આવેલાં બિંદુના નિર્દેશક શોધો.

7. નીચેના વિધાનોને શરતી વિધાનના રૂપમાં લખો.
   (i) દરેક સમભુજ ચતુષ્કોણ ચોરસ હોય છે.
   (ii) સુરેખ ખૂણાની જોડ પરસ્પર પૂરક હોય છે.
   (iii) ત્રિકોણ એ ત્રણ રેખાખંડોથી બનતી આકૃતિ હોય છે.
   (iv) ફક્ત બે જ વિભાજક હોય તેવી સંખ્યાને મૂળ સંખ્યા કહેવાય.

8. નીચેના વિધાનોને પ્રતિ વિધાનમાં લખો.
   (i) જો એકાદ બહુભુજાકૃતિના ખૂણાઓના માપોનો સરવાળો 180^0 હોય તો તે આકૃતિ ત્રિકોણ હોય છે.
   (ii) બે ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 90^0 હોય તો તે પરસ્પર કોટિકોણ હોય છે.
   (iii) બે સમાંતર રેખાઓને એક છેદિકા છેદે તો બનતા સંગતકોણ એકરૂપ હોય છે.
   (iv) સંખ્યાના અંકોના સરવાળાને 3 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તો તે સંખ્યાને 3 વડે ભાગી શકાય.

9. નીચેના વિધાનોમાં પક્ષ અને સાધ્ય લખો.
   (i) જો ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ એકરૂપ હોય તો તેના ત્રણે ખૂણા એકરૂપ હોય છે.
   (ii) સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ પરસ્પર દુભાગે છે.

10*. નીચેના વિધાનો માટે નામનિર્દેશિત આકૃતિ દોરીને તે પરથી પક્ષ, સાધ્ય લખો.
   (i) બે સમભુજ ત્રિકોણ, સરૂપ હોય છે.
   (ii) જો સુરેખ ખૂણાની જોડ એકરૂપ હોય તો તે પૈકી પ્રત્યેક ખૂણો કાટકોણ હોય છે.
   (iii) ત્રિકોણની બે બાજુપરથી દોરેલો શિરોલંબ જો એકરૂપ હોય તો તે બે બાજુ એકરૂપ હોય છે.

2 સમાંતર રેખા

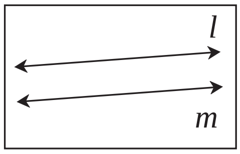
65SEVO

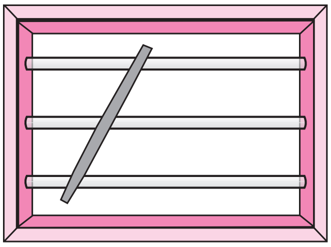
ચાલો શીખીએ.

- સમાંતર રેખા અને તેની છેદિકાને લીધે બનતા ખૂણાઓનો ગુણધર્મ
- રેખાઓ સમાંતર હોવાની કસોટીઓ
- સમાંતર રેખાના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ

યાદ કરીએ.

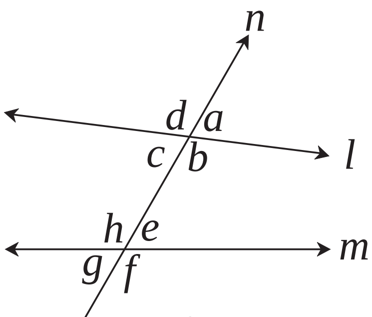
સમાંતર રેખા : જે રેખા એક જ સમતલમાં હોય પરંતુ એકબીજાને છેદતી ન હોય તે રેખાઓને સમાંતર રેખા એમ કહેવાય.





બાજુમાં આપેલું ચિત્ર જુઓ. આડા સમાંતર સળીયા હોય તેવી બારીમાં એકાદી લાકડી ત્રાંસી રાખીને જુઓ. શું દેખાય છે ? કેટલા ખૂણા તૈયાર થયા?

- બે રેખા અને તેની છેદિકાથી બનતા ખૂણાની જોડીઓ યાદ છે કે?
  આકૃતિ 2.1 માં રેખા l અને રેખા m ની છેદિકા રેખા n છે. તેથી કુલ 8 ખૂણા બને છે. તેની જોડીઓ નીચે પ્રમાણે બને છે.



આકૃતિ 2.1

સંગત ખૂણાઓની જોડ

(i) $\angle d, \angle h$

(ii) $\angle a, \boxed{}$

(iii) $\angle c, \boxed{}$

(iv) $\angle b, \boxed{}$

અંતઃ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓની જોડ

(i) $\angle c, \angle e$

(ii) $\angle b, \angle h$

બાહ્ય વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓની જોડ

(i) $\angle d, \angle f$

(ii) $\angle a, \angle g$

છેદિકાની એક જ બાજુના અંતઃ ખૂણાઓ ની જોડ

(i) $\angle c, \angle h$

(ii) $\angle b, \angle e$

કેટલાંક મહત્ત્વના ગુણધર્મો :

(1) બે રેખાઓ પરસ્પર છેદે ત્યારે બનતા અભિકોણો એકરૂપ હોય છે.

(2) સુરેખ ખૂણાની જોડ પરસ્પર પૂરક હોય છે.

(3) જ્યારે સંગત ખૂણાઓની એક જોડ એકરૂપ હોય ત્યારે સંગત ખૂણાઓની બાકીની પ્રત્યેક જોડ એકરૂપ હોય છે.

(4) જ્યારે વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓની એક જોડ એકરૂપ હોય ત્યારે વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓની બાકીની પ્રત્યેક જોડ એકરૂપ હોય છે.

(5) જ્યારે છેદિકાની એક જ બાજુના અંતઃખૂણાઓનો સરવાળો 180° હોય ત્યારે અંતઃખૂણાઓની બીજી જોડીના ખૂણાઓનો સરવાળો પણ 180° હોય છે.

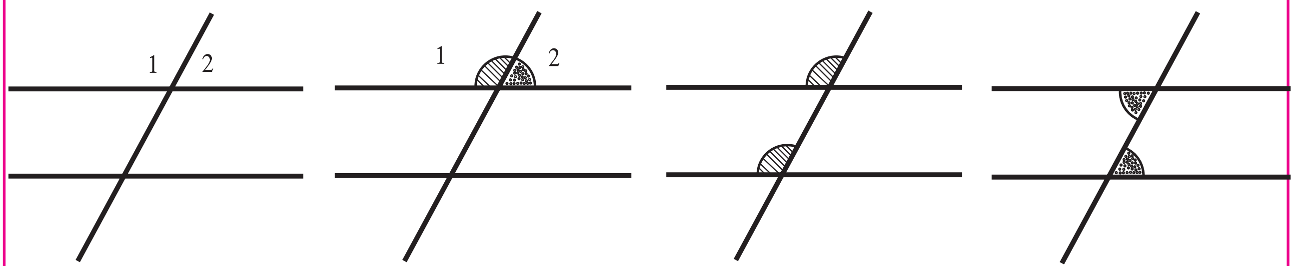
જાણી લઈએ.

સમાંતર રેખાના ગુણધર્મ (Properties of parallel lines)

કૃતિ :

બે સમાંતર રેખા અને તેની છેદિકાથી તૈયાર થતાં ખૂણાના ગુણધર્મો ચકાસવા.

કાર્ડ પેપર પર બે સમાંતર રેખા અને છેદિકા દોરો. ત્રણેય રેખા પર સળીઓ ગુંદરથી ચોટાડો. તૈયાર થયેલા 8 ખૂણા પૈકી ખૂણો 1 અને ખૂણો 2 ના માપ જેટલાં રંગીન પત્રિકાના ટૂકડા કાપો. (આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે) આ ટૂકડા સંબંધિત સંગતકોણો, વ્યુત્ક્રમકોણો અને અંતઃકોણો પર મૂકીને સમાંતર રેખાના ખૂણાના ગુણધર્મો ચકાસો.



બે રેખાઓ જો સમાંતર હોય તો તેની છેદિકાથી બનતા સંગતકોણો એકરૂપ હોય છે, વ્યુત્ક્રમકોણો એકરૂપ હોય છે અને અંતઃ કોણો પૂરક હોય છે. આ ગુણધર્મો આપણે કૃતિદ્વારા તપાસી જોયા. હવે તે ગુણધર્મો આપણે સાબિત કરીશું. આ ગુણધર્મો સાબિત કરવા યુક્લિડે આપેલી પૂર્વધારણાનો ઉપયોગ કરીશું.

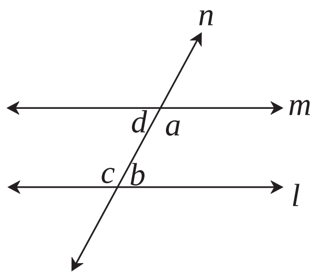
બે રેખા અને તેની છેદિકાથી તૈયાર થતાં એક બાજુનાં અંતઃ કોણોનો સરવાળો બે કાટકોણ કરતાં ઓછો થાય તો તે બે રેખાઓ તે જ દિશામાં લંબાવતાં પરસ્પર છેદે છે.

અંતઃકોણનો પ્રમેય (Interior angle theorem)

પ્રમેય : બે સમાંતર રેખાઓને એક છેદિકા છેદે તો કોઈપણ એક બાજુ બનતો અંતઃકોણ પરસ્પર પૂરકકોણ હોય છે.

પક્ષ : રેખા $l \parallel$ રેખા m અને તેની છેદિકા રેખા n છે.

તેથી આકૃતિમાં આપેલા મુજબ $\angle a$, $\angle \mathrm{b}$ અને $\angle \mathrm{c}$, $\angle \mathrm{d}$ એ અંતઃકોણ બને છે.



આકૃતિ 2.2

સાધ્ય : $\angle a + \angle \mathrm{b} = 180^\circ$

$\angle \mathrm{d} + \angle \mathrm{c} = 180^\circ$

સાબિતી : $\angle a$ અને $\angle \mathrm{b}$ ના માપોના સરવાળા માટેની ત્રણ શક્યતા છે.

(i) $\angle a + \angle \mathrm{b} < 180^\circ$ (ii) $\angle a + \angle \mathrm{b} > 180^\circ$ (iii) $\angle a + \angle \mathrm{b} = 180^\circ$

આ પૈકી (i) $\angle a + \angle \mathrm{b} < 180^\circ$ ને સત્ય માનીએ.

રેખા l અને રેખા m ને $\angle a$ અને $\angle \mathrm{b}$ છેદિકાની જે બાજુમાં છે તે દિશાને લંબાવવામાં આવે તો પરસ્પર છેદે છે. ...(યુક્લિડની પૂર્વધારણા મુજબ).

પરંતુ રેખા l અને રેખા m એ સમાંતર રેખા છે. ....પક્ષ

$\therefore \angle a + \angle \mathrm{b} < 180^\circ$ આ અશક્ય છે. . . . .(I)

હવે $\angle a + \angle \mathrm{b} > 180^\circ$ તે સત્ય માનીએ.

$\therefore \angle a + \angle \mathrm{b} > 180^\circ$

પરંતુ $\angle a + \angle \mathrm{d} = 180^\circ$

અને $\angle \mathrm{c} + \angle \mathrm{b} = 180^\circ$ . . . . . સુરેખ ખૂણાઓની જોડ

$\therefore \angle a + \angle \mathrm{d} + \angle \mathrm{b} + \angle \mathrm{c} = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

$\therefore \angle \mathrm{c} + \angle \mathrm{d} = 360^\circ - (\angle a + \angle \mathrm{b})$

જો $\angle a + \angle \mathrm{b} > 180^\circ$ હોય તો $[360^\circ - (\angle a + \angle \mathrm{b})] < 180^\circ$

$\therefore \angle \mathrm{c} + \angle \mathrm{d} < 180^\circ$

∴ તેજ પ્રમાણે $\angle c$ અને $\angle d$ છેદિકાની જે બાજુમાં છે તે દિશાને લંબાવતા રેખા l અને રેખા m ને પરસ્પર છેદે છે.

∴ $\angle c + \angle d < 180$ આ અશક્ય.

એટલે જ $\angle a + \angle b > 180^\circ$ આ અશક્ય. ...... (II)

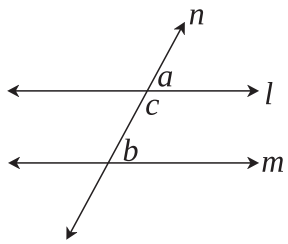
∴ $\angle a + \angle b = 180^\circ$ આ એકજ શક્યતા બાકી રહે છે. ......(I) અને (II) પરથી

∴ $\angle a + \angle b = 180^\circ$ તેમ જ $\angle c + \angle d = 180^\circ$

ધ્યાનમાં રાખો કે, આ સાબિતીમાં આપણે $\angle a + \angle b > 180^\circ$, $\angle a + \angle b < 180^\circ$ આ બન્નેની શક્યતા વિસંગત હોવાથી ધ્યાનમાં લેવામાં આવતી નથી એટલે કે આ એક અપ્રત્યક્ષ સાબિતી છે.

સંગતકોણનો અને વ્યુત્ક્રમકોણનો ગુણધર્મ (Corresponding angle and alternate angle theorem)

પ્રમેય : બે સમાંતર રેખાઓને એક છેદિકા છેદે તો બનતા સંગત ખૂણાની જોડના ખૂણાઓના માપ એકરૂપ હોય છે.



આકૃતિ 2.3

પક્ષ : રેખા l || રેખા m ની
રેખા n છેદિકા છે.

સાધ્ય : $\angle a = \angle b$

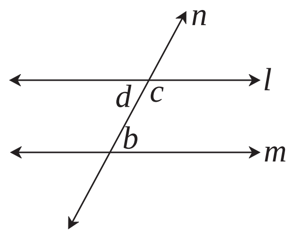
સાબિતી : $\angle a + \angle c = 180^\circ$ . . . . . . (I) સુરેખખૂણાઓની જોડ

$\angle b + \angle c = 180^\circ$ . . . . . . (II) રેખાની સમાંતર હોવાની અંતઃકોણ કસોટીથી

$\angle a + \angle c = \angle b + \angle c$ . . . વિધાન (I) અને (II) પરથી

∴ $\angle a = \angle b$

પ્રમેય : બે સમાંતર રેખાઓને એક છેદિકા છેદે તો બનતા વ્યુત્ક્રમ ખૂણાની જોડના ખૂણાઓના માપ એકરૂપ હોય છે.



આકૃતિ 2.4

પક્ષ : રેખા l || રેખા m ની
રેખા n છેદિકા છે.

સાધ્ય : $\angle d = \angle b$

સાબિતી : $\angle d + \angle c = 180^\circ$ . . . . (I) સુરેખખૂણાઓની જોડ

$\angle c + \angle b = 180^\circ$ . . . . (II) રેખાની સમાંતર હોવાની અંતઃકોણ કસોટીથી

$\angle d + \angle c = \angle c + \angle b$ . . . . વિધાન (I) અને (II) પરથી

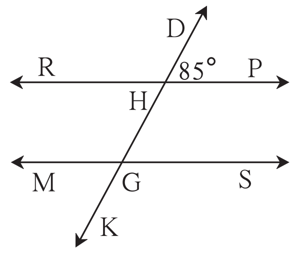
∴ $\angle d = \angle b$

મહાવરાસંગ્રહ 2.1

1. આકૃતિ 2.5 માં, રેખા RP || રેખા MS અને રેખા DK તેમની છેદિકા છે. $\angle DHP = 85^\circ$ તો નીચેના ખૂણાના માપ શોધો.

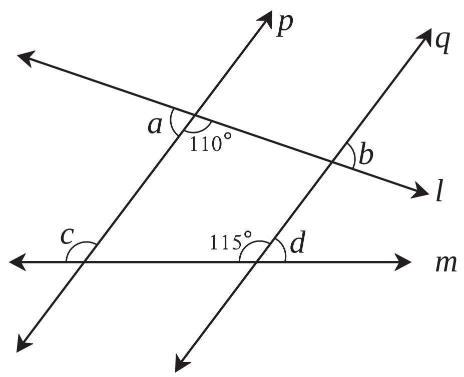
(i) $\angle RHD$ (ii) $\angle PHG$

(iii) $\angle HGS$ (iv) $\angle MGK$

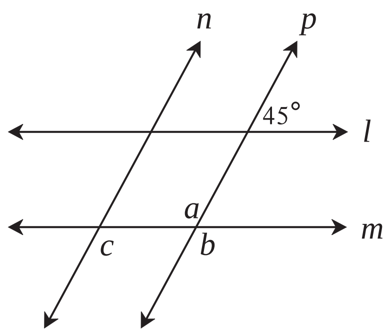


આકૃતિ 2.5

2. આકૃતિ 2.6 જુઓ. તેમાં રેખા p || રેખા q અને રેખા l અને રેખા m આ તેમની છેદિકા છે. આકૃતિમાં કેટલાક ખૂણાઓના માપ દર્શાવેલ છે. આ પરથી $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$ ના માપ શોધો.



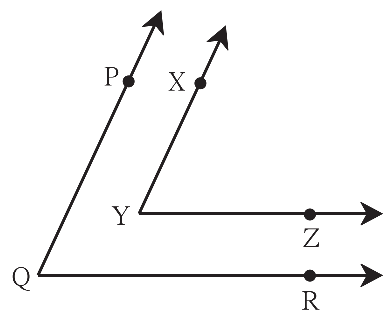
આકૃતિ 2.6



આકૃતિ 2.7

3. આકૃતિ 2.7 માં, રેખા l || રેખા m અને રેખા n || રેખા p છે. આપેલી માહિતી પરથી $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$ ના માપ શોધો.

4*. આકૃતિ 2.8 માં, $\angle PQR$ અને $\angle XYZ$ ની બાજુઓ પરસ્પર સમાંતર છે. તો સાબિત કરો કે, $\angle PQR \cong \angle XYZ$

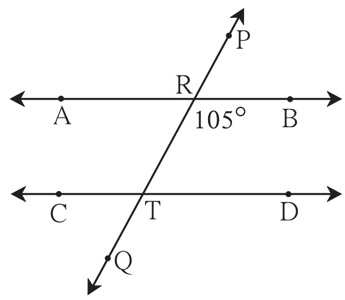


આકૃતિ 2.8

5. આકૃતિ 2.9 માં, રેખા AB || રેખા CD અને રેખા PQ તેમની છેદિકા છે. આકૃતિમાં આપેલા ખૂણાઓના માપ પરથી નીચેના ખૂણાઓના માપ શોધો.

(i) $\angle ART$ (ii) $\angle CTQ$

(iii) $\angle DTQ$ (iv) $\angle PRB$



આકૃતિ 2.9

જાણી લઈએ.

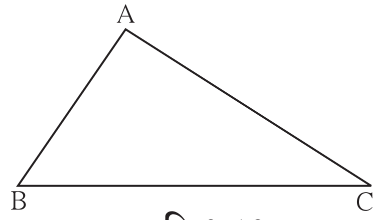
સમાંતર રેખાના ગુણધર્મનો ઉપયોગ

સમાંતર રેખાઓ અને તેની છેદિકા વડે બનતા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને ત્રિકોણનો એક ગુણધર્મ સાબિત કરીએ.

પ્રમેય : કોઈપણ ત્રિકોણના બધા ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 180° થાય છે.

પક્ષ : Δ ABC કોઈપણ એક ત્રિકોણ છે.

સાધ્ય : $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180°$



આકૃતિ 2.10

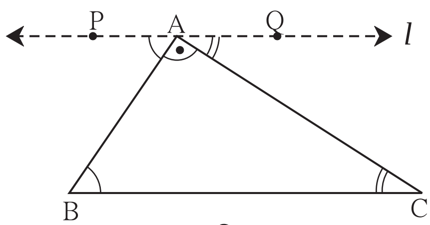
રચના : બિંદુ A માંથી રેખ BC ને સમાંતર રેખા l દોરો.
તેના પર બિંદુ P અને Q એવી રીતે લ્યો કે, P-A-Q

સાબિતી : રેખા PQ || રેખ BC અને રેખ AB તેમની છેદિકા છે.

$\therefore \angle ABC = \angle PAB$.......(વ્યુત્ક્રમકોણ).....I

રેખા PQ || રેખ BC અને રેખ AC છેદિકા છે.

$\therefore \angle ACB = \angle QAC$.......(વ્યુત્ક્રમકોણ).....II



આકૃતિ 2.11

વિધાન I અને II પરથી,

$\angle ABC + \angle ACB = \angle PAB + \angle QAC$ . . . III

સમીકરણ III ની બન્ને બાજુ $\angle BAC$ ઉમેરતાં.

$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \angle PAB + \angle QAC + \angle BAC$

$= \angle PAB + \angle BAC + \angle QAC$

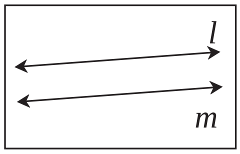
$= \angle PAC + \angle QAC$ ...($\because \angle PAB + \angle BAC = \angle PAC$)

$= 180°$ ...(સુરેખ ખૂણાની જોડ)

એટલે, ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 180° થાય છે.

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

બાજુની આકૃતિમાં રેખા l અને રેખા m પરસ્પર સમાંતર છે કે?
તે કેવી રીતે નક્કી કરશો?



આકૃતિ 2.12

જાણી લઈએ.

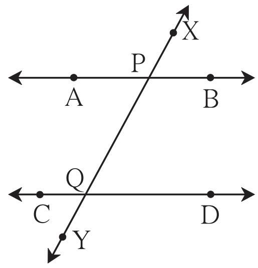
રેખાઓ સમાંતર હોવાની કસોટીઓ (Tests for parallel lines)

બે રેખા અને તેની છેદિકાને લીધે બનતા ખૂણાઓ પરથી આપણે તે બે રેખાઓ સમાંતર છે કે નહીં તે નક્કી કરીએ.

(1) છેદિકાની એક જ બાજુએ આવેલાં અંતઃકોણોની જોડી પૂરક હોય તો તે રેખાઓ સમાંતર હોય.
(2) વ્યુત્ક્રમકોણોની એક જોડ એકરૂપ હોય ત્યારે તે રેખાઓ સમાંતર હોય છે.
(3) સંગતકોણોની એક જોડ એકરૂપ હોય ત્યારે તે રેખાઓ સમાંતર હોય છે.

સમાંતર રેખાની અંતઃકોણ કસોટી (Interior angles test)

પ્રમેય : બે ભિન્ન રેખાને એક છેદિકા છેદે ત્યારે છેદિકાની એક બાજુએ બનતા અંતઃ કોણોનો સરવાળો 180° થાય તો તે બે રેખા સમાંતર હોય છે.

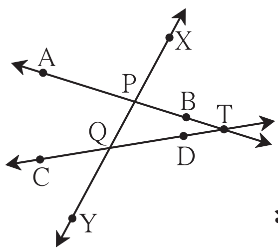


આકૃતિ 2.13

પક્ષ : રેખા AB અને રેખા CD ની રેખા XY છેદિકા છે.
$\angle BPQ + \angle PQD = 180^\circ$

સાધ્ય : રેખા AB $\|$ રેખા CD

સાબિતી : આ માટે આપણે પરોક્ષ સાબિતી વાપરીશું.
સાધ્યનું વિધાન ખોટું છે એમ માનીશું.
$\therefore$ રેખા AB અને રેખા CD સમાંતર નથી
તે સત્ય માનીએ.



આકૃતિ 2.14

ધારોકે, રેખા AB અને રેખા CD બિંદુ T માં છેદે છે.
તેથી Δ PQT તૈયાર થયો.
$\angle TPQ + \angle PQT + \angle PTQ = 180^\circ$ . . . . . . ત્રિકોણના ખૂણાઓનો સરવાળો
પરંતુ$\angle TPQ + \angle PQT = 180^\circ$ આપેલું છે. . . . . . પક્ષ
અર્થાત્ ત્રિકોણના બે ખૂણાનો સરવાળો 180° થાય છે.
પણ ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાનો સરવાળો 180° હોય છે.
$\therefore$ $\angle PTQ = 0^\circ$ થાય.

$\therefore$ PT અને QT આ રેખા એટલે જ રેખા AB અને રેખા CD છે જે ભિન્ન નથી.
પરંતુ આપણને રેખા AB અને રેખા CD ભિન્ન રેખાઓ છે તે પક્ષમાં આપેલું છે.
આથી પક્ષ સાથે વિસંગતી મળે છે.
$\therefore$ આપણી માન્યતા ખોટી છે. એટલે રેખા AB અને રેખા CD સમાંતર છે.
આ પરથી, બે ભિન્ન રેખાઓને એક છેદિકા છેદે ત્યારે છેદિકાની એક બાજુએ બનતા અંતઃ કોણોની જોડ પૂરક હોય તો, તે રેખાઓ સમાંતર છે એમ સાબિત થાય છે, આ ગુણધર્મને સમાંતર રેખાની **અંતઃકોણ કસોટી** કહેવાય છે.
આ કસોટીનો આધાર લઈને બાકીની બે કસોટીને સાબિત કરીએ.

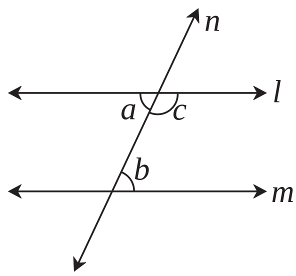
વ્યુત્ક્રમકોણ કસોટી (Alternate angles test)

પ્રમેય : બે રેખાને એક છેદિકા છેદે ત્યારે બનતા વ્યુત્ક્રમકોણોની એક જોડ એકરૂપ હોય તો તે રેખા સમાંતર હોય છે.

પક્ષ : રેખા l અને રેખા m ની છેદિકા રેખા n છે.
$\angle a$ અને $\angle b$ વ્યુત્ક્રમકોણની એક જોડ એકરૂપ છે.
$\therefore \angle a = \angle b$

સાધ્ય : રેખા $l \parallel$ રેખા m

સાબિતી : $\angle a + \angle c = 180^\circ$ . . . . . સુરેખખૂણાની જોડ
$\angle a = \angle b$ . . . . પક્ષ
$\therefore \angle b + \angle c = 180^\circ$
પરંતુ $\angle b$ અને $\angle c$ તો છેદિકાની એક બાજુએ બનતા અંતઃકોણો છે.
$\therefore$ રેખા $l \parallel$ રેખા m . . . . સમાંતર રેખાની અંતઃકોણ કસોટી પરથી.
આ ગુણધર્મને સમાંતર રેખાની **વ્યુત્ક્રમ કોણ કસોટી** કહેવાય.



આકૃતિ 2.15

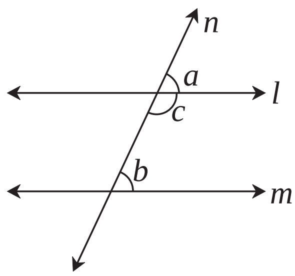
સંગતકોણ કસોટી (Corresponding angles Test)

પ્રમેય : બે રેખાને એક છેદિકા છેદે ત્યારે બનતા સંગત કોણની એક જોડ એકરૂપ હોય તો તે બે રેખા સમાંતર હોય છે.

પક્ષ : રેખા l અને રેખા m ની છેદિકા રેખા n છે.
$\angle a$ અને $\angle b$ સંગતકોણોની જોડ છે.
$\therefore \angle a = \angle b$

સાધ્ય : રેખા $l \parallel$ રેખા m

સાબિતી : $\angle a + \angle c = 180^\circ$ . . . . સુરેખ ખૂણાની જોડ
$\angle a = \angle b$ . . . . પક્ષ
$\therefore \angle b + \angle c = 180^\circ$
એટલે કે, છેદિકાની એક બાજુના અંતઃકોણો પૂરક કોણ છે.
$\therefore$ રેખા $l \parallel$ રેખા m . . . . અંતઃકોણ કસોટીથી
આ ગુણધર્મને સમાંતર રેખાની **સંગતકોણ કસોટી** કહેવાય.



આકૃતિ 2.16

ઉપપ્રમેય I જો એક રેખા તે સમતલમાં આવેલી બે રેખાઓને લંબ હોય તો તે બે રેખાઓ પરસ્પરને સમાંતર હોય છે.

પક્ષ : રેખા $n \perp$ રેખા l અને રેખા $n \perp$ રેખા m

સાધ્ય : રેખા $l \parallel$ રેખા m

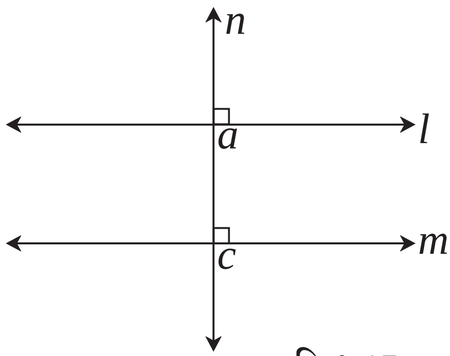
સાબિતી : રેખા $n \perp$ રેખા l અને રેખા $n \perp$ રેખા m આપેલું છે.

$\therefore \quad \angle a = \angle c = 90^\circ$

$\angle a$ અને $\angle c$ તે રેખા l અને રેખા m ની

n છેદિકાથી બનતો સંગત કોણ છે.

$\therefore$ રેખા $l \parallel$ રેખા m . . . . સમાંતર રેખાની અંત:કોણ કસોટી પરથી

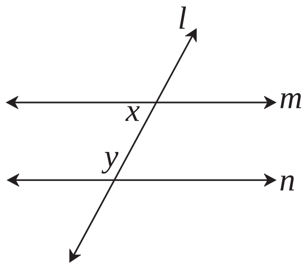


આકૃતિ 2.17

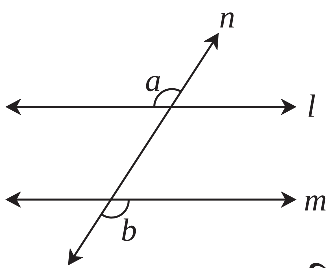
ઉપપ્રમેય II જો એક સમતલમાં બે રેખા તે જ સમતલમાં આવેલી ત્રીજી રેખાને સમાંતર હોય તો તે બે રેખા પરસ્પર સમાંતર હોય છે એમ સાબિત કરો.

મહાવરાસંગ્રહ 2.2

1. આકૃતિ 2.18 માં $y = 108^\circ$ અને $x = 71^\circ$ તો રેખા m અને રેખા n સમાંતર થશે કે? સકારણ લખો.

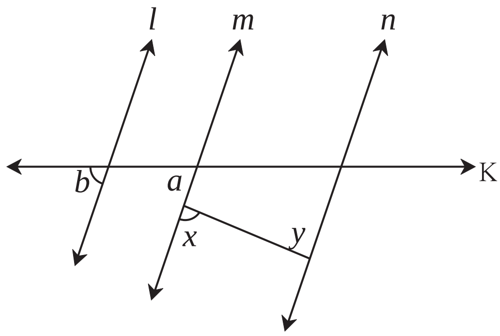


આકૃતિ 2.18



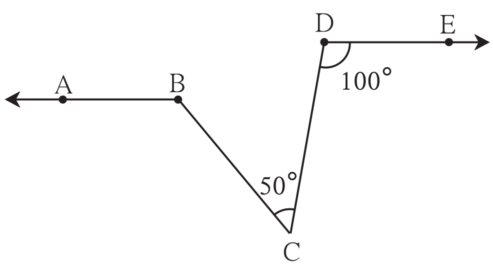
આકૃતિ 2.19

2. આકૃતિ 2.19 માં જો $\angle a \cong \angle b$ તો સાબિત કરો કે, રેખા $l \parallel$ રેખા m



આકૃતિ 2.20

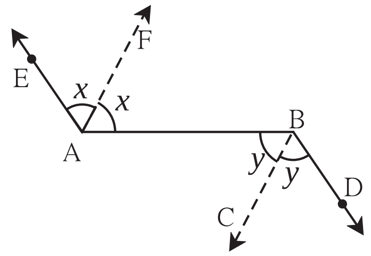
3. આકૃતિ 2.20 માં જો $\angle a \cong \angle b$ અને $\angle x \cong \angle y$ તો સાબિત કરો કે, રેખા $l \parallel$ રેખા n



આકૃતિ 2.21

4. આકૃતિ 2.21 માં જો કિરણ BA $\parallel$ કિરણ DE, $\angle C = 50^\circ$ અને $\angle D = 100^\circ$, તો $\angle ABC$ નું માપ શોધો.

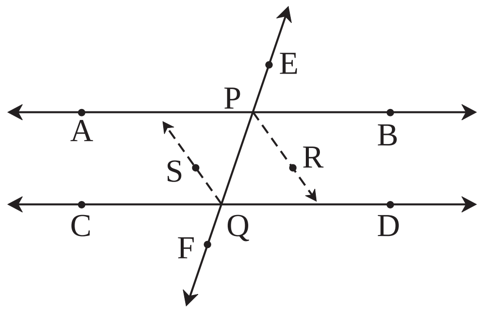
(સૂચના : બિંદુ C માંથી રેખા AB ને સમાંતર રેખા દોરો.)

5. 

આકૃતિ 2.22

આકૃતિ 2.22 માં કિરણ AE || કિરણ BD, કિરણ AF એ ∠EAB નો અને કિરણ BC એ ∠ABD ને દુભાજક છે. તો સાબિત કરો કે, રેખા AF || રેખા BC

6. રેખા AB અને રેખા CD ને, રેખા EF અનુક્રમે P અને Q બિંદુમા છેદે છે. કિરણ PR અને કિરણ QS સમાંતર કિરણો છે જે અનુક્રમે ∠BPQ અને ∠PQC ના દુભાજકો છે. તો સાબિત કરો કે, રેખા AB || રેખા CD



આકૃતિ 2.23

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 2

1. નીચેના દરેક પ્રશ્નના ઉત્તરનો સાચો પર્યાય શોધો.

(i) બે સમાંતર રેખાને એક છેદિકા છેદે તો છેદિકાની એક જ બાજુના અંતઃ કોણોનો સરવાળો .... હોય છે.

(A) 0° (B) 90° (C) 180° (D) 360°

(ii) બે રેખા એક છેદિકાને છેદે ત્યારે .... ખૂણા તૈયાર થાય છે.

(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

(iii) બે સમાંતર રેખાને એક છેદિકા છેદે ત્યારે બનતા ખૂણાઓ પૈકી એક ખૂણાનું માપ 40° થાય છે તો તેને સંગત કોણોનું માપ .... હોય છે.

(A) 40° (B) 140° (C) 50° (D) 180°

(iv) Δ ABC માં $\angle A = 76^\circ$, $\angle B = 48^\circ$, તો $\angle C$ નું માપ .... છે.

(A) 66° (B) 56° (C) 124° (D) 28°

(v) બે સમાંતર રેખાને એક છેદિકા છેદે ત્યારે બનતા વ્યુત્ક્રમકોણની જોડમાંના એક ખૂણાનું માપ 75° હોય તો બીજા ખૂણાનું માપ .... હોય છે.

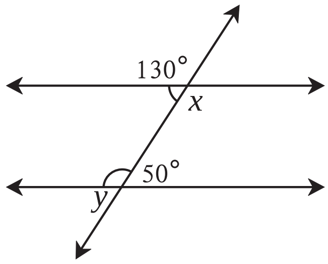
(A) 105° (B) 15° (C) 75° (D) 45°

2*. કિરણ PQ અને કિરણ PR પરસ્પર લંબ છે. બિંદુ B એ ∠QPR નાં આંતરભાગમાં અને બિંદુ A એ ∠RPQ ના બહિર્ભાગમાં છે. કિરણ PB અને કિરણ PA પરસ્પર લંબ છે. આ માહિતી પરથી આકૃતિ દોરો અને નીચેના ખૂણાની જોડીઓ લખો.

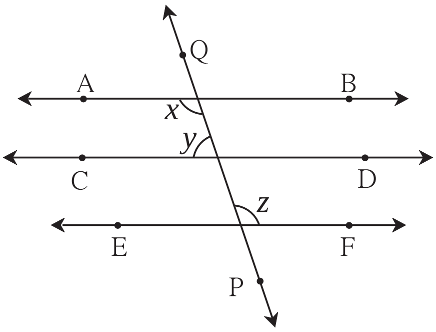
(i) કોટિકોણો (ii) પૂરકકોણો (iii) એકરૂપ ખૂણા

3. જો એકાદ રેખા એક સમતલમાંની બે સમાંતર રેખાઓ પૈકી એક રેખાને લંબ હોય તો તે બીજી રેખાને પણ લંબ હોય છે તે સાબિત કરો.

4. આકૃતિ 2.24 માં દર્શાવ્યા મુજબ ખૂણાનો માપ પરથી $\angle x$ અને $\angle y$ ના માપ શોધો અને સાબિત કરો કે, રેખા $l \parallel$ રેખા m



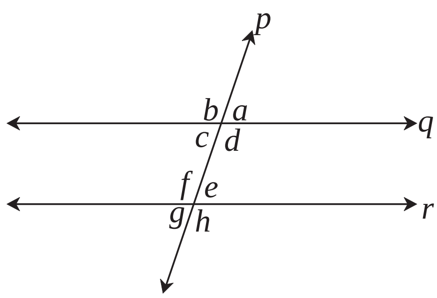
આકૃતિ 2.24



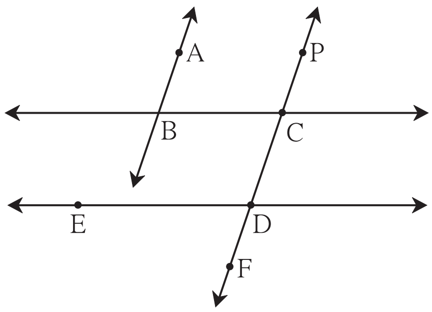
આકૃતિ 2.25

5. રેખા AB $\parallel$ રેખા CD $\parallel$ રેખા EF અને તેમની છેદિકા રેખા QP છે. જો $y : z = 3 : 7$ તો x ની કિંમત શોધો. (આકૃતિ 2.25 જુઓ.)

6. આકૃતિ 2.26 માં જો રેખા $q \parallel$ રેખા r રેખા p છેદિકા છે અને જો $a = 80°$ તો f અને g ની કિંમત શોધો.



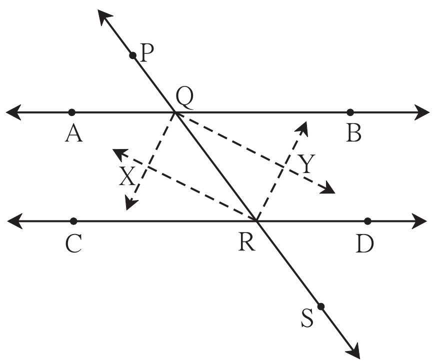
આકૃતિ 2.26



આકૃતિ 2.27

7. આકૃતિ 2.27 માં જો રેખા AB $\parallel$ રેખા CF અને રેખા BC $\parallel$ રેખા ED તો સાબિત કરો કે, $\angle ABC = \angle FDE$.

8. આકૃતિ 2.28 માં રેખા AB $\parallel$ રેખા CD અને રેખા PS તેની છેદિકા છે. કિરણ QX, કિરણ QY, કિરણ RX, કિરણ RY ખૂણાના દુભાજકો છે તો બતાવો કે, □ QXRY લંબચોરસ છે.



આકૃતિ 2.28

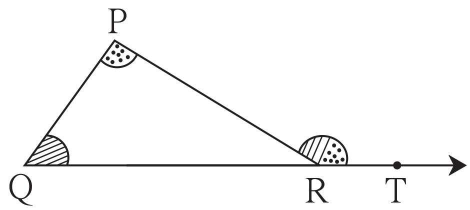
3 ત્રિકોણ

ચાલો શીખીએ.

- ત્રિકોણના અંતઃસમ્મુખકોણનો પ્રમેય
- ત્રિકોણની એકરૂપતા
- સમદ્વિભુજ ત્રિકોણનો પ્રમેય
- $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ માપના ત્રિકોણનો ગુણધર્મ
- ત્રિકોણની મધ્યગા
- કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ પર દોરેલી મધ્યગાનો ગુણધર્મ
- લંબદુભાજકનો પ્રમેય
- ખૂણાના દુભાજકનો પ્રમેય
- ત્રિકોણની સરૂપતા

કૃતિ

એક જાડા કાર્ડ પેપર પર કોઈપણ માપનો Δ PQR દોરો. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કિરણ QR પર T બિંદુ લો. રંગીન જાડા કાર્ડ પેપર માંથી $\angle$P અને $\angle$Q ના ખૂણાના માપના ટુકડા કાપો. તે ટુકડા $\angle$PRT ને પૂર્ણ વ્યાપે છે તે જુઓ.



આકૃતિ 3.1

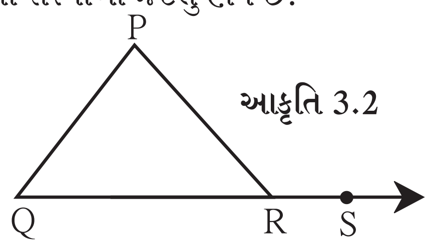
જાણી લઈએ.

ત્રિકોણના અંતઃસમ્મુખકોણનો પ્રમેય (Theorem of remote interior angles of a triangle)

પ્રમેય : ત્રિકોણના બહિષ્કોણનું માપ તેના અંતઃ સમ્મુખકોણના માપના સરવાળા જેટલું હોય છે.

પક્ષ : Δ PQR નો $\angle$PRS બહિષ્કોણ છે.

સાધ્ય : $\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$



આકૃતિ 3.2

સાબિતી : ત્રિકોણના ત્રણેય અંતઃ કોણોનો સરવાળો 180° હોય છે.

$\therefore \angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = 180^\circ$---(I)

$\angle PRQ + \angle PRS = 180^\circ$---(II). . . . (સુરેખ જોડના ખૂણા)

$\therefore$ વિધાન I અને II પરથી,

$\angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle PRS$

$\therefore \angle PQR + \angle QPR = \angle PRS$ ---------($\angle$PRQ નો લોપ કરતાં)

$\therefore$ કોઈપણ ત્રિકોણના બહિષ્કોણનું માપ તેના અંતઃ સમ્મુખકોણના માપના સરવાળા જેટલું હોય છે.

વિચાર કરીએ.

આકૃતિ 3.3 માં બિંદુ R માંથી રેખ PQ ને સમાંતર રેખા દોરીને આ જ પ્રમેયની જુદી રીતે સાબિતી આપી શકાય કે?

જાણી લઈએ.

ત્રિકોણના બહિષ્કોણનો પ્રમેય(ગુણધર્મ) (Property of an exterior angle of triangle)

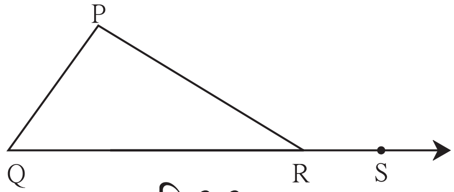
a અને b આ બે સંખ્યાનો સરવાળો $(a + b)$ આ a કરતા મોટો હોય છે અને b કરતાં પણ મોટોજ હોય છે.

એટલે $a + b > a$, $a + b > b$

આનો ઉપયોગ કરીને ત્રિકોણના બહિષ્કોણનો ગુણધર્મ નીચે પ્રમાણે મળે છે.

Δ PQR માં $\angle PRS$ બહિષ્કોણ હોય તો

$\angle PRS > \angle P$, $\angle PRS > \angle Q$



આકૃતિ 3.3

$\therefore$ ત્રિકોણના બહિષ્કોણનું માપ તેના દરેક અંતઃસમ્મુખકોણ કરતાં મોટું હોય છે.

ગણેલાં ઉદાહરણો :

ઉદા.(1) એક ત્રિકોણના ખૂણાના માપનો ગુણોત્તર 5 : 6 : 7 છે તો તેના ત્રણેય ખૂણાના માપ શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે, ત્રણેય ખૂણાના માપ $5x$, $6x$, $7x$ છે.

$5x + 6x + 7x = 180^\circ$

$18x = 180^\circ$

$x = 10^\circ$

$5x = 5 \times 10 = 50^\circ$, $6x = 6 \times 10 = 60^\circ$, $7x = 7 \times 10 = 70^\circ$

ત્રિકોણના ખૂણાઓના માપ અનુક્રમે 50°, 60°, 70° છે.

ઉદા.(2) બાજુની આકૃતિ 3.4 નું નિરિક્ષણ કરીને $\angle PRS$ અને $\angle RTS$ ના માપ શોધો.

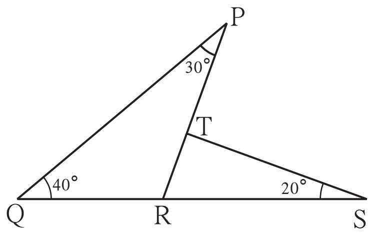
ઉકેલ : Δ PQR નો $\angle PRS$ બહિષ્કોણ છે.

અંતઃસમ્મુખકોણના પ્રમેય પરથી,

$\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$

$= 40^\circ + 30^\circ$

$\angle PRS = 70^\circ$



આકૃતિ 3.4

Δ RTS માં

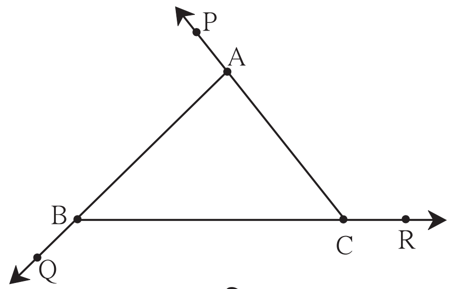
$\angle TRS + \angle RTS + \angle TSR = \boxed{}$ .... ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાના માપનો સરવાળો

$\therefore \boxed{} + \angle RTS + \boxed{} = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS = \boxed{}$

ઉદા.(3) સાબિત કરો કે, ત્રિકોણની બાજુઓ એક જ દિશામાં લંબાવવાથી બનતાં બહિષ્કોણના માપનો સરવાળો 360° થાય છે.



આકૃતિ 3.5

પક્ષ : $\angle PAB$, $\angle QBC$ અને $\angle ACR$ એ Δ ABC ના બહિષ્કોણ છે.

સાધ્ય : $\angle PAB + \angle QBC + \angle ACR = 360^\circ$.

સાબિતી : આ સાબિતી બે રીતે આપી શકાય છે.

રીત I

Δ ABC માં જો $\angle PAB$ આ બહિષ્કોણ ધ્યાનમાં લેતાં $\angle ABC$ અને $\angle ACB$ તેના સમ્મુખકોણો છે, એટલે

$\angle BAP = \angle ABC + \angle ACB$ ---- (I)

તેમજ $\angle ACR = \angle ABC + \angle BAC$ ---- (II) . . . . અંતઃસમ્મુખકોણનો પ્રમેય અનુસાર

અને $\angle CBQ = \angle BAC + \angle ACB$ ---- (III)

વિધાન (I), (II), (III) ની બન્ને બાજુનો સરવાળો કરતાં,

$\angle BAP + \angle ACR + \angle CBQ$

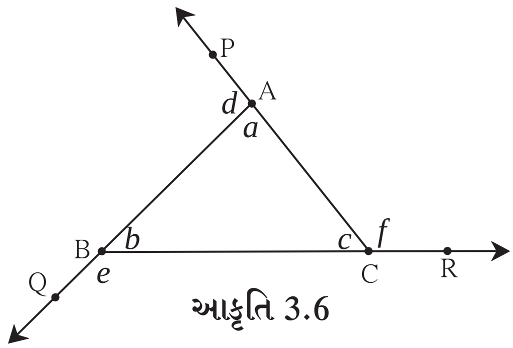
$= \angle ABC + \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC + \angle BAC + \angle ACB$

$= 2\angle ABC + 2\angle ACB + 2\angle BAC$

$= 2(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$

$= 2 \times 180^\circ$ . . . . . (ત્રિકોણના અંતઃકોણોનો સરવાળો)

$= 360^\circ$.



આકૃતિ 3.6

રીત II

$\angle c + \angle f = 180^\circ$ . . . . સુરેખ ખૂણાની જોડ

તેમજ $\angle a + \angle d = 180^\circ$

અને $\angle b + \angle e = 180^\circ$

$\therefore \angle c + \angle f + \angle a + \angle d + \angle b + \angle e = 180^\circ \times 3 = 540^\circ$

$\therefore \angle f + \angle d + \angle e + (\angle a + \angle b + \angle c) = 540^\circ$

$\therefore \angle f + \angle d + \angle e + 180^\circ = 540^\circ$

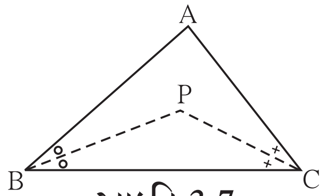
$\therefore f + d + e = 540^\circ - 180^\circ$

$= 360^\circ$

ઉદા. **(4)** આકૃતિ 3.7 માં Δ ABC માં $\angle B$ અને $\angle C$ ના દુભાજક જો બિંદુ P માં છેદતા હોય તો, સાબિત કરો કે,

$\angle BPC = 90 + \frac{1}{2}\angle BAC$

ખાલી જગ્યા પૂરી સાબિતી પૂર્ણ કરો.



આકૃતિ 3.7

સાબિતી : Δ ABC માં,

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \boxed{}$ ...... (ત્રિકોણના ખૂણાઓના માપનો સરવાળો)

$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2} \times \boxed{}$ ..... (પ્રત્યેક પદને $\frac{1}{2}$ વડે ગુણતાં)

$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ$

$\therefore \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ ......(I)

Δ BPC માં

$\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180^\circ$ ...... (ત્રિકોણના અંતઃકોણોના માપનો સરવાળો)

$\therefore \angle BPC + \boxed{} = 180^\circ$ ...... (વિધાન I પરથી)

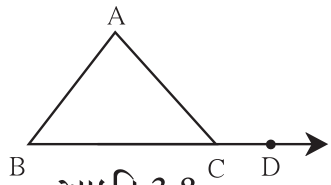
$$\therefore \quad \angle BPC = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC)$$

$$= 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$$

મહાવરાસંગ્રહ 3.1

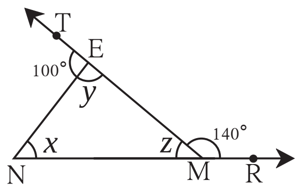
1. આકૃતિ 3.8 માં Δ ABC નો $\angle ACD$ બહિષ્કોણ છે. $\angle B = 40^\circ$, $\angle A = 70^\circ$ તો m $\angle ACD$ શોધો.



આકૃતિ 3.8

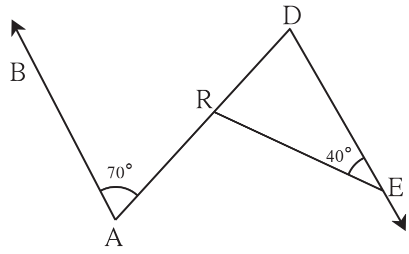
2. Δ PQR માં $\angle P = 70^\circ$, $\angle Q = 65^\circ$ તો $\angle R$ નું માપ શોધો.
3. ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાના માપ x°, $(x-20)^\circ$, $(x-40)^\circ$ હોય તો ત્રણે ખૂણાના માપ શોધો.
4. ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાઓ પૈકી એકખૂણો સૌથી નાના ખૂણાના બમણા અને બીજો ખૂણો, સૌથી નાના ખૂણાના માપથી ત્રણગણો છે. તો ત્રણે ખૂણાઓના માપ શોધો.

5. આકૃતિ 3.9 માં આપેલા ખૂણાઓના માપ પરથી x, y, z ની કિંમત શોધો.



આકૃતિ 3.9

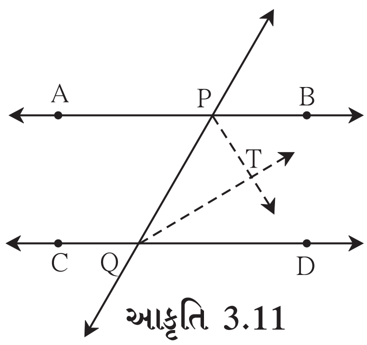
6. આકૃતિ 3.10 માં રેખા AB || રેખા DE છે. આપેલા માપ પરથી ∠DRE અને ∠ARE ના માપ શોધો.



આકૃતિ 3.10

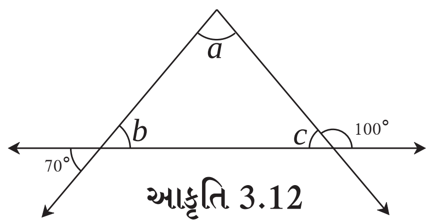
7. Δ ABC માં ∠A અને ∠B નો દુભાજક બિંદુ O માં છેદે છે. જો ∠C = 70° તો ∠AOB નું માપ શોધો.

8. આકૃતિ 3.11 માં રેખા AB || રેખા CD અને રેખા PQ તેની છેદિકા છે. કિરણ PT અને કિરણ QT એ અનુક્રમે ∠BPQ અને ∠PQD ના દુભાજક હોય તો સાબિત કરો કે,
∠PTQ = 90°



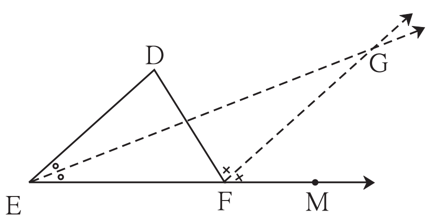
આકૃતિ 3.11

9. આકૃતિ 3.12 માં આપેલી માહિતી પરથી $\angle a$, $\angle b$ અને $\angle c$ ના માપ શોધો.



આકૃતિ 3.12

10*. આકૃતિ 3.13 માં રેખ DE || રેખ GF છે. કિરણ EG અને કિરણ FG એ અનુક્રમે ∠DEF અને ∠DFM આ ખૂણાના દુભાજક છે તો સાબિત કરો કે,
(i) ∠DEF = ∠EDF (ii) EF = FG

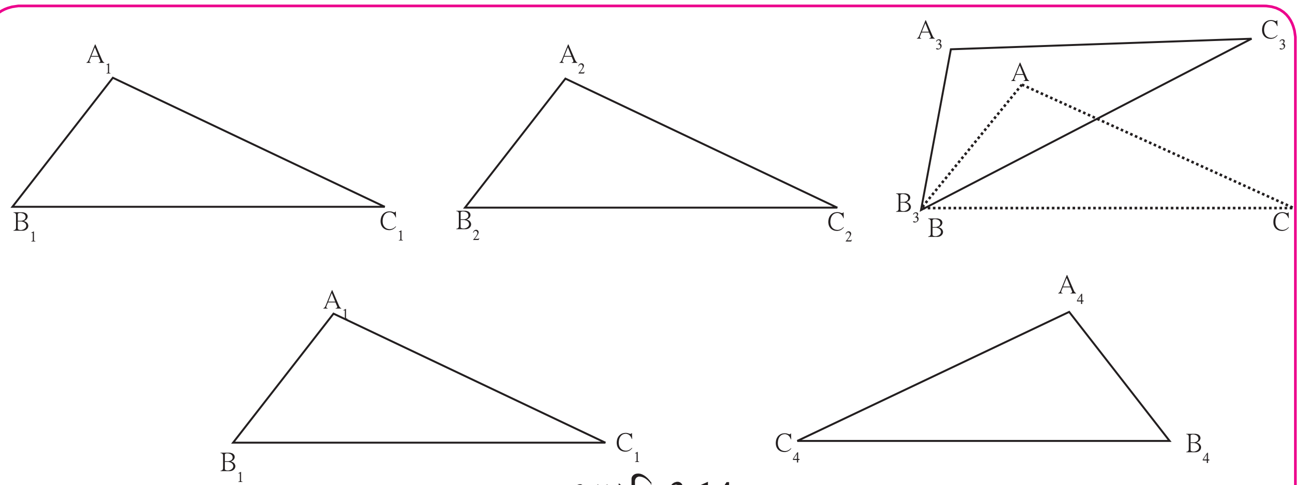


આકૃતિ 3.13

જાણી લઈએ.

ત્રિકોણની એકરૂપતા (Congruence of triangles)

એક રેખાખંડ, બીજા રેખાખંડ પર બંધબેસતો હોય તો તે બે રેખાખંડ એકરૂપ હોય છે. તેમ જ એક ખૂણો બીજા ખૂણા પર બંધબેસતો હોય તો તે બે ખૂણા એકરૂપ હોય છે. એ આપણે જાણીએ છીએ. તે જ પ્રમાણે એક ત્રિકોણ બીજા ત્રિકોણ પર બંધબેસતો હોય તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે એમ કહેવાય. જો Δ ABC અને Δ PQR એ એકરૂપ હોય તો તે $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ એમ દર્શાવાય.



આકૃતિ 3.14

કૃતિ : કોઈપણ માપનો એક Δ ABC પૂઠાપર કાપી લો.

તેને એક કાર્ડ પેપર પર મૂકી તેને ફરતે પેન્સિલથી તેની પ્રતિકૃતિ દોરો. આ ત્રિકોણને $\Delta A_1B_1C_1$ નામ આપો.

હવે તે પૂઠાના ત્રિકોણને બાજુમાં સરકાવીને તેની બીજી પ્રતિકૃતિ દોરો.

તેને $\Delta A_2B_2C_2$ નામ આપો. પછી આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે તે ત્રિકોણને થોડો ફેરવીને બીજી એક પ્રતિકૃતિ દોરો. તેને $\Delta A_3B_3C_3$ નામ આપો. પછી પૂઠાના ત્રિકોણને ઊંચકીને બીજી જગ્યા પર મૂકો અને તેની પ્રતિકૃતિ તૈયાર કરો. નવા ત્રિકોણને $\Delta A_4B_4C_4$ નામ આપો.

હવે, $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$, $\Delta A_3B_3C_3$ અને $\Delta A_4B_4C_4$ એ દરેક Δ ABC ને એકરૂપ છે.

એ ધ્યાનમાં આવ્યું કે? કારણ કે Δ ABC એ પ્રત્યેકને બંધ બેસતો ત્રિકોણ છે. $\Delta A_3B_3C_3$ માટે ચકાસીએ.

તેને એ રીતે જોડતાં $\angle A$ એ $\angle A_3$ પર , $\angle B$ એ $\angle B_3$ પર અને $\angle C$ એ $\angle C_3$ પર મૂકીએ તો

$\Delta ABC \cong \Delta A_3B_3C_3$ એમ કહેવાય છે.

તો $AB = A_3B_3$, $BC = B_3C_3$, $CA = C_3A_3$ પણ મળશે.

આ પરથી બે ત્રિકોણોની એકરૂપતા તપાસતાં તેના ખૂણા અને બાજુ વિશિષ્ટ ક્રમથી એટલે કે એક એક સંગતતા પ્રમાણે લખવા જરૂરી છે. એ ધ્યાનમાં રાખો.

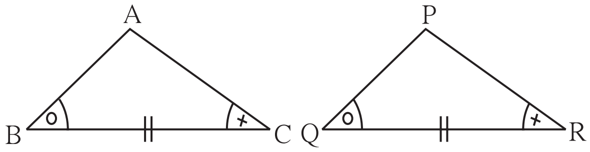
જો $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, તો $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ . . . . (I)

અને $AB = PQ$, $BC = QR$, $CA = RP$ . . . . . . (II) આવા છ સમીકરણો મળશે.

એટલે કે આ બે ત્રિકોણોમાંથી, ખૂણાની અને બાજુની એક એકસંગતતા પ્રમાણે ત્રણ સંગત ખૂણા સરખા અને ત્રણ સંગત બાજુ સરખી છે એવો અર્થ છે.

ઉપરના છએ સમીકરણો એકરૂપ ત્રિકોણો માટે સત્ય છે. તે માટે ત્રણ વિશિષ્ટ સમીકરણો સત્ય છે એમ સમજીએ તો છએ છ સમીકરણો સત્ય થાય. આ રીતે બે ત્રિકોણો એકરૂપ કેવી રીતે થાય તે સમજીએ.

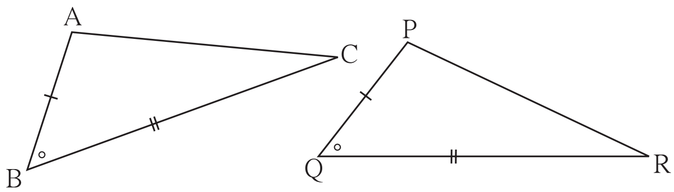
(1) જો એક એક સંગતતાથી ΔABC ના બે ખૂણા ને ΔPQR ના બે ખૂણાં સરખા હોય અને તે ખૂણાઓની સમાવિષ્ટ. બાજુ સરખી હોય તો તે બે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.



આકૃતિ 3.15

આ ગુણધર્મને ખૂણો-બાજુ-ખૂણો કસોટી કહેવાય. ટૂંકમાં **ખૂબાખૂ કસોટી** એમ લખાય.

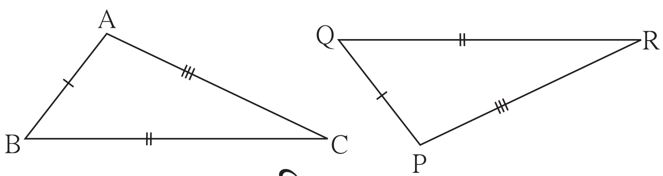
(2) જો એક એક સંગતતાથી Δ ABC ની બે બાજુ અને Δ PQR ની બે બાજુ સરખી હોય અને Δ ABC ના તે બે બાજુની વચ્ચેનો ખૂણા એ Δ PQR ના સંગત બાજુની વચ્ચેના ખૂણા જેટલા હોય તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



આકૃતિ 3.16

આ ગુણધર્મને બાજુ-ખૂણો-બાજુ કસોટી કહેવાય. ટૂંકમાં **બાખૂબા કસોટી** એમ લખાય.

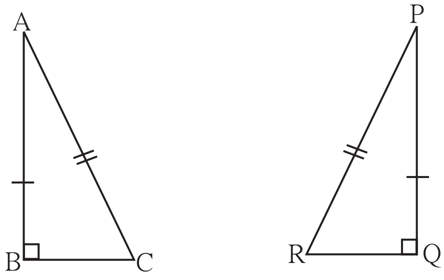
(3) જો Δ ABC ની ત્રણ બાજુ એક એક સંગતતાથી Δ PQR ની બાજુ જેટલી હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



આકૃતિ 3.17

આ ગુણધર્મને બાજુ-બાજુ-બાજુ કસોટી કહેવાય. ટૂંકમાં **બાબાબા કસોટી** એમ લખાય.

(4) Δ ABC, Δ PQR આ બે કાટકોણ ત્રિકોણમાં $\angle B$, $\angle Q$ એ કાટકોણ છે અને બંને ત્રિકોણોના કર્ણ સરખા અને AB = PQ હોય તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



આકૃતિ 3.18

આ ગુણધર્મ **કર્ણભુજા કસોટી** કહેવાય.

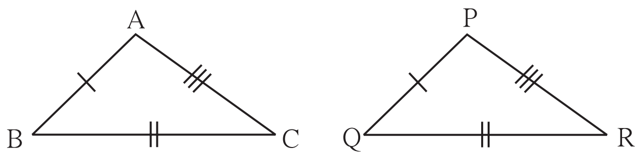
આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

આપણે આપેલી માહિતી પરથી ત્રિકોણની રચના કરી છે. (દા.ત. બે ખૂણા અને સમાવિષ્ટ બાજુ, ત્રણ બાજુ, બે બાજુ અને સમાવિષ્ટ ખૂણો) આ પૈકી કોઈપણ માહિતી આપેલી હોય તો એક જ ત્રિકોણ દોરી શકાય એનો આપણને અનુભવ છે. એટલે કે બે ત્રિકોણમાં એક-એક સંગતતાથી ત્રણ બાબત સરખી હોય તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ બને છે. એક એક સંગતતા અનુસાર તેના ત્રણ ખૂણા સરખા અને ત્રણ બાજુ સરખી છે એમ સમજાય છે. બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય તો એક એક સંગતતા અનુસાર ત્રણ ખૂણા સરખા હોય અને ત્રણ બાજુ સરખી હોય છે. આનો ઉપયોગ ભૂમિતિના અનેક ઉદાહરણમાં થાય છે.

મહાવરાસંગ્રહ 3.2

1. નીચેના પૈકી દરેક ઉદાહરણમાં ત્રિકોણોની જોડીમાં સરખા ચિન્હ દ્વારા બતાવવામાં આવેલાં ભાગ એકરૂપ છે. તે પરથી દરેક જોડીનાં ત્રિકોણો જે કસોટીથી એકરૂપ થતાં હોય તે કસોટી આકૃતિની નીચે આપેલી ખાલી જગ્યામાં લખો.

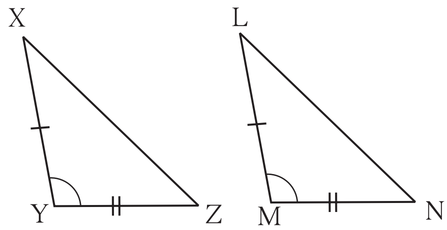
(i)



. . . . કસોટીથી

Δ ABC $\cong \Delta$ PQR

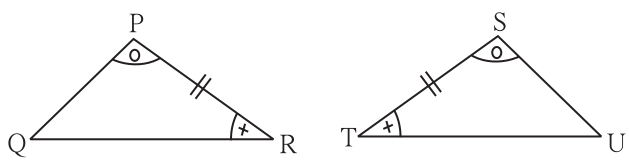
(ii)



. . . . .કસોટીથી

Δ XYZ $\cong \Delta$ LMN

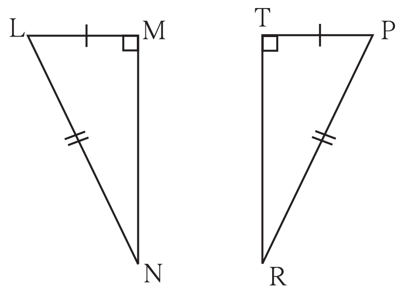
(iii)



. . . . કસોટીથી

Δ PRQ $\cong \Delta$ STU

(iv)



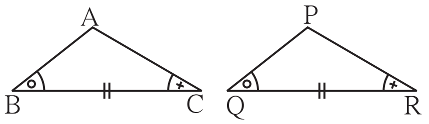
. . . . કસોટીથી

Δ LMN $\cong \Delta$ PTR

આકૃતિ 3.19

2. નીચેની ત્રિકોણની જોડીમાં દર્શાવેલ માહિતીનું નિરીક્ષણ કરો. તે ત્રિકોણ કઈ કસોટી અનુસાર એકરૂપ છે તે લખો અને તેના બાકીના એકરૂપ ઘટક લખો.

(i)



આકૃતિ 3.20

આકૃતિમાં બતાવેલ માહિતી પરથી,

Δ ABC અને Δ PQR માં

$\angle ABC \cong \angle PQR$

રેખ BC $\cong$ રેખ QR

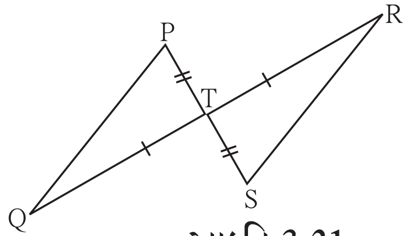
$\angle ACB \cong \angle PRQ$

$\therefore$ Δ ABC $\cong$ Δ PQR .... $\boxed{\quad\quad}$ કસોટી

$\therefore \angle BAC \cong$ $\boxed{\quad\quad}$ ....એકરૂપ ત્રિકોણનો સંગત ખૂણો

રેખ AB $\cong$ $\boxed{\quad\quad}$ અને $\boxed{\quad\quad}$ $\cong$ રેખ PR .....એકરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુ

(ii)



આકૃતિ 3.21

આકૃતિમાં બતાવેલ માહિતી પરથી,

Δ PTQ અને Δ STR માં

રેખ PT $\cong$ રેખ ST

$\angle PTQ \cong \angle STR$ .... અભિકોણ

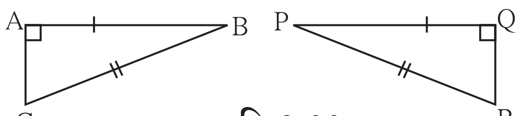
રેખ TQ $\cong$ રેખ TR

$\therefore$ Δ PTQ $\cong$ Δ STR .... $\boxed{\quad\quad}$ કસોટી

$\left.\begin{array}{l}\therefore \angle TPQ \cong \boxed{\quad\quad} \\ \text{અને } \boxed{\quad\quad} \cong \angle TRS\end{array}\right\}$ .....એકરૂપ ત્રિકોણના સંગત ખૂણા

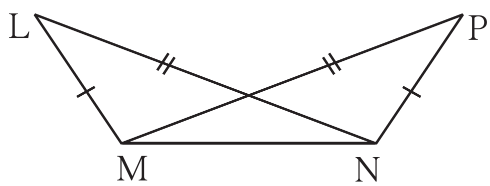
રેખ PQ $\cong$ $\boxed{\quad\quad}$ એકરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુ

3. નીચેની આકૃતિમાં આપેલ માહિતી પરથી Δ ABC અને Δ PQR આ ત્રિકોણોની એકરૂપતાની કસોટી લખો અને બાકીના એકરૂપ ઘટકો લખો.



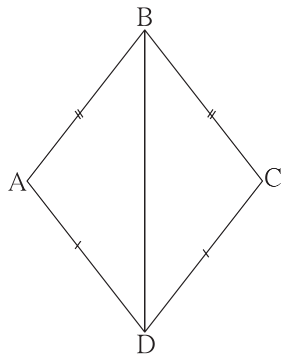
આકૃતિ 3.22

4. નીચેની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે Δ LMN અને Δ PNM ત્રિકોણમાં LM = PN, LN = PM છે. તો તે ત્રિકોણની એકરૂપતાની કસોટી લખો અને બાકીના એકરૂપ ઘટક લખો.



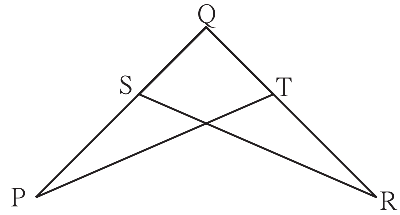
આકૃતિ 3.23

5. આકૃતિ 3.24 માં રેખ AB $\cong$ રેખ BC અને રેખ AD $\cong$ રેખ CD.
તો સાબિત કરો કે,
Δ ABD $\cong$ Δ CBD



આકૃતિ 3.24

6. આકૃતિ 3.25 માં $\angle P \cong \angle R$
રેખ PQ $\cong$ રેખ QR
તો સાબિત કરો કે,
Δ PQT $\cong$ Δ RQS



આકૃતિ 3.25

જાણી લઈએ.

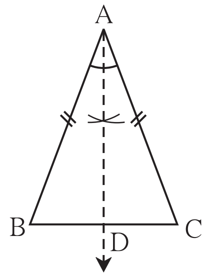
સમદ્વિભુજ ત્રિકોણનો પ્રમેય (Isosceles triangle theorem)

પ્રમેય : જો ત્રિકોણની બે બાજુ એકરૂપ હોય તો તે બાજુઓની સામેના ખૂણાઓ એકરૂપ હોય છે.

પક્ષ : Δ ABC માં બાજુ AB $\cong$ બાજુ AC

સાધ્ય : $\angle ABC \cong \angle ACB$

રચના : Δ ABC માં $\angle BAC$ નો દુભાજક દોરો,
તે બાજુ BC ને જ્યાં છેદે છે તે બિંદુને D નામ આપો.



આકૃતિ 3.26

સાબિતી : Δ ABD અને Δ ACD માં
રેખ AB $\cong$ રેખ AC .... પક્ષ
$\angle BAD \cong \angle CAD$........રચના
રેખ AD $\cong$ રેખ AD .... સામાન્ય બાજુ
$\therefore$ Δ ABD $\cong$ Δ ACD ...... $\boxed{}$
$\therefore \angle ABD \cong$ $\boxed{}$ ....એકરૂપ ત્રિકોણના સંગત ખૂણા
$\therefore \angle ABC \cong \angle ACB$ $\because$ B - D - C

ઉપપ્રમેય : ત્રિકોણની ત્રણે બાજુ એકરૂપ હોય, તો તેના ત્રણે ખૂણા એકરૂપ હોય છે અને દરેક ખૂણાનું માપ 60° હોય છે. (આ ઉપપ્રમેયની સાબિતી તમે લખો.)

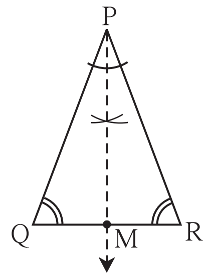
સમદ્વિભુજ ત્રિકોણના પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય (Converse of an isosceles triangle theorem)

પ્રમેય : જો ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ એકરૂપ હોય તો તે ખૂણાઓની સામેની બાજુ એકરૂપ હોય છે.

પક્ષ : Δ PQR માં $\angle PQR \cong \angle PRQ$

સાધ્ય : બાજુ PQ $\cong$ બાજુ PR

રચના : $\angle P$ નો દુભાજક દોરો. તે બાજુQR
ને જ્યાં છેદે તે બિંદુને M નામ આપો.



આકૃતિ 3.27

સાબિતી : Δ PQM અને Δ PRM માં
$\angle PQM \cong$ $\boxed{}$........ પક્ષ
$\angle QPM \cong \angle RPM$........$\boxed{}$
રેખ PM $\cong$ $\boxed{}$ .... સામાન્ય બાજુ
$\therefore$ Δ PQM $\cong$ Δ PRM ...... $\boxed{}$ કસોટી
$\therefore$ રેખ PQ $\cong$ રેખ PR.......એકરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુ

ઉપપ્રમેય : ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણા એકરૂપ હોય તો તેની ત્રણે બાજુ એકરૂપ હોય છે.
(આ ઉપપ્રમેયની સાબિતી તમે લખો.)
ઉપરના બંને પ્રમેયોના વિધાનો પરસ્પર વિરોધી છે.
ઉપરના બંને ઉપપ્રમેયોના વિધાનો પરસ્પર વિરોધી છે.

વિચાર કરીએ.

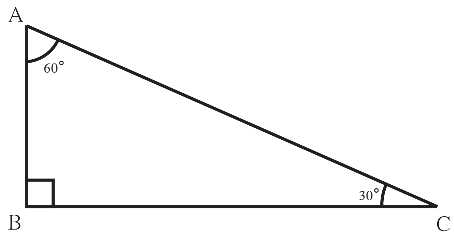
(1) સમદ્વિભુજ ત્રિકોણના પ્રમેયની સાબિતી જુદી રચના કરી આપી શકાય કે ?
(2) સમદ્વિભુજ ત્રિકોણના પ્રમેયની સાબિતી કોઈપણ રચના ન કરતાં આપી શકાય કે ?

જાણી લઈએ.

$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ માપના ત્રિકોણોના ગુણધર્મ (Property of $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ triangle)

કૃતિ I

જૂથમાંના દરેકે એક ખૂણાનું માપ 30° હોય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ દોરવો. દરેકના 30° માપના ખૂણાની સામેની બાજુ અને કર્ણની લંબાઈ માપવી. જૂથના એક વિદ્યાર્થીને દરેકે દોરેલા ત્રિકોણ માટે નીચેનો કોઠો પૂર્ણ કરવા કહો.



આકૃતિ 3.28

ત્રિકોણ ક્રમાંક	1	2	3	4
30° ખૂણાની સામેની બાજુની લંબાઈ				
કર્ણની લંબાઈ				

ઉપરના કોઠા પરથી ખૂણાઓના માપ 30°, 60° અને 90° હોય તેવા ત્રિકોણોની બાજુના કેટલા ગુણધર્મ મળશે કે?

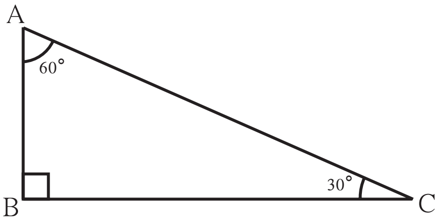
કૃતિ II

કંપાસપેટીમાં એક કાટખૂણિયાના ખૂણા 30°, 60° અને 90° હોય છે. તેમની બાજુના સંદર્ભમાં આ ગુણધર્મ મળે છે કે તે ચકાસી જુઓ.

આ કૃતિ પરથી આપણને મળેલો એક મહત્ત્વનો ગુણધર્મ હવે સાબિત કરીએ.

પ્રમેય : જો કાટકોણ ત્રિકોણનો લઘુકોણ 30° અને 60° હોય તો 30° ના ખૂણાની સામેની બાજુ કર્ણ કરતા અડધી હોય છે.

(નીચે આપેલી સાબિતીમાં ખાલી જગ્યા પૂરો.)



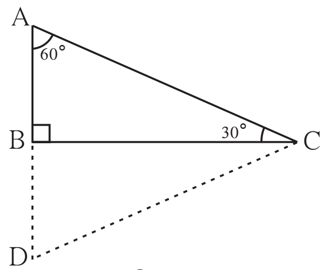
આકૃતિ 3.29

પક્ષ : કાટકોણ Δ ABC માં

$\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $\angle A = 60^\circ$

સાધ્ય : $AB = \frac{1}{2} AC$

રચના : રેખાખંડ AB ને લંબાવીને તેના પર D બિંદુ એવું લો કે AB = BD, રેખાખંડ DC દોરો.



આકૃતિ 3.30

સાબિતી : Δ ABC અને Δ DBC માં

રેખ AB $\cong$ રેખ DB .... $\boxed{\quad\quad}$

$\angle ABC \cong \angle DBC$ .... $\boxed{\quad\quad}$

રેખ BC $\cong$ રેખ BC .... $\boxed{\quad\quad}$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DBC$ ..... $\boxed{\quad\quad}$

$\therefore \angle BAC \cong \angle BDC$ .... એકરૂપ ત્રિકોણનો સંગત ખૂણો

Δ ABC માં $\angle BAC = 60^\circ$ $\therefore$ $\angle BDC = 60^\circ$

હવે Δ ADC માં,

$\angle DAC = \angle ADC = \angle ACD = 60^\circ$ ... ($\because$ ત્રિકોણના ખૂણાઓનો સરવાળો 180°)

$\therefore \Delta$ ADC એ સમભુજ ત્રિકોણ થશે.

$\therefore AC = AD = DC$ .... સમદ્વિભુજ ત્રિકોણના પ્રતિવિધાનનો ઉપપ્રમેય

પરંતુ $AB = \frac{1}{2}$ AD........ રચના $\therefore AB = \frac{1}{2}$ AC .... ($\because$ AD = AC)

કૃતિ :

ઉપરની આકૃતિ 3.29 ના આધારે ચોકઠામાં ખાલી જગ્યા ભરી નીચેના પ્રમેયની સાબિતી પૂર્ણ કરો.

કાટકોણ ત્રિકોણમાં બાકીના ખૂણા 30°, 60° હોય તો 60° ખૂણાની સામેની બાજુ $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ કર્ણ હોય છે.

ઉપરના પ્રમેયમાં $AB = \frac{1}{2}$ AC એ આપણે જોયું.

$AB^2 + BC^2 = \boxed{\quad\quad}$ . . . . . પાયથાગોરસના સિધ્ધાંત અનુસાર

$\frac{1}{4} AC^2 + BC^2 = \boxed{\quad\quad}$

$\therefore BC^2 = AC^2 - \frac{1}{4} AC^2$

$\therefore BC^2 = \boxed{\quad\quad}$

$\therefore BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

કૃતિ

કાટકોણ ત્રિકોણનો ખૂણો જો 45°, 45°, 90° હોય તો કાટકોણ બનાવતી દરેક બાજુ $\frac{1}{\sqrt{2}} \times$ કર્ણ હોય છે.

Δ ABC માં, $\angle B = 90°$ અને $\angle A = \angle C = 45°$

$\therefore$ BC = AB

પાયથાગોરસના સિધ્ધાંત મુજબ,

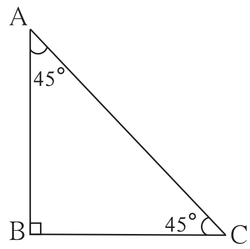
$AB^2 + BC^2 = \boxed{}$

$AB^2 + \boxed{} = AC^2 \ldots (\because BC = AB)$

$\therefore 2AB^2 = \boxed{}$

$\therefore AB^2 = \boxed{}$

$\therefore AB = \frac{1}{\sqrt{2}} AC$



આકૃતિ 3.31

આ ગુણધર્મને 45° – 45° – 90° ના ત્રિકોણનો પ્રમેય કહેવાય.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

(1) ત્રિકોણના ખૂણાઓના માપ 30°, 60° અને 90° ના હોય તો 30° ના ખૂણાની સામેની બાજુ $\frac{\text{કર્ણ}}{2}$ હોય છે અને 60° ના ખૂણાની સામેની બાજુ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ કર્ણ હોય છે.
આ પ્રમેયને 30°–60°–90° નો પ્રમેય કહેવાય છે.

(2) ત્રિકોણના ખૂણાઓના માપ 45°, 45° અને 90° હોય તો કાટકોણ બનાવતી દરેક બાજુ $\frac{\text{કર્ણ}}{\sqrt{2}}$ હોય છે. આ પ્રમેયને 45°–45°–90°નો પ્રમેય કહેવાય છે.

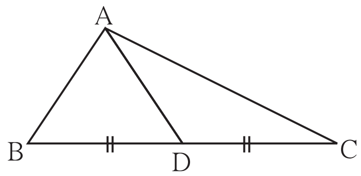
યાદ કરીએ.

ત્રિકોણની મધ્યગા

ત્રિકોણના શિરોબિંદુ અને તેની સામેની બાજુના મધ્યબિંદુને જોડનાર રેખાખંડ એટલે જ તે ત્રિકોણની મધ્યગા છે.

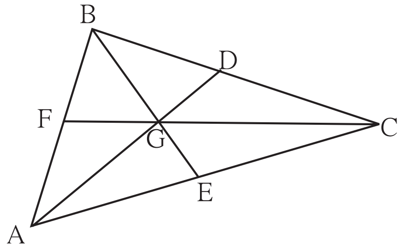
આકૃતિમાં, બાજુ BC નું મધ્યબિંદુ D છે.

$\therefore$ રેખ AD એ Δ ABC ની એક મધ્યગા છે.



આકૃતિ 3.32

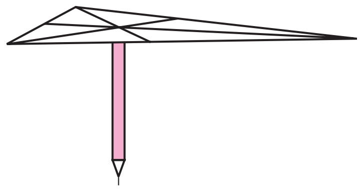
કૃતિ I : કોઈપણ એક ત્રિકોણ ABC દોરો. આ ત્રિકોણમાં AD, BE, અને CF આ મધ્યગા દોરો. તેના સંપાતી (સંગામી) બિંદુને G નામ આપો. AG અને GD ની લંબાઈની તુલના વિભાજક (ડિવાઈડર)ની મદદથી કરો. AG ની લંબાઈ, GD થી બમણી છે આને ચકાસી લો તે જ પ્રમાણે BG ની લંબાઈ GE થી બમણી અને CG ની લંબાઈ GF ની લંબાઈથી બમણી છે. આ પણ ચકાસી લો.



આકૃતિ 3.33

આ પરથી ગુરૂત્વકેન્દ્ર (G) દરેક મધ્યગાને 2:1 ના પ્રમાણમાં વિભાજન કરે છે આ ગુણધર્મ ધ્યાનમાં રાખો.

કૃતિ II : કાર્ડ પર એક Δ ABC દોરો અને તેને કાપો. તેના પર ત્રણ ત્રણ મધ્યગા દોરો તેના સંપાતી (સંગામી) બિંદુને G નામ આપો. પાયાનો પૃષ્ઠભાગ સપાટ હોય તેવી પેન્સિલ લો અને સપાટ ભાગ ઉપર આવે તેમ રાખો. તે ઊભી પેન્સિલ પર બિંદુ G આવે તે રીતે ત્રિકોણ મૂકી સંતુલિત રહે છે કે કેમ તે ચકાસો. આ પરથી G બિંદુનો એટલે કે ગુરૂત્વકેન્દ્રનો એક મહત્ત્વનો ગુણધર્મ ધ્યાનમાં આવે છે.



આકૃતિ 3.34

જાણી લઈએ.

કાટકોણ ત્રિકોણની કર્ણના મધ્યગાનો ગુણધર્મ

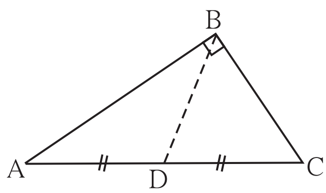
કૃતિ : ધારો કે આકૃતિ 3.35 માં Δ ABC એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. રેખ BD એ મધ્યગા છે.

નીચેના રેખાખંડની લંબાઈ માપો.

l(AD) =......... l(DC) =............ l(BD) = ...

આ પરથી (BD) = $\frac{1}{2}$ (AC) ગુણધર્મ મળે છે તે ચકાસો.

આ ગુણધર્મ સાબિત કરીએ.



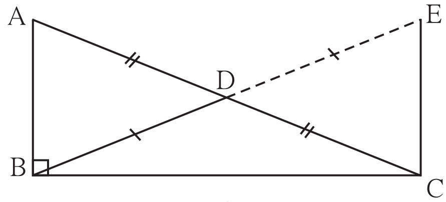
આકૃતિ 3.35

પ્રમેય : કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ પર દોરેલી મધ્યગાની લંબાઈ કર્ણ કરતાં અડધી હોય છે.

પક્ષ : કાટકોણ Δ ABC માં રેખ BD એ મધ્યગા છે.

સાધ્ય : $BD = \frac{1}{2} AC$

રચના : કિરણ BD પર E બિંદુ એવી રીતે લો કે B - D - E અને $l(BD) = l(DE)$. રેખ EC દોરો.



આકૃતિ 3.36

સાબિતી : (સાબિતીના મુખ્ય વિધાન લખ્યાં છે. તે પરથી વચલા વિધાનો અને કારણો લખો અને સાબિતી પૂર્ણ કરો.)

Δ ADB $\cong$ Δ CDE ...... બાખૂબા કસોટી

રેખા AB || રેખા EC ....વ્યુત્ક્રમકોણની કસોટી

Δ ABC $\cong$ Δ ECB ...... બાખૂબા કસોટી

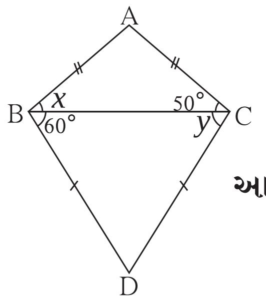
$BD = \frac{1}{2}(AC)$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

કોઈપણ કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ પર દોરેલી મધ્યગાની લંબાઈ કર્ણ કરતાં અડધી હોય છે.

મહાવરાસંગ્રહ 3.3

1. આકૃતિ 3.37 માં દર્શાવેલી માહિતી જુઓ. x અને y ની કિંમત શોધો. તેમજ $\angle ABD$ અને $\angle ACD$ નું માપ શોધો.

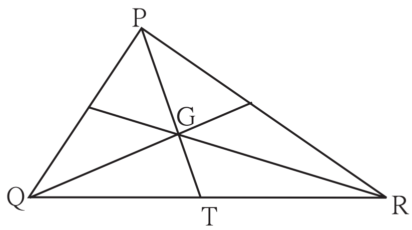


આકૃતિ 3.37

2. કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણની લંબાઈ 15 હોય તો તેના પર દોરેલી મધ્યગાની લંબાઈ શોધો.

3. Δ PQR માં $\angle Q = 90°$, PQ = 12, QR = 5 અને PR ની મધ્યગા QS હોય તો QS શોધો.

4. આકૃતિ 3.38 માં Δ PQR માં G એ મધ્યગાનું સંપાતી (સંગામી) બિંદુ છે. જો GT = 2.5 સેમી તો PG અને PT ની લંબાઈ શોધો.



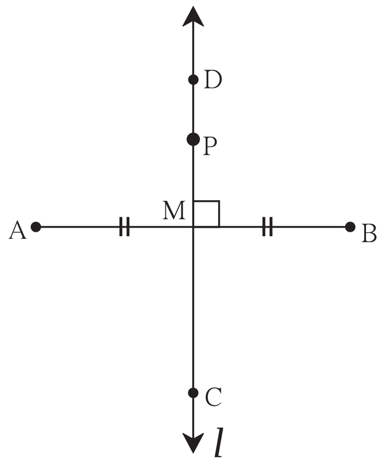
આકૃતિ 3.38

યાદ કરીએ.

કૃતિ : કોઈપણ માપની લંબાઈનો રેખ AB દોરો. તેના મધ્યબિંદુને M નામ આપો. બિંદુ M માંથી પસાર થતી અને રેખ AB ને લંબ હોય તેવી રેખા l દોરો. રેખ AB ની લંબદુભાજક રેખા l છે. તે ધ્યાનમાં આવ્યું કે?

રેખા l પર કોઈપણ બિંદુ P લો. PA અને PB ના અંતરની સરખામણી વિભાજક (ડિવાઈડર)થી કરતાં શું જોવા મળ્યું? PA = PB એમ જોવા મળ્યું ને? આ પરથી ધ્યાનમાં આવે છે કે, રેખાખંડના લંબદુભાજક પરનું કોઈપણ બિંદુ તે રેખાખંડના અંત્યબિંદુથી સરખા અંતરે હોય છે.

હવે પરિકરની મદદથી બિંદુ A અને B થી સરખા અંતરે C અને D જેવા કેટલાક બિંદુઓ લો બધા બિંદુઓ રેખા l પર જ આવ્યાને? આ પરથી શું ધ્યાનમાં આવે છે? રેખાખંડના અંત્યબિંદુથી સમાન અંતરે આવેલા પ્રત્યેક બિંદુ તે રેખાખંડના લંબદુભાજક પર હોય છે આ બંને ગુણધર્મ લંબદુભાજકના પ્રમેયના બે ભાગ છે. તે આપણે સાબિત કરીએ.



આકૃતિ 3.39

જાણી લઈએ.

લંબદુભાજકનો પ્રમેય (Perpendicular bisector theorem)

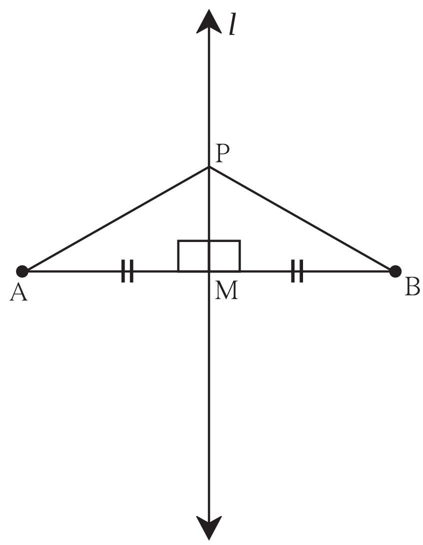
ભાગ I : રેખાખંડના લંબદુભાજક પરના પ્રત્યેક બિંદુ તે રેખાખંડના અંત્યબિંદુથી સમાન અંતરે હોય છે.

પક્ષ : રેખા l આ રેખ AB ની લંબદુભાજક રેખા,
રેખ AB ને બિંદુ M માં છેદે છે.
બિંદુ P આ રેખા l પરનું કોઈપણ બિંદુ છે.

સાધ્ય : l (PA) = l (PB)

રચના : રેખ AP અને રેખ BP દોરો.

સાબિતી : Δ PMA અને Δ PMB માં
રેખ PM $\cong$ રેખ PM .... સામાન્ય બાજુ
$\angle$PMA $\cong$ $\angle$PMB ....પ્રત્યેક કાટકોણ
રેખ AM $\cong$ રેખ BM .... M એ મધ્યબિંદુ



આકૃતિ 3.40

$\therefore \Delta PMA \cong \Delta PMB$ ...... બાખૂબા કસોટી

$\therefore$ રેખ PA $\cong$ રેખ PB.......એકરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુઓ.

$\therefore l(PA) = l(PB)$

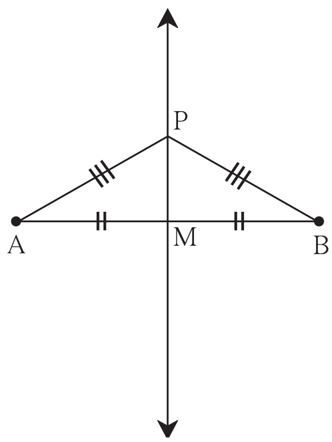
આ પરથી સાબિત થાય છે કે રેખાખંડના લંબદુભાજક પરનું પ્રત્યેક બિંદુ તેના અંત્યબિંદુથી સમાન અંતરે હોય છે.

ભાગ II : રેખાખંડના અંત્યબિંદુથી સમાન અંતરે આવેલું કોઈપણ બિંદુ તે રેખાખંડના લંબદુભાજક પર હોય છે.

પક્ષ : બિંદુ P એ રેખાખંડ AB ના અંત્યબિંદુથી સમાન અંતરે આવેલુ કોઈપણ બિંદુ છે. એટલે PA = PB.

સાધ્ય : P એ રેખ AB ના લંબદુભાજકપર છે.

રચના : રેખ AB નું મધ્યબિંદુ M લીધું. રેખા PM દોરી.



આકૃતિ 3.41

સાબિતી : ΔPAM અને ΔPBM માં

રેખ PA $\cong$ રેખ PB .... $\boxed{\qquad\qquad}$

રેખ AM $\cong$ રેખ BM .... $\boxed{\qquad\qquad}$

રેખ PM $\cong$ $\boxed{\qquad\qquad}$ .... સામાન્ય બાજુ

$\therefore \Delta PAM \cong \Delta PBM$ ...... $\boxed{\qquad\qquad}$ કસોટી.

$\therefore \angle PMA \cong \angle PMB$.......એકરૂપ ત્રિકોણના સંગતખૂણા

પરંતુ $\angle PMA + \boxed{\qquad\qquad} = 180^\circ$

$\angle PMA + \angle PMA = 180^\circ$ .... ($\because \angle PMB = \angle PMA$)

$2\angle PMA = \boxed{\qquad\qquad}$

$\therefore \angle PMA = 90^\circ$

$\therefore$ રેખ PM $\perp$ રેખ AB ......(1)

તે જ રીતે, રેખ AB નું M એ મધ્યબિંદુ છે. ......(2) (રચના)

$\therefore$ રેખા PM એ રેખ AB ની લંબદુભાજક રેખા છે એટલે P એ રેખ AB ના લંબદુભાજક પર છે.

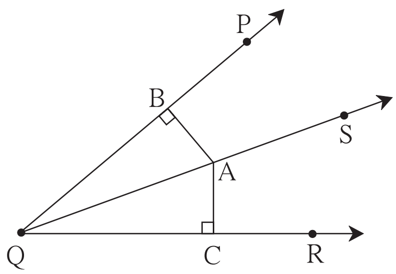
ખૂણાના દુભાજકનો પ્રમેય (Angle bisector theorem)

ભાગ I : ખૂણાના દુભાજક પરનું પ્રત્યેક બિંદુ ખૂણાની બાજુથી સમાન અંતરે હોય છે.

પક્ષ : કિરણ QS તે $\angle PQR$ નો દુભાજક છે.
A એ ખૂણાના દુભાજક પરનું કોઈપણ એક બિંદુ છે.
રેખ AB $\perp$ કિરણ QP, રેખ AC $\perp$ કિરણ QR

સાધ્ય : રેખ AB $\cong$ રેખ AC

સાબિતી : ત્રિકોણની એકરૂપતાની યોગ્ય કસોટી વાપરીને સાબિતી લખો.



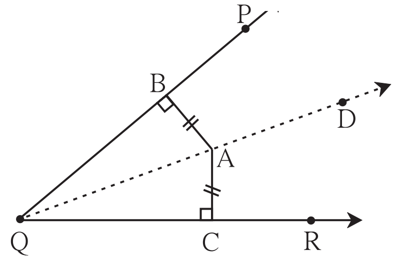
આકૃતિ 3.42

ભાગ II : ખૂણાની બાજુથી સમાન અંતરે આવેલું કોઈપણ બિંદુ તે ખૂણાના દુભાજક પર હોય છે.

પક્ષ : $\angle PQR$ ના અંત:ભાગમાં A એ એક બિંદુ એવું છે કે,
રેખ AC $\perp$ રેખ QR
રેખ AB $\perp$ કિરણ QP
AB = AC

સાધ્ય : કિરણ QA એ $\angle PQR$ નો દુભાજક છે.
એટલે કે $\angle BQA = \angle CQA$

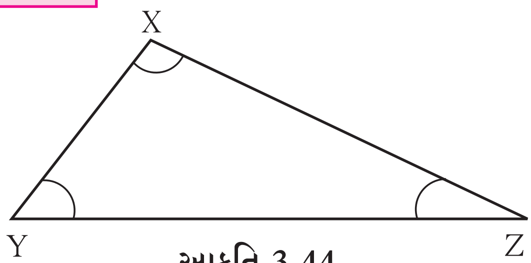
સાબિતી : ત્રિકોણની એકરૂપતાની યોગ્ય કસોટી વાપરીને સાબિતી લખો.



આકૃતિ 3.43

કૃતિ :

આકૃતિમાં દર્શાવ્યાપ્રમાણે બાજુ XZ > બાજુ XY એવો Δ XYZ દોરો.
$\angle Z$ અને $\angle Y$ માપો. કયો ખૂણો મોટો છે?



આકૃતિ 3.44

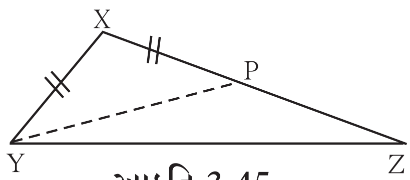
ત્રિકોણની બાજુ અને ખૂણાની અસમાનતાનો ગુણધર્મ

પ્રમેય : જો ત્રિકોણની બે બાજુઓમાંથી એક બાજુ બીજી કરતાં મોટી હોય તો મોટી બાજુની સામેનો ખૂણો નાની બાજુની સામેના ખૂણા કરતા મોટો હોય છે.

પક્ષ : Δ XYZ માં બાજુ XZ > બાજુ XY

સાધ્ય : $\angle XYZ > \angle XZY$

રચના : બાજુ XZ પર P બિંદુ એવી રીતે લો કે
l (XY) = l (XP), રેખ YP દોરો.



આકૃતિ 3.45

સાબિતી : Δ XYP માં

XY = XP ....રચના

$\therefore$ $\angle XYP = \angle XPY$.....સમાન બાજુની સામેના ખૂણાના માપ સમાન .....(I)

$\angle XPY$ એ Δ YPZ નો બહિષ્કોણ

$\therefore$ $\angle XPY > \angle PZY$ ....બહિષ્કોણ પ્રમેય

$\angle XYP > \angle PZY$ ....વિધાન (I) પરથી

$\angle XYP + \angle PYZ > \angle PZY$ (જો $a > b$ અને $c > 0$ તો $a + c > b$)

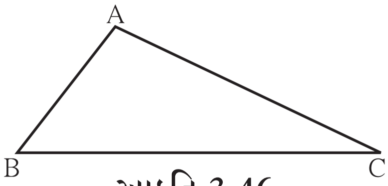
$\angle XYZ > \angle PZY$ એટલે જ $\angle XYZ > \angle XZY$

પ્રમેય : ત્રિકોણના બે ખૂણાના માપ અસમાન હોય તો મોટા ખૂણાની સામેની બાજુ નાના ખૂણાની સામેની બાજુ કરતા મોટી હોય છે.

આ પ્રમેયની સાબિતી અપ્રત્યક્ષ પધ્ધતિથી આપી શકાય. નીચે આપેલી સાબિતીમાં ખાલી જગ્યા પૂરી સાબિતી પૂર્ણ કરો.

પક્ષ : ΔABC માં $\angle B > \angle C$

સાધ્ય : $AC > AB$



આકૃતિ 3.46

સાબિતી : Δ ABC ની બાજુ AB અને બાજુ AC ની લંબાઈમાં નીચેનામાથી એક અને એક જ શક્યતા હોય છે.

(i) $AC < AB$ (ii) $\boxed{}$ (iii) $\boxed{}$

(i) $AC < AB$ એમ ધારતાં

ત્રિકોણની અસમાન બાજુમાંની મોટી બાજુની સામેનો ખૂણો નાની બાજુની સામેના ખૂણા કરતા $\boxed{}$ હોય છે.

$\therefore \ \angle C > \boxed{}$

પરંતુ $\angle C < \angle B$ .... પક્ષ.

એટલે વિસંગતિ નિર્માણ થાય છે.

$\therefore \boxed{} < \boxed{}$ એ શક્ય નથી.

(ii) જો $AC = AB$ ધારીએ,

તો $\angle B = \angle C$.

પરંતુ $\boxed{} > \boxed{}$ ...... પક્ષ.

એટલે ફરીથી વિસંગતિ નિર્માણ થાય છે.

$\therefore \boxed{} = \boxed{}$ એ શક્ય નથી.

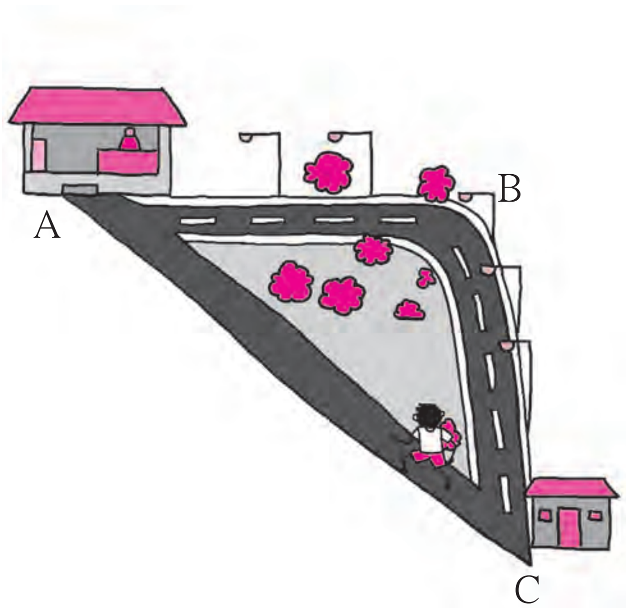
$\therefore AC > AB$ એ એક જ શક્યતા બાકી રહે છે જે સત્ય છે.

$\therefore AC > AB$

યાદ કરીએ.

પાછલા ધોરણમાં આપણે એક કૃતિ કરી હતી. તે પરથી ત્રિકોણનો એક ગુણધર્મ જોયો હતો. તે યાદ કરીએ.

બાજુના ચિત્રમાં દર્શાવ્યાપ્રમાણે A સ્થાન પર દુકાન છે. સમીર C સ્થાન પર ઉભો હતો. દુકાને પહોંચવા માટે તેણે $C \rightarrow B \rightarrow A$ એ ડામરના રસ્તાને બદલે $C \rightarrow A$ આ રસ્તો લીધો. કારણ કે તેને ધ્યાનમાં આવ્યું કે આ માર્ગ ઓછો લાંબો છે એટલે કે ત્રિકોણનો કયો ગુણધર્મ તેના ધ્યાનમાં આવ્યો હતો? ત્રિકોણની કોઈપણ બે બાજુનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં મોટો હોય છે. આ ગુણધર્મ હવે સાબિત કરીએ.



પ્રમેય : ત્રિકોણની કોઈપણ બે બાજુનો સરવાળો એ ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કરતાં વધુ હોય છે.

પક્ષ : Δ ABC આ કોઈપણ માપનો ત્રિકોણ છે.

સાધ્ય : AB + AC > BC

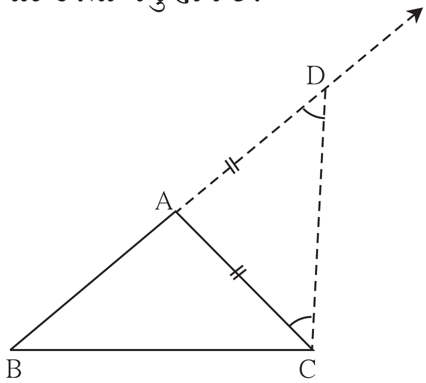
AB + BC > AC

AC + BC > AB

રચના : કિરણ BA પર D બિંદુ એવી રીતે લો કે, AD = AC

સાબિતી : Δ ACD માં, AC = AD ..... રચના

$\therefore$ $\angle$ACD = $\angle$ADC ...... (એકરૂપ બાજુની સામેના ખૂણા)



આકૃતિ 3.47

$\therefore$ $\angle$ACD + $\angle$ACB > $\angle$ADC

$\therefore$ $\angle$BCD > $\angle$ADC

$\therefore$ બાજુ BD > બાજુ BC ....(ત્રિકોણના મોટા ખૂણાની સામેની બાજુ મોટી)

$\therefore$ BA + AD > BC ....($\because$ BD = BA + AD)

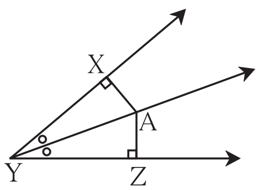
BA + AC > BC .... ($\because$ AD = AC)

તેમજ AB + BC > AC

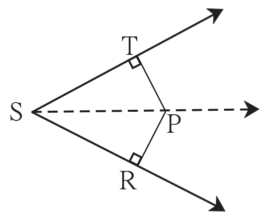
અને BC + AC > AB એ સાબિત કરી શકાય.

મહાવરાસંગ્રહ 3.4

1. આકૃતિ 3.48 માં, બિંદુ A એ $\angle$XYZ ના દુભાજક પર છે.
   જો AX = 2 સેમી હોય તો AZ શોધો.



આકૃતિ 3.48

2. 

આકૃતિ 3.49

   આકૃતિ 3.49 માં $\angle$RST = 56°, રેખ PT $\perp$ કિરણ ST, રેખ PR $\perp$ કિરણ SR અને રેખ PR $\cong$ રેખ PT હોય તો $\angle$RSP શોધો. કારણ લખો.

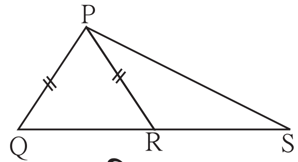
3. Δ PQR માં PQ = 10 સેમી, QR = 12 સેમી, PR = 8 સેમી હોય તો આ ત્રિકોણનો સૌથી મોટો અને સૌથી નાનો ખૂણો ઓળખો.

4. Δ FAN માં $\angle$F = 80°, $\angle$A = 40° તો ત્રિકોણની સૌથી મોટી અને સૌથી નાની બાજુના નામ કારણસહિત લખો.

5. સાબિત કરો કે સમભુજ ત્રિકોણ એ સમકોણ (સમાન ખૂણા ધરાવતો) ત્રિકોણ હોય છે.

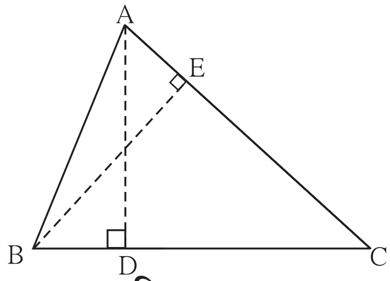
6. Δ ABC માં $\angle$BAC નો દુભાજક બાજુ BC પર લંબ હોય તો સાબિત કરો કે Δ ABC એ સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ છે.

7. આકૃતિ 3.50 માં જો રેખ PR $\cong$ રેખ PQ તો રેખ PS > રેખ PQ છે તેમ દર્શાવો.



આકૃતિ 3.50

8. આકૃતિ 3.51 માં Δ ABC નું રેખ AD અને રેખ BE એ શિરોલંબ છે અને AE = BD છે, તો સાબિત કરો કે રેખ AD $\cong$ રેખ BE

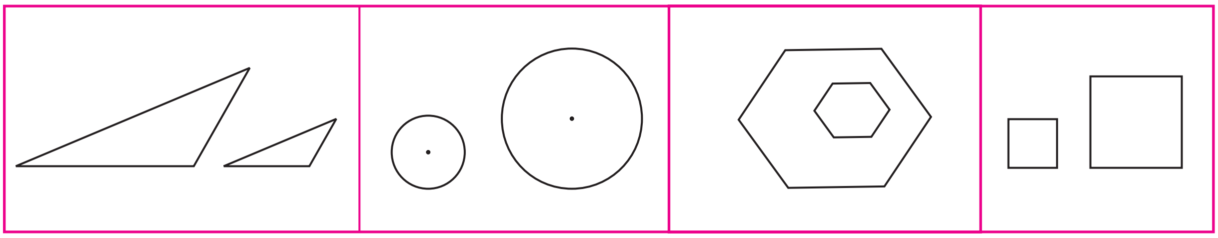


આકૃતિ 3.51

જાણી લઈએ.

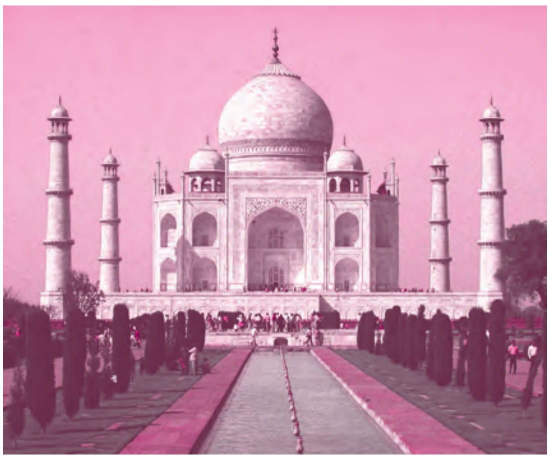
સરૂપ ત્રિકોણ (Similar triangles)

નીચેની આકૃતિઓનું નિરીક્ષણ કરો.



પ્રત્યેક ભાગમાં દર્શાવેલ બબ્બે આકૃતિઓના આકાર (Shape) સરખા છે. પરંતુ તે આકૃતિઓ નાની મોટી છે. એટલે કે તે એકરૂપ નથી.

આવી સરખી દેખાતી આકૃતિઓ એટલે કે સમાન રૂપ ધરાવતી આકૃતિઓને **સરૂપ** આકૃતિઓ કહે છે.



એકાદ ફોટો અને તે જ ફોટો પરથી કાઢેલા મોટા ફોટામાં સરૂપતા જોવા મળે છે, તે જ રીતે રસ્તા અને રસ્તાના નકશામાં સરૂપતા જોવા મળે છે.

બે આકૃતિમાં બાજુની પ્રમાણબદ્ધતા એ સરૂપ આકૃતિઓનો મહત્ત્વનો ગુણધર્મ છે. સરૂપ આકૃતિઓમાં જો ખૂણો હોય તો તે એકરૂપ, એટલે કે સમાન માપના હોવા જોઈએ. બે રસ્તામાં વચ્ચે જે ખૂણો છે તે જ ખૂણો જો તેના નકશામાં ન હોય તો નકશો ભૂલભરેલો ગણાશે.

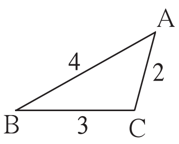
ICT Tools or Links

મોબાઈલ પર અથવા સંગણક પર એકાદો ફોટો કાઢો. તે નાનો કે મોટો કરતી વખતે તમે શું કરો છો તે યાદ કરો. તેજ રીતે એકાદા ફોટાનો એકાદો ભાગ સ્પષ્ટપણે જોવા માટે તમે કઈ કૃતિ કરો છો તે યાદ કરો.

હવે આપણે સરૂપ ત્રિકોણના ગુણધર્મ એક કૃતિથી સમજીએ.

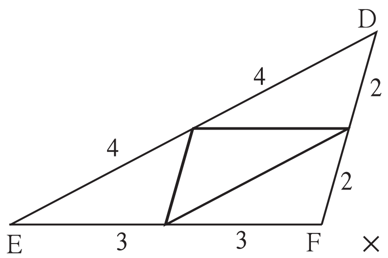
કૃતિ : 4 સેમી, 3 સેમી અને 2 સેમી અને બાજુ ધરાવતો એક ત્રિકોણ કાગળ પર દોરો. આ ત્રિકોણ એક જાડા કાગળ પર મૂકો. તેના ફરતો પેન્સિલ મૂકી તેવા 14 ત્રિકોણ કાપીને તૈયાર કરો.

કાગળના આ ત્રિકોણાકૃતિ ટુકડાં એકરૂપ છે તે ધ્યાનમાં લો. તેને નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે ગોઠવી ત્રણ ત્રિકોણ તૈયાર કરો.



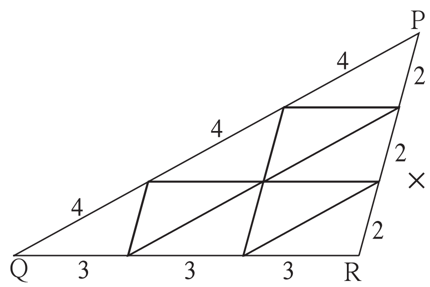
આકૃતિ 3.52

ત્રિકોણની સંખ્યા 1



આકૃતિ 3.53

ત્રિકોણની સંખ્યા 4



આકૃતિ 3.54

ત્રિકોણની સંખ્યા 9

Δ ABC અને Δ DEF એ ABC $\leftrightarrow$ DEF એ સંગતતા સરૂપ છે.

$\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$

અને $\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{AC}{DF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, એટલે કે સંગત બાજુ પ્રમાણસર છે.

તેજ પ્રમાણે Δ DEF અને Δ PQR નો વિચાર કરો. DEF $\leftrightarrow$ PQR આ સંગતતાથી તેમના ખૂણા એકરૂપ અને બાજુ પ્રમાણસર છે કે?

જાણી લઈએ.

ત્રિકોણની સરૂપતા

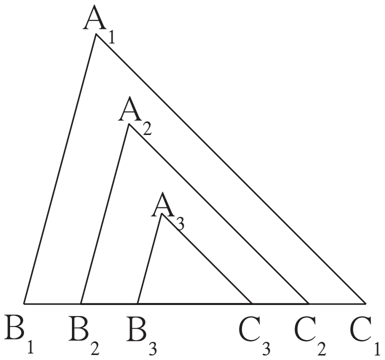
Δ ABC અને Δ PQR માં જો (i) $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ અને

(ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$; તો Δ ABC અને Δ PQR સરૂપ છે તેમ કહી શકાય.

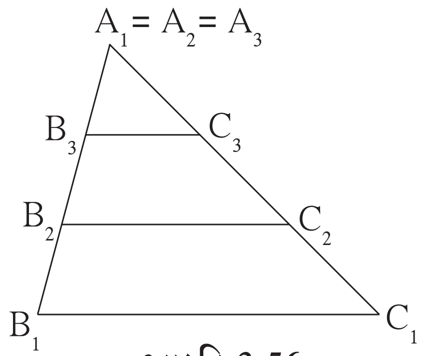
'Δ ABC અને Δ PQR સરૂપ છે.' '$\Delta ABC \sim \Delta PQR$' એમ લખાય છે.

સરૂપ ત્રિકોણના સંગત ખૂણા અને સંગત બાજુનો પરસ્પર સંબંધ નીચેની કૃતિ પરથી સમજીએ.

કૃતિ : $\Delta A_1B_1C_1$ એ કોઈપણ માપનો ત્રિકોણ જાડા કાગળ પર દોરો અને કાપી લો. $\angle A_1$, $\angle B_1$, $\angle C_1$ માપો. તેમજ જાડા કાગળ પર $\Delta A_2B_2C_2$ અને $\Delta A_3B_3C_3$ એ બીજા બે ત્રિકોણ એવી રીતે દોરો કે $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3$, $\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3$, $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3$ અને $B_1C_1 > B_2C_2 > B_3C_3$ હવે તે બે ત્રિકોણ કાપો અને બાજુમાં મૂકો. ત્રણેય ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈ માપો. આ ત્રિકોણોની રચના નીચે પ્રમાણે બંને પ્રકારે કરો.



આકૃતિ 3.55



આકૃતિ 3.56

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2}$, $\frac{B_1C_1}{B_2C_2}$, $\frac{A_1C_1}{A_2C_2}$ આ ગુણોત્તરો તપાસો. તે સમાન છે કે તે ચકાસો.

તેજ પ્રમાણે $\frac{A_1C_1}{A_3C_3}$, $\frac{B_1C_1}{B_3C_3}$, $\frac{A_1B_1}{A_3B_3}$ એ ગુણોત્તરો પણ સમાન છે કે તે જુઓ.

આ કૃતિ પરથી ધ્યાનમાં લો કે જે ત્રિકોણના સંગત ખૂણા સમાન માપના હોય છે તે. તેમની સંગત બાજુના ગુણોત્તરો સમાન હોય છે. એટલે કે તેમની સંગત બાજુ પ્રમાણસર હોય છે.

આપણે જોયું કે Δ ABC અને Δ PQR માં જો (i) $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$, તો

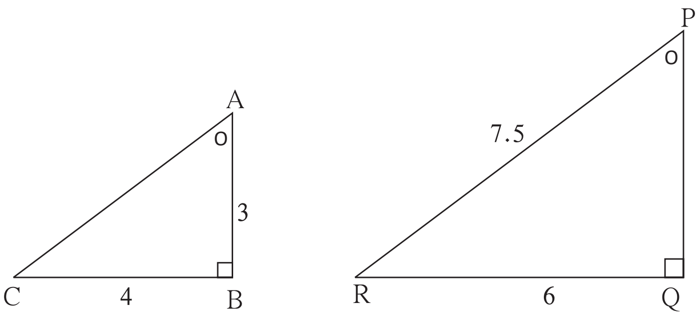
(ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ એટલે કે સંગત ખૂણા સમાન હોય તો સંગત બાજુ પ્રમાણસર હોય છે.

આ નિયમ થોડી મહેનતથી સાબિત કરી શકાય છે. આપણે તેને અનેક ઉદાહરણમાં વાપરવાના છીએ.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

- બે ત્રિકોણના સંગત ખૂણા સમાન માપના હોય ત્યારે તે ત્રિકોણો સરૂપ હોય છે.
- બે ત્રિકોણ સરૂપ હોય ત્યારે તેમની સંગત બાજુ પ્રમાણસર હોય છે અને સંગત ખૂણા એકરૂપ હોય છે.

ઉદા. આકૃતિ 3.57 માં Δ ABC અને Δ PQR દર્શાવ્યા છે. તે ત્રિકોણમાં દર્શાવેલી માહિતીનું નિરીક્ષણ કરો. તે પરથી જેની લંબાઈ આપેલી નથી, તે બાજુની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ 3.57

ઉકેલ : પ્રત્યેક ત્રિકોણના ખૂણાના માપનો સરવાળો 180° હોય છે.

આપેલી માહિતી અનુસાર

$\angle A = \angle P$ અને $\angle B = \angle Q$ $\quad \therefore \angle C = \angle R$

$\therefore$ Δ ABC અને Δ PQR એ સમકોણ ત્રિકોણ છે.

$\therefore$ તેમની બાજુ પ્રમાણસર છે.

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

$$\therefore \frac{3}{PQ} = \frac{4}{6} = \frac{AC}{7.5}$$

$$\therefore 4 \times PQ = 18$$

$$\therefore PQ = \frac{18}{4} = 4.5$$

તેમજ $6 \times AC = 7.5 \times 4$

$$\therefore AC = \frac{7.5 \times 4}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

મહાવરાસંગ્રહ 3.5

1. જો Δ XYZ ~ Δ LMN તો તેના એકરૂપ હોય તેવા સંગતખૂણા લખો અને સંગત બાજુના ગુણોત્તરો લખો.
2. Δ XYZ માં XY = 4 સેમી, YZ = 6 સેમી, XZ = 5 સેમી, જો Δ XYZ ~ Δ PQR અને PQ = 8 સેમી હોય તો Δ PQR ની બાકી રહેલી બાજુઓના માપ શોધો.
3. સરૂપત્રિકોણની જોડીની કાચી આકૃતિ દોરો. ત્રિકોણને નામ આપો. તેમના સંગત ખૂણા સમાન નિશાનીથી દર્શાવો. ત્રિકોણોની સંગત બાજુની લંબાઈ પ્રમાણસર હોય તે સંખ્યાની મદદથી દર્શાવો.

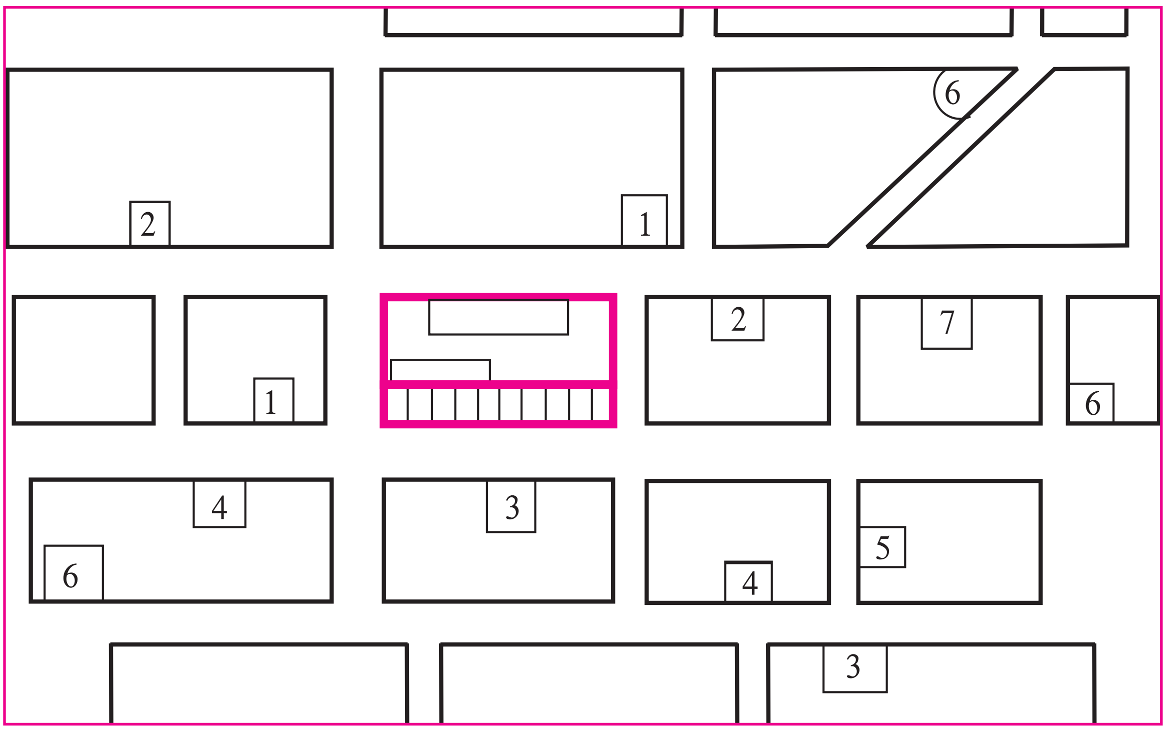
યાદ કરીએ.

તમારે નકશો તૈયાર કરતી વખતે રસ્તા પરનું અંતર યોગ્ય પ્રમાણમાં દર્શાવવાનું છે. જેમ કે 1 સેમી = 100 મી અથવા 1 સેમી = 50 મી. ત્રિકોણના ગુણધર્મનો વિચાર કર્યો કે ? ત્રિકોણના મોટા ખૂણાની સામેની બાજુ મોટી હોય છે, તે યાદ કરો.

ઉપક્રમ :

તમારી શાળા અથવા ઘરની આસપાસના 500 મીટર પરિસરના રસ્તાનો નકશો તૈયાર કરો.

રસ્તા પરના બે સ્થાનનું અંતર કેવી રીતે માપશો? સામાન્ય રીતે 2 મીટર અંતર કાપતા તમે કેટલા પગલા (Steps) ચાલો છો તે જુઓ. બે મીટર અંતરમાં ત્રણ પગલા ચાલ્યા હો તો તે પ્રમાણે 90 પગલાં એટલે 60 મીટર લઈને અંતર નક્કી કરો. ટૂંકમાં, પરિસરના બધાં રસ્તા પર ચાલીને તમારે તે બધાં અંતર નક્કી કરવાં પડશે. પછી રસ્તાઓ એકબીજાને જ્યાં છેદે છે ત્યાં ખૂણો તૈયાર થાય છે તેના માપનો અંદાજ કાઢો. રસ્તાની માપેલી લંબાઈ માટે યોગ્ય પ્રમાણમાપ લઈ નકશો તૈયાર કરો. પરિસરમાંની દુકાનો, રેંકડીઓ, ઈમારતો, બસસ્ટૉપ, રિક્ષાસ્ટેન્ડ ઇત્યાદિ દર્શાવવાનો પ્રયત્ન કરો. નીચે નકશાનો એક નમૂનો સૂચિ સહિત આપેલો છે.



સૂચિ : 1. પુસ્તકની દુકાન 2. બસ સ્ટોપ 3. સ્ટેશનરીની દુકાન 4. બૅંક
5. દવાની દુકાન 6. ઉપહાર ગૃહ 7. સાયકલની દુકાન

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 3

1. નીચેની બહુપર્યાયી પ્રશ્નો માટે આપેલા ઉત્તરો પૈકી યોગ્ય પર્યાય શોધો.

   (i) એક ત્રિકોણની બે બાજુ 5 સેમી અને 1.5 સેમી હોય તો ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુની લંબાઈ . . . . ન હોય.

   (A) 3.7 સેમી (B) 4.1 સેમી (C) 3.8 સેમી (D) 3.4 સેમી

   (ii) Δ PQR માં જો $\angle R > \angle Q$ તો . . . . હશે.

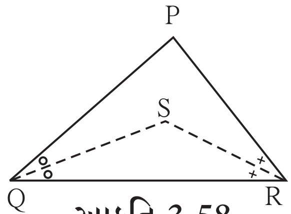
   (A) $QR > PR$ (B) $PQ > PR$ (C) $PQ < PR$ (D) $QR < PR$

   (iii) Δ TPQ માં $\angle T = 65^\circ$, $\angle P = 95^\circ$ તો નીચેના વિધાનો પૈકી સાચું વિધાન કયું?

   (A) $PQ < TP$ (B) $PQ < TQ$ (C) $TQ < TP < PQ$ (D) $PQ < TP < TQ$

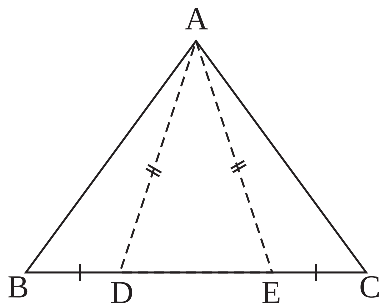
2. Δ ABC એ સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ છે. જેમાં $AB = AC$ છે અને BD અને CE બે મધ્યગા છે, તો $BD = CE$ બતાવો.

3. Δ PQR માં જો $PQ > PR$ અને $\angle Q$ અને $\angle R$ નો દુભાજક S માં છેદે છે તો બતાવો કે, $SQ > SR$.



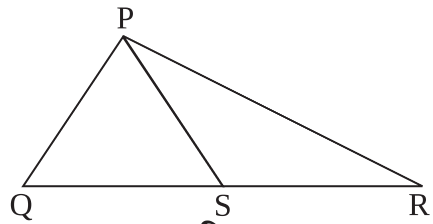
આકૃતિ 3.58

4. આકૃતિ 3.59 માં Δ ABC ની BC બાજુ પર D અને E બિંદુ એવી રીતે આવેલા છે કે $BD = CE$ તેમ જ $AD = AE$ તો બતાવો કે, $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.



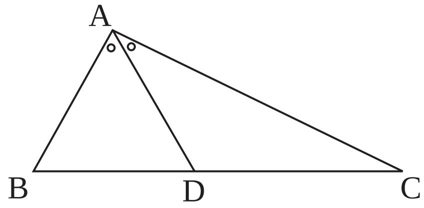
આકૃતિ 3.59

5. આકૃતિ 3.60 માં Δ PQR ની બાજુ QR પર S એ કોઈપણ એક બિંદુ છે તો સાબિત કરો કે, $PQ + QR + RP > 2PS$



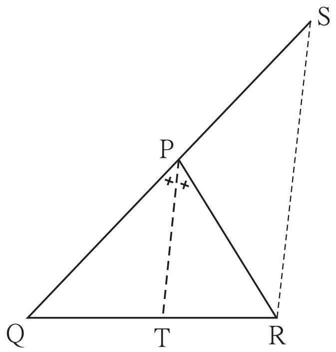
આકૃતિ 3.60

6. આકૃતિ 3.61 માં Δ ABC માં $\angle$BAC નો દુભાજક, બાજુ BC ને D બિંદુમાં છેદે છે તો સાબિત કરો કે, AB > BD



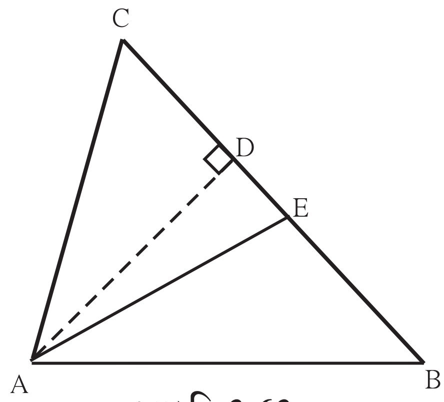
આકૃતિ 3.61

7. આકૃતિ 3.62 માં રેખ PT એ $\angle$QPR નો દુભાજક છે. બિંદુ R માંથી દોરેલી અને રેખ PT ને સમાંતર આવેલી રેખા, કિરણ QP ને S બિંદુમાં છેદે છે, તો સાબિત કરો કે, PS = PR



આકૃતિ 3.62

8. આકૃતિ 3.63 માં રેખ AD $\perp$ રેખ BC.
રેખ AE એ $\angle$CAB નો દુભાજક છે અને E–D–C.
તો દર્શાવો કે,
$m\angle DAE = \frac{1}{2}$ (m$\angle$C - m$\angle$B)



આકૃતિ 3.63

વિચાર કરીએ.

આપણે શીખ્યા કે બે ત્રિકોણ સમકોણ હોય તો તેમની સંગત બાજુ પ્રમાણસર હોય છે.

બે ચતુષ્કોણ સમકોણ હોય તો તેમની સંગત બાજુ પ્રમાણસર હોય છે કે? વિવિધ આકૃતિઓ દોરીને ચકાસો.

આ જ ગુણધર્મ અન્ય બહુભુજાકૃતિની બાબતમાં પણ ચકાસી જુએ.

4 ત્રિકોણ રચના

66B6YN

ચાલો શીખીએ.

ત્રિકોણના ઘટકોમાં નીચેનાં ઘટકોની માહિતી હોય તેવો ત્રિકોણ દોરવો.

- પાયો, એક પાયા પરનો ખૂણો અને બાકીની બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો
- પાયો, એક પાયા પરનો ખૂણો અને બાકીની બે બાજુની લંબાઈનો તફાવત
- પરિમિતિ અને પાયા પરનો ખૂણો

યાદ કરીએ.

પાછલા ધોરણમાં આપણે નીચેની ત્રિકોણ રચના શીખ્યા છીએ.

★ ત્રણેય બાજુની લંબાઈ આપી હોય તેવો ત્રિકોણ દોરવો.

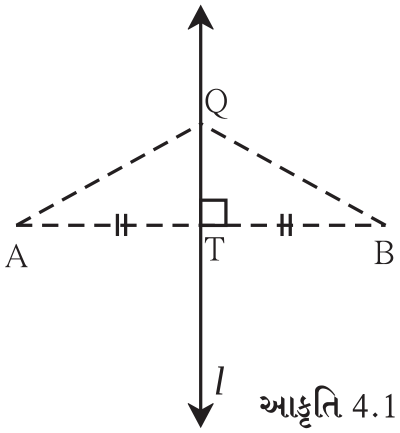
★ પાયો અને પાયાને સમાવિષ્ટ કરતાં બે ખૂણા આપ્યા હોય તેવો ત્રિકોણ દોરવો.

★ બે બાજુ અને બે બાજુઓને સમાવતો ખૂણો આપ્યો હોય તેવો ત્રિકોણ દોરવો.

★ કર્ણ અને એક ભુજા આપી હોય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ દોરવો.

લંબદુભાજકનો પ્રમેય

- આપેલા રેખાખંડના લંબદુભાજક પરનું દરેક બિંદુ તે રેખાખંડના અંતિમ બિંદુઓથી સરખા અંતરે છે.
- રેખાખંડના અંત્યબિંદુથી સમાન અંતરે હોય તેવું દરેક બિંદુ રેખાખંડના છેડાથી સમાન અંતરે હોય છે.



આકૃતિ 4.1

જાણી લઈએ.

ત્રિકોણ રચના (Constructions of triangles)

ત્રિકોણની રચના કરવા માટે ત્રણ બાબતો આવશ્યક છે. ત્રણ ખૂણા અને ત્રણ બાજુ પૈકી ફક્ત બે બાબતો આપી હોય અને તે ઉપરાંત ત્રિકોણ સંબંધી હજી કેટલીક માહિતી આપી હોય તો તે માહિતી અને આપેલી બે બાબ-તોનો ઉપયોગ કરી ત્રિકોણ કેમ દોરવો તે જોઈએ.

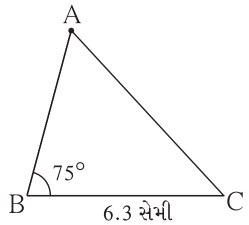
'કોઈ એક બિંદુ બે ભિન્ન રેખાઓ પર હોય તો તે બિંદુ તે રેખાઓનું છેદનબિંદુ હોય છે આ ગુણધર્મનો અહીં આપેલી રચનાઓમાં અનેકવાર ઉપયોગ કર્યો છે.

રચના I

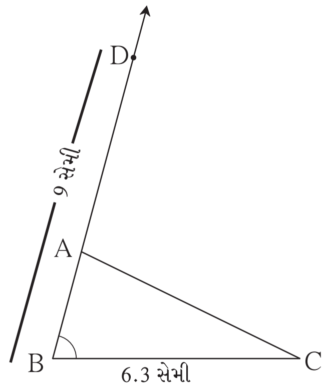
ત્રિકોણનો પાયો, પાયા પરનો એક ખૂણો અને બાકીની બે બાજુઓની લંબાઈનો સરવાળો આપ્યો હોય તેવો ત્રિકોણ દોરવો.

ઉદા. Δ ABC એવો દોરો કે, જેમાં BC = 6.3 સેમી, $\angle$B = 75° અને AB + AC = 9 સેમી છે.

ઉકેલ : સૌ પ્રથમ અપેક્ષિત ત્રિકોણની કાચી આકૃતિ દોરો.



કાચી આકૃતિ 4.2



કાચી આકૃતિ 4.3

સ્પષ્ટીકરણ : કાચી આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ

BC = 6.3 સેમી નો રેખાખંડ દોરીએ.

બિંદુ B પાસે રેખાખંડ BC સાથે 75° ખૂણો બનાવતું કિરણ પર D બિંદુ એવી રીતે દોરો કે જેથી BD = AB + AC = 9 સેમી

કિરણ BD પર બિંદુ A બિંદુ શોધવાનું છે.

BA + AD = BA + AC = 9

$\therefore$ AD = AC

$\therefore$ બિંદુ A આ રેખ CD ના લંબદુભાજક પર છે.

$\therefore$ કિરણ BD અને રેખ CD ના લંબ દુભાજકનું છેદન બિંદુ એટલે બિંદુ A છે.

રચનાના પગથિયાં

(1) રેખ BC આ 6.3 સેમી દોરો.

(2) B બિંદુ સાથે 75° નો ખૂણો બનાવતું કિરણ BP દોરો.

(3) કિરણ BP પર d(B,D) = 9 સેમી અંતરે D બિંદુ લો.

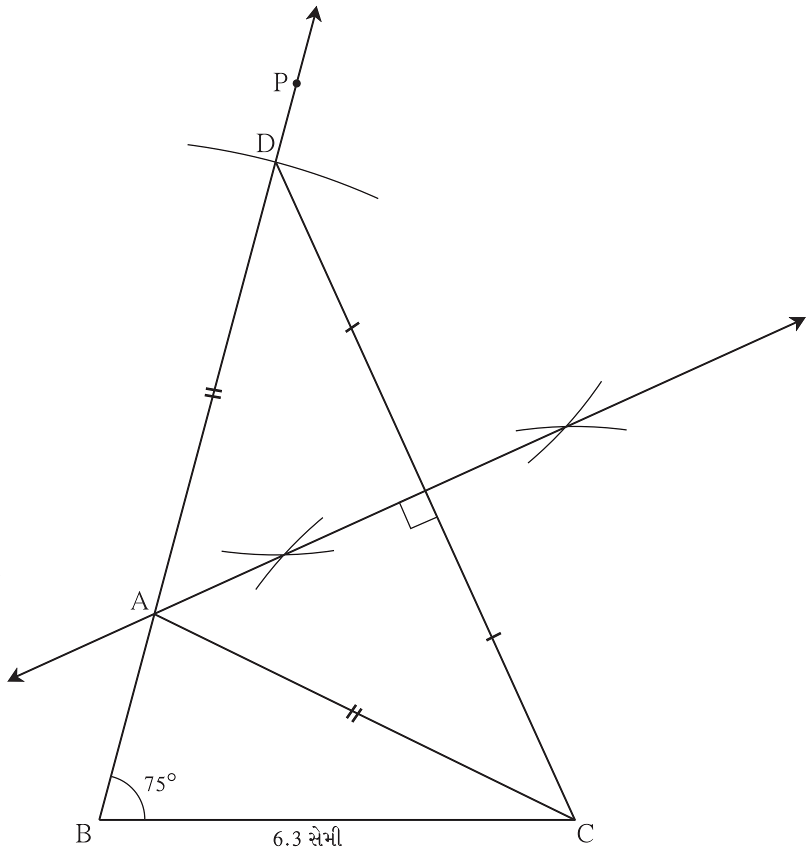
(4) રેખ DC દોરો.

(5) રેખ DC નો લંબદુભાજક દોરો.

(6) રેખ DC ના લંબદુભાજક અને કિરણ BP ના છેદનબિંદુને A નામ આપો.

(7) રેખ AC દોરો.

Δ ABC એ અપેક્ષિત ત્રિકોણ તૈયાર થયો.



પાકી આકૃતિ 4.4

મહાવરાસંગ્રહ 4.1

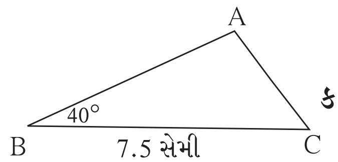
1. Δ PQR એવો દોરો કે પાયો QR = 4.2 સેમી, $\angle Q = 40^\circ$ અને PQ + PR = 8.5 સેમી
2. Δ XYZ એવો દોરો કે પાયો YZ = 6 સેમી, XY + XZ = 9 સેમી. $\angle XYZ = 50^\circ$
3. Δ ABC એવો દોરો કે પાયો BC = 6.2 સેમી, $\angle ACB = 50^\circ$, AB + AC = 9.8 સેમી
4. Δ ABC એવો દોરો કે પાયો BC = 3.2 સેમી, $\angle ACB = 45^\circ$ અને Δ ABC ની પરિમિતિ 10 સેમી

રચના II

ત્રિકોણનો પાયો, પાયા પરના ખૂણા પૈકી એક ખૂણો અને બાકીની બે બાજુની લંબાઈનો તફાવત આપ્યો હોય તેવો ત્રિકોણ દોરવો.

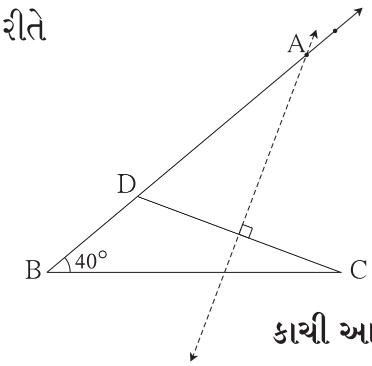
ઉદા. (1)Δ ABC માં BC = 7.5 સેમી, $\angle ABC = 40^\circ$, AB − AC = 3 સેમી તો Δ ABC રચો.

ઉકેલ : પ્રથમ કાચી આકૃતિ દોરીએ.



કાચી આકૃતિ 4.5

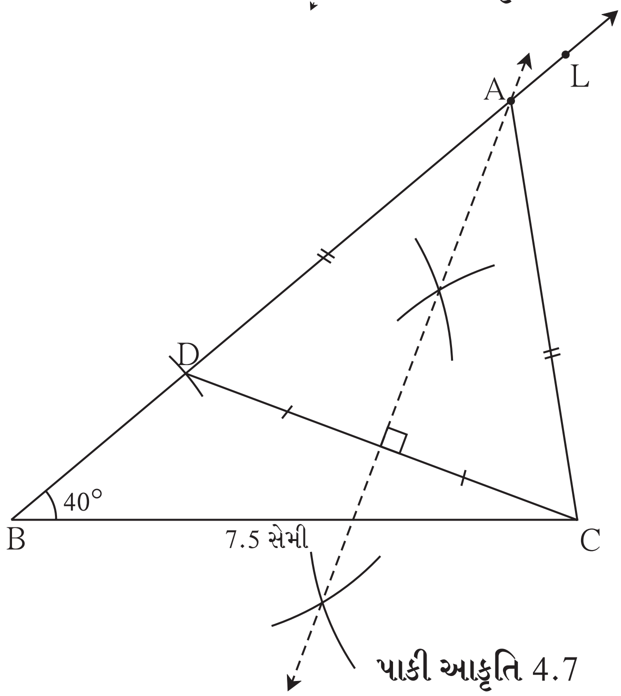
સ્પષ્ટીકરણ : AB − AC = 3 સેમી $\therefore$ AB > AC છે.
રેખ BC દોરીએ. રેખ BC સાથે 40° નો ખૂણો બનાવતું કિરણ BL દોરી શકાય. તે કિરણ પર A બિંદુનું સ્થાન શોધવાનું છે. BD = 3 સેમી આવે તે રીતે D બિંદુ પર કિરણ લો. હવે, B−D−A અને BD = AB −AD = 3 અને AB − AC = 3 આપેલું છે.
$\therefore$ AD = AC
$\therefore$ બિંદુ A રેખ DC ના લંબદુભાજક પર છે.
$\therefore$ બિંદુ A કિરણ BL અને રેખ DC ના લંબદુભાજકનું છેદન બિંદુ છે.



કાચી આકૃતિ 4.6

રચનાના પગથિયાં

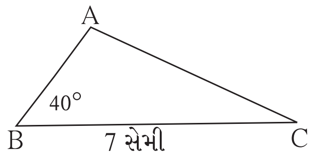
(1) રેખ BC આ 7.5 સેમીનો દોરો.
(2) B બિંદુ આગળ 40° ખૂણો બનાવતું કિરણ BL દોરો.
(3) કિરણ BL પર D બિંદુ એવી રીતે લો, કે જેથી BD = 3 સેમી.
(4) રેખ CD દોરીને તેનો લંબદુભાજક દોરો.
(5) રેખ CD નો લંબદુભાજક દોરો જે કિરણ BL ને જ્યાં છેદે ત્યા A નામ આપો.
(6) રેખ AC દોરો.
Δ ABC એ અપેક્ષિત ત્રિકોણ છે.



પાકી આકૃતિ 4.7

ઉદા. 2 Δ ABC માં બાજુ BC = 7 સેમી, $\angle B = 40^\circ$ અને AC – AB = 3 સેમી તો Δ ABC દોરો.

ઉકેલ : કાચી આકૃતિ દોરો.



કાચી આકૃતિ 4.8

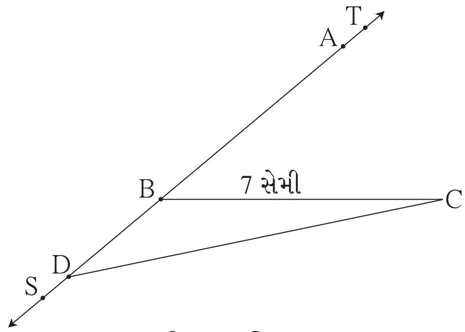
BC = 7 સેમી દોરો. AC > AB. રેખ BC ના બિંદુ B સાથે 40° નો ખૂણો બનાવતું કિરણ BT દોરી શકાશે. બિંદુ A કિરણ પર જ છે. કિરણ BT ના વિરૂદ્ધ કિરણ પર બિંદુ D એવી રીતે લો કે જેથી, BD = 3 સેમી.

હવે AD = AB + BD = AB + 3 = AC

(કારણ AC – AB = 3 સેમી આપ્યું છે.)

$\therefore$ AD = AC

$\therefore$ બિંદુ A રેખ CD ના લંબદુભાજક પર છે.



કાચી આકૃતિ 4.9

રચનાના પગથિયાં

(1) BC = 7 સેમી નો દોરો.

(2) બિંદુ B સાથે 40°નો ખૂણો બનાવતો કિરણ BT દોરો.

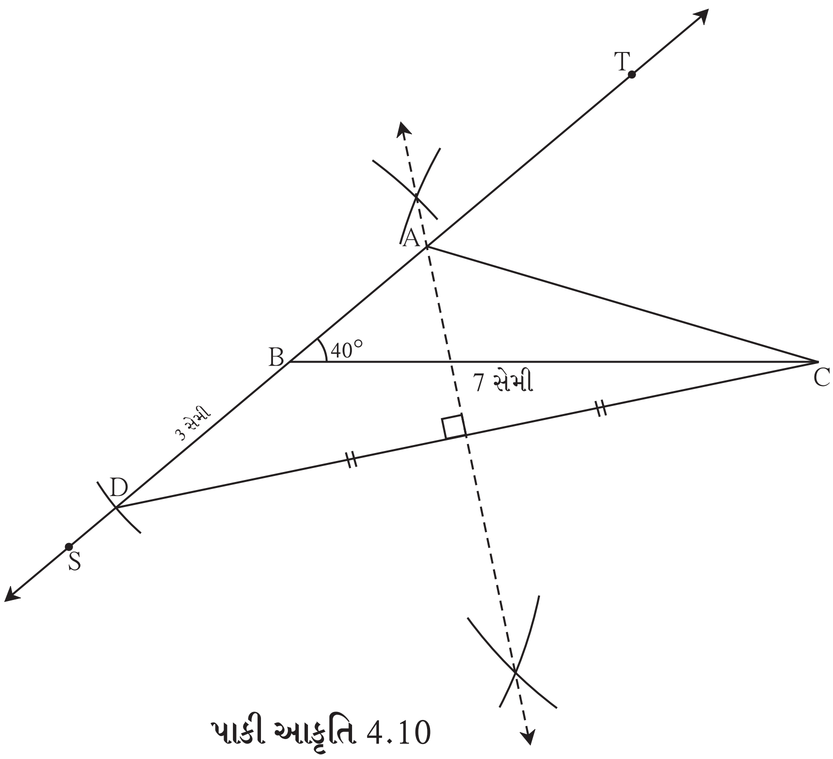
(3) કિરણ BT ના વિરૂદ્ધ કિરણ BS પર બિંદુ D એવી રીતે લો કે BD = 3 સેમી.

(4) રેખ DC નો લંબદુભાજક દોરો.

(5) રેખ DC નું લંબદુભાજક કિરણ BT ને જ્યાં છેદે ત્યાં બિંદુ A નામ આપો.

(6) રેખ AC દોરો.

Δ ABC એ અપેક્ષિત ત્રિકોણ તૈયાર થયો.



પાકી આકૃતિ 4.10

મહાવરાસંગ્રહ 4.2

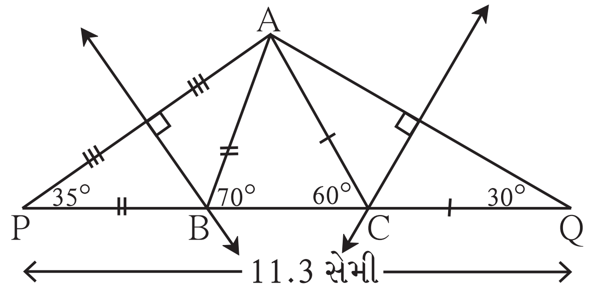
1. Δ XYZ એવો દોરો કે YZ = 7.4 સેમી. $\angle XYZ = 45^\circ$ અને XY – XZ = 2.7 સેમી.
2. Δ PQR એવો દોરો કે QR = 6.5 સેમી. $\angle PQR = 40^\circ$ અને PQ – PR = 2.5 સેમી.
3. Δ ABC એવો દોરો કે BC = 6 સેમી. $\angle ABC = 100^\circ$ અને AC – AB = 2.5 સેમી.

રચના III

ત્રિકોણની પરિમિતિ અને બન્ને પાયા પરના ખૂણો આપ્યો હોય તેવો ત્રિકોણ દોરવો.

ઉદા. Δ ABC માં AB + BC + CA = 11.3 સેમી , $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ તો Δ ABC દોરો.

ઉકેલ : કાચી આકૃતિ દોરો.



કાચી આકૃતિ 4.11

સ્પષ્ટીકરણ : આ આકૃતિમાં રેખ BC પર બિંદુ P અને Q એવો દોરો કે,

PB = AB, CQ = AC

$\therefore$ PQ = PB + BC + CQ = AB + BC +AC = 11.3 સેમી.

હવે ΔPBA માં PB = BA

$\therefore$ $\angle APB = \angle PAB$ અને $\angle APB + \angle PAB$ = બહિષ્કોણ ABC = 70°. . . . (બહિષ્કોણના અંત:સમ્મુખ કોણનો પ્રમેય)

$\therefore$ $\angle APB = \angle PAB = 35^\circ$ તે જ પ્રમાણે $\angle CQA = \angle CAQ = 30^\circ$

હવે PAQ આ ત્રિકોણ (મોટો ત્રિકોણ) દોરી શકાશે કારણ તેના બે પાયા પરના ખૂણા અને તેની સમાવિષ્ટ બાજુ PQ તમે જાણો છે.

તેથી BA = BP $\therefore$ બિંદુ B રેખ AP ના લંબદુભાજક પર છે.અને CA = CQ

$\therefore$ બિંદુ C રેખ AQ ના લંબદુભાજક પર છે.

$\therefore$ AP અને AQ ના લંબદુભાજકો દોરો અને જે રેખા PQ ને જ્યાં છેદે તે બિંદુઓ અનુક્રમે B અને C બિંદુ મળશે.

રચનાના પગથિયાં

(1) રેખ PQ = 11.3 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ દોરો.

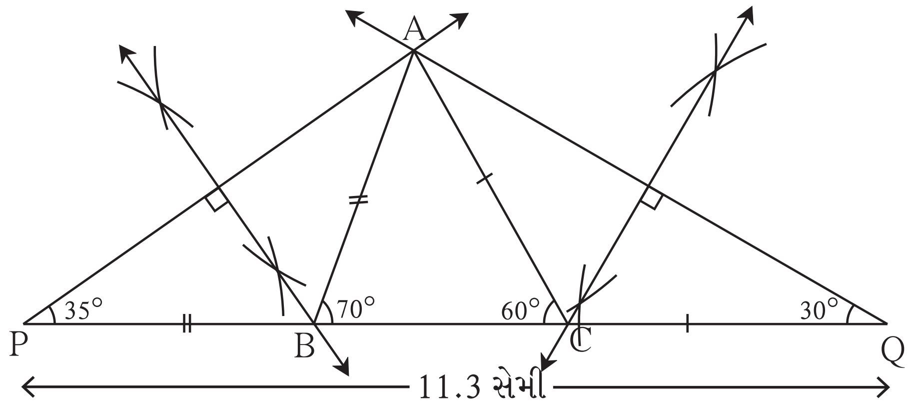
(2) બિંદુ P પાસે 35° માપના ખૂણો બનાવતુ કિરણ દોરો.

(3) બિંદુ Q પાસે 30° માપના ખૂણો બનાવતુ કિરણ દોરો.

(4) બે કિરણોના છેદનબિંદુને A નામ આપો.

(5) રેખ AP અને રેખ AQ ના લંબદુભાજક દોરો. જે રેખા PQ ને જ્યાં છેદે તે બિંદુઓ અનુક્રમે B અને C નામ આપો.

(6) રેખ AB અને રેખ AC દોરો. Δ ABC એ અપેક્ષિત ત્રિકોણ છે.



પાકી આકૃતિ 4.12

મહાવરાસંગ્રહ 4.3

1. Δ PQR એવો દોરો કે, જેમાં $\angle Q = 70°$, $\angle R = 80°$ અને PQ + QR + PR = 9.5 સેમી.
2. Δ XYZ એવો દોરો કે, જેમાં $\angle Y = 58°$, $\angle X = 46°$ અને ત્રિકોણની પરિમિતિ 10.5 સેમી હશે.
3. Δ LMN એવો દોરો કે, જેમાં $\angle M = 60°$, $\angle N = 80°$ અને LM + MN + NL = 11 સેમી.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 4

1. Δ XYZ એવો દોરો કે XY + XZ = 10.3 સેમી, YZ = 4.9 સેમી, $\angle XYZ = 45°$
2. Δ ABC એવો દોરો કે $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$, AB + BC + AC = 11.2 સેમી.
3. જે ત્રિકોણની પરિમિતિ 14.4 સેમી છે અને બાજુઓનો ગુણોત્તર 2:3:4 એવો ત્રિકોણ દોરો.
4. Δ PQR એવો દોરો કે PQ − PR = 2.4 સેમી, QR = 6.4 સેમી અને $\angle PQR = 55°$.

ICT Tools or Links

સંગણક પર જીઓજીબ્રા સૉફ્ટવેઅરની મદદથી આ ત્રિકોણની રચનાઓ કરો અને કરવાનો આનંદ મેળવો. રચના ક્રમાંક 3 આ જુદા જુદા સૉફ્ટવેઅરમાં કરીને બતાવેલી છે તો તે રીતનો પણ અભ્યાસ કરો.

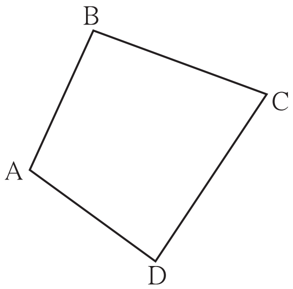
5 ચતુષ્કોણ

66K31B

ચાલો શીખીએ.

- સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ
- સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની કસોટીઓ
- સમભુજ ચતુષ્કોણ
- લંબચોરસ
- ચોરસ
- સમલંબ ચતુષ્કોણ
- ત્રિકોણની બે બાજુના મધ્યબિંદુનો પ્રમેય

યાદ કરીએ.



આકૃતિ 5.1

1. □ABCD ના સંદર્ભમાં નીચેની જોડ લખો.

પાસપાસેની બાજુઓની જોડ		પાસપાસેની બાજુઓની જોડ	
(1) ... , ...	(2) ... , ...	(1) ... , ...	(2) ... , ...
(3) ... , ...	(4) ... , ...	(3) ... , ...	(4) ... , ...

સમ્મુખ બાજુઓની જોડ (1) .... , ... (2) .... , ...

સમ્મુખ ખૂણાઓની જોડ (1) ..... , ... (2) ..... , ...

મારા પ્રકાર અને ગુણધર્મ યાદ કરીને નીચેની માહિતી લખો.

હું ચતુષ્કોણ છું

મારી સમ્મુખ બાજુઓની બન્ને જોડ સમાંતર

[ ]

મારા ગુણધર્મ

- સમ્મુખ બાજુઓ એકરૂપ
- સમ્મુખ ખૂણાઓ . . . .
- વિકર્ણ . . . .

મારા બધા ખૂણા કાટખૂણા

[ ]

મારા ગુણધર્મ

- સમ્મુખ બાજુ. . . .
- વિકર્ણ . . . . .

મારી બધી બાજુઓ સમાન લંબાઈના

[ ]

મારા ગુણધર્મ

- સમ્મુખ ખૂણાઓ . . . .
- વિકર્ણ . . . . .

મારી બધી બાજુઓ સમાન, બધા ખૂણા સમાન

[ ]

મારા ગુણધર્મ

- વિકર્ણ . . . .

મારા સમ્મુખ બાજુની એક જોડ સમાંતર

[ ]

ચતુષ્કોણના જુદા-જુદા પ્રકાર અને ગુણધર્મ તમને ખબર છે. બાજુ અને ખૂણા માપવા, કાગળની ગડીવાળી કૃતિદ્વારા તમે ગુણધર્મ જાણી લીધાં છે. આ ગુણધર્મ તર્ક સંગત દલીલથી કેવી રીતે સાબિત કરવા તેનો અભ્યાસ આપણે કરીશું.

જ્યારે ગુણધર્મને તર્કદ્વારા સાબિત કરીએ ત્યારે તે જ ગુણધર્મને **'પ્રમેય'** (**Theorem**) કહે છે.

લંબચોરસ, ચોરસ, સમભુજ ચતુષ્કોણ આ બધા વિશિષ્ટ પ્રકારના સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ જ છે. કેવી રીતે? તે આ પ્રકરણનો અભ્યાસ કરવાથી તમને સમજાશે. તેથી અભ્યાસની શરૂઆત સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણથી કરીએ.

જાણી લઈએ.

સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ (Parellelogram)

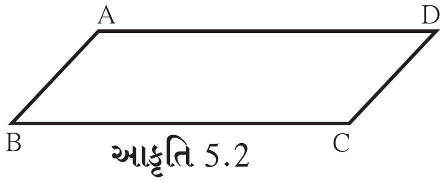
જે ચતુષ્કોણની સમ્મુખ બાજુઓની બન્ને જોડ સમાંતર હોય, તો તેને **સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ** કહે છે.

પ્રમેય સાબિત કરતી વખતે, ઉદાહરણો ઉકેલની વખતે સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની આકૃતિ વારંવાર દોરવી પડે છે. તેથી તે કેવી રીતે દોરવી, તે જોઈએ.

સમજો કે, આપણને □ABCD સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ દોરવો છે.

રીત I :

- પ્રથમ AB અને BC કોઈપણ લંબાઈના અને પરસ્પર કોઈપણ માપના ખૂણો બનાવતા બે રેખાખંડ દોરો.
- હવે રેખ AD અને રેખ BC સમાંતર હોવા જોઈએ એટલે બિંદુ A માંથી રેખ BC ને સમાંતર રેખા દોરીએ.

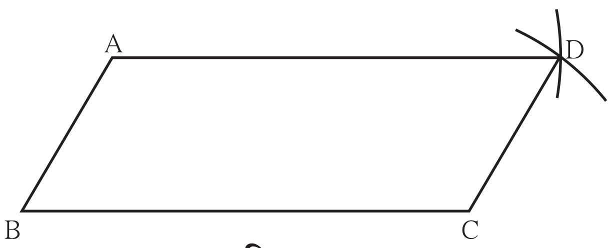


આકૃતિ 5.2

- તેમજ રેખ AB ।। રેખ DC, એટલે બિંદુ C માંથી રેખ AB ને સમાંતર રેખા દોરો. આ રેખાઓ જે બિંદુમાં છેદે, તે બિંદુ D હશે. આમ ચતુષ્કોણ તૈયાર થયો. □ABCD સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ થશે.

રીત II :

- રેખ AB અને રેખ BC કોઈપણ લંબાઇના અને પરસ્પર કોઈપણ માપના ખૂણા બનાવતાં રેખાખંડ દોરીએ.
- પરિકરમાં BC જેટલું અંતર લઈ, બિંદુ A કેંદ્ર લઈ એક ચાપ દોરીએ.
- પરિકરમાં AB જેટલું અંતર લઈ, બિંદુ C કેન્દ્ર લઈ પહેલા ચાપને છેદતો ચાપ દોરીએ.
- બન્ને ચાપના છેદનબિંદુને D નામ આપીએ.
- રેખ AD અને રેખ CD દોરો.
  તૈયાર થતો □ABCD સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 5.3

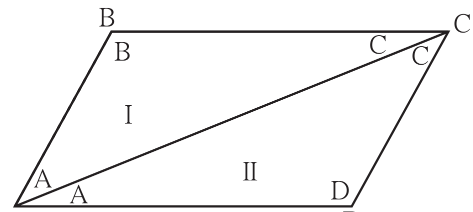
રીત II માં આપણે સમ્મુખ બાજુ સમાન હોય તેવો ચતુષ્કોણ દોર્યો છે. તેની સમ્મુખ ભુજાઓ સમાંતર કેમ છે ? તે એક પ્રમેયની સાબિતી પછી તમને સમજાશે.

કૃતિ I પાસપાસેની બાજુઓ જુદી-જુદી લંબાઈની અને તેમાં સમાવિષ્ટ ખૂણા વિવિધ માપના લઈને પાંચ જુદાં જુદાં સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ દોરો.

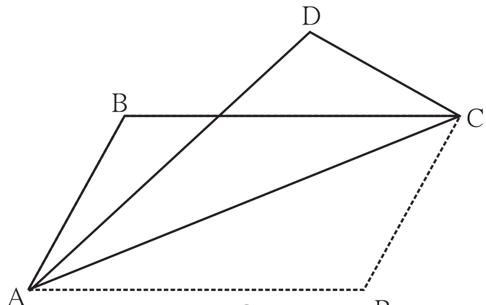
સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણના પ્રમેયો સાબિત કરવા માટે એકરૂપ ત્રિકોણોનો ઉપયોગ થાય છે. તે કેવી રીતે? એ સમજવા નીચેની કૃતિ કરો.

કૃતિ II

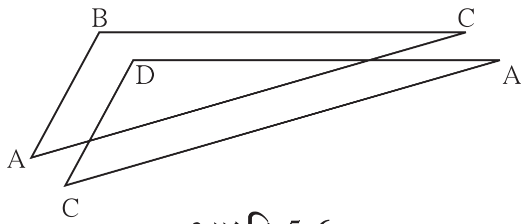
- એક જાડા કાર્ડ પેપર પર □ABCD સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ દોરો. તેનો વિકર્ણ AC દોરો. આકૃતિમાં દર્શાવેલા શિરોબિંદુના નામ ચતુષ્કોણની અંદર પણ લખો.
- કર્ણ AC પર ગડી વાળીને ΔADC અને ΔCBA પરસ્પર બંધ બેસતા આવે છે કે, તે જુઓ.
- □ABCD ના વિકર્ણ AC પરથી કાપીને ΔADC અને ΔCBA અલગ કરો. ΔCBA ને ફેરવી ΔADC સાથે બંધબેસતો આવે છે કે ? તે જુઓ.



આકૃતિ 5.4



આકૃતિ 5.5



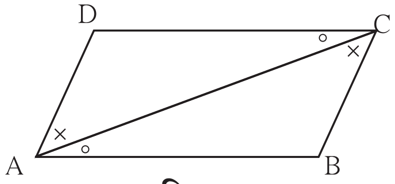
આકૃતિ 5.6

શું દેખાયું ? ΔCBA ની કઈ બાજુઓ ΔADCની કઈ બાજુઓ સાથે બંધ બેસે છે ? ΔCBA નો કયો ખૂણો ΔADC ના ક્યા ખૂણા સાથે બંધ બેસે છે ?

બાજુ DC એ બાજુ AB સાથે અને બાજુ AD એ બાજુ CB સાથે બંધ બેસે છે. તેમજ $\angle$B એ $\angle$D સાથે બંધ બેસે છે.

એટલે જ સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની સમ્મુખ બાજુઓ અને સમ્મુખ ખૂણાઓ એકરૂપ છે તે જોઈ શકાય છે. સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણનો આ જ ગુણધર્મ આપણે સાબિત કરીએ.

પ્રમેય 1. સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓ એકરૂપ હોય છે અને સમ્મુખકોણો એકરૂપ હોય છે.



આકૃતિ 5.7

પક્ષ : □ABCD સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે.
એટલે કે બાજુ AB ॥ બાજુ DC, બાજુ AD ॥ બાજુ BC.

સાધ્ય : રેખ AD ≅ રેખ BC ; રેખ DC ≅ રેખ AB
∠ADC ≅ ∠CBA, અને ∠DAB ≅ ∠BCD.

રચના : વિકર્ણ AC દોરો.

સાબિતી : રેખ DC ॥ રેખ AB અને વિકર્ણ AC છેદિકા લેતાં.

$\left.\begin{array}{l}\therefore\ \angle DCA \cong \angle BAC \ \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \text{અને } \angle DAC \cong \angle BCA \ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{array}\right\}$ ..... વ્યુત્ક્રમકોણો

હવે, ΔADC અને ΔCBA માં,

∠DAC ≅ ∠BCA .... વિધાન (2) પરથી

∠DCA ≅ ∠BAC .... વિધાન (1) પરથી

બાજુ AC ≅ બાજુ CA .... સામાન્ય બાજુ

∴ ΔADC ≅ ΔCBA ...... ખૂબાખૂ કસોટી

∴ બાજુ AD ≅ બાજુ CB .... એકરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુઓ

અને બાજુ DC ≅ બાજુ AB .... એકરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુઓ

તેમજ, ∠ADC ≅ ∠CBA .... એકરૂપ ત્રિકોણના સંગત કોણો

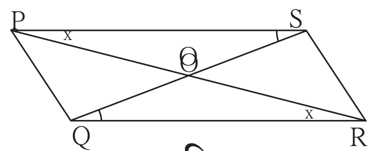
તેથી ∠DAB ≅ ∠BCD સાબિત કરી શકાય.

વિચાર કરીએ.

ઉપરોક્ત પ્રમેયમાં ∠DAB ≅ ∠BCD સાબિત કરવા માટે રચનામાં ફેરફાર કરવો પડશે કે ? જો ફેરફાર કરવો પડે તેમ હોય તો તે ફેરફાર કરીને સાબિતી લખો.

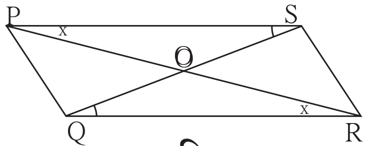
સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણનો બીજો એક ગુણધર્મ સમજવા માટે નીચેની કૃતિ કરો.

કૃતિ : □PQRS કોઈપણ માપનો સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ દોરો વિકર્ણ PR અને વિકર્ણ QS દોરીને તેના છેદનબિંદુને O નામ આપો. દરેક વિકર્ણના થયેલાં બે-બે ભાગની લંબાઈની તુલના વિભાજક (ડિવાયડર)થી કરો. ક્યુ તારણ કાઢશો ?



આકૃતિ 5.8

પ્રમેય : સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.



આકૃતિ 5.9

પક્ષ : □PQRS સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે.
વિકર્ણ PR અને વિકર્ણ QS બન્ને બિંદુ O માં છેદે છે.

સાધ્ય : રેખ PO ≅ રેખ RO, રેખ SO ≅ રેખ QO

સાબિતી : ΔPOS અને ΔROQ માં

$\angle OPS \cong \angle ORQ$ .... વ્યુત્ક્રમકોણો

બાજુ PS ≅ બાજુ RQ .... સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની સમ્મુખ બાજુ

$\angle PSO \cong \angle RQO$ .... વ્યુત્ક્રમકોણો

$\therefore \Delta POS \cong \Delta ROQ$ .... ખૂબાખૂ કસોટી

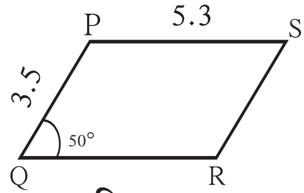
$\therefore$ રેખ PO ≅ રેખ RO ....
અને રેખ SO ≅ રેખ QO .... } ..... એકરૂપ ત્રિકોણોની સંગત બાજુ

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

- સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની સમ્મુખ ભુજાઓ એકરૂપ હોય છે.
- સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણના સમ્મુખ ખૂણાઓ એકરૂપ હોય છે.
- સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) □PQRS સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે. PQ = 3.5, PS = 5.3 $\angle Q = 50^\circ$ તો □PQRS ની બાકીની બાજુઓ અને ખૂણાના માપ શોધો.



આકૃતિ 5.10

ઉકેલ : □PQRS સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે.

$\therefore \angle Q + \angle P = 180^\circ$ ....અંતઃકોણ

$\therefore\ 50^\circ + \angle P = 180^\circ$

$\therefore\ \angle P = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

હવે, $\angle P = \angle R$ અને $\angle Q = \angle S$ ....સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણના સમ્મુખ ખૂણો

$\therefore\ \angle R = 130^\circ$ અને $\angle S = 50^\circ$

તેમ જ, PS = QR અને PQ = SR ....સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની સમ્મુખ બાજુ

$\therefore$ QR = 5.3 અને SR = 3.5

ઉદા. **(2)** □ABCD સમાંતરભુજ છે. □ABCD માં $\angle A = (4x + 13)^\circ$ અને $\angle D = (5x - 22)^\circ$ તો $\angle B$ અને $\angle C$ ના માપ શોધો.

ઉકેલ : સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણના પાસપાસેના ખૂણા પૂરક હોય છે.

$\angle A$ અને $\angle D$ પાસપાસેના ખૂણા છે.

$\therefore (4x + 13)^\circ + (5x - 22)^\circ = 180$

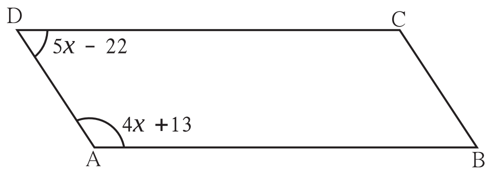
$\therefore 9x - 9 = 180$

$\therefore 9x = 189$

$\therefore x = 21$

$\therefore \angle A = 4x + 13 = 4 \times 21 + 13 = 84 + 13 = 97^\circ \quad \therefore \angle C = 97^\circ$

$\angle D = 5x - 22 = 5 \times 21 - 22 = 105 - 22 = 83^\circ \quad \therefore \angle B = 83^\circ$



આકૃતિ 5.11

મહાવરાસંગ્રહ 5.1

1. સમાંતરભુજ □WXYZ ના વિકર્ણો બિંદુ O માં છેદે છે. $\angle XYZ = 135^\circ$ તો $\angle XWZ = ?$, $\angle YZW = ?$ જો $l(OY) = 5$ સેમી તો $l(WY) = ?$

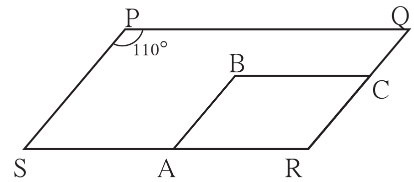
2. સમાંતરભુજ □ABCD માં $\angle A = (3x + 12)^\circ$, $\angle B = (2x - 32)^\circ$ તો x ની કિંમત શોધો, તે પરથી $\angle C$ અને $\angle D$ ના માપ શોધો.

3. એક સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની પરિમિતિ 150 સેમી છે અને એક બાજુ બીજી કરતાં 25 સેમી વધારે છે. તો તેની બધી બાજુઓના માપ શોધો.

4. સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણના બે પાસપાસેના ખૂણાઓનો ગુણોત્તર 1 : 2 છે તો તેના બધા ખૂણાના માપ શોધો.

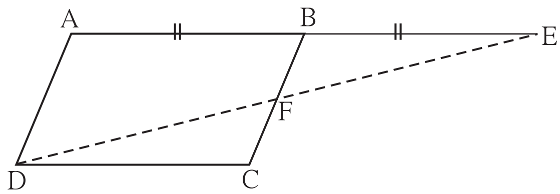
5*. સમાંતરભુજ □ABCD ના વિકર્ણો પરસ્પર બિંદુ O માં છેદે છે. જો AO = 5, BO = 12 અને AB = 13 તો □ABCD સમભુજ છે તે સાબિત કરો.

6. આકૃતિ 5.12 માં □PQRS અને □ABCR બે સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે. $\angle P = 110^\circ$ તો □ABCR ના બધા ખૂણાના માપ શોધો.



આકૃતિ 5.12

7. આકૃતિ 5.13 માં □ABCD સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે. કિરણ AB પર બિંદુ E એવી રીતે લીધું કે જેથી BE = AB થાય. તો સાબિત કરો કે,રેખા ED એ રેખ BC ને બિંદુ F માં દુભાગે છે.



આકૃતિ 5.13

યાદ કરીએ.

સમાંતર રેખાની કસોટી -

1. જો બે રેખાને એક છેદિકા છેદે ત્યારે બનતા સંગતકોણોની એક જોડી એકરૂપ હોય તો તે બે રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.
2. જો બે રેખાને એક છેદિકા છેદે ત્યારે બનતા વ્યુત્ક્રમકોણોની એક જોડી એકરૂપ હોય તો તે બે રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.
3. જો બે રેખાને એક છેદિકા છેદે ત્યારે બનતા અંતઃકોણોની એક જોડી પૂરક હોય તો તે બે રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.

જાણી લઈએ.

સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની કસોટીઓ (Tests for parallelogram)

ધારો કે, □PQRS માં PS = QR અને PQ = SR છે.

□PQRS એ સમાંતરભુજ છે એમ સાબિત કરવો છે તે માટે આ ચતુષ્કોણની બાજુઓની કઈ કઈ જોડીઓ સમાંતર છે તેમ બતાવવું પડશે ?

તે માટે સમાંતર રેખાઓની કઈ કસોટી ઉપયોગી થશે ?

કસોટી માટે જરૂરી ખૂણા મેળવવા માટે કઈ રેખા છેદિકા તરીકે લેવી જોઈએ ?

આકૃતિ 5.14

પ્રમેય : ચતુષ્કોણની સમ્મુખ બાજુઓની જોડ એકરૂપ હોય તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરભુજ હોય છે.

પક્ષ : □PQRS માં

બાજુ PS ≅ બાજુ QR

બાજુ PQ ≅ બાજુ SR

સાધ્ય : □PQRS સમાંતરભુજ છે.

રચના : વિકર્ણ PR દોર્યો.

સાબિતી : Δ SPR અને Δ QRP માં,

બાજુ SP ≅ બાજુ QR ....(પક્ષ)

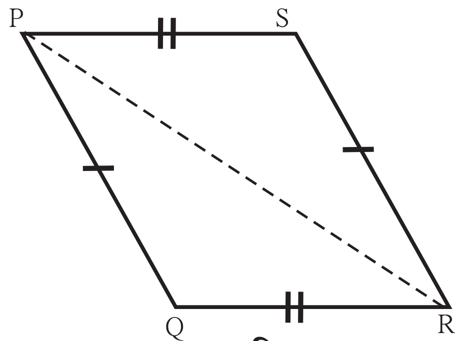
બાજુ SR ≅ બાજુ QP .... (પક્ષ)

બાજુ PR ≅ બાજુ RP .... સામાન્ય બાજુ

∴ Δ SPR ≅ Δ QRP ...... બાબાબા કસોટી

∴ ∠SPR ≅ ∠QRP .... એકરૂપ ત્રિકોણના સંગત ખૂણા

તેમજ ∠PRS ≅ ∠RPQ ..... એકરૂપ ત્રિકોણના સંગત ખૂણા



આકૃતિ 5.15

∠SPR અને ∠QRP એ રેખ PS અને રેખ QR ની છેદિકા PR ને લીધે બનતા વ્યુત્ક્રમકોણો છે.

$\therefore$ બાજુ PS $\parallel$ બાજુ QR ......(I) સમાંતર રેખાની વ્યુત્ક્રમકોણ કસોટી

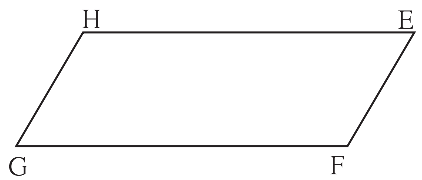
તેમજ $\angle$PRS અને $\angle$RPQ એ રેખ PQ અને રેખ SR ના PR છેદિકાને લીધે બનતા વ્યુત્ક્રમકોણો છે.

$\therefore$ બાજુ PQ $\parallel$ બાજુ SR ......(II) સમાંતર રેખાની વ્યુત્ક્રમકોણ કસોટી

$\therefore$ (I) અને (II) પરથી $\square$PQRS સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે.

સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ દોરવાની બે રીત (રચના) પ્રકરણની શરૂઆતમાં આપી છે. તે પૈકી બીજી રીતમાં પ્રત્યક્ષ રીતે સમ્મુખ બાજુઓ સમાન લઈને ચતુષ્કોણ દોર્યો છે આ ચતુષ્કોણ સમાંતરભુજ કેમ થયો? તે હવે ઉપરના પ્રમેય પરથી તમારા ધ્યાનમાં આવ્યું કે?

પ્રમેય : ચતુષ્કોણના સમ્મુખ (સામસામેના) ખૂણાઓની જોડીઓ એકરૂપ હોય તો તે સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ હોય છે. નીચે આપેલ પક્ષ, સાધ્ય અને સાબિતીમાં આપેલી ખાલી જગ્યા તમે પૂરો.



આકૃતિ 5.16

પક્ષ : $\square$EFGH માં $\angle$E $\cong$ $\angle$G

અને $\angle$.......... $\cong$ $\angle$..........

સાધ્ય : $\square$EFGH એ ....

સાબિતી : $\angle E = \angle G = x$ અને $\angle H = \angle F = y$ માનીશું

ચતુષ્કોણના બધા ખૂણાના માપનો સરવાળો .... હોય છે.

$\therefore$ $\angle E + \angle G + \angle H + \angle F =$ ....

$\therefore$ $x + y +$ .... $+$ .... $=$ ....

$\therefore$ $\square x + \square y =$ .....

$\therefore$ $x + y = 180^\circ$

$\therefore$ $\angle G + \angle H =$ ....

રેખ HE અને રેખ GF ને છેદિકા HG છેદે છે તેથી $\angle$G અને $\angle$H આ અંતઃકોણો તૈયાર થાય છે.

$\therefore$ બાજુ HE $\parallel$ બાજુ GF .... (I) સમાંતર રેખાની અંતઃકોણ કસોટી.

તે જ પ્રમાણે $\angle G + \angle F =$ ....

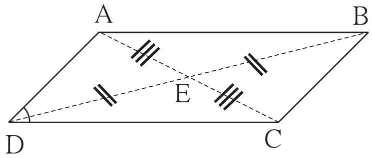
$\therefore$ બાજુ .... $\parallel$ બાજુ .... (II) સમાંતર રેખાની અંતઃકોણ કસોટી.

$\therefore$ (I) અને (II) પરથી $\square$EFGH આ .... છે.

પ્રમેય : ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગતા હોય તો તે સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ હોય છે.

પક્ષ : □ABCD ના વિકર્ણો પરસ્પર બિંદુ E માં દુભાગે છે. અર્થાત રેખ AE ≅ રેખ CE
રેખ BE ≅ રેખ DE

સાધ્ય : □ABCD સમાંતરભુજ છે.



આકૃતિ 5.17

સાબિતી : નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર શોધો અને સાબિતી તમારી જાતે લખો.

1. રેખ AB || રેખ DC સાબિત કરવા માટે વ્યુત્ક્રમકોણોની કઈ જોડી એકરૂપ બતાવશો ? આ જોડી કઈ છેદિકાને લીધે મળે છે ?
2. વ્યુત્ક્રમકોણોની આ જોડના ખૂણા ક્યા ક્યા ત્રિકોણોના છે?
3. તે પૈકી ક્યા બે ત્રિકોણો કઈ કસોટીથી એકરૂપ થશે?
4. આ રીતે જ વિચાર કરીને રેખ AD || રેખ BC છે તે સાબિત થશે ને?

એકાદ ચતુષ્કોણ સમાંતર ભુજ છે એમ સાબિત કરવું હોય ત્યારે ઉપરના પ્રમેયો ઉપયોગી બને છે. તેથી આ પ્રમેયોને ‘સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ ની કસોટીઓ’ કહે છે.

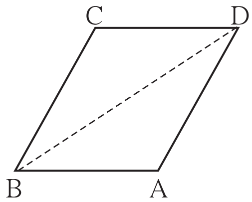
હજુ એક પ્રમેય સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની કસોટી તરીકે ઉપયોગી છે.

પ્રમેય : ચતુષ્કોણની સમ્મુખ બાજુઓની એક જોડ એકરૂપ અને સમાંતર હોય તો ચતુષ્કોણ સમાંતરભુજ હોય છે.

પક્ષ : □ABCD માં રેખ CB ≅ રેખ DA અને રેખ CB || રેખ DA

સાધ્ય : □ABCD સમાંતર ભુજ છે.

રચના : વિકર્ણ BD દોર્યો.



આકૃતિ 5.18

નીચે ટૂંકમા આપેલા મુદ્દા વાપરી વિસ્તૃત સાબિતી લખો.

Δ CBD ≅ Δ ADB ....બા-ખૂ-બા કસોટીથી.

$\therefore$ $\angle CDB \cong \angle ABD$ ..... એકરૂપ ત્રિકોણના સંગત ખૂણા

$\therefore$ રેખ CD || રેખ BA ..... સમાંતર રેખાની વ્યુત્ક્રમકોણ કસોટી

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

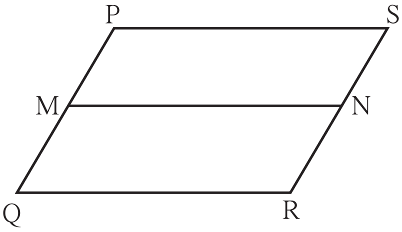
- ✸ જે ચતુષ્કોણના સમ્મુખ ખૂણાઓની જોડ એકરૂપ હોય તે ચતુષ્કોણ સમાંતરભુજ હોય.
- ✸ જે ચતુષ્કોણની સમ્મુખ બાજુઓની જોડ એકરૂપ હોય તે ચતુષ્કોણ સમાંતર ભુજ હોય છે.
- ✸ જે ચુતષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે તે ચતુષ્કોણ સમાંતરભુજ હોય છે.
- ✸ જે ચતુષ્કોણની સમ્મુખ બાજુઓની એક જોડ એકરૂપ અને સમાંતર હોય તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરભુજ હોય છે. આ પ્રમેયોને સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની કસોટી કહે છે.

વિચાર કરીએ.

તમારી નોટબુકમાં છાપેલી રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર છે. તે રેખાનો ઉપયોગ કરીને સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ કેવી રીતે દોરશો ? દોરી જુઓ.

ગણેલાં ઉદાહરણો :

ઉદા. (1) □PQRS સમાંતરભુજ છે. બાજુ PQ નું મધ્યુબિંદુ M અને બાજુ RS નું મધ્યબિંદુ N છે તો □PMNS અને □MQRN આ સમાંતરભુજ છે તે સાબિત કરો.



આકૃતિ 5.19

પક્ષ : □PQRS સમાંતરભુજ છે.
બાજુ PQ અને બાજુ RS ના મધ્યબિંદુ
અનુક્રમે M અને N છે.

સાધ્ય : □PMNS સમાંતરભુજ છે.
□MQRN સમાંતરભુજ છે.

સાબિતી : બાજુ PQ || બાજુ SR

$\therefore$ બાજુ PM || બાજુ SN ...... ($\because$ P-M-Q; S-N-R) ......(I)

તેમજ બાજુ PQ = બાજુ SR.

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ બાજુ PQ = $\frac{1}{2}$ બાજુ SR

$\therefore$ બાજુ PM = બાજુ SN ..... ($\because$ M અને N મધ્યબિંદુઓ છે.)......(II)

$\therefore$ (I) અને (II) પરથી □PMNS સમાંતરભુજ છે,

તેજ પ્રમાણે □MQRN સમાંતરભુજ છે, આ સાબિત કરી શકાય છે.

ઉદા. (2) Δ ABC ની બાજુ AB અને AC ના અનુક્રમે D અને E મધ્યબિંદુ છે. કિરણ ED પર બિંદુ F એ રીતે છે કે ED = DF તો સાબિત કરો, □AFBE સમાંતરભુજ છે.

આ ઉદાહરણ માટે પક્ષ, સાધ્ય તમે લખો, સાબિતીમાં આપેલી ખાલી જગ્યા પૂરી તે પૂર્ણ કરો.

પક્ષ : -------------------

સાધ્ય : ----------------------

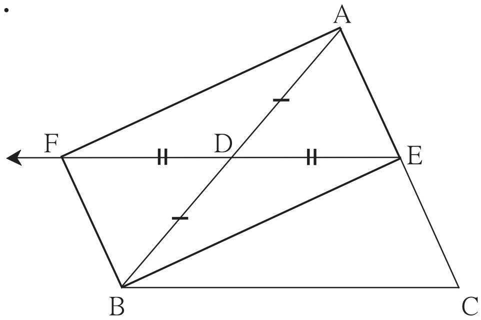
સાબિતી : રેખ AB અને રેખ EF એ □AFBE ના ______ છે.

રેખ AD ≅ રેખ DB....... ______

રેખ ______ ≅ રેખ ______.......રચના.

$\therefore$ □AFBE ના વિકર્ણ પરસ્પર ______ છે.

$\therefore$ ______ કસોટીથી □AFBE સમાંતરભુજ છે.



આકૃતિ 5.20

ઉદા. (3) કોઈપણ સમભુજ ચતુષ્કોણ, સમાંતરભુજ હોય છે તે સાબિત કરો.

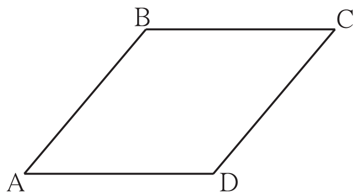
પક્ષ : □ABCD સમભુજ છે.

સાધ્ય : □ABCD સમાંતરભુજ છે.

સાબિતી : બાજુ AB = બાજુ BC = બાજુ CD = બાજુ DA (પક્ષ)

$\therefore$ બાજુ AB = બાજુ CD અને બાજુ BC = બાજુ AD

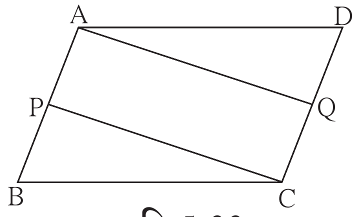
$\therefore$ □ABCD સમાંતરભુજ છે..... (સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની સમ્મુખભુજા કસોટી)



આકૃતિ 5.21

મહાવરાસંગ્રહ 5.2

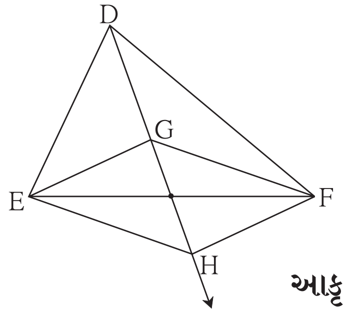
1. આકૃતિ 5.22 માં, □ABCD સમાંતરભુજ છે. બિંદુ P અને બિંદુ Q અનુક્રમે બાજુ AB અને બાજુ DC ના મધ્યબિંદુ છે તો સાબિત કરો કે, □APCQ સમાંતરભુજ છે.



આકૃતિ 5.22

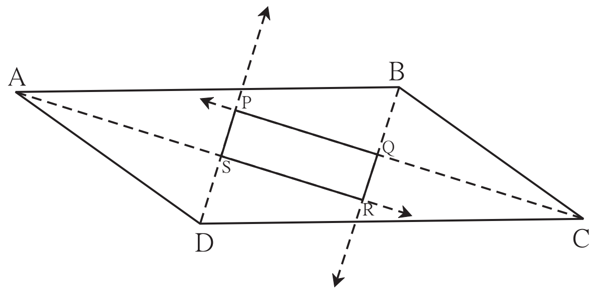
2. કોઈપણ લંબચોરસ સમાંતરભુજ હોય છે, તે સાબિત કરો.

3. આકૃતિ 5.23 માં, બિંદુ G એ Δ DEF નું ગુરૂત્વકેન્દ્ર છે. કિરણ DG પર બિંદુ H એવી રીતે લો, કે જેથી D-G-H અને DG = GH, તો સાબિત કરો કે, □GEHF સમાંતરભુજ છે.



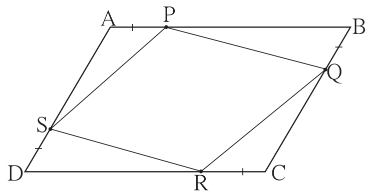
આકૃતિ 5.23

4*. સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણના ચારેય ખૂણાના દુભાજકોની તૈયાર થતો ચતુષ્કોણ લંબચોરસ હોય છે તે સાબિત કરો. (આકૃતિ 5.24)



આકૃતિ 5.24

5. બાજુની આકૃતિ 5.25 માં □ABCD સમાંતર-ભુજ ચતુષ્કોણની બાજુઓ પર અનુક્રમે બિંદુઓ P, Q, R, S એવી રીતે છે કે જેથી, AP = BQ = CR = DS તો સાબિત કરો કે, □PQRS સમાંતરભુજ છે.



આકૃતિ 5.25

જાણી લઈએ.

લંબચોરસ, ચોરસ, સમભુજ ચતુષ્કોણના વિશેષ ગુણધર્મ (Properties of rectangle, rhombus and square)

લંબચોરસ, ચોરસ અને સમભુજ ચતુષ્કોણ આ બધા સમાંતભુજ ચતુષ્કોણ પણ છે. તેથી તેમની સમ્મુખ બાજુઓ એકરૂપ હોવી જોઈએ, સમ્મુખ ખૂણાઓ એકરૂપ હોવા જોઈએ અને વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે આ ગુણધર્મ આ ત્રણે પ્રકારના ચતુષ્કોણમાં હોય છે. પરંતુ એથી વિશેષ ગુણધર્મ આ દરેક પ્રકારના ચતુષ્કાણમાં છે તે આપણે જોઈએ. આ ગુણધર્મની સાબિતી ટૂંકમાં આપી છે. વચ્ચેના પગથિયાં ધ્યાનમાં રાખી વિસ્તારપૂર્વક સાબિતી તમે જાતે લખો.

પ્રમેય : લંબચોરસના વિકર્ણો એકરૂપ હોય છે.

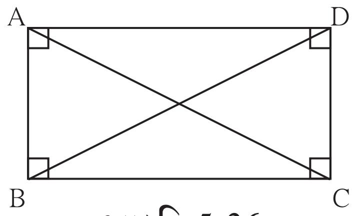
પક્ષ : □ABCD લંબચોરસ છે.

સાધ્ય : વિકર્ણ AC ≅ વિકર્ણ BD

સાબિતી : આપેલી સાબિતી કારણો આપી પૂર્ણ કરો.

Δ ADC ≅ Δ DAB ...... બાખૂબા કસોટી.

વિકર્ણ AC ≅ વિકર્ણ BD..... (એકરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુ)



આકૃતિ 5.26

પ્રમેય : ચોરસના વિકર્ણો એકરૂપ હોય છે.

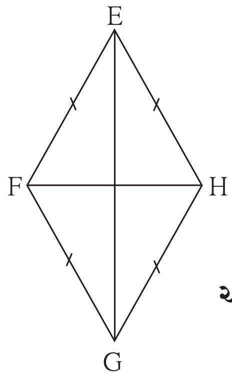
પક્ષ, સાધ્ય, સાબિતી તમારી જાતે લખો.

પ્રમેય : સમભુજ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પરના લંબદુભાજક છે.

પક્ષ : □EFGH સમભુજ છે.

સાધ્ય : (i) વિકર્ણ EG આ વિકર્ણ HF નો લંબદુભાજક છે.

(ii) વિકર્ણ HF આ વિકર્ણ EG નો લંબદુભાજક છે.



આકૃતિ 5.27

સાબિતી : (i) $\left.\begin{array}{l}\text{રેખ EF} \cong \text{રેખ EH} \\ \text{રેખ GF} \cong \text{રેખ GH}\end{array}\right\}$ પક્ષ

રેખાખંડના અંતિમ બિંદુઓથી સમાન અંતરે આવેલું દરેક બિંદુ તે રેખાખંડના લંબદુભાજક પર હોય છે.

$\therefore$ બિંદુ E અને બિંદુ G એ રેખ HF ના લંબદુભાજક પર છે.

બે ભિન્ન બિંદુમાંથી એક અને એક જ રેખા પસાર થાય છે.

$\therefore$ રેખા EG એ વિકર્ણ HF નો લંબદુભાજક છે.

$\therefore$ વિકર્ણ EG એ વિકર્ણ HF નો લંબદુભાજક છે.

(ii) તે જ પ્રમાણે સાબિત કરી શકાય કે, વિકર્ણ HF એ વિકર્ણ EG નો લંબદુભાજક છે.

નીચેના પ્રમેય સાબિત કરો.

- ચોરસના વિકર્ણો પરસ્પરના લંબદુભાજક હોય છે.
- સમભુજ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો તેના સમ્મુખકોણોને દુભાગે છે.
- ચોરસના વિકર્ણો તેના સમ્મુખકોણોને દુભાગે છે.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

- લંબચોરસના વિકર્ણો એકરૂપ હોય છે.
- સમભુજ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પરના લંબદુભાજક હોય છે.
- સમભુજ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો સમ્મુખકોણોને દુભાગે છે.
- ચોરસના વિકર્ણો એકરૂપ હોય છે.
- ચોરસના વિકર્ણો પરસ્પરના લંબદુભાજક હોય છે.
- ચોરસના વિકર્ણો સમ્મુખકોણોને દુભાગે છે.

મહાવરાસંગ્રહ 5.3

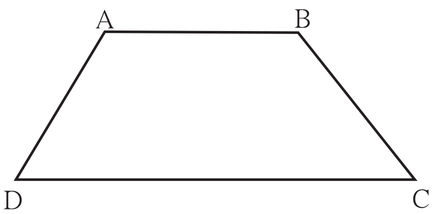
1. □ABCD લંબચોરસ છે. તેનો વિકર્ણો બિંદુ O માં છેદે છે. જો AC = 8 સેમી, તો BO = ?
   જો $\angle CAD = 35^\circ$ તો $\angle ACB$ = ?
2. □PQRS એ સમભુજ ચતુષ્કોણ છે. જો PQ = 7.5 સેમી, તો QR = ?
   જો $\angle QPS = 75^\circ$ તો $\angle PQR$ = ?, $\angle SRQ$ = ?
3. □ IJKL આ ચોરસના વિકર્ણો પરસ્પર બિંદુ M માં છેદે છે. તો $\angle IMJ$, $\angle JIK$ અને $\angle LJK$ ના માપ શોધો.
4. એક સમભુજ ચતુષ્કોણના વિકર્ણોની લંબાઈ અનુક્રમે 20 સેમી અને 21 સેમી છે. તો તે ચતુષ્કોણની બાજુ અને પરિમિતિ શોધો.
5. નીચેના વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય,તે સકારણ લખો.
   (i) દરેક સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ, સમભુજ હોય છે.
   (ii) દરેક સમભુજ ચતુષ્કોણ, લંબચોરસ હોય છે.
   (iii) દરેક લંબચોરસ, સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ હોય છે.
   (iv) દરેક ચોરસ, લંબચોરસ હોય છે.
   (v) દરેક ચોરસ, સમભુજ ચતુષ્કોણ હોય છે.
   (vi) દરેક સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ લંબચોરસ હોય છે.

જાણી લઈએ.

સમલંબ ચતુષ્કોણ (Trapezium)

જે ચતુષ્કોણના સમ્મુખ બાજુઓની એક જ જોડ સમાંતર હોય, તેને સમલંબ ચતુષ્કોણ કહે છે.

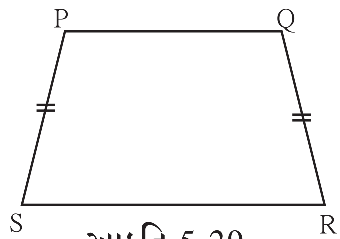
બાજુની આકૃતિમાં □ABCD ની બાજુ AB અને બાજુ DC એકબીજાને સમાંતર છે એટલે આ સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 5.28

સમાંતર રેખાના ગુણધર્મનુસાર $\angle A$ અને $\angle D$ આ પાસપાસેના ખૂણા પૂરક કોણની જોડ બનાવે છે. તેજ રીતે $\angle B$ અને $\angle C$ આ જોડી પણ પૂરક છે.

સંમલંબ ચતુષ્કોણમાં સમાંતર ન હોય તેવી (અસમાંતર) બાજુની જોડી એકરૂપ હોય તો તેને **સમદ્વિભુજ સમલંબ ચતુષ્કોણ (Isosceles trapezium)** કહે છે.

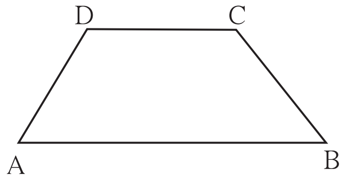


આકૃતિ 5.29

કોઈપણ સમલંબ ચતુષ્કોણમાં અસમાંતર બાજુના મધ્યબિંદુને જોડતાં રેખાખંડને તે સમલંબ ચતુષ્કોણની મધ્યગા કહે છે.

ગણેલાં ઉદાહરણો :

ઉદા.(1) □ABCD ના ખૂણાના 4 : 5 : 7 : 8 માપ છે તો □ABCD સમલંબ ચતુષ્કોણ છે, તે સાબિત કરો.



આકૃતિ 5.30

ઉકેલ : ધારોકે, ∠A, ∠B, ∠C, ∠D ના માપ અનુક્રમે

$(4x)^\circ$, $(5x)^\circ$, $(7x)^\circ$, અને $(8x)^\circ$ છે માનીએ.

ચતુષ્કોણના બધા ખૂણાના માપનો સરવાળો 360° હોય છે.

$\therefore\ 4x + 5x + 7x + 8x = 360$

$\therefore\ 24x = 360 \qquad \therefore\ x = 15$

$\angle A = 4 \times 15 = 60^\circ$, $\angle B = 5 \times 15 = 75^\circ$, $\angle C = 7 \times 15 = 105^\circ$,

અને $\angle D = 8 \times 15 = 120^\circ$

હવે, $\angle B + \angle C = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$

∴ બાજુ CD ∥ બાજુ BA...... (I)

પરંતુ $\angle B + \angle A = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ \neq 180^\circ$

∴ બાજુ BC અને બાજુ AD પરસ્પર સમાંતર નથી. ....(II)

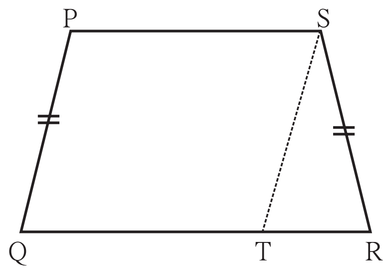
∴ □ABCD સમલંબ ચતુષ્કોણ છે. ....(I) અને (II) પરથી

ઉદા.(2) સમલંબ □PQRS માં બાજુ PS ∥ બાજુ QR અને બાજુ PQ ≅ બાજુ SR,
બાજુ QR > બાજુ PS છે તો સાબિત કરો, ∠PQR ≅ ∠SRQ

પક્ષ : □PQRS માં બાજુ PS ∥ બાજુ QR
અને બાજુ PQ ≅ બાજુ SR

સાધ્ય : ∠PQR ≅ ∠SRQ

રચના : બિંદુ S માંથી બાજુ PQ ને સમાંતર રેખાખંડ દોર્યો છે.
તે બાજુ QR ને T માં છેદે છે.



આકૃતિ 5.31

સાબિતી : □PQRS માં,

રેખ PS ∥ રેખ QT ....પક્ષ અને Q-T-R

રેખ PQ ∥ રેખ ST ....રચના

∴ □PQTS આ સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે.

∴∠PQT ≅ ∠STR ..... સંગત કોણ (I)

તેમજ રેખ PQ ≅ રેખ ST

પરંતુ રેખ PQ ≅ રેખ SR ......(પક્ષ)

∴ રેખ ST ≅ રેખ SR

∴∠STR ≅ ∠SRT..... સમદ્વિભુજ ત્રિકોણનો પ્રમેય (II)

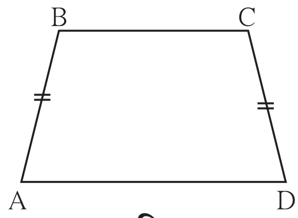
∴∠PQT ≅ ∠SRT ....(I) અને (II) પરથી.

∴ ∠PQR ≅ ∠SRQ .... Q-T-R.

આ પરથી, સમદ્વિભુજ સમલંબ ચતુષ્કોણના પાયા પરના ખૂણા એકરૂપ છે તે સાબિત થાય છે.

મહાવરાસંગ્રહ 5.4

1. $\square$IJKL માં બાજુ IJ $\parallel$ બાજુ KL છે. તેમજ $\angle I = 108°$, $\angle K = 53°$ છે. તો $\angle J$ અને $\angle L$ ના માપ શોધો.
2. $\square$ABCD માં બાજુ BC $\parallel$ બાજુ AD છે. તેમજ બાજુ AB $\cong$ બાજુ DC જો $\angle A = 72°$ તો $\angle B$, અને $\angle D$ ના માપ શોધો.
3. આકૃતિ 5.32 જુઓ. $\square$ABCD માં બાજુ BC $<$ બાજુ AD છે.
   જો બાજુ BC $\parallel$ બાજુ AD અને
   બાજુ BA $\cong$ બાજુ CD છે.
   તો સાબિત કરો કે, $\angle ABC \cong \angle DCB$



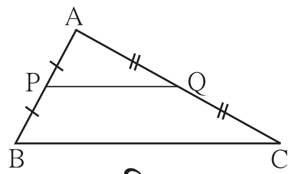
આકૃતિ 5.32

જાણી લઈએ.

ત્રિકોણની બે બાજુના મધ્યબિંદુનો પ્રમેય (Theorem of midpoints of two sides of a triangle)

વિધાન : ત્રિકોણની કોઈપણ બે બાજુના મધ્યબિંદુને જોડતો રેખાખંડ ત્રીજી બાજુને સમાંતર અને તેના કરતાં અડધી લંબાઈનો હોય છે.

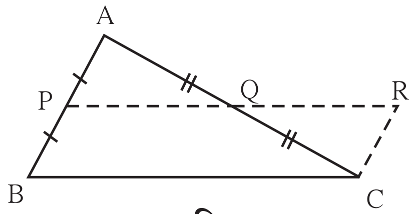
પક્ષ : Δ ABC માં બિંદુ P એ રેખ AB નું મધ્યબિંદુ છે અને બિંદુ Q એ રેખ AC નું મધ્યબિંદુ છે.



આકૃતિ 5.33

સાધ્ય : રેખ PQ $\parallel$ રેખ BC
અને $PQ = \frac{1}{2}$ BC

રચના : રેખ PQ ને R સુધી લંબાવો જેથી PQ = QR
રેખ RC દોરો.



આકૃતિ 5.34

સાબિતી : Δ AQP અને Δ CQR માં
રેખ PQ $\cong$ રેખ QR ...... રચના
રેખ AQ $\cong$ રેખ QC ...... Q એ AC નું મધ્યબિંદુ છે.
$\angle AQP \cong \angle CQR$ ..... અભિકોણ
$\therefore$ Δ AQP $\cong$ Δ CQR .... બા-ખૂ-બા કસોટી
$\angle PAQ \cong \angle RCQ$ ..... (1) એકરૂપ ત્રિકોણના સંગત ખૂણા
$\therefore$ રેખ AP $\cong$ રેખ CR ......(2) એકરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુ
વિધાન (1) પરથી રેખા AB $\parallel$ રેખા CR.........વ્યુત્ક્રમકોણ કસોટી
વિધાન (2) પરથી રેખ AP $\cong$ રેખ CR
પરંતુ રેખ AP $\cong$ રેખ PB $\cong$ રેખ CR અને રેખ PB $\parallel$ રેખ CR
$\therefore$ $\square$PBCR આ સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે.
$\therefore$ રેખ PQ $\parallel$ રેખ BC અને PR = BC .... કારણ સંમુખ બાજુઓ સમાન લંબાઈની હોય છે.

$PQ = \frac{1}{2}$ PR …… રચના

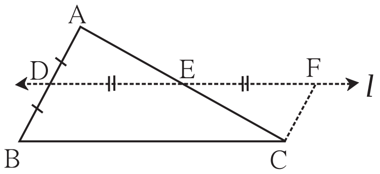
$\therefore$ $PQ = \frac{1}{2}$ BC $\because$ PR = BC

ત્રિકોણની બે બાજુના મધ્યબિંદુના પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય

પ્રમેય : ત્રિકોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતી અને બીજી બાજુને સમાંતર હોય. તેવી રેખા ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે.

આ વિધાન માટે આકૃતિ, પક્ષ, સાધ્ય, રચના આપ્યા છે, તે પરથી સાબિતી લખો.

પક્ષ : Δ ABC ની બાજુ AB નું મધ્યબિંદુ D છે. બિંદુ D માંથી પસાર થતી અને બાજુ BC ને સમાંતર હોય તેવી રેખા l, બાજુ AC ને બિંદુ E માં છેદે છે.



આકૃતિ 5.35

સાધ્ય : AE = EC

રચના : બિંદુ Cમાંથી રેખા ABને સમાંતર રેખા દોરો.
આ રેખા l ને જે બિંદુમાં છેદે છે, તે છેદનબિંદુને F નામ આપો.

સાબિતી : રેખા l || રેખ BC (પક્ષ) અને કરેલી રચનાનો ઉપયોગ કરી □BCFD આ સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે, સાબિત કરો.

Δ ADE $\cong$ Δ CFE તે સાબિત કરો અને તે પરથી સાધ્ય સાબિત કરો.

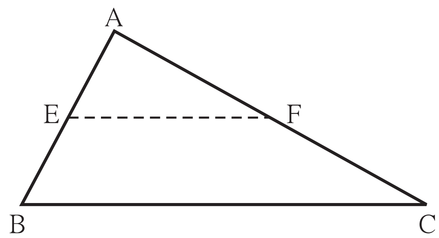
ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા.(1) Δ ABC ની બાજુ AB અને AC ના મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે E અને F છે. જો EF = 5.6 તો BC ની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : Δ ABC માં બિંદુ E અને બિંદુ F અનુક્રમે બાજુ AB અને બાજુ AC ના મધ્યબિંદુઓ છે.

$EF = \frac{1}{2}$ BC ……. મધ્યબિંદુનો પ્રમેય

$5.6 = \frac{1}{2}$ BC $\therefore$ BC = 5.6 × 2 = 11.2



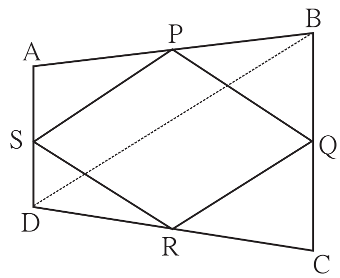
આકૃતિ 5.36

ઉદા.(2) કોઈપણ ચતુષ્કોણની બાજુઓના મધ્યબિંદુને ક્રમથી જોડવાથી બનતો ચતુષ્કોણ સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ હોય છે. તે સાબિત કરો.

પક્ષ : □ABCD ની બાજુઓ AB, BC, CD અને AD ના મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q, R, S છે.

સાધ્ય : □PQRS સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે.

રચના : વિકર્ણ BD દોરો.



આકૃતિ 5.37

સાબિતી : Δ ABD માં S એ AD નું મધ્યબિંદુ અને P એ AB નું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore$ મધ્યબિંદુના પ્રમેયનુસાર, PS $\parallel$ DB અને PS = $\frac{1}{2}$ BD .... (1)

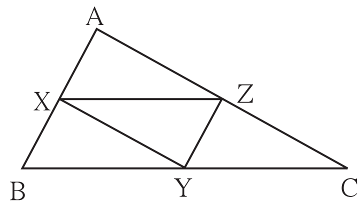
તેમજ Δ DBC માં Q અને R અનુક્રમે બાજુ BC અને બાજુ DC નું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore$QR $\parallel$ BD, QR = $\frac{1}{2}$ BD .... (2) મધ્યબિંદુના પ્રમેયનુસાર

$\therefore$PS $\parallel$ QR, PS = QR .... (1) અને (2) પરથી

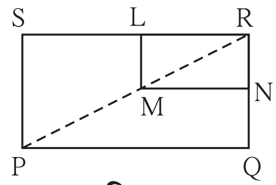
$\therefore$ □PQRS સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે.

મહાવરાસંગ્રહ 5.5



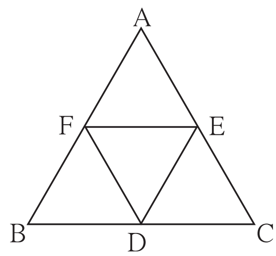
આકૃતિ 5.38

1. આકૃતિ 5.38 માં Δ ABC ની બાજુ AB, બાજુ BC અને બાજુ AC ના અનુક્રમે બિંદુ X, Y, Z એ મધ્યબિંદુ છે. AB = 5 સેમી, AC = 9 સેમી અને BC = 11 સેમી, તો XY, YZ, XZ ની લંબાઈ શોધો.



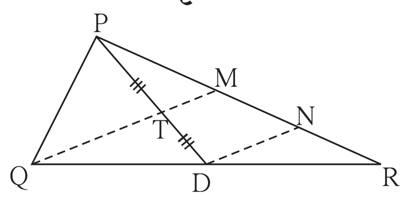
આકૃતિ 5.39

2. આકૃતિ 5.39 માં □PQRS અને □MNRL લંબચોરસ છે. બિંદુ M એ PR નું મધ્યબિંદુ છે. તો સાબિત કરો કે, (i) SL = LR, (ii) LN = $\frac{1}{2}$SQ.



આકૃતિ 5.40

3. આકૃતિ 5.40 માં Δ ABC સમભુજ ત્રિકોણમાં બિંદુ F, D, E એ અનુક્રમે બાજુ AB, બાજુ BC, બાજુ AC ના મધ્યબિંદુ છે તો Δ FED પણ સમભુજ ત્રિકોણ છે તે સાબિત કરો.



આકૃતિ 5.41

4. આકૃતિ 5.41 માં રેખ PD એ Δ PQR ની મધ્યગા છે. બિંદુ T એ PD નું મધ્યબિંદુ છે. QT ને લંબાવતા PR ને M બિંદુમાં છેદે છે. તો બતાવો કે, $\frac{PM}{PR} = \frac{1}{3}$.
[સૂચના : DN $\parallel$ QM દોરો]

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 5

1. નીચેના બહુપર્યાયી પ્રશ્નોમાં આપેલા ઉત્તરો પૈકી સાચો પર્યાય શોધો.

(i) જે ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુની દરેક જોડ એકરૂપ હોય તે ચતુષ્કોણનું નામ કયું ?

(A) લંબચોરસ (B) સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ (C) સમલંબ ચતુષ્કોણ (D) સમભુજ ચતુષ્કોણ

(ii) એક ચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ $12\sqrt{2}$ સેમી છે. તો તેની પરિમિતિ કેટલી?

(A) 24 સેમી (B) $24\sqrt{2}$ સેમી (C) 48 સેમી (D) $48\sqrt{2}$ સેમી

(iii) એક સમભુજ ચતુષ્કોણના સંમુખ ખૂણાઓના માપ $(2x)^\circ$ અને $(3x - 40)^\circ$ હોય તો x = ?

(A) 100° (B) 80° (C) 160° (D) 40°

2. એક કાટકોણ ચતુષ્કોણ (લંબચોરસ)ની પાસપાસેની બાજુઓ અનુક્રમે 7 સેમી અને 24 સેમી છે તો તેના વિકર્ણની લંબાઈ શોધો.

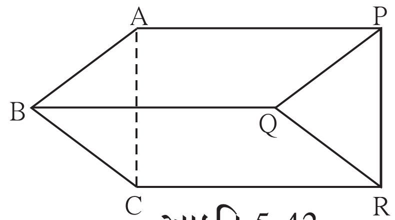
3. ચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ 13 સેંમી છે તો ચોરસની બાજુ શોધો.

4. સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બે બાજુઓનો ગુણોત્તર 3:4 છે. જો તેની પરિમિતિ 112 સેંમી હોય તો બધી બાજુઓની લંબાઈ શોધો.

5. સમભુજ ચતુષ્કોણનો વિકર્ણ PR અને વિકર્ણ QS ની લંબાઈ અનુક્રમે 20 સેમી અને 48 સેમી છે તો સમભુજ ચતુષ્કોણ PQRS ની બાજુ PQ ની લંબાઈ શોધો.

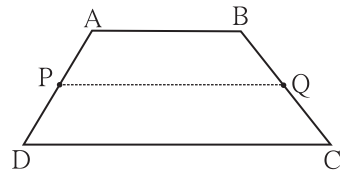
6. લંબચોરસ PQRS ના વિકર્ણો પરસ્પર M બિંદુમાં છેદે છે. જો $\angle QMR = 50^\circ$ તો $\angle MPS$ નું માપ શોધો.

7. બાજુની આકૃતિ 5.42 માં
રેખ AB $\parallel$ રેખ PQ , રેખ AB $\cong$ રેખ PQ,
રેખ AC $\parallel$ રેખ PR, રેખ AC $\cong$ રેખ PR
તો સાબિત કરો કે,
રેખ BC $\parallel$ રેખ QR અને રેખ BC $\cong$ રેખ QR.



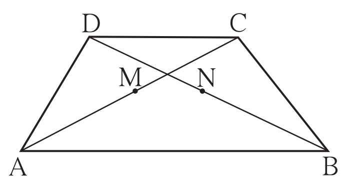
આકૃતિ 5.42

8*. બાજુની આકૃતિ 5.43 માં □ABCD સમલંબ ચતુષ્કોણ છે. તેમાં AB $\parallel$ DC છે. P અને Q એ અનુક્રમે રેખ AD અને રેખ BC ના મધ્યબિંદુ છે. તો સાબિત કરો કે, PQ $\parallel$ AB અને PQ = $\frac{1}{2}$(AB + DC)



આકૃતિ 5.43

9. બાજુની આકૃતિ 5.44 માં □ABCD સમલંબ ચતુષ્કોણ છે. તેમાં AB $\parallel$ DC. M અને N એ અનુક્રમે વિકર્ણ AC અને વિકર્ણ BD ના મધ્યબિંદુ છે. તો સાબિત કરો કે, MN $\parallel$ AB



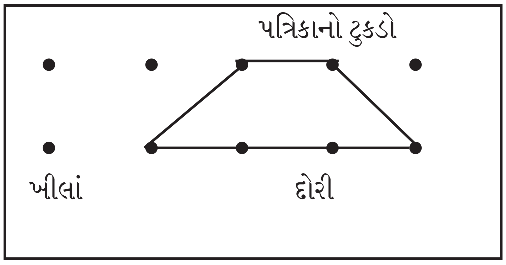
આકૃતિ 5.44

કૃતિ

ચતુષ્કોણના વિવિધ ગુણધર્મો ચકાસો.

સાહિત્ય : 15 સેમી × 10 સેમી ના પ્લાયવુડનો ટુકડો 12 થી 15 ખીલાં, જાડો દોરો, જૂની આમંત્રણ પત્રિકાઓ, કાતર.

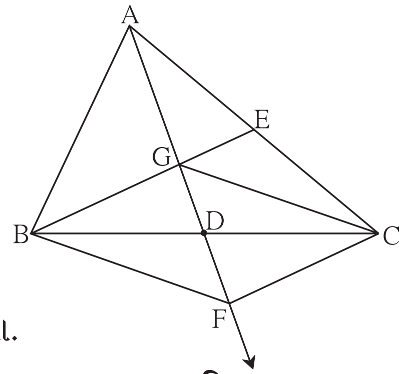
સૂચના : 15 સેમી × 10 સેમી ના પ્લાયવુડપર સીધી રેખામાં દર 2 સેમી અંતરે 5 ખીલાં ઠોકો તેજ પ્રમાણે નીચેની બાજુએ પણ 5 ખીલાં ઠોકો બે હરોળ વચ્ચેનું અંતર પણ 2 સેમી રાખવું દોરો વાપરીને જુદા જુદા આકારના ચતુષ્કોણો (ખીલાંને આધારે) તૈયાર કરો અને બાજુ સંબંધી ગુણધર્મો દોરાથી ચકાસો આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પત્રિકાના ખૂણાઓ કાપો અને ચતુષ્કોણના ખૂણાઓ સંબંધી ગુણધર્મ ચકાસો.



આકૃતિ 5.45

અધિક માહિતી માટે

ત્રિકોણનુ ગુરૂત્વકેન્દ્રબિંદુ દરેક મધ્યગાને 2 : 1 ના પ્રમાણમાં વિભાગે છે. આ ગુણધર્મ તમને ખબર છે તેની સાબિતીનો અભ્યાસ કરો.



આકૃતિ 5.46

પક્ષ : Δ ABC ની રેખ AD અને રેખ BE બે મધ્યગા છે. જે બિંદુ G માં છેદે છે.

સાધ્ય : AG : GD = 2 : 1

રચના : કિરણ AD પર બિંદુ F એવી રીતે લો કે G–D–F અને GD = DF

સાબિતી : □BGCF ના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે. ..... પક્ષ અને રચના.

$\therefore$ □BGCF સમાંતરભુજ છે.

$\therefore$ રેખા BE || રેખા FC ..... સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની સંમુખ બાજુઓનો સમાવેશ કરતી રેખા

હવે Δ AFC એ બાજુ AC નું E મધ્યબિંદુ છે. .... (પક્ષ)

રેખ EB || રેખા FC

ત્રિકોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી બીજી બાજુને સમાંતર હોય તેવી રેખા ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે.

$\therefore$ રેખ AF નું G મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore$ AG = GF

પરંતુ AG = 2 GD

$\therefore \dfrac{AG}{GD} = \dfrac{2}{1}$ એટલે જ AG : GD = 2 : 1

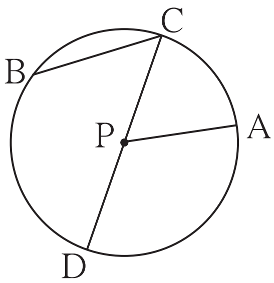
6 વર્તુળ

66TY2Y

ચાલો શીખીએ.

- વર્તુળ
- અંતઃવર્તુળ
- વર્તુળની જીવાના ગુણધર્મ
- પરિવર્તુળ

યાદ કરીએ.



આકૃતિ 6.1

બાજુની આકૃતિમાં P કેન્દ્રવાળા વર્તુળનું નિરિક્ષણ કરી નીચેના કોઠો પૂર્ણ કરો.

---	રેખ PA	---	---	---	---	∠CPA
જીવા	---	વ્યાસ	ત્રિજ્યા	કેન્દ્ર	કેન્દ્રિય કોણ	---

જાણી લઈએ.

વર્તુળ (Circle)

બિંદુઓના ગણના રૂપમાં વર્તુળનું વર્ણન કરીએ.

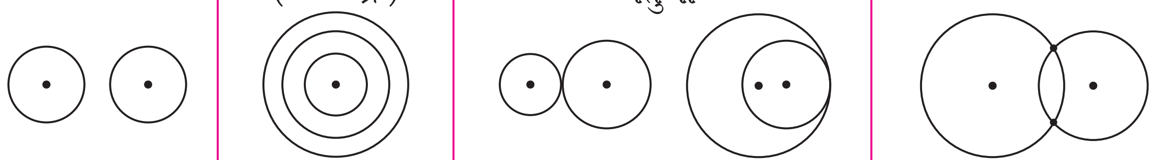
- સમતલમાંના એક સ્થિર બિંદુથી સમાન અંતરે રહેલા બધા બિંદુઓના ગણને **વર્તુળ** (Circle) કહેવાય છે. તે અચળ બિંદુને વર્તુળનું કેન્દ્રબિંદુ અથવા **વર્તુળ કેન્દ્ર** (Centre of a circle) કહેવાય છે.

વર્તુળ સંબંધી કેટલીક સંજ્ઞા

- વર્તુળકેન્દ્ર અને વર્તુળ પરના કોઈપણ બિંદુને જોડનારા રેખાખંડને વર્તુળની **ત્રિજ્યા** (radius) કહે છે.
- વર્તુળકેન્દ્રથી વર્તુળના કોઈપણ બિંદુ સુધીના અંતરને વર્તુળની **ત્રિજ્યા** કહે છે.
- વર્તુળપરના કોઈપણ બે બિંદુને જોડનારા રેખાખંડને વર્તુળની **જીવા** (Chord) કહે છે.
- વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી જીવાને વર્તુળનો **વ્યાસ** (Diameter) કહે છે.
  વ્યાસ એ વર્તુળની સૌથી મોટી જીવા હોય છે.

સમતલમાંના વર્તુળો

એકરૂપ વર્તુળો	એકકેન્દ્રી વર્તુળો (સમકેન્દ્રી)	એક જ બિંદુમાં છેદનારા વર્તુળો	બે બિંદુમાં છેદનારા વર્તુળો



• ત્રિજ્યા સમાન	• કેન્દ્ર એક, ત્રિજ્યા ભિન્ન	• કેન્દ્ર ભિન્ન, ત્રિજ્યા ભિન્ન સામાન્ય બિંદુ એકજ	• કેન્દ્રભિન્ન, ત્રિજ્યા ભિન્ન સામાન્ય બિંદુ બે છે.

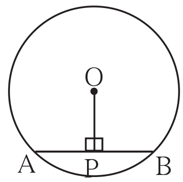
આકૃતિ 6.2

જાણી લઈએ.

વર્તુળની જીવાના ગુણધર્મ (Properties of chord)

કૃતિ I : જૂથમાંના, પ્રત્યેક વિદ્યાર્થીઓએ નીચેની કૃતિ કરવી.

પોતાની નોટબુકમાં એક વર્તુળ દોરો. તેમાં એક જીવા દોરો.
વર્તુળના કેન્દ્રથી જીવા પર લંબ દોરો. જીવાના જે બે ભાગ થયા. તેમની લંબાઈ માપો.
જૂથપ્રમુખે નીચે પ્રમાણે એક કોષ્ટક તૈયાર કરી.તે કોષ્ટકમાં દરેકના નિરીક્ષણને નોંધવા.



આકૃતિ 6.3

લંબાઈ \ વિદ્યાર્થી	1	2	3	4	5	6
l (AP)	...... સેમી					
l (PB)	...... સેમી					

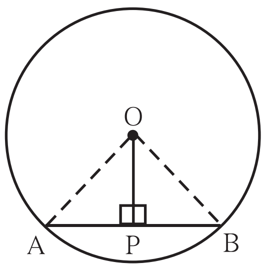
આ નિરીક્ષણ પરથી ધ્યાનમાં આવેલ ગુણધર્મ લખો. આ ગુણધર્મની સાબિતી જોઈએ.

પ્રમેય : વર્તુળાના કેન્દ્રમાંથી જીવા પર દોરેલો લંબ જીવાને દુભાગે છે.

પક્ષ : O કેન્દ્ર વાળા વર્તુળમાં રેખ AB એ જીવા છે.
રેખ OP $\perp$ જીવા AB

સાધ્ય : રેખ AP $\cong$ રેખ BP

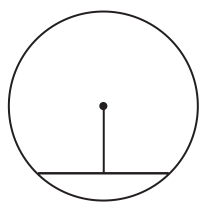
સાબિતી : રેખ OA અને રેખ OB દોરો.
Δ OPA અને Δ OPB માં
$\angle$OPA $\cong$ $\angle$OPB . . . . રેખ OP $\perp$ જીવા AB,
રેખ OP $\cong$ રેખ OP . . . . સામાન્ય બાજુ
કર્ણ OA $\cong$ કર્ણ OB . . . . એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યા
$\therefore$ Δ OPA $\cong$ Δ OPB . . . . કર્ણ ભુજા પ્રમેય
રેખ PA $\cong$ રેખ PB . . . . એકરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુ



આકૃતિ 6.4

કૃતિ II : જૂથમાંના પ્રત્યેક વિદ્યાર્થીએ નીચેની કૃતિ કરવી.

પોતાની નોટબુકમાં એક વર્તુળ દોરી તેમાં જીવા દોરો.
જીવાનું મધ્યબિંદુ શોધો. તે મધ્યબિંદુ અને વર્તુળકેન્દ્રને જોડતો રેખાખંડ દોરો. આ રેખાખંડે જીવા સાથે કરેલો ખૂણો માપો શું ધ્યાનમાં આવે છે ?
તમે માપેલા ખૂણાના માપો એકબીજાને જણાવો.
આ પરથી ક્યો ગુણધર્મ ધ્યાનમાં આવે છે, તે નક્કી કરો.



આકૃતિ 6.5

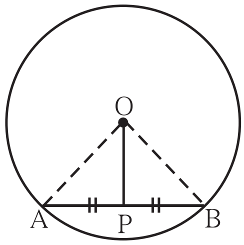
પ્રમેય : વર્તુળના કેન્દ્ર અને જીવાના મધ્યબિંદુને જોડનારો રેખાખંડ જીવાને લંબ હોય છે.

પક્ષ : O કેન્દ્ર વાળા વર્તુળની રેખ AB એ જીવા છે.

જીવા AB નું P મધ્યબિંદુ છે. એટલે કે રેખ AP $\cong$ રેખ PB

સાધ્ય : રેખ OP $\perp$ જીવા AB

સાબિતી : રેખ OA અને રેખ OB દોરો.



આકૃતિ 6.6

Δ AOP અને Δ BOP માં

રેખ OA $\cong$ રેખ OB . . . . (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યા)

રેખ OP $\cong$ રેખ OP. . . . . (સામાન્ય બાજુ)

રેખ AP $\cong$ રેખ BP . . . . (પક્ષ)

$\therefore$ Δ AOP $\cong$ Δ BOP . . . . (બાબાબા કસોટી)

$\therefore$ $\angle$OPA $\cong$ $\angle$OPB . . . .(એકરૂપ ત્રિકોણના સંગત ખૂણા) . . . .(I)

હવે $\angle OPA + \angle OPB = 180^\circ$ . . . (સુરેખ ખૂણાની જોડ)

$\angle OPB + \angle OPB = 180^\circ$ . . . . . . (I) (પરથી)

$\therefore \quad 2\angle OPB = 180^\circ$

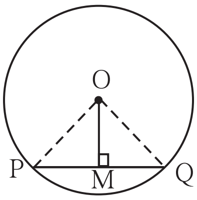
$\therefore \quad \angle OPB = 90^\circ$

$\therefore$ રેખ OP $\perp$ જીવા AB

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા.(1) એક વર્તુળની ત્રિજ્યા 5 સેમી છે. તે વર્તુળની એક જીવાની લંબાઈ 8 સેમી છે. તો તે જીવાનું વર્તુળના કેન્દ્રથી અંતર શોધો.

ઉકેલ :



આકૃતિ 6.7

પ્રથમ આપેલી માહિતી દર્શાવનારી આકૃતિ દોરીએ.

ધારો કે, O કેન્દ્ર વાળા વર્તુળની જીવા PQ ની લંબાઈ 8 સેમી છે.

રેખ OM $\perp$ જીવા PQ દોર્યો.

આપણે જાણીએ છીએ કે વર્તુળના કેન્દ્ર પરથી જીવા પર દોરેલો લંબ જીવાને દુભાગેછે.

$\therefore$ PM = MQ = 4 સેમી

વર્તુળની ત્રિજ્યા 5 સેમી એટલે OQ = 5 સેમી આપ્યું છે.

કાટકોણ Δ OMQ માં પાયથાગોરસના પ્રમેય મુજબ

$OM^2 + MQ^2 = OQ^2$

$OM^2 + 4^2 = 5^2$

$\therefore \quad OM^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$

$\therefore \quad OM = 3$

એટલે વર્તુળના કેન્દ્રથી જીવાનું અંતર 3 સેમી છે.

ઉદા.(2) એક વર્તુળની ત્રિજ્યા 20 સેમી છે. આ વર્તુળની એક જીવા વર્તુળના કેન્દ્રથી 12 સેમી અંતરે છે. તો તે જીવાની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે વર્તુળનું કેન્દ્ર O છે. ત્રિજ્યા = OD = 20 સેમી, જીવા CD કેન્દ્ર O થી 12 સેમી અંતરે છે.
રેખ OP $\perp$ રેખ CD

$\therefore$ OP = 12 સેમી

$\therefore$ CP = PD ...... વર્તુળકેન્દ્રથી જીવા પર દોરેલો લંબ જીવાને દુભાગે છે.

કાટકોણ Δ OPD માં પાયથાગોરસના પ્રમેય મુજબ

$OP^2 + PD^2 = OD^2$

$(12)^2 + PD^2 = 20^2$

$\therefore \quad PD^2 = 20^2 - 12^2$

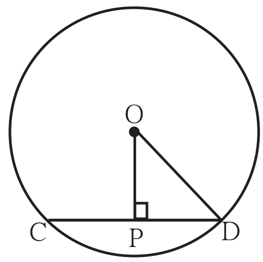
$\therefore \quad PD^2 = (20+12)(20-12)$

$= 32 \times 8 = 256$

$\therefore$ PD = 16 $\qquad \therefore$ CP = 16

CD = CP + PD = 16 + 16 = 32

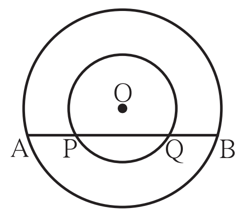
$\therefore$ જીવાની લંબાઈ 32 સેમી છે.



આકૃતિ 6.8

મહાવરાસંગ્રહ 6.1

1. વર્તુળ કેન્દ્ર O થી જીવા AB નું અંતર 8 સેમી છે. જીવા AB ની લંબાઈ 12 સેમી છે, તો વર્તુળના વ્યાસનું માપ શોધો.
2. એક વર્તુળનો વ્યાસ 26 સેમી અને જીવાની લંબાઈ 24 સેમી છે, તો તે જીવાનું કેન્દ્રથી અંતર શોધો.
3. વર્તુળના કેન્દ્રથી જીવાનું અંતર 30 સેમી અને વર્તુળની ત્રિજ્યા 34 સેમી છે, તો જીવાની લંબાઈ શોધો.
4. O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની ત્રિજ્યા 41 સેમી છે. વર્તુળની જીવા PQ ની લંબાઈ 80 સેમી છે, તો જીવા PQ નું કેન્દ્રથી અંતર શોધો.
5. આકૃતિ 6.9 માં કેન્દ્ર O વાળા બે વર્તુળો છે. મોટા વર્તુળની જીવા AB એ નાના વર્તુળને બિંદુ P અને Q માં છેદે છે. તો સાબિત કરો કે AP = BQ
6. સાબિત કરો કે, જો વર્તુળનો વ્યાસ વર્તુળની બે જીવાઓને દુભાગે છે તો તે જીવાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.



આકૃતિ 6.9

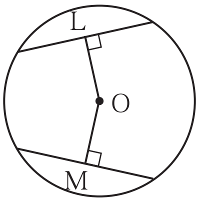
કૃતિ I

(1) કોઈપણ માપની ત્રિજ્યાના વર્તુળો દોરો.
(2) પ્રત્યેક વર્તુળમાં સમાન લંબાઈની બે જીવા દોરો.
(3) વર્તુળકેન્દ્રથી પ્રત્યેક જીવા પર લંબ દોરો.
(4) વર્તુળકેન્દ્રથી પ્રત્યેક જીવાનું અંતર માપો.

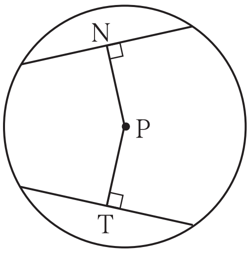
જાણી લઈએ.

વર્તુળની એકરૂપ જીવા અને તેમના કેન્દ્રથી અંતર સંબંધી ગુણધર્મ

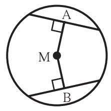
કૃતિ II



આકૃતિ (i)



આકૃતિ (ii)



આકૃતિ (iii)

આકૃતિ (i) માં OL = OM, આકૃતિ (ii) માં PN = PT, આકૃતિ (iii) માં MA = MB મળ્યું કે ?
આ કૃતિ પરથી ધ્યાનમાં આવેલ ગુણધર્મ શબ્દમાં લખો.

જાણી લઈએ.

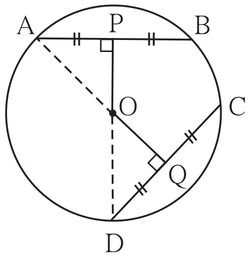
એકરૂપ જીવાના ગુણધર્મ (Properties of congruent chords)

પ્રમેય : એક વર્તુળની એકરૂપ જીવા વર્તુળ કેન્દ્રથી સમાન અંતરે હોય છે.

પક્ષ : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં
જીવા AB $\cong$ જીવા CD
OP $\perp$ AB, OQ $\perp$ CD

સાધ્ય : OP = OQ

રચના : રેખ OA અને રેખ OD જોડો.

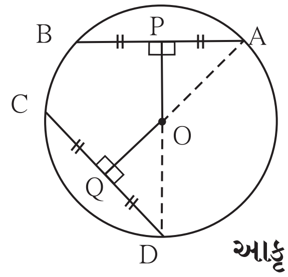


આકૃતિ 6.10

સાબિતી : AP = $\frac{1}{2}$ AB, DQ = $\frac{1}{2}$ CD . . . વર્તુળ કેન્દ્રથી જીવા પર દોરેલો લંબ જીવાને દુભાગે છે.
AB = CD . . . . પક્ષ
$\therefore$ AP = DQ
$\therefore$ રેખ AP $\cong$ રેખ DQ . . . . (I) . . . સમાન લંબાઈના રેખાખંડ
કાટકોણ Δ APO અને કાટકોણ Δ DQO માં
રેખ AP $\cong$ રેખ DQ . . . . (I) પરથી
કર્ણ OA $\cong$ કર્ણ OD . . . . એકજ વર્તુળની ત્રિજ્યા
$\therefore$ Δ APO $\cong$ Δ DQO . . . . કર્ણભુજા પ્રમેય
રેખ OP $\cong$ રેખ OQ . . . . એકરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુઓ
$\therefore$ OP = OQ . . . . એકરૂપ રેખાખંડોની લંબાઈ સમાન હોય
વર્તુળની એકરૂપ જીવા વર્તુળના કેન્દ્રથી સમાન અંતરે હોય છે.

પ્રમેય : એકજ વર્તુળની કેન્દ્રથી સમાન અંતરે આવેલી જીવા એકરૂપ હોય છે.

પક્ષ : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં
રેખ OP ⊥ જીવા AB
રેખ OQ ⊥ જીવા CD
અને OP = OQ



આકૃતિ 6.11

સાધ્ય : જીવા AB ≅ જીવા CD

રચના : રેખ OA અને રેખ OD દોરો.

સાબિતી : નીચેના વિધાનો માટે ખાલી જગ્યા પૂરો.

કાટકોણ Δ OPA અને કાટકોણ Δ OQD માં

કર્ણ OA ≅ કર્ણ OD . . . .

રેખ OP ≅ રેખ OQ . . . . પક્ષ

$\therefore$ Δ OPA ≅ Δ OQD . . . .

$\therefore$ રેખ AP ≅ રેખ QD . . . . એકરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુઓ

$\therefore$ AP = QD . . . . (I)

પરંતુ AP = $\frac{1}{2}$ AB, OQ = $\frac{1}{2}$ CD . . . . .

$\therefore$ AP = QD . . . . વિધાન (I) પરથી

$\therefore$ AB = CD

$\therefore$ રેખ AB ≅ રેખ CD

ઉપરના બંને પ્રમેયો એકબીજાના પ્રતિપ્રમેય છે તે ધ્યાનમાં રાખો.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

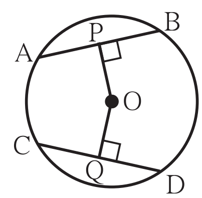
એક વર્તુળની એકરૂપ જીવા વર્તુળના કેન્દ્રથી સમાન અંતરે હોય છે.

કૃતિ : ઉપરના બંને પ્રમેયો એકજ વર્તુળને બદલે એકરૂપ વર્તુળો લઈને સાબિત કરી શકાય.

1. એકરૂપ વર્તુળોની એકરૂપ જીવા વર્તુળના કેન્દ્રથી સમાન અંતરે હોય છે.
2. એકરૂપ વુર્તળમાં વર્તુળના કેન્દ્રથી સમાન અંતરે આવેલી જીવા એકરૂપ હોય છે.
   આ બંને પ્રમેયો માટે પક્ષ, સાધ્ય, સાબિતી લખો.

ગણેલાં ઉદાહરણ

ઉદા. આપેલી આકૃતિ 6.12 માં બિંદુ O એ વર્તુળનું કેન્દ્રબિંદુ છે અને AB = CD છે. જો OP = 4 સેમી તો OQ ની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ 6.12

ઉકેલ : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં
જીવા AB ≅ જીવા CD આપેલ છે.

$OP \perp AB$, $OQ \perp CD$ ....આકૃતિમાં દર્શાવ્યું છે.

$OP = 4$ સેમી છે. એટલે જીવા AB નું વર્તુળ કેન્દ્ર O થી અંતર 4 સેમી છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે એક જ વર્તુળની એકરૂપ જીવા કેન્દ્રથી સમાન અંતરે હોય છે.

$\therefore$ $OQ = 4$ સેમી

મહાવરાસંગ્રહ 6.2

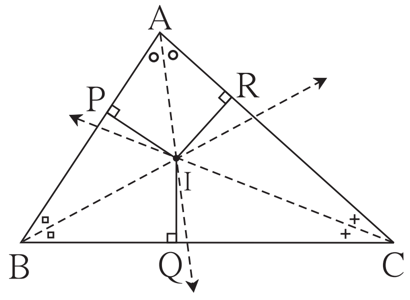
1. એક વર્તુળની ત્રિજ્યા 10 સેમી છે. તે વર્તુળની પ્રત્યેક 16 સેમી લંબાઈની બે જીવા છે. તો તે જીવા વર્તુળકેન્દ્રથી કેટલા અંતરે હશે?
2. એક વર્તુળમાં બે સમાન લંબાઈની જીવા છે. કેન્દ્રથી તે જીવા 5 સેમી અંતરે છે. વર્તુળની ત્રિજ્યા 13 સેમી છે તો તે જીવાની લંબાઈ શોધો.
3. કેન્દ્ર C વાળા વર્તુળની રેખ PM અને રેખ PN એ એકરૂપ જીવા છે. તો કિરણ PC એ $\angle NPM$ નો દુભાજક છે તે સાબિત કરો.

યાદ કરીએ.

પાછલા ધોરણમાં આપણે વિવિધ ત્રિકોણ દોરી તેમના ખૂણાના દુભાજક એકસંગામી હોય છે તે ગુણધર્મનો અભ્યાસ કર્યો. ત્રિકોણના ખૂણાઓના દુભાજકોના સંગામી બિંદુને 'I' અક્ષરથી દર્શાવવામાં આવે છે તે આપણે જાણીએ છીએ.

જાણી લઈએ.

ત્રિકોણનું અંતઃવર્તુળ (Incircle of a triangle)



આકૃતિ 6.13

Δ ABC ના ત્રણેય ખૂણાઓના દુભાજક I બિંદુમાં મળે છે.

ખૂણાના દુભાજકોના સંગામી બિંદુ I માંથી ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ પર લંબ દોર્યો છે.

$IP \perp AB$, $IQ \perp BC$, $IR \perp AC$

ખૂણાના દુભાજકો પરના પ્રત્યેક બિંદુ ખૂણાની બંને બાજુઓથી સમાન અંતરે હોય છે તે આપણે જોઈ ગયા છીએ.

$\angle B$ ના દુભાજક પર I બિંદુ છે માટે $IP = IQ$.

$\angle C$ ના દુભાજક પર I બિંદુ છે માટે $IQ = IR$

$IP = IQ = IR$

બિંદુ I એ ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ AB, AC, BC થી સમાન અંતરે છે.

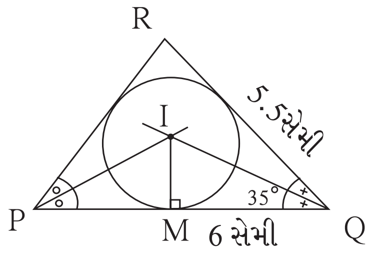
$\therefore$ બિંદુ I ને કેન્દ્ર માનીને અને IP ત્રિજ્યા લઈને દોરેલ વર્તુળ બાજુ AB, AC અને BC ને અંદરથી સ્પર્શશે. આવા વર્તુળને અંતઃવર્તુળ કહેવાય છે.

જાણી લઈએ.

ત્રિકોણનું અંતઃવર્તુળ દોરવું (To construct incircle of a triangle)

ઉદા. Δ PQR દોરો, જેમાં PQ = 6 સેમી, $\angle$Q = 65°, QR = 5.5 સેમી Δ PQR નું અંતઃવર્તુળ દોરો.

પ્રથમ કાચી આકૃતિ દોરો અને તેમાં આપેલી માહિતી દર્શાવો.



કાચી આકૃતિ 6.14

રચનાના પગથિયાં :

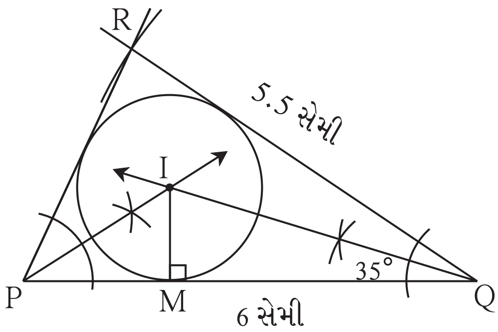
(1) આપેલ માપનો Δ PQR દોરો.

(2) કોઈપણ બે ખૂણાના દુભાજક દોરો.

(3) ખૂણાના દુભાજકોના છેદનબિંદુને I નામ આપો.

(4) બિંદુ I માંથી બાજુ PQ પર IM એ લંબ દોરો.

(5) IM ને ત્રિજ્યા અને I ને કેન્દ્ર લઈને વર્તુળ દોરો.



આકૃતિ 6.15

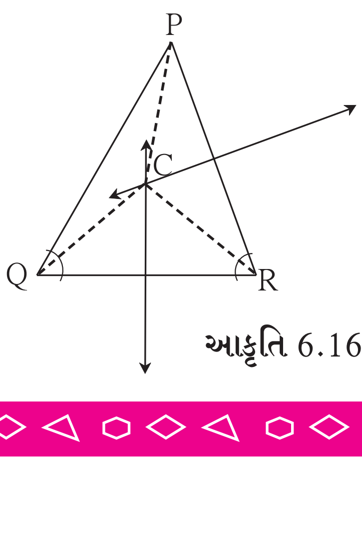
આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓને અંદરથી સ્પર્શનારા વર્તુળને ત્રિકોણનું અંતઃવર્તુળ કહેવાય છે.
અને તે વર્તુળના કેન્દ્રને અંતઃવર્તુળ કેન્દ્ર અથવા અંતઃમધ્ય અથવા અંતઃકેન્દ્ર કહેવાય છે.

યાદ કરીએ.

પાછલા ધોરણમાં આપણે ત્રિકોણની બાજુઓના લંબદુભાજક એકસંગામી હોય છે તે ગુણધર્મ વિવિધ ત્રિકોણ દોરી ચકાસ્યો. ત્રિકોણની બાજુઓના લંબદુભાજકોનું સંગામી બિંદુ C અક્ષરથી દર્શાવાય છે.

જાણી લઈએ.



આકૃતિ 6.16

Δ PQR માં બાજુઓના લંબદુભાજક C બિંદુમાં મળ્યા છે. માટે C એ લંબદુભાજકોનું સંગામી બિંદુ છે.

ત્રિકોણનું પરિવર્તુળ (Circumcircle)

બિંદુ C એ ત્રિકોણ PQR ની ત્રણે બાજુઓના લંબદુભાજક પરનું બિંદુ છે. PC, QC, RC જોડો. રેખાખંડના લંબદુભાજક પરનું પ્રત્યેક બિંદુ તે રેખાખંડોના અંત્યબિંદુથી સમાન અંતરે હોય છે. તે આપણે જોઈ ગયા.

બિંદુ C એ રેખ PQ ના લંબદુભાજક પર છે. $\therefore$ PC = QC I

બિંદુ C એ રેખ QR ના લંબદુભાજક પર છે. $\therefore$ QC = RC II

$\therefore$ PC = QC = RC . . . . .વિધાન I અને II પરથી

$\therefore$ C બિંદુને કેન્દ્ર લઈ અને PC ને ત્રિજ્યા લઈ દોરેલ વર્તુળ ત્રિકોણના ત્રણે શિરોબિંદુમાંથી પસાર થશે. આવા વર્તુળને ત્રિકોણનું પરિવર્તુળ કહે છે.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

ત્રિકોણના સર્વ શિરોબિંદુમાંથી પસાર થનારા વર્તુળ ત્રિકોણનું પરિવર્તુળ કહેવાય છે.
અને તે વર્તુળના કેન્દ્રને પરિકેન્દ્ર કહેવાય છે.

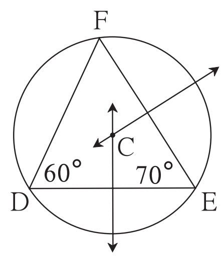
જાણી લઈએ.

ત્રિકોણનું પરિવર્તુળ દોરવું

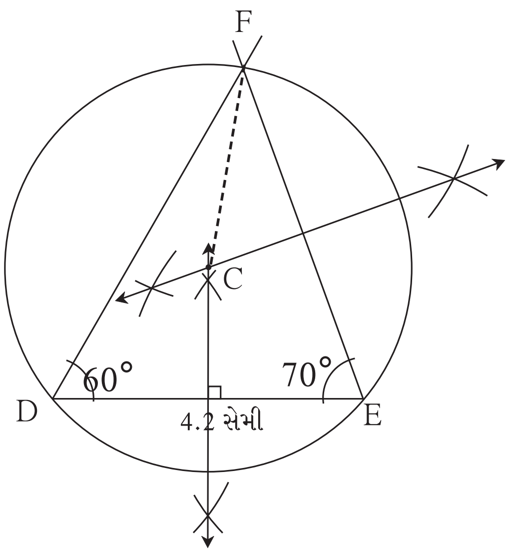
ઉદા. Δ DEF માં DE = 4.2 સેમી, $\angle$D = 60°, $\angle$E = 70° તો Δ DEF દોરી તેનું પરિવર્તુળ દોરો.

પ્રથમ કાચી આકૃતિ દોરી. તેમાં આપેલી માહિતી દર્શાવો.

કાચી આકૃતિ



આકૃતિ 6.17



આકૃતિ 6.18

રચનાના પગથિયાં :

(1) આપેલ માપનો ત્રિકોણ DEF દોરો.

(2) કોઈપણ બે બાજુઓના લંબદુભાજક દોરો.

(3) તે લંબદુભાજક જ્યાં મળે તે બિંદુને C નામ આપો.

(4) રેખ CF દોરો.

(5) CF ને ત્રિજ્યા અને C કેન્દ્ર લઈ વર્તુળ દોરો.

કૃતિ :

વિવિધ માપના અને વિવિધ પ્રકારના ત્રિકોણ દોરો. તેમના અંતઃવર્તુળ અને પરિવર્તુળ દોરો. તમારું નિરીક્ષણ નીચેના કોષ્ટકમાં નોંધો અને ચર્ચા કરો.

ત્રિકોણનો પ્રકાર	સમભુજ ત્રિકોણ	સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ	વિષમભુજ ત્રિકોણ
અંતઃવર્તુળના કેન્દ્રનું સ્થાન	ત્રિકોણની અંદર	ત્રિકોણની અંદર	ત્રિકોણની અંદર
પરિવર્તુળના કેન્દ્રનું સ્થાન	ત્રિકોણની અંદર	ત્રિકોણની અંદર અથવા બહાર અથવા ત્રિકોણ પર	

ત્રિકોણનો પ્રકાર	લઘુકોણ ત્રિકોણ	કાટકોણ ત્રિકોણ	ગુરૂકોણ ત્રિકોણ
અંતઃવર્તુળના કેન્દ્રનું સ્થાન			
પરિવર્તુળના કેન્દ્રનું સ્થાન		કર્ણના મધ્યપર	

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

- ત્રિકોણનું અંતઃવર્તુળ ત્રિકોણની બધી બાજુઓને અંદરથી સ્પર્શે છે.
- ત્રિકોણનું અંતઃવર્તુળ દોરવા માટે ત્રિકોણના કોઈપણ બે ખૂણાઓના દુભાજક દોરવા પડે છે.
- ત્રિકોણનું પરિવર્તુળ ત્રિકોણના ત્રણે શિરોબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.
- ત્રિકોણનું પરિવર્તુળ દોરવા માટે તેની કોઈપણ બે બાજુઓનો લંબદુભાજક દોરવો પડે છે.
- લઘુકોણ ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર અંદર હોય છે.
- કાટકોણ ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર કર્ણનું મધ્યબિંદુ હોય છે.
- ગુરૂકોણ ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર ત્રિકોણની બહાર હોય છે.
- કોઈપણ ત્રિકોણનું અંતઃમધ્ય ત્રિકોણના અંતઃભાગમાં હોય છે.

કૃતિ : કોઈપણ એક સમભુજ ત્રિકોણ દોરી તેનું પરિવર્તુળ તથા અંતઃવર્તુળ દોરો.

ઉપરની કૃતિ કરતી વખતે તમને નીચેની બાબતોમાં શું જોવા મળ્યું ?

(1) ત્રિકોણનું પરિવર્તુળ તથા અંતઃવર્તુળ દોરતી વખતે તેના ખૂણાના દુભાજક અને બાજુના લંબદુભાજક એક જ આવ્યા કે ?

(2) પરિવર્તુળ અને અંતઃવર્તુળનું કેન્દ્ર એક જ છે કે? જો તેમ હોય તો તેનું કારણ શું હોઈ શકે?

(3) પરિવર્તુળની ત્રિજ્યા અને અંતઃવર્તુળની ત્રિજ્યા માપી તેનો ગુણોત્તર શોધો.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

- સમભુજ ત્રિકોણનું પરિવર્તુળ અને અંતઃવર્તુળ દોરતી વખતે તેના ખૂણાના દુભાજક અને બાજુના લંબદુભાજક એક જ હોય છે.
- સમભુજ ત્રિકોણનું પરિવર્તુળ અને અંતઃવર્તુળનું કેન્દ્ર એક જ આવે છે.
- સમભુજ ત્રિકોણના પરિવર્તુળની ત્રિજ્યાનો અંતઃવર્તુળની ત્રિજ્યા સાથેનો ગુણોત્તર 2 : 1 હોય છે.

મહાવરાસંગ્રહ 6.3

1. Δ ABC દોરો જેમાં, $\angle B = 100^\circ$, BC = 6.4 સેમી, $\angle C = 50^\circ$. ત્રિકોણનું અંતઃવર્તુળ દોરો.
2. Δ PQR દોરો જેમાં, $\angle P = 70^\circ$, $\angle R = 50^\circ$, QR = 7.3 સેમી. આ ત્રિકોણનું પરિવર્તુળ દોરો.
3. Δ XYZ દોરો જેમાં, XY = 6.7 સેમી, YZ = 5.8 સેમી, XZ = 6.9 સેમી. ત્રિકોણનું અંતઃવર્તુળ દોરો.
4. Δ LMN માં, LM = 7.2 સેમી, $\angle M = 105^\circ$, MN = 6.4 સેમી. તો ત્રિકોણ LMN દોરી તેનું પરિવર્તુળ દોરો.
5. Δ DEF દોરો. DE = EF = 6 સેમી $\angle F = 45^\circ$. આ ત્રિકોણનું પરિવર્તુળ દોરો.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 6

1. નીચેના બહુપર્યાયી પ્રશ્નોના આપેલા પર્યાયોમાંથી યોગ્ય પર્યાય શોધો.

(i) એક વર્તુળની ત્રિજ્યા 10 સેમી અને તેની એક જીવાનું કેન્દ્રથી અંતર 6 સેમી છે. તો તે જીવાની લંબાઈ કેટલી?

(A) 16 સેમી (B) 8 સેમી (C) 12 સેમી (D) 32 સેમી

(ii) ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓના દુભાજક એકસંગામી હોય છે. તે સંગામીબિંદુને શું કહેવાય છે?

(A) મધ્યગાસંપાત (B) પરિકેન્દ્ર (C) અંતઃકેન્દ્ર (D) લંબસંપાત

(iii) ત્રિકોણના બધા શિરોબિંદુમાંથી પસાર થનારા વર્તુળને શું કહેવાય?

(A) પરિવર્તુળ (B) અંતઃવર્તુળ (C) એકરૂપ વર્તુળ (D)એક કેન્દ્રી વર્તુળ

(iv) એક વર્તુળની જીવા 24 સેમી અને તેનું કેન્દ્રથી અંતર 5 સેમી છે તો તે વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

(A) 12 સેમી (B) 13 સેમી (C) 14 સેમી (D) 15 સેમી

(v) 2.9 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની વધુમાં વધુ કેટલી લંબાઈની જીવા હોઈ શકે?

(A) 3.5 સેમી (B) 7 સેમી (C) 10 સેમી (D) 5.8 સેમી

(vi) એક વર્તુળની ત્રિજ્યા 4 સેમી છે. O એ વર્તુળનું કેન્દ્રબિંદુ છે. l(OP) = 4.2 સેમી હોય તો બિંદુ 'P' નું સ્થાન ક્યાં હશે ?

(A) કેન્દ્રબિંદુ પર (B) વર્તુળના અંતઃભાગમાં (C)વર્તુળના બાહ્ય ભાગમાં (D)વર્તુળ પર

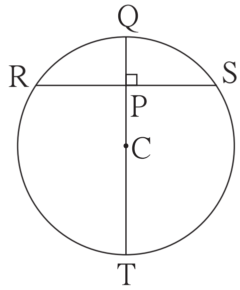
(vii) એક વર્તુળના કેન્દ્રની પરસ્પર વિરુદ્ધ બાજુએ આવેલી તેમ જ સમાંતર હોય તેવી જીવાની લંબાઈ 6 સેમી અને 8 સેમી છે. તે વર્તુળની ત્રિજ્યા 5 સેમી હોય તો જીવા વચ્ચેનું અંતર કેટલું ?

(A) 2 સેમી (B) 1 સેમી (C) 8 સેમી (D) 7 સેમી

2. સમભુજ Δ DSP માં DS = 7.5 સેમી છે. તો Δ DSP નું પરિવર્તુળ અને અંતઃવર્તુળ દોરો અને તેની ત્રિજ્યા માપો. પરિવર્તુળની ત્રિજ્યાને અંતઃવર્તુળની ત્રિજ્યા સાથેનો ગુણોત્તર શોધો.

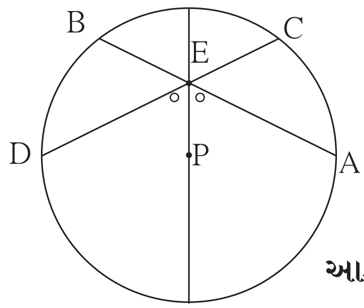
3. Δ NTS માં NT = 5.7 સેમી, TS = 7.5 સેમી અને $\angle$NTS = 110° છે. તો Δ NTS દોરી તેનું પરિવર્તુળ અને અંતઃવર્તુળ દોરો.

4. આકૃતિ 6.19 માં C એ વર્તુળનું કેન્દ્ર છે, રેખ QT એ વ્યાસ છે. CT = 13, CP = 5 તો જીવા RS શોધો.



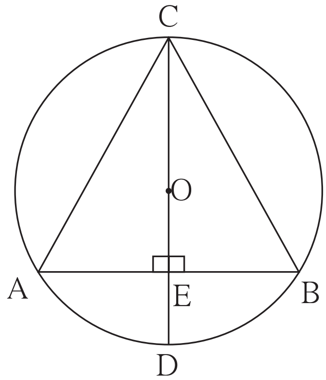
આકૃતિ 6.19

5. આકૃતિ 6.20 માં P એ વર્તુળનું કેન્દ્ર છે, જીવા AB અને જીવા CD વ્યાસ પર બિંદુ E માં છેદે છે.
જો $\angle AEP \cong \angle DEP$
તો સાબિત કરો કે AB = CD.



આકૃતિ 6.20

6. આકૃતિ 6.21માં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળનો CD વ્યાસ અને AB એ જીવા છે. વ્યાસ CD એ જીવા AB ને E બિંદુએ લંબ છે , તો Δ ABC સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ છે તેમ દર્શાવો.



આકૃતિ 6.21

ICT Tools or Links

Geogebra software ની મદદથી વિવિધ વર્તુળો દોરી તેમાં જીવાના ગુણધર્મો પ્રત્યક્ષ અનુભવો. જુદાં જુદાં ત્રિકોણોના પરિવર્તુળ, અંતઃવર્તુળ દોરો. Move option નો ઉપયોગ કરી મૂળ ત્રિકોણના આકાર બદલી અંતઃકેન્દ્ર, પરિકેન્દ્રના સ્થાન કેવી રીતે બદલાય છે તે અનુભવો.

7 નિર્દેશક ભૂમિતિ

673U4L

ચાલો શીખીએ.

- અક્ષ આરંભબિંદુ અને ચરણ
- બિંદુના સમતલીય નિર્દેશક
- બિંદુ સ્થાપન કરવા
- X–અક્ષને સમાંતર રેખા
- Y–અક્ષને સમાંતર રેખા
- રેખાનું સમીકરણ

એક ઈમારતની સામેના મેદાનમાં ચિંટૂ અને તેના મિત્રો ક્રિકેટ રમતા હતા. એક દાદા ત્યાં આવ્યા.

દાદા : અરે ચિંટૂ, દત્તાભાઈ આ જ સોસાયટીમાં રહે છે ને ?

ચિંટૂ : હા, અહીં જ રહે છે. બીજા માળે તેમનું ઘર છે. અહીંથી પેલી બારી દેખાય છેને ત્યાં.

દાદા : અરે, બીજા માળે મને પાંચ બારીઓ દેખાય છે. ચોક્કસ ક્યું ઘર?

ચિંટૂ : બીજા માળે ડાબી બાજુએથી ત્રીજી બારી તેમની છે.

ચિંટૂએ કરેલ દત્તાભાઈના ઘરના સ્થાનનું વર્ણન એટલે જ નિર્દેશક ભૂમિતિની મૂળ સંકલ્પના છે. ઘરનું ચોક્કસ સ્થાન સમજવા માટે માત્ર માળાનો નંબર કહેવાથી નહીં થાય માટે ડાબી બાજુથી અથવા જમણી બાજુથી કેટલામું ઘર તે જણાવવું પડશે એટલે કે ક્રમથી બે સંખ્યા જણાવવી પડશે. જમીનથી બીજો માળો અને ડાબી બાજુથી ત્રીજી બારી એમ બે **ક્રમવાચક** સંખ્યા વાપરવી પડી.

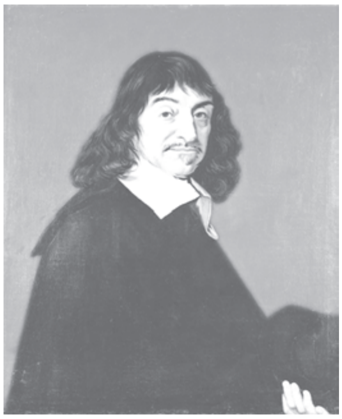
જાણી લઈએ.

અક્ષ, આરંભબિંદુ અને ચરણ (Axes, origin, quadrants)

દત્તાભાઈના ઘરનું સ્થાન બે ક્રમવાચક સંખ્યા વડે ચોક્કસપણે કહી શકાયું. તેવી જ રીતે એકબીજાને લંબ હોય તેવી બે રેખાના અંતર વડે સમતલખાના એકાદ બિંદુનું સ્થાન ચોક્કસપણે કહી શકાય છે.

એકાદ બિંદુનું સમતલીય સ્થાન કહેવા માટે, તેજ સમતલમાં એક આડી સંખ્યારેખા દોરવામાં આવે છે. આ સંખ્યારેખાને X–અક્ષ કહેવાય છે.

રેને દેકાર્ત (1596–1650)



સત્તરમી સદીના ફ્રેંચ ગણિતશાસ્ત્રી રેને દેકાર્તે સમતલીય બિંદુનું સ્થાન ચોક્કસપણે દર્શાવવા માટે 'નિર્દેશક પદ્ધતિ' સૂચવી. આ પદ્ધતિને 'કાર્તેશિયન નિર્દેશક પદ્ધતિ' કહેવાય છે. દેકાર્તના નામ પરથી આ નામ આપવામાં આવ્યું છે. દેકાર્તે પ્રથમ ભૂમિતિ અને બીજગણિત વચ્ચે સહસંબંધ પ્રસ્થાપિત કરતા ગણિતમાં ક્રાંતિ આવી.

કાર્તેશિયન નિર્દેશક પદ્ધતિ એ વિશ્લેષક ભૂમિતિનો (Analytical Geometry) પાયો છે. 'લા જોમેટ્રિક' એ રેને દેકાર્તનું પ્રથમ પુસ્તક આ પુસ્તકમાં તેમણે ભૂમિતિના અભ્યાસ માટે બીજગણિતનો ઉપયોગ કર્યો હતો. સમતલીય બિંદુ વાસ્તવિક સંખ્યાની ક્રમિક જોડીથી દર્શાવી શકાય એવું તેમણે સૌ પ્રથમ આ પુસ્તકમાં જણાવ્યું. આ ક્રમિક જોડીને 'કાર્તેશિયન નિર્દેશક' કહેવાય છે.

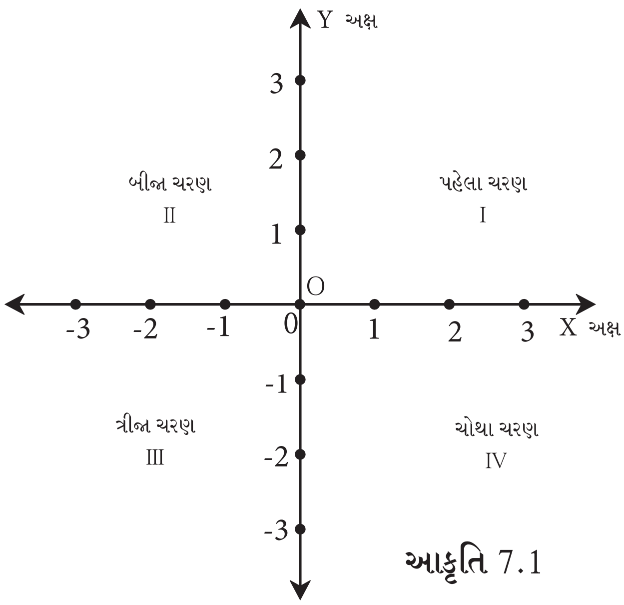
નિર્દેશક ભૂમિત્તિનો ઉપયોગ ભૌતિકશાસ્ત્ર, અભિયાંત્રિકી, નૌકાનયનશાસ્ત્ર, ભૂકંપશાસ્ત્ર અને કલા એમ વિવિધ ક્ષેત્રોમાં કરવામાં આવે છે. તંત્રજ્ઞાનની પ્રગતિમાં નિર્દેશક ભૂમિતિ મહત્વની ભૂમિકા ભજવે છે. જિઓજેબ્રામાં ભૂમિતિ અને બીજગણિતનો સહસંબંધ સ્પષ્ટ દેખાઈ આવે છે. Geometry અને Algebra આ શબ્દો પરથી જ Geogebra એવું નામ આપ્યું છે.

X–અક્ષપર 0 નિર્દેશક વાળા બિંદુમાંથી X–અક્ષને લંબ હોય તેવી બીજી રેખા એટલે Y–અક્ષ. સામાન્ય પણે બંને સંખ્યારેખા પર 0 એક જ બિંદુ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. તે બિંદુને આરંભબિંદુ (Origin) કહેવાય છે. તે 'O' એ અંગ્રેજી અક્ષર વડે દર્શાવાય છે.

X–અક્ષપર O ની જમણી બાજુએ ધનસંખ્યા જ્યારે ડાબી બાજુએ ઋણ સંખ્યા દર્શાવવામાં આવે છે.

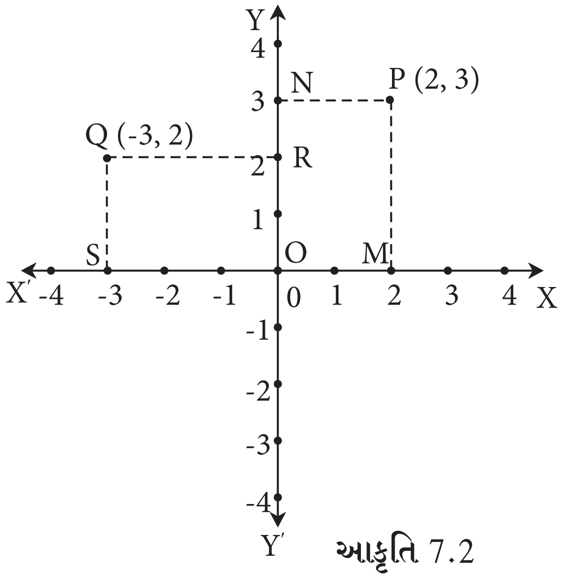
Y–અક્ષપર O ની ઉપરી બાજુએ ધનસંખ્યા અને નીચેની બાજુએ ઋણ સંખ્યા દર્શાવવામાં આવે છે.

X અને Y અક્ષને કારણે સમતલના ચાર વિભાગ હોય છે. પ્રત્યેક વિભાગને **ચરણ** કહેવામાં આવે છે. આ ચરણમાં અક્ષ પરના બિંદુઓને સમાવેશ કરવામાં આવતો નથી. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ઘડિયાળના કાંટાની વિરુધ્ધ દિશામાં, ચરણના ક્રમાંક માનવાનો સંકેત છે.



આકૃતિ 7.1

સમતલીય બિંદુના સહનિર્દેશક (Co-ordinates of a point in a plane)



આકૃતિ 7.2

X–અક્ષ અને Y–અક્ષ દ્વારા નિશ્ચિત થયેલ સમતલમાં બિંદુ P દર્શાવવામાં આવ્યું છે. તેનું સ્થાન તેના બંને અક્ષથી અંતર વડે નિશ્ચિત કરી શકાય. તે માટે રેખ PM ⊥ X–અક્ષ અને રેખ PN ⊥ Y–અક્ષ દોર્યો.

બિંદુ M નું X અક્ષથી અંતર 2 એકમ છે. N એ Y અક્ષથી અંતર 3 એકમ છે. એટલે બિંદુ P નું x નિર્દેશક 2 છે અને y નિર્દેશક 3 છે.

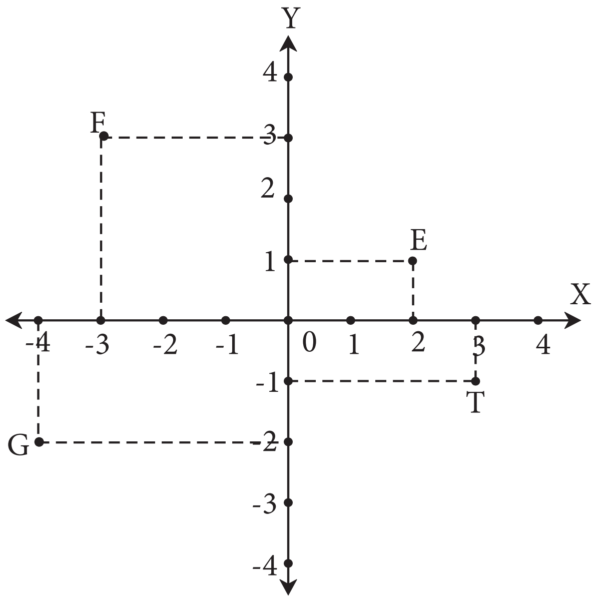
બિંદુનું સ્થાન કહેતી વખતે તેનું x સહનિર્દેશક અક્ષથી અંતર પ્રથમ જણાવવું એવો સંકેત છે. આ સંકેત અનુસાર P બિંદુના નિર્દેશકોના અંતરનો 2, 3 આ ક્રમ નિશ્ચિત થાય છે. અને બિંદુ P નું સ્થાન સંખ્યાની (2,3) આ જોડી વડે ટૂંકમાં કહી શકાય.

બિંદુ Q પાસેથી X અક્ષપર QS લંબ દોરો અને Y અક્ષપર QR લંબ દોરો. Q ના X અક્ષપર નિર્દેશક –3 અને Y અક્ષપર નિર્દેશક 2 છે એટલે બિંદુ Q ના નિર્દેશક (–3,2) છે.

ઉદા. બાજુની આકૃતિમાં દર્શાવેલા E, F, G, T બિંદુના નિર્દેશક લખો.

ઉકેલ :

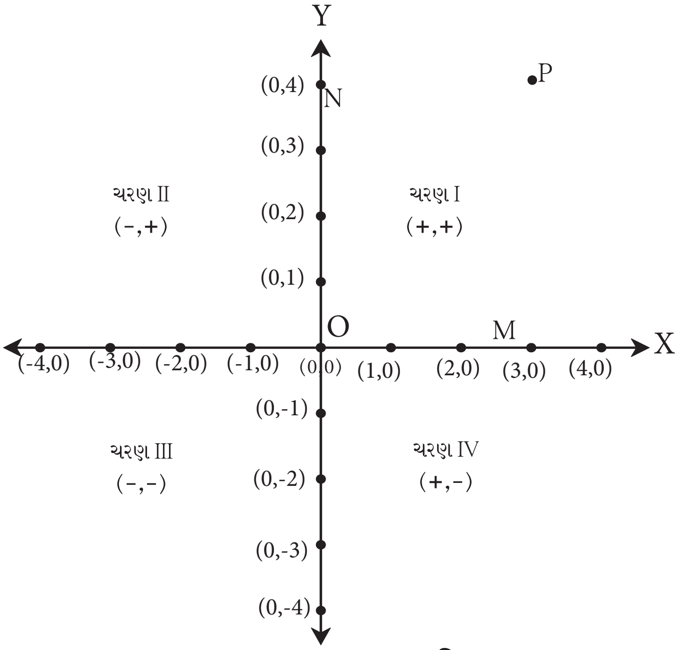
- બિંદુ E ના નિર્દેશક (2,1) છે.
- બિંદુ F ના નિર્દેશક (–3,3) છે.
- બિંદુ G ના નિર્દેશક (–4,–2) છે.
- બિંદુ T ના નિર્દેશક (3,–1) છે.



આકૃતિ 7.3

જાણી લઈએ.

અક્ષ પરના બિંદુના નિર્દેશક (Co–ordinates of points on the axes)



આકૃતિ 7.4

M બિંદુનો x નિર્દેશક એટલે M બિંદુનું Y અક્ષથી અંતર. તે બિંદુનું X અક્ષથી અંતર શૂન્ય છે. માટે M નો y નિર્દેશક 0 છે.

આ પરથી X અક્ષ પરના M બિંદુના સહનિર્દેશક (3,0) છે. Y અક્ષ પરના N બિંદુનો y નિર્દેશક 4 છે. કારણ કે તે બિંદુ X અક્ષથી 4 અંતર પર છે અને N બિંદુનું Y અક્ષથી અંતર શૂન્ય છે. માટે N નો x નિર્દેશક 0 છે.

આ પરથી Y અક્ષ પરના N બિંદુના નિર્દેશક (0,4) છે.

હવે ‘O’ એ આરંભબિંદુ X અને Y બંને અક્ષો પર છે. માટે તે બિંદુનું X અને Y આ બંને અક્ષોથી અંતર 0 છે. માટે ‘O’ ના નિર્દેશક (0,0) છે.

આ પરથી સમતલમાંના પ્રત્યેક બિંદુના નિર્દેશકોની એક અને એકજ જોડી જોડાયેલી હોય છે.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

- X –અક્ષપરના પ્રત્યેક બિંદુના y નિર્દેશક શૂન્ય હોય છે.
- Y –અક્ષપરના પ્રત્યેક બિંદુના x નિર્દેશક શૂન્ય હોય છે.
- આરંભ બિંદુના નિર્દેશક (0,0) હોય છે.

ઉદા. નીચેના બિંદુ કયા ચરણમાં અથવા કયા અક્ષ પર છે તે ઓળખો.

A(5,7), B(–6,4), C(4,–7), D(–8,–9), P(–3,0), Q(0,8)

ઉકેલ : A(5,7) નો x નિર્દેશક ધન છે અને y નિર્દેશક ધન છે. ∴ બિંદુ A એ પહેલા ચરણમાં છે.

B(–6,4) નો x નિર્દેશક ઋણ છે અને y નિર્દેશક ધન છે. ∴ બિંદુ B એ બીજા ચરણમાં છે.

C(4,–7) નો x નિર્દેશક ધન છે અને y નિર્દેશક ઋણ છે. ∴ બિંદુ C એ ચોથા ચરણમાં છે.

D(–8,–9) નો x નિર્દેશક ઋણ છે અને y નિર્દેશક ઋણ છે. ∴ બિંદુ D એ ત્રીજા ચરણમાં છે.

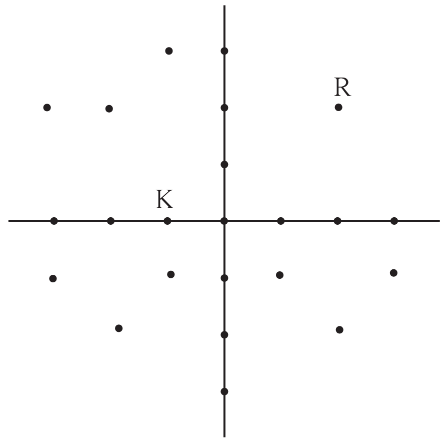
P(−3,0) નો y નિર્દેશક શૂન્ય છે. ∴ બિંદુ P એ X અક્ષપર છે.

Q(0,8) નો x નિર્દેશક શૂન્ય છે. ∴ બિંદુ Q એ Y અક્ષપર છે.

કૃતિ : શાળાના મેદાનમાં બાજુની આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આડી અને ઊભી હરોળમાં વિદ્યાર્થીઓને બેસાડો.

જેથી X−અક્ષ અને Y−અક્ષ તૈયાર થશે.

- રંગીન ટપકાંના સ્થાને ચારેય ચરણમાં વિદ્યાર્થી ઓને બેસાડો.
- હવે જુદાં જુદાં વિદ્યાર્થીઓના નામના પ્રથમ અક્ષર બોલીને આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ઊભા કરો અને તેમને તેમના નિર્દેશકો પૂછો. ઉદા. રાજેન્દ્ર (2, 2) અને કિર્તી (−1, 0)
- આ રીતે મેદાન પરથી આકૃતિનું સમતલમાંના બિંદુનું સ્થાન સહજ પણે સ્પષ્ટ થશે.



આકૃતિ 7.5

જાણી લઈએ.

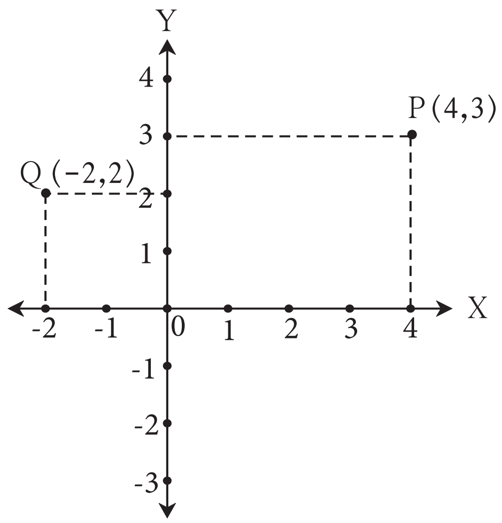
આપેલા નિર્દેશકો અનુસાર બિંદુ સ્થાપન કરવું (To plot the points of given co−ordinates)

ધારો કે P (4,3) અને Q (−2,2) આ બિંદુઓ સ્થાપન કરવાના છે.

બિંદુ સ્થાપન કરવાના પગથિયાં

(i) સમતલમાં X−અક્ષ અને Y−અક્ષ દોરો. આરંભબિંદુ દર્શાવો.

(ii) P (4,3) આ બિંદુ દર્શાવવા માટે X અક્ષ પર 4 સંખ્યા દર્શાવનાર બિંદુમાંથી Y અક્ષને સમાંતર રેખા દોરો.
Y અક્ષ પર 3 સંખ્યા દર્શાવનાર બિંદુમાંથી X અક્ષને સમાંતર રેખા દોરો.



આકૃતિ 7.6

(iii) આ બે સમાંતર રેખાનું છેદનબિંદુ એટલે જ P (4,3) બિંદુ આ બિંદુ ક્યા ચરણમાં છે? નિરીક્ષણ કરો.

(iv) આ જ પ્રમાણે Q (−2,2) બિંદુ સ્થાપન કરો. આ બિંદુ બીજા ચરણમાં આવ્યું કે, આજ નિર્દેશક પદ્ધતિ પ્રમાણે R(−3,−4), S(3,−1) બિંદુ સ્થાપન કરો.

ઉદા. નીચેના બિંદુ ક્યા ચરણમાં ક્યા અક્ષ પર છે તે લખો.

(i) (5,3) (ii) (−2,4) (iii) (2,−5) (iv) (0,4)
(v) (−3,0) (vi) (−2,2.5) (vii) (5,3.5) (viii) (−3.5,1.5)
(ix) (0, −4) (x) (2,−4)

ઉકેલ :

	નિર્દેશક	ચરણ/અક્ષ
(i)	(5,3)	ચરણ I
(ii)	(−2,4)	ચરણ II
(iii)	(2,−5)	ચરણ IV
(iv)	(0,4)	Y અક્ષ
(v)	(−3,0)	X અક્ષ

	નિર્દેશક	ચરણ/અક્ષ
(vi)	(−2, −2.5)	ચરણ III
(vii)	(5,3.5)	ચરણ I
(viii)	(−3.5,1.5)	ચરણ II
(ix)	(0, −4)	Y અક્ષ
(x)	(2,−4)	ચરણ IV

મહાવરાસંગ્રહ 7.1

1. નીચે આપેલ બિંદુ તેના સહનિર્દેશક પરથી ક્યા ચરણમાં અથવા ક્યા અક્ષપર છે તે લખો.
   - A(−3,2), • B(−5,−2), • K(3.5,1.5), • D(2,10),
   - E(37,35), • F(15,−18), • G(3,−7), • H(0,−5),
   - M(12,0), • N(0,9), • P(0,2.5), • Q(−7,−3)

2. નીચેના બિંદુઓ ક્યા ચરણમાં હશે ?

   (i) જેના બંને નિર્દેશકો ધન છે. (ii) જેના બંને નિર્દેશકો ઋણ છે.

   (iii) જેનો x નિર્દેશક ધન અને y નિર્દેશક ઋણ છે. (iv) જેનો x નિર્દેશક ઋણ અને y નિર્દેશક ધન છે.

3. સમતલમાં નિર્દેશક પધ્ધતિ નિશ્ચિત કરો અને નીચેના બિંદુ સ્થાપન કરો.

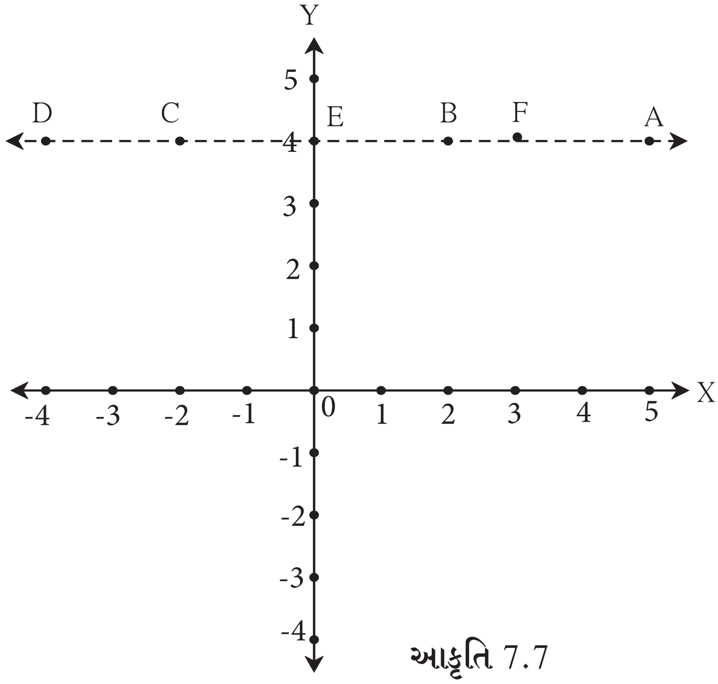
   L(−2,4), M(5,6), N(−3,−4), P(2,−3), Q(6,−5), S(7,0), T(0,−5)

જાણી લઈએ.

X –અક્ષને સમાંતર રેખા (Lines parallel to X–axis)

- આલેખ પત્ર પર નીચેના બિંદુ સ્થાપન કરો.
  A(5,4), B(2,4), C(–2,4), D(–4,4), E(0,4), F(3,4)
- બિંદુના સહનિર્દેશકોનું નિરીક્ષણ કરો.
- દરેક બિંદુના y નિર્દેશક સમાન છે તે ધ્યાનમાં આવ્યું કે ?
- સર્વ બિંદુ એકરેખિય છે. (સમરેખ)
- આ રેખા કયા અક્ષને સમાંતર છે?
- રેખા DA પરના પ્રત્યેક બિંદુના y નિર્દેશક સમાન એટલે કે 4 છે. તે સ્થિર છે. એટલે રેખા DA નું વર્ણન $y = 4$ આ સમીકરણથી કરાય છે. કોઈપણ બિંદુના y નિર્દેશક 4 છે તો તે બિંદુ તે રેખા પર એટલે રેખા DA પર હશે.

  X અક્ષથી 4 એકમ અંતરે સમાંતર આવેલી રેખાનું સમીકરણ $y = 4$ છે.



આકૃતિ 7.7

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

- X અક્ષને સમાંતર અને તેનાથી 6 એકમ અંતરે X અક્ષની નીચે રેખા દોરી શકાય ?
- $(-3,-6)$, $(10,-6)$, $(\frac{1}{2}, -6)$ આ બધા બિંદુઓ તે રેખા પર હશે ?
- આ રેખાનું સમીકરણ કયું હશે ?

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

જો $b > 0$ હોય અને $y = b$ એ X અક્ષને સમાંતર આવેલી $(0, b)$ બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા દોરીએ તો તે રેખા X અક્ષને તેની ઉપરની બાજુએ સમાંતર હશે અને $b < 0$ હોય તો તે રેખા X અક્ષને તેની નીચેની બાજુએ સમાંતર હશે.

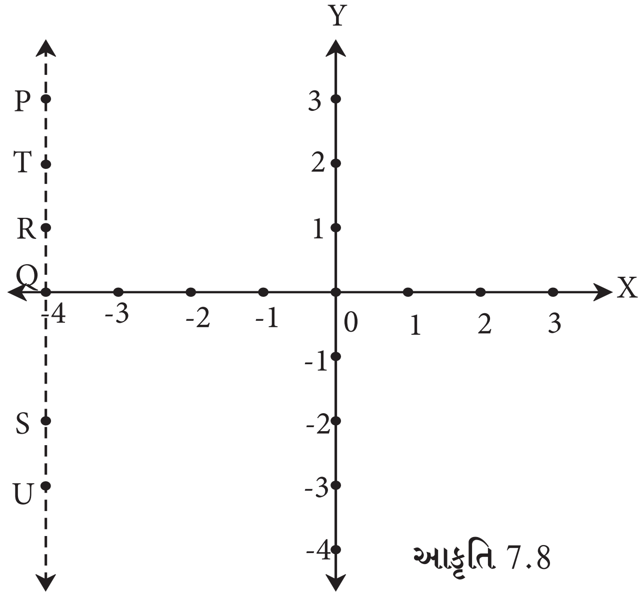
X અક્ષને સમાંતર આવેલી રેખાનું સમીકરણ $y = b$ સ્વરૂપનું હોય છે.

જાણી લઈએ.

Y–અક્ષને સમાંતર રેખા (Lines parallel to Y–axis)

- આલેખ પત્ર પર નીચેના બિંદુ સ્થાપન કરો.
  P(–4,3), Q(–4,0), R(–4,1), S(–4,–2), T(–4,2), U(–4,–3)
- બિંદુના સહનિર્દેશકોનું નિરીક્ષણ કરો.
- દરેક બિંદુના x નિર્દેશક સમાન છે તે ધ્યાનમાં આવ્યું કે ?
- સર્વ બિંદુ એકરેખિય છે. (સમરેખ)
- આ રેખા ક્યા અક્ષને સમાંતર છે?
- રેખા PS પરના પ્રત્યેક બિંદુના x નિર્દેશક સમાન એટલે કે –4 છે. તે સ્થિર છે. એટલે રેખા PS નું વર્ણન x = –4 આ સમીકરણથી કરાય છે. કોઈપણ બિંદુના x નિર્દેશક –4 છે તો દરેક બિંદુ તે રેખા PS પર હશે.

Y અક્ષથી તેની ડાબી બાજુ 4 એકમ અંતરે સમાંતર આવેલી રેખાનું સમીકરણ x = –4 છે.



આકૃતિ 7.8

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

- Y અક્ષને સમાંતર અને તેનાથી 2 એકમ અંતરે Y અક્ષની નીચે રેખા દોરી શકાય ?
- (2,10), (2,8), (2, $-\frac{1}{2}$) આ બધા બિંદુઓ તે રેખા પર હશે ?
- આ રેખાનું સમીકરણ કયું હશે ?

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

જો $x = a$ એ Y અક્ષને સમાંતર આવેલી (a, 0) બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા દોરીએ અને $a > 0$ તો તે રેખા Y અક્ષને તેની જમણી બાજુએ સમાંતર હશે અને $a < 0$ હોય તો તે રેખા Y અક્ષને તેની ડાબી બાજુએ સમાંતર હશે.

Y અક્ષને સમાંતર આવેલી રેખાનું સમીકરણ $x = a$ સ્વરૂપનું હોય છે.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

(1) X–અક્ષ પરના પ્રત્યેક બિંદુનો y નિર્દેશક 0 હોય છે. તેથી ઉલટ જે બિંદુનો y નિર્દેશક 0 હોય છે તે બિંદુ X–અક્ષ પર હોય છે, એટલે X અક્ષનું સમીકરણ $y = 0$ એમ લખાય છે.

(2) Y–અક્ષ પરના પ્રત્યેક બિંદુનો x નિર્દેશક 0 હોય છે. તેથી ઉલટ જે બિંદુનો x નિર્દેશક 0 હોય છે તે બિંદુ Y–અક્ષ પર હોય છે, એટલે Y અક્ષનું સમીકરણ $x = 0$ એમ લખાય છે.

જાણી લઈએ.

રેખિય સમીકરણના આલેખ (Graph of linear equations)

ઉદા. $x = 2$ અને $y = -3$ આ સમીકરણોનો આલેખ દોરો.

ઉકેલ (i) આલેખ કાગળપર X અક્ષ અને Y અક્ષ દોરો.

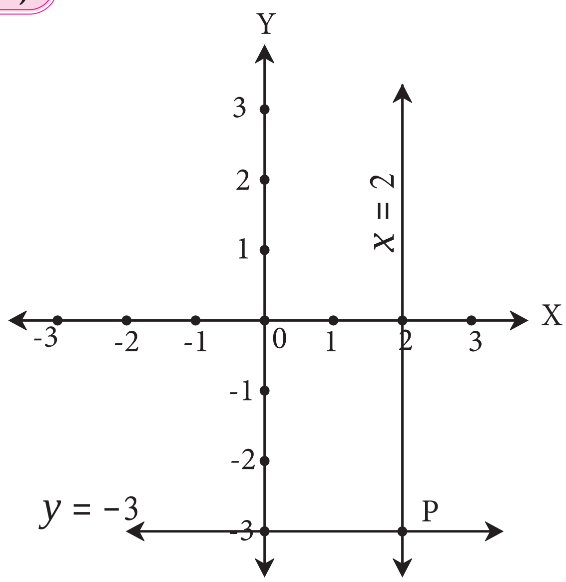
(ii) $x = 2$ આપેલ છે એટલે Y અક્ષની જમણી બાજુ, 2 એકમ અંતર પર Y અક્ષને સમાંતર રેખા દોરો.

(iii) $y = -3$ આપેલ છે એટલે X અક્ષની નીચેની બાજુને 3 એકમ અંતરે X અક્ષને સમાંતર રેખા દોરો.

(iv) અક્ષોને સમાંતર દોરેલી આ રેખા એટલે આપેલા સમીકરણનો આલેખ છે.

(v) આ બે રેખા એકબીજાને જ્યાં છેદે છે તે P બિંદુનો નિર્દેશક લખો.

(vi) P નો નિર્દેશક (2,−3) છે તે ચકાસો.

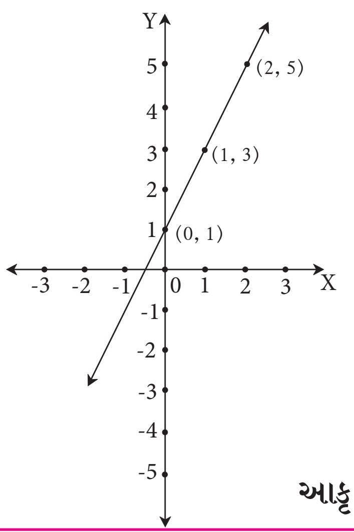


આકૃતિ 7.9

સામાન્યરૂપમાં રેખિય સમીકરણના આલેખ

કૃતિ : આલેખ કાગળપર (0,1) (1,3) (2,5) બિંદુ સ્થાપન કરો તે સમરેખ છે કે એ તપાસો, જો સમરેખ હોય તો, તેમાંથી પસાર થતી રેખા દોરો.

- તે રેખા કયા કયા ચરણોમાંથી પસાર થાય છે તે જુઓ.
- તે રેખા Y અક્ષને જે બિંદુમાં છેદે છે ત્યાં બિંદુનો નિર્દેશક લખો.
- તે રેખાપર ત્રીજા ચરણમાં કોઈપણ એક બિંદુ બતાવો. તેના નિર્દેશક લખો.



આકૃતિ 7.10

ઉદા. $2x - y + 1 = 0$ એ બે ચલનું સામાન્ય રૂપનું સમીકરણ છે. આ સમીકરણનો આલેખ દોરીએ.

ઉકેલ : $2x - y + 1 = 0$ એટલે $y = 2x + 1$

x ની કેટલીક કિંમત લઈ તેના પરથી y ની સંગત કિંમત શોધીએ.

દા.ત., જો $x = 0$ આ કિંમત સમીકરણમાં મૂકીએ તો $y = 1$ કિંમત મળે છે.

આ પ્રમાણે x ની $0, 1, 2, \frac{1}{2}, -2$ આ કિંમતો લઈને y ની કિંમત શોધીએ.

આ ક્રમિત જોડીનાં રૂપમાં કોષ્ટકમાં લખીએ.

x	0	1	2	$\frac{1}{2}$	-2
y	1	3	5	2	-3
(x, y)	$(0,1)$	$(1,3)$	$(2,5)$	$(\frac{1}{2}, 2)$	$(-2,-3)$

આ બિંદુ સ્થાપન કરીએ. સ્થાપન કરેલા બધા બિંદુઓ એકરેખિય (સમરેખ) છે તેની ખાત્રી કરીએ. તે બધાં બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા દોરીએ. આ રેખા એટલે જ $2x - y + 1 = 0$ આ સમીકરણનો આલેખ છે.

ICT Tools or Links

Geogebra Software ની મદદથી X-અક્ષ અને Y-અક્ષ દોરો. વિવિધ બિંદુ સ્થાપન કરો. Algebric View માં બિંદુના નિર્દેશક જુઓ અને અભ્યાસ કરો. અક્ષોને સમાંતર આવેલી રેખાના સમીકરણો જુઓ. Move Optionનો ઉપયોગ કરીને રેખાનું સ્થાન બદલતા રહો. X-અક્ષ અને Y-અક્ષ નું સમીકરણ કયું આવશે?

મહાવરાસંગ્રહ 7.2

1. આલેખ પત્ર પર A $(3,0)$, B$(3,3)$, C$(0,3)$ બિંદુ સ્થાપન કરો. AB અને BC જોડો. કઈ આકૃતિ તૈયાર થાય છે. તે લખો.
2. Y-અક્ષને સમાંતર અને તે અક્ષની ડાબી બાજુએ 7 એકમ અંતરે આવેલી રેખાનું સમીકરણ લખો.
3. X-અક્ષને સમાંતર અને તે અક્ષની નીચે 5 એકમ અંતરે આવેલી રેખાનું સમીકરણ લખો.
4. Q$(-3,-2)$ આ બિંદુ Y-અક્ષને સમાંતર આવેલી રેખા પર છે. તે રેખાનું સમીકરણ લખો અને તેનો આલેખ દોરો.
5. Y-અક્ષ અને રેખા $x = -4$ અક્ષ સમાંતર રેખા છે, તો એ રેખા વચ્ચેનું અંતર કેટલું?

6. નીચે પૈકી કયા સમીકરણોના આલેખ X અક્ષને સમાંતર છે અને કયા સમીકરણના આલેખ Y અક્ષને સમાંતર છે તે લખો.

(i) $x = 3$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x + 6 = 0$ (iv) $y = -5$

7. આલેખપત્રપર A(2,3), B(6,−1) અને C(0,5) બિંદુ સ્થાપન કરો. જો આ બિંદુઓ એકરેખિય (સમરેખ) હોય તો તેમાંથી પસાર થતી રેખા દોરો. આ રેખા X અક્ષ અને Y અક્ષને જે બિંદુએ છેદે તે બિંદુના નિર્દેશક લખો.

8. નીચેના સમીકરણોના આલેખ એક જ નિર્દેશક પધ્ધતિ પર દોરો. તેમના છેદનબિંદુના નિર્દેશક લખો. $x + 4 = 0$, $y - 1 = 0$, $2x + 3 = 0$, $3y - 15 = 0$

9. નીચેનાં સમીકરણોના આલેખ દોરો.

(i) $x + y = 2$ (ii) $3x - y = 0$ (iii) $2x + y = 1$

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 7 ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

1. નીચેના બહુપર્યાયી પ્રશ્નોના આપેલા ઉત્તરોમાંથી યોગ્ય પર્યાય શોધો.

(i) X અક્ષપરનું કોઈપણ બિંદુ નીચે પૈકી કયા રૂપમાં હોય છે ?

(A) (b, b) (B) (o, b) (C) (a, o) (D) (a, a)

(ii) રેખા $y = x$ આ રેખાપરના પ્રત્યેક બિંદુના નિર્દેશક નીચે પૈકી ક્યા રૂપમાં હોય છે ?

(A) (a, a) (B) (o, a) (C) (a, o) (D) $(a, -a)$

(iii) X અક્ષનું સમીકરણ નીચે પૈકી ક્યું ?

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $x = y$

(iv) $(-4, -3)$ બિંદુ ક્યા ચરણમાં હશે?

(A) પહેલા (B) બીજા (C) ત્રીજા (D) ચોથા

(v) $(-5,5)$, $(6,5)$, $(-3,5)$, $(0,5)$ આ બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સ્વરૂપ કેવું હશે?

(A) આરંભ બિંદુમાંથી પસાર થતી (B) Y અક્ષને સમાંતર

(C) X અક્ષને સમાંતર (D) આમાંથી એક પણ નહી.

(vi) P(−1,1), Q(3,−4), R(1,−1), S(−2,−3), T(−4,4) પૈકી ચોથા ચરણમાં આવેલું બિંદુ કયું?

(A) P અને T (B) Q અને R (C) ફક્ત S (D) P અને R

2. આકૃતિમાં કેટલાક બિંદુઓ દર્શાવ્યા છે.

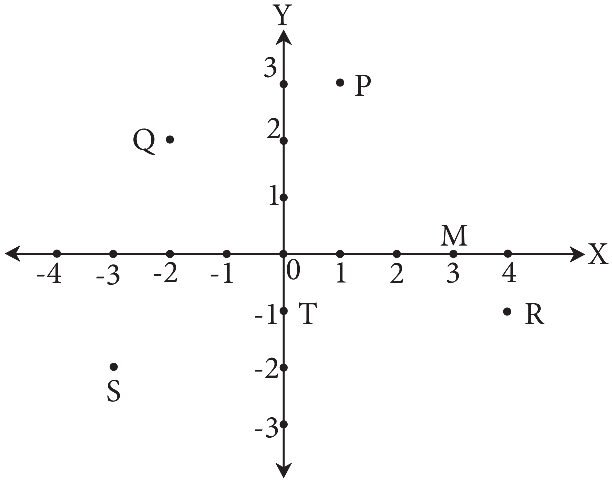
નીચેના પ્રશ્નાંના ઉત્તરો લખો.

(i) Q અને R બિંદુના નિર્દેશક લખો.

(ii) T અને M બિંદુના નિર્દેશક લખો.

(iii) ત્રીજા ચરણમાં ક્યું બિંદુ છે?

(iv) ક્યા બિંદુના x અને y નિર્દેશક સમાન છે?



આકૃતિ 7.11

3. નીચેના બિંદુઓ આલેખ પર સ્થાપન કર્યા સિવાય તે ક્યા ચરણમાં અથવા કયા અક્ષ પર હશે તે લખો.

(i) (5, −3) (ii) (−7, −12) (iii) (−23, 4)

(iv) (−9, 5) (v) (0, −3) (vi) (−6, 0)

4. નીચેના બિંદુ એકજ સહનિર્દેશક પદ્ધતિથી સ્થાપન કરો.

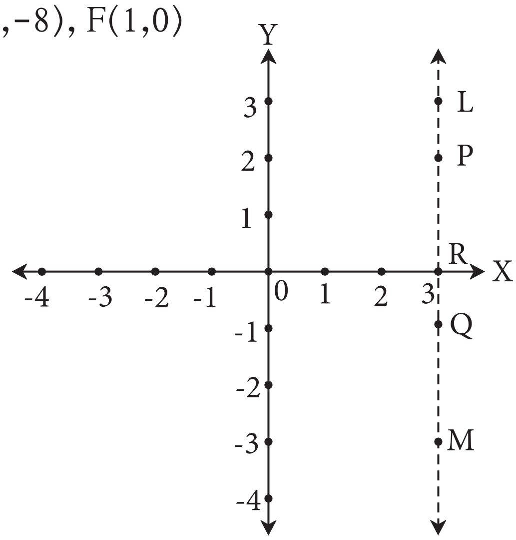
A(1,3), B(−3,−1), C(1,−4), D(−2,3), E(0,−8), F(1,0)

5. બાજુની આકૃતિમાં રેખા LM એ Y અક્ષને સમાંતર રેખા છે.

(i) રેખા LM નું Y અક્ષથી અંતર કેટલું ?

(ii) P, Q, R બિંદુના સહનિર્દેશક લખો.

(iii) બિંદુ L અને M ના x નિર્દેશકનો તફાવત કેટલો ?



આકૃતિ 7.12

6. X−અક્ષને સમાંતર અને X−અક્ષ પાસેથી 5 એકમ અંતરે કેટલી રેખા છે? તેના સમીકરણ લખો.

7. કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યા a લઈને Y−અક્ષ અને $x = a$ આ રેખા વચ્ચેનું અંતર નક્કી કરો.

❑❑❑

8 ત્રિકોણમિતિ

67C069

ચાલો શીખીએ.

- ત્રિકોણમિતિની ઓળખ
- ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો
- ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોનો સંબંધ
- વિશિષ્ટ ખૂણાના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો

ત્રિકોણમિતિની ઓળખ (Introduction to trigonometry)

આપણે જમીન પરનું અંતર દોરીને, ચાલતા જઈને માપી શકીએ, પરંતુ સમુદ્રમાંના જહાજનું દીવાદાંડીથી અંતર કેવી રીતે માપી શકાય ?

ઉપરના ચિત્રોનું નિરીક્ષણ કરો. ચિત્રોમાંના પ્રશ્ન ગણિત સાથે સંબંધિત છે. આ પ્રશ્નોના ઉત્તર મેળવવા માટે ગણિત વિષયની ત્રિકોણમિતિ શાખાનો ઉપયોગ થાય છે. ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ અભિયાંત્રિકી, ખગોલશાસ્ત્ર, નૌકાશાસ્ત્ર ઇત્યાદિ શાખાઓમાં પણ કરવામાં આવે છે.

ત્રિકોણમિતિ (Trigonometry) આ શબ્દ ત્રણ ગ્રીક શબ્દોથી તૈયાર થયો છે. Tri એટલે ત્રણ, gona એટલે બાજુ metron એટલે માપ.

યાદ કરીએ.

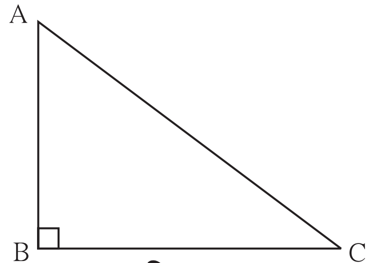
આપણે ત્રિકોણનો અભ્યાસ કર્યો છે. કાટકોણ ત્રિકોણ, પાયથાગોરસનો પ્રમેય અને સરૂપ ત્રિકોણના ગુણધર્મના આધારે ત્રિકોણમિતિ વિષયની શરૂઆત થાય છે.

તેનું પુનરાવર્તન કરીએ.

- Δ ABC માં $\angle$B એ કાટકોણ છે અને $\angle$B ની સામેની બાજુ AC એ કર્ણ છે.
  $\angle$A ની સામેની બાજુ BC છે, $\angle$C ની સામેની બાજુ AB છે.

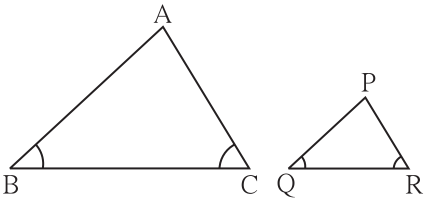
આ ત્રિકોણના સંદર્ભમાં પાયથાગોરસના પ્રમેયનું વિધાન

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$



આકૃતિ 8.1

* જો Δ ABC ~ Δ PQR તો તેમની સંગત બાજુ પ્રમાણસર હોય છે, એટલે $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{AC}{PR}$



આકૃતિ 8.2

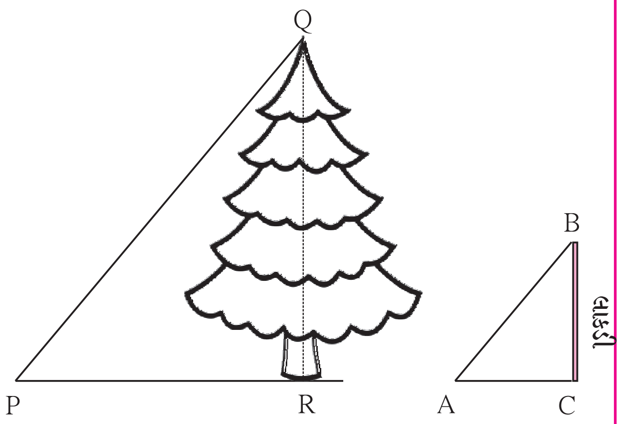
એકાદા મોટા ઝાડની ઊંચાઈ માપવી હોય તો સરૂપ ત્રિકોણના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને કેવી રીતે માપી શકાય તે જોઈએ.

કૃતિ : આ પ્રયોગ દિવસે પૂરતો તડકો હોય ત્યારે કરી શકાય. બાજુની આકૃતિ જુઓ. QR એ ઝાડની ઊંચાઈ છે. BC એ એક લાકડીની ઊંચાઈ છે.

નાની લાકડી જમીનમાં ઉભી રોપી તેની ઊંચાઈ અને તેના પડછાયાં (છાંયા) ની લંબાઈ માપો. ઝડના છાયાની લંબાઈ માપો. સૂર્યના કિરણો સમાંતર હોવાથી Δ PQR અને Δ ABC સરૂપ ત્રિકોણ છે. એ સમજી લો. સરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુ પ્રમાણસર હોય છે તેનો ઉપયોગ કરીને $\frac{QR}{PR}=\frac{BC}{AC}$ મળે છે.

એટલે ઝાડની ઊંચાઈ

QR = $\frac{BC}{AC}\times PR$ એ સમીકરણ મળે છે.



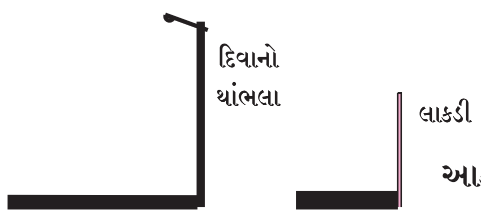
આકૃતિ 8.3

PR, BC અને AC આપણને ખબર છે. તે કિંમતો સમીકરણમાં મૂકીને QRની લંબાઈ એટલે કે ઝાડની ઊંચાઈ નક્કી કરી શકાય છે.

વિચાર કરીએ.

આ પ્રયોગ સવારે 8 વાગ્યે ન કરતા બપોરે 11.30 અથવા 1.30 વાગ્યે કરવો સરળ પડે. શા માટે?

કૃતિ : ઉપરની કૃતિ કરીને તમે પોતે પરિસરના ઊંચા ઝાડની ઊંચાઈ શોધો. પરિસરમાં ઝાડ ન હોય તો એકાદ થાંભલાની ઊંચાઈ શોધો.

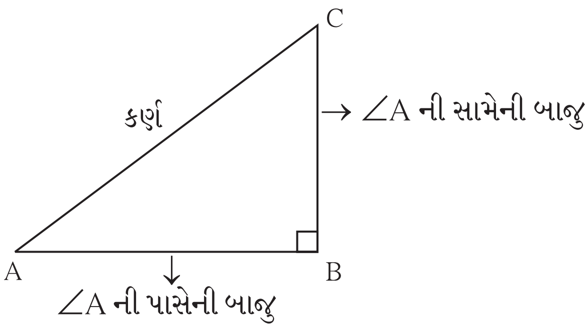


આકૃતિ 8.4

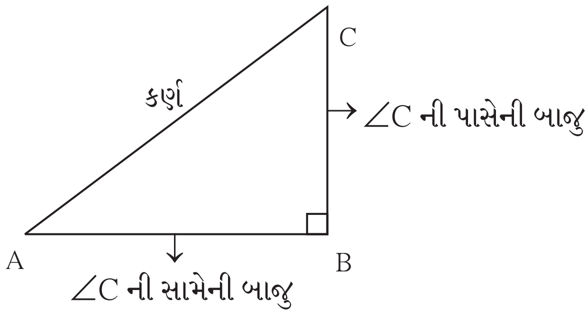
જાણી લઈએ.

ત્રિકોણના સંદર્ભમાં કેટલીક સંજ્ઞા (Terms related to triangle)

કાટકોણ Δ ABC માં, $\angle B = 90^\circ$ છે તો $\angle A$ અને $\angle C$ એ લઘુકોણ છે.

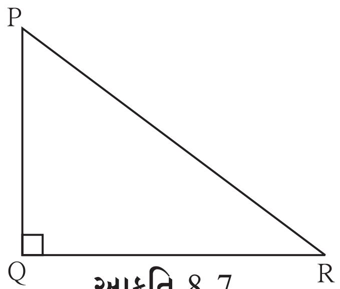


આકૃતિ 8.5



આકૃતિ 8.6

ઉદા. કાટકોણ Δ PQR માં



આકૃતિ 8.7

$\angle P$ ની સામેની બાજુ = . . . $\angle P$ ની પાસેની બાજુ = ...
$\angle R$ ની સામેની બાજુ= . . . $\angle R$ ની પાસેની બાજુ = ...

ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો (Trigonometic ratios)

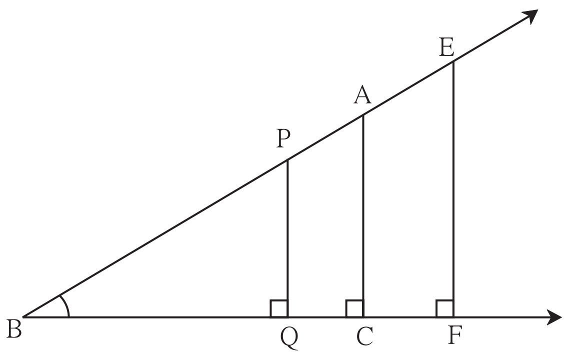
બાજુની આકૃતિ 8.8 માં કેટલાક કાટકોણ ત્રિકોણ દર્શાવ્યા છે. જેમાં $\angle B$ સામાન્ય ખૂણો છે. તેથી આ બધા કાટકોણ ત્રિકોણ સરૂપ છે.

અહીં Δ PQB ~ Δ ACB છે.

$\therefore \ \dfrac{PB}{AB} = \dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{BQ}{BC}$

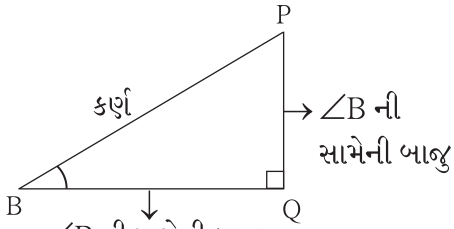
$\dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{PB}{AB} \quad \therefore \ \dfrac{PQ}{PB} = \dfrac{AC}{AB}$ . . . . . એકાંતર ક્રિયા

$\dfrac{QB}{BC} = \dfrac{PB}{AB} \quad \therefore \ \dfrac{QB}{PB} = \dfrac{BC}{AB}$ . . . . . એકાંતર ક્રિયા

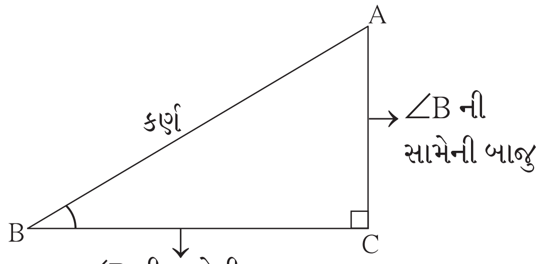


આકૃતિ 8.8

નીચે આકૃતિ 8.9 અને 8.10 માં આકૃતિ 8.8 માંથી જુદા કરેલા ત્રિકોણો છે.



આકૃતિ 8.9



આકૃતિ 8.10

(i) Δ PQB માં,

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$$

Δ ACB માં,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$$

$\frac{PQ}{PB}$ અને $\frac{AC}{AB}$ આ સમાન ગુણોત્તરો છે.

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$$

આ ગુણોત્તરને B ખૂણાનો સાઈન (sine) ગુણોત્તર કહેવાય છે. આ ગુણોત્તર ટૂંકમાં **sinB** આ રીતે લખાય છે.

(ii) Δ PQB અને Δ ACB માં

$$\frac{BQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} \quad \text{અને} \quad \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$$

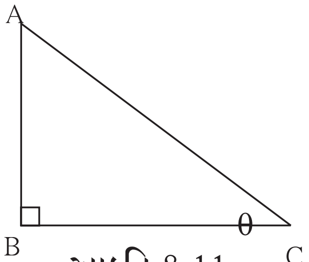
$$\frac{BQ}{PB} = \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$$

આ ગુણોત્તરને ખૂણા B નો કોસાઈન (cosine) ગુણોત્તર કહેવાય છે. આ ગુણોત્તર ટૂંકમાં **cosB** આ રીતે લખાય છે.

(iii) $$\frac{PQ}{BQ} = \frac{AC}{BC} = \frac{\angle B \text{ ની સામેની બાજુ}}{\angle B \text{ ની પાસેની બાજુ}}$$

આ ગુણોત્તરને ખૂણા B નો ટૅંજંટ (tangent) ગુણોત્તર કહેવાય છે. આ ગુણોત્તર ટૂંકમાં **tanB** આ રીતે લખાય છે.

ઉદા.



આકૃતિ 8.11

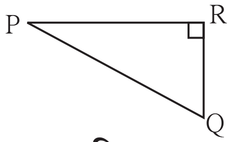
કેટલીક વાર કાટકોણ ત્રિકોણના લઘુકોણના માપો θ (થીટા), α (આલ્ફા), β (બીટા) ઈત્યાદિ ગ્રીક અક્ષરોથી દર્શાવાય છે. બાજુની આકૃતિમાં Δ ABC ના લઘુકોણ C નું માપ θ અક્ષરથી દર્શાવાયું છે. આવા વખતે sinC, cosC, tanC ગુણોત્તરો અનુક્રમે sinθ, cosθ, tan θ આ રીતે લખાય છે.

$$\sin C = \sin \theta = \frac{AB}{AC}, \quad \cos C = \cos \theta = \frac{BC}{AC}, \quad \tan C = \tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

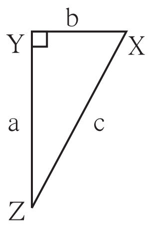
- $\sin$ ગુણોત્તર $= \dfrac{\text{ખૂણાની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$
- $\cos$ ગુણોત્તર $= \dfrac{\text{ખૂણાની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}}$
- $\tan$ ગુણોત્તર $= \dfrac{\text{ખૂણાની સામેની બાજુ}}{\text{ખૂણાની પાસેની બાજુ}}$

મહાવરાસંગ્રહ 8.1

1. 

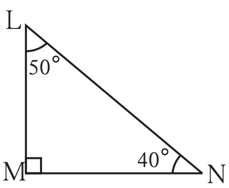
આકૃતિ 8.12

બાજુની આકૃતિ 8.12 માં Δ PQR ના $\angle R$ કાટકોણ છે તો નીચેના ગુણોત્તરો લખો.
(i) $\sin P$ (ii) $\cos Q$ (iii) $\tan P$ (iv) $\tan Q$

2. 

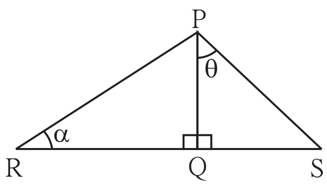
આકૃતિ 8.13

આકૃતિ 8.13 માં Δ XYZ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. $\angle XYZ = 90°$ છે બાજુની લંબાઈ a,b,c આપેલ છે. આ પરથી નીચેના ગુણોત્તરો લખો.
(i) $\sin X$ (ii) $\tan Z$ (iii) $\cos X$ (iv) $\tan X$

3. 

આકૃતિ 8.14

કાટકોણ Δ LMN માં, $\angle LMN = 90°$
$\angle L = 50°$ અને $\angle N = 40°$ છે, આ પરથી નીચેના ગુણોત્તરો લખો.
(i) $\sin 50°$ (ii) $\cos 50°$
(iii) $\tan 40°$ (iv) $\cos 40°$

4. 

આકૃતિ 8.15

આપેલી આકૃતિમાં $\angle PQR = 90°$, $\angle PQS = 90°$, $\angle PRQ = \alpha$ અને $\angle QPS = \theta$ તો નીચેના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો લખો.
(i) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$
(ii) $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$

જાણી લઈએ.

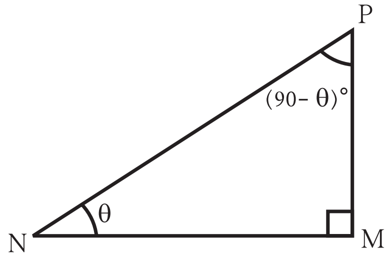
ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો વચ્ચે સંબંધ (Relation among trigonometric ratios)

આકૃતિ 8.16 માં,

Δ PMN એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\angle M = 90^\circ$, $\angle P$ અને $\angle N$ એ પરસ્પર કોટિકોણ છે.

$\therefore$ જો $\angle N = \theta^\circ$ તો $\angle P = (90 - \theta)^\circ$



આકૃતિ 8.16

$\sin\theta = \dfrac{PM}{PN}$ ....(1)

$\cos\theta = \dfrac{NM}{PN}$ ....(2)

$\tan\theta = \dfrac{PM}{NM}$ ....(3)

$\sin(90 - \theta) = \dfrac{NM}{PN}$ ....(4)

$\cos(90 - \theta) = \dfrac{PM}{PN}$ ....(5)

$\tan(90 - \theta) = \dfrac{NM}{PM}$ ....(6)

$\therefore \sin\theta = \cos(90 - \theta)$ .... (1) અને (5) પરથી

$\cos\theta = \sin(90 - \theta)$ .... (2) અને (4) પરથી

હવે આપણ ધ્યાનમાં લો.: $\tan\theta \times \tan(90 - \theta) = \dfrac{PM}{NM} \times \dfrac{NM}{PM}$ .... (3) અને (6) પરથી

$\therefore \tan\theta \times \tan(90 - \theta) = 1$

તેવીજ રીતે $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{PM}{PN}}{\frac{NM}{PN}} = \dfrac{PM}{PN} \times \dfrac{PN}{NM} = \dfrac{PM}{NM} = \tan\theta$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

$\cos(90 - \theta) = \sin\theta$, $\quad \sin(90 - \theta) = \cos\theta$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$, $\quad \tan\theta \times \tan(90 - \theta) = 1$

✲ વધુ માહિતી માટે

$$\frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta, \quad \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta, \quad \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$$

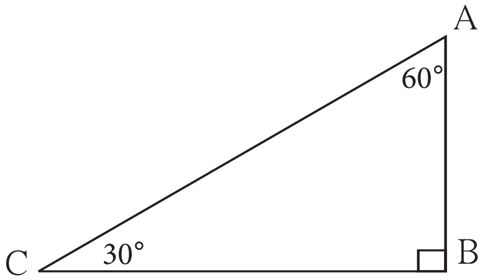
એટલે કે cosec θ, sec θ અને cot θ અનુક્રમે sin θ, cos θ અને tan θ ના વ્યસ્ત ગુણોત્તરો છે.

- $\sec\theta = \operatorname{cosec}(90-\theta)$
- $\operatorname{cosec}\theta = \sec(90-\theta)$
- $\tan\theta = \cot(90-\theta)$
- $\cot\theta = \tan(90-\theta)$

યાદ કરીએ.

$30° - 60° - 90°$ માપના ત્રિકોણનો ગુણધર્મ

જો કોઈ ત્રિકોણના ખૂણાના માપ $30°$, $60°$, $90°$ હોય તો આપણે જાણીએ છીએ કે $30°$ ના ખૂણાની સામેની બાજુ કર્ણ કરતા અડધી હોય છે અને $60°$ ખૂણાની સામેની બાજુ કર્ણની લંબાઈ કરતાં $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ગણી હોય છે.



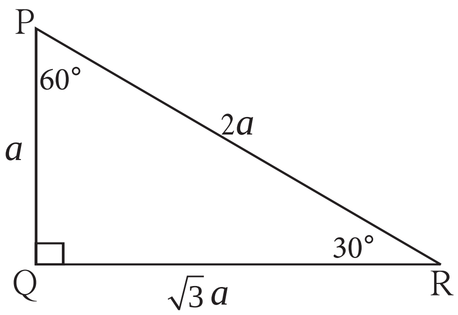
આકૃતિ 8.17

બાજુની આકૃતિમાં, કાટકોણ Δ ABC માં $\angle C = 30°$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$ છે.

$\therefore AB = \frac{1}{2} AC$ અને $BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

જાણી લઈએ.

$30°$ અને $60°$ ખૂણાના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો (Trignometric ratios of $30°$ and $60°$)



આકૃતિ 8.18

કાટકોણ Δ PQR માં જો $\angle R = 30°$, $\angle P = 60°$, $\angle Q = 90°$ અને ધારો કે $PQ = a$

તો $PQ = \frac{1}{2}$ PR

$a = \frac{1}{2}$ PR

$\therefore PR = 2a$

$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} PR$

$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a$

$QR = \sqrt{3}\, a$

$\therefore$ જો $PQ = a$ તો $PR = 2a$ અને $QR = \sqrt{3}\, a$

(I) 30° ખૂણાના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો લખીએ.

$$\sin 30^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{PQ}{QR} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(II) 60° ખૂણાના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો લખીએ.

$$\sin 60^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{QR}{PQ} = \frac{\sqrt{3}\,a}{a} = \sqrt{3}$$

કાટકોણ Δ PQR માં $\angle Q = 90^\circ$ આપ્યો છે. $\angle P$ અને $\angle R$ પરસ્પર કોટિકોણ છે. એટલે કોટિકોણના સાઈન અને કોસાઈન ગુણોત્તરો વચ્ચેનો સંબંધ અહીં ચકાસી જોઈએ.

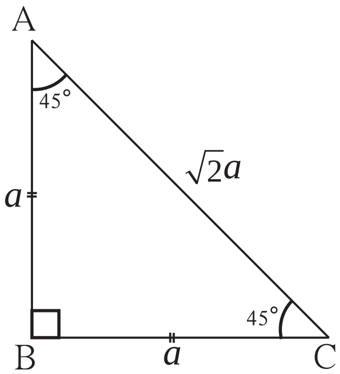
$\sin\theta = \cos(90-\theta)$
$\sin 30^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ$
$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

$\cos\theta = \sin(90-\theta)$
$\cos 30^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ$
$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

(III) 45° ખૂણાના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો



આકૃતિ 8.19

કાટકોણ Δ ABC માં $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ $\therefore$ આ સમદ્વિભુજ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

ધારો કે, AB = a તો BC = a

પાયથાગોરસના પ્રમેય મુજબ AC ની લંબાઈ શોધીએ.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= a^2 + a^2$$
$$AC^2 = 2a^2$$
$$\therefore AC = \sqrt{2}\,a$$

આગળની આકૃતિ 8.19 માં $\angle C = 45^\circ$ છે.

$$\sin 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

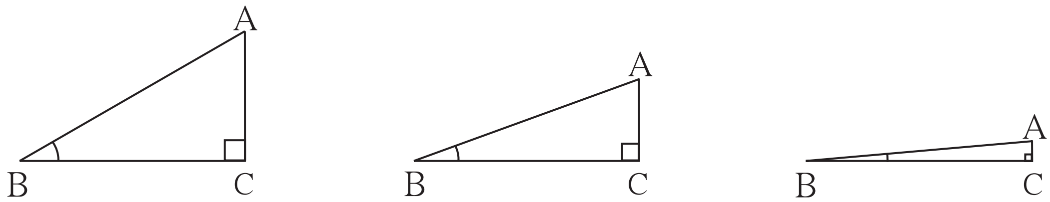
$$\cos 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tan 45^\circ = 1$$

(IV) 0° અને 90° ખૂણાના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો



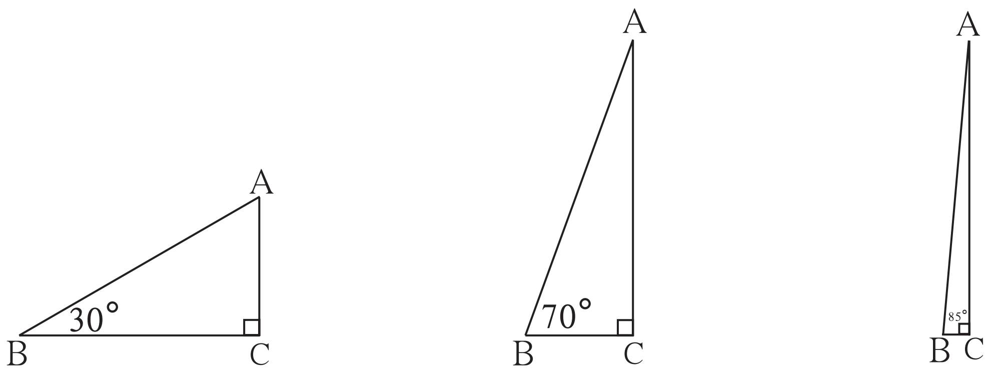
આકૃતિ 8.20

કાટકોણ Δ ACB માં $\angle C = 90^\circ$ અને $\angle B = 30^\circ$ છે . $\sin 30^\circ = \frac{AC}{AB}$ તે આપણે જાણીએ છીએ.

AB ની લંબાઈ સ્થિર રાખતા, $\angle B$ નું માપ જેમ ઓછું થાય તેમ તેમ $\angle B$ ની સામેની બાજુ AC ની લંબાઈ ઓછી થાય છે. એટલે $\angle B$ નું માપ જેમ ઓછું થાય તો $\sin \theta$ ની કિંમત ઓછી થાય છે.

$\therefore$ $\angle B$ નું માપ 0° થશે ત્યારે AC ની લંબાઈ 0 થશે.

$\therefore \sin 0^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{0}{AB}$ $\qquad$ $\therefore \sin 0^\circ = 0$



આકૃતિ 8.21

હવે આકૃતિ 8.21 જુઓ. આ કાટકોણ ત્રિકોણમાં $\angle B$ નું માપ જે જેમ વધે છે તેમ તેમ AC ની લંબાઈ વધતી દેખાય છે. $\angle B$ નું માપ જો 90° થાય તો AC નું માપ AB જેટલું થશે.

$$\therefore \sin 90^\circ = \frac{AC}{AB} \qquad \therefore \sin 90^\circ = 1$$

આપણે કોટિકોણના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો જોયા છે.

$$\sin \theta = \cos (90 - \theta) \text{ અને } \cos \theta = \sin (90 - \theta)$$

$$\therefore \cos 0^\circ = \sin (90 - 0)^\circ = \sin 90^\circ = 1$$

$$\text{અને } \cos 90^\circ = \sin (90 - 90)^\circ = \sin 0^\circ = 0$$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

$$\sin 0^\circ = 0, \qquad \sin 90^\circ = 1, \qquad \cos 0^\circ = 1, \qquad \cos 90^\circ = 0$$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \qquad \therefore \tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

પરંતુ $\tan 90^\circ = \dfrac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \dfrac{1}{0}$

પરંતુ $\dfrac{1}{0}$ આ ભાગાકાર કરી શકાય નહીં. θ લઘુકોણ હોઈ તે મોટો થતા થતા 90° ની નજીક જતો જાય તેમ તેમ $\tan \theta$ મોટો થતો જાય છે. પરંતુ tan 90 ની કિંમત નક્કી કરી શકાતી નથી.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

વિશિષ્ટ ખૂણાના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો

ગુણોત્તરો \ ખૂણાના માપ	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	કહી ન શકાય.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. 1 કિંમત શોધો : $2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$

ઉકેલ : $2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$

$$= 2 \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 + 0$$

$$= 2$$

ઉદા.2 કિંમત શોધો : $\frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ}$

ઉકેલ : $56^\circ + 34^\circ = 90^\circ$ એટલે 56 અને 34 એ કોટિકોણના માપ છે.

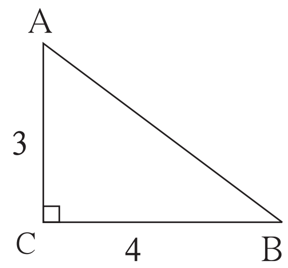
$$\sin\theta = \cos(90-\theta)$$

$\therefore \quad \sin 34^\circ = \cos(90-34)^\circ = \cos 56^\circ$

$\therefore \quad \frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ} = \frac{\cos 56^\circ}{\cos 56^\circ} = 1$

ઉદા.3 કાટકોણ Δ ACB માં જો $\angle C = 90^\circ$, AC = 3, BC = 4 તો $\angle A$ અને $\angle B$ ના નીચેના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો શોધો.

sin A, sin B, cos A, tan B



આકૃતિ 8.22

ઉકેલ : કાટકોણ Δ ACB માં પાયથાગોરસના પ્રમેય મુજબ,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$= 3^2 + 4^2$$

$$= 5^2$$

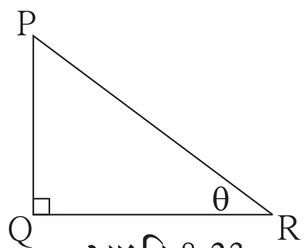
$$AB = 5$$

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$

$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$

ઉદા.4 કાટકોણ Δ PQR માં $\angle Q = 90^\circ$, $\angle R = \theta$ અને જો $\sin\theta = \frac{5}{13}$ તો $\cos\theta$, $\tan\theta$ શોધો.

ઉકેલ :



આકૃતિ 8.23

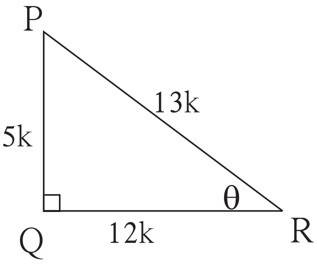
કાટકોણ Δ PQR માં $\angle R = \theta$

$$\sin\theta = \frac{5}{13}$$

$$\therefore \quad \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$

$\therefore$ PQ = $5k$ અને PR = $13k$ માનીશું.

પાયથાગોરસના પ્રમેય મુજબ QR શોધી શું.



આકૃતિ 8.24

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

$(5k)^2 + QR^2 = (13k)^2$

$25k^2 + QR^2 = 169\ k^2$

$QR^2 = 169\ k^2 - 25k^2$

$QR^2 = 144\ k^2$

$QR = 12k$

હવે કાટકોણ Δ PQR માં PQ = $5k$ અને PR = $13k$, QR = $12k$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}\ ,\ \tan\theta = \frac{PQ}{QR} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

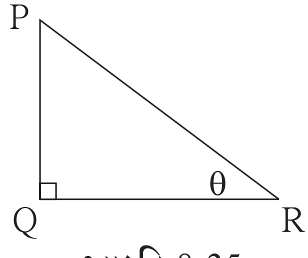
વિચાર કરીએ.

(1) ઉપરનું ઉદાહરણ ગણતી વખતે PQ અને PR બાજુની લંબાઈ 5k અને 13k શા માટે લીધી ?

(2) PQ અને PR ની લંબાઈ અનુક્રમે 5 અને 13 લઈ શકાય ? લઈ શકાય તો કંઈ ફેરફાર કરવો પડશે ?

ત્રિકોણમિતિમાં મહત્ત્વના સમીકરણ

Δ PQR એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.
$\angle PQR = 90°$, $\angle R = \theta$ માનીશું.



આકૃતિ 8.25

$\sin\theta = \dfrac{PQ}{PR}$ ....(1)

$\cos\theta = \dfrac{QR}{PR}$ ....(2)

પાયથાગોરસના પ્રમેય મુજબ

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

$\therefore \dfrac{PQ^2}{PR^2} + \dfrac{QR^2}{PR^2} = \dfrac{PR^2}{PR^2}$ .... દરેક પદને PR^2 વડે ભાગતા

$\therefore \left(\dfrac{PQ}{PR}\right)^2 + \left(\dfrac{QR}{PR}\right)^2 = 1$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$..(1) અને (2) પરથી

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

$(\sin\theta)^2$ એટલે $\sin\theta$ નો વર્ગ તેને $\sin^2\theta$ એમ લખી શકાય છે.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ આ સમીકરણ આપણે પાયથાગોરસના પ્રમેય મુજબ θ એક લઘુકોણ હોય તેવા કાટકોણ ત્રિકોણના આધારે સિદ્ધ કર્યું $\theta = 0^\circ$ અથવા $\theta = 90^\circ$ હોય તો આ સમીકરણ સત્ય હોય તે ચકાસો.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ આ સમીકરણ કોઈપણ ખૂણાના માપ માટે યથાર્થ હોવાથી તેને મૂલભૂત નિત્ય સમાનતા કહેવાય છે.

(i) $0 \le \sin\theta \le 1,\ 0 \le \sin^2\theta \le 1$ (ii) $0 \le \cos\theta \le 1,\ 0 \le \cos^2\theta \le 1$

મહાવરાસંગ્રહ 8.2

1. નીચેના કોષ્ટકમાં પ્રત્યેક સ્તંભમાં એક ગુણોત્તર આપ્યો છે. તે પરથી બીજા બે ગુણોત્તરો શોધો અને ખાલી જગ્યા પૂરો.

$\sin\theta$		$\frac{11}{61}$		$\frac{1}{2}$				$\frac{3}{5}$	
$\cos\theta$	$\frac{35}{37}$				$\frac{1}{\sqrt{3}}$				
$\tan\theta$			1			$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2. કિંમત શોધો.

(i) $5\sin 30^\circ + 3\tan 45^\circ$

(ii) $\frac{4}{5}\tan^2 60^\circ + 3\sin^2 60^\circ$

(iii) $2\sin 30^\circ + \cos 0^\circ + 3\sin 90^\circ$

(iv) $\dfrac{\tan 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ}$

(v) $\cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ$

(vi) $\cos 60^\circ \times \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \times \sin 30^\circ$

3. જો $\sin\theta = \frac{4}{5}$ તો $\cos\theta$ શોધો.

4. જો $\cos\theta = \frac{15}{17}$ તો $\sin\theta$ શોધો.

1. નીચે આપેલ બહુર્યાયી પ્રશ્નોના યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

(i) નીચેનામાંથી કયું વિધાન સાચુ છે.

(A) $\sin\theta = \cos(90-\theta)$ (B) $\cos\theta = \tan(90-\theta)$

(C) $\sin\theta = \tan(90-\theta)$ (D) $\tan\theta = \tan(90-\theta)$

(ii) $\sin 90^\circ$ ની કિંમત નીચેનામાંથી કઈ ?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

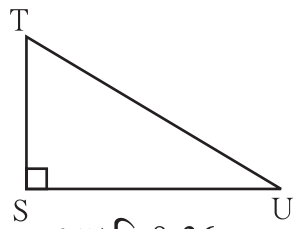
(iii) $2\tan 45^\circ + \cos 45^\circ - \sin 45^\circ =$ કેટલા?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(iv) $\frac{\cos 28^\circ}{\sin 62^\circ} =$ કેટલા?

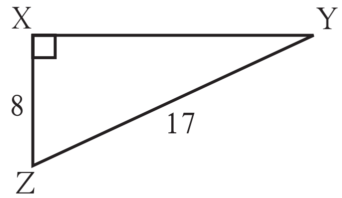
(A) 2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

2. કાટકોણ Δ TSU માં TS = 5, $\angle S = 90^\circ$, SU = 12 તો sin T, cos T, tan T શોધો. તેમજ sin U, cos U, tan U શોધો.



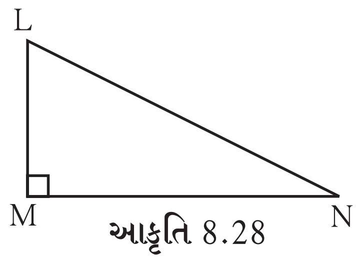
આકૃતિ 8.26

3. કાટકોણ Δ YXZ માં , $\angle X = 90^\circ$, XZ = 8 સેમી, YZ = 17 સેમી તો sin Y, cos Y, tan Y, sin Z, cos Z, tan Z શોધો.



આકૃતિ 8.27

4. કાટકોણ Δ LMN માં $\angle N = \theta$, $\angle M = 90^\circ$, $\cos\theta = \frac{24}{25}$ તો $\sin\theta$ અને $\tan\theta$ ના ગુણોત્તરો શોધો , તેમજ $(\sin^2\theta)$ અને $(\cos^2\theta)$ ની કિંમત શોધો.



આકૃતિ 8.28

5. ખાલી જગ્યા પુરો.

(i) $\sin 20^\circ = \cos \boxed{}^\circ$

(ii) $\tan 30^\circ \times \tan \boxed{}^\circ = 1$

(iii) $\cos 40^\circ = \sin \boxed{}^\circ$

9 પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ

67LL7H

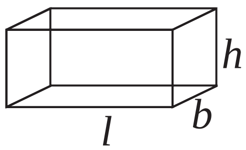
ચાલો શીખીએ.

- શંકુનું પૃષ્ઠફળ
- શંકુનું ઘનફળ
- ગોળાનું પૃષ્ઠફળ
- ગોળાનું ઘનફળ

યાદ કરીએ.

આપણે પાછલા ધોરણમાં લંબઘનાકાર, ઘનાકાર, વર્તુળાકાર નળાકાર આ ઘનાકૃતિઓનું ઘુનફળ કેવી રીતે શોધાય તેનો અભ્યાસ કર્યો.

લંબઘનાકાર



આકૃતિ 9.1

- લંબઘનાકારની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે l , b, h હોય તો

  (i) લંબઘનાકારના ઉભા પૃષ્ઠનું ક્ષેત્રફળ $= 2(l + b) \times h$

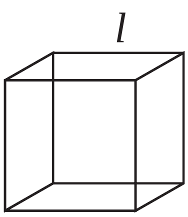
  અહીં લંબઘનાકારના ઉભા 4 પૃષ્ઠોના ક્ષેત્રફળનો વિચાર કર્યો છે.

  (ii) લંબઘનાકારનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= 2(lb + bh + lh)$

  અહીં લંબઘનાકારના છ પૃષ્ઠોના ક્ષેત્રફળનો વિચાર કર્યો છે.

  (iii) લંબઘનાકારનું ઘનફળ $= l \times b \times h$

ઘન



આકૃતિ 9.2

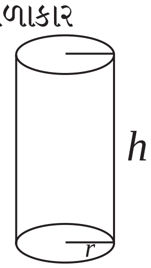
- ઘનની ધાર (edge) l હોય તો

  (i) ઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ$= 6l^2$

  (ii) ઘનનું ઉભું પૃષ્ઠફળ $= 4l^2$

  (iii) ઘનનું ઘનફળ $= l^3$

વર્તુળાકાર નળાકાર



આકૃતિ 9.3

- વર્તુળાકાર નળાકારની ત્રિજ્યા r અને ઊંચાઈ h હોય તો

  (i) વર્તુળાકાર નળાકારનું વક્રપૃષ્ઠફળ $= 2\pi rh$

  (ii) વર્તુળાકાર નળાકારનું કુલ પૃષ્ઠફળ$= 2\pi r(r + h)$

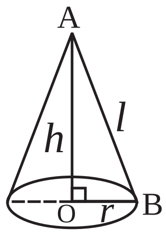
  (iii) વર્તુળાકાર નળાકારનું ઘનફળ$= \pi r^2h$

મહાવરાસંગ્રહ 9.1

1. એક લંબઘનાકાર દવાના ખોખાની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 20 સેમી, 12 સેમી અને 10 સેમી છે તો ખોખાના ઉભા પૃષ્ઠભાગનું ક્ષેત્રફળ અને કુલપૃષ્ઠફળ શોધો
2. એક લંબઘનાકાર ખોખાનું કુલ પૃષ્ઠફળ 500 ચોરસ એકમ છે. તેની પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 6 એકમ અને 5 એકમ છે. તો તે ખોખાની લંબાઈ કેટલી ?
3. એક ઘનાકૃતિની બાજુ 4.5 સેમી છે. તો ઘનાકૃતિના ઉભા પૃષ્ઠભાગનું ક્ષેત્રફળ અને કુલપૃષ્ઠફળ શોધો.
4. એક ઘનનું કુલપૃષ્ઠફળ 5400 ચોસેમી હોય તો તે ઘનના ઉભા પૃષ્ઠભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
5. એક લંબઘનાકારનું ઘનફળ 34.50 ઘનમીટર, તેની પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 1.5 મી અને 1.15 મી હોય તો લંબઘનાકારની લંબાઈ શોધો.
6. 7.5 સેમી ધારવાળા ઘનનું ઘનફળ કેટલું ?
7. એક વર્તુળાકાર નળાકારની પાયાની ત્રિજ્યા 20 સેમી અને ઊંચાઈ 13 સેમી હોય તો વર્તુળાકાર નળાકારનું વક્રપૃષ્ઠફળ અને કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. (π = 3.14 લો.)
8. વર્તુળાકાર નળાકારનું વક્રપૃષ્ઠફળ 1980 સેમી^{2} અને તેના પાયાની ત્રિજ્યા 15 સેમી હોય તો વર્તુળાકાર નળાકારની ઊંચાઈ શોધો.
   ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)


જાણી લઈએ.

શંકુ સંબંધી સંજ્ઞા અને તેમનો પરસ્પર સંબંધ (Terms related with a cone and their relation)



આકૃતિ 9.4

આકૃતિ 9.4 શંકુની છે. શંકુના પાયાનું કેન્દ્રબિંદુ O અને શંકુનું શિરોબિંદુ A છે. રેખ OA ત્રિજ્યા OB ને લંબ છે. એટલે AO શંકુની લંબ ઊંચાઈ (h) છે. AB એ શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ (l) છે.

Δ AOB કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

$\therefore$ પાયથાગોરસના પ્રમેય મુજબ

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$\therefore l^2 = h^2 + r^2$$

માટે જ (ત્રાંસી ઊંચાઈ)^2 = (લંબ ઊંચાઈ)^2 + (પાયાની ત્રિજ્યા)^2

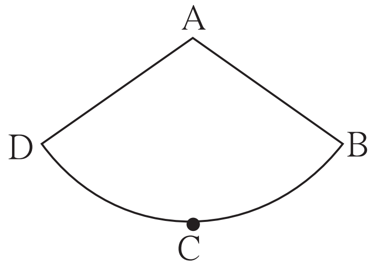
શંકુનું પૃષ્ઠફળ (Surface area of a cone)

શંકુના બે પૃષ્ઠ હોય છે. (i) વર્તુળાકાર પાયો (ii) વક્રપૃષ્ઠ

વર્તુળના ક્ષેત્રફળના સૂત્ર પરથી શંકુના પાયાનું ક્ષેત્રફળ કાઢી શકાય.

શંકુના વક્રપૃષ્ઠનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું સૂત્ર કેવી રીતે તૈયાર કરી શકાય ?

માટે શંકુના વક્રપૃષ્ઠની રચના જોઈએ.



આકૃતિ 9.5

આકૃતિ 9.4 માં ના શંકુને તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ AB થી કાપીને ખોલતા, તેની રચના બાજુની આકૃતિ 9.5 પ્રમાણે મળશે. આ આકૃતિનું નામ વૃત્તાંશ છે.

આકૃતિ 9.4 અને આકૃતિ 9.5 ની તુલના કરો. નીચેની બાબતો તમારા ધ્યાનમાં આવી ?

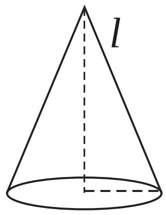
(i) વૃત્તાંશની ત્રિજ્યા AB એ શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ જેટલી છે.

(ii) વૃત્તાંશનો ચાપ BCD એ શંકુના પાયાના પરિઘનું જ રૂપાંતર છે.

(iii) શંકુના વક્રપૃષ્ઠનું ક્ષેત્રફળ = A–BCD આ વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ છે.

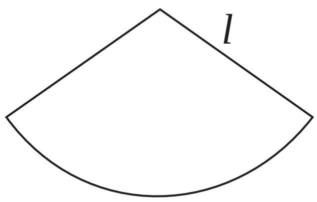
આ રીતે, શંકુના વક્રપૃષ્ઠનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે તેની રચના એટલે કે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધવું પડશે. આ ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે શોધાય. તે નીચેની કૃતિ પરથી સમજીએ.

કૃતિ : શંકુની રચના વિચારીએ.



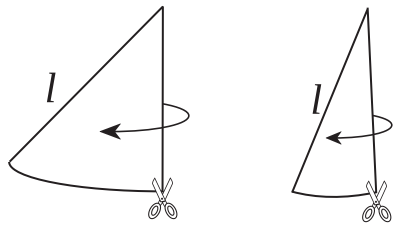
શંકુ

આકૃતિ 9.6



વૃત્તાંશનો ભાગ

આકૃતિ 9.7



ભાગના ટુકડા

આકૃતિ 9.8

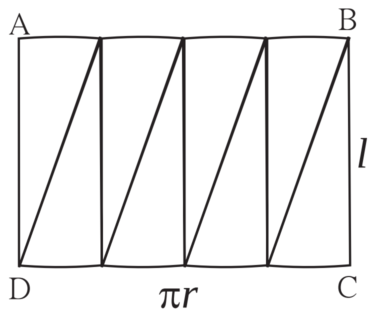
પાયાનો પરિઘ $= 2\pi r$

એક વક્રપૃષ્ઠને આકૃતિ 9.8 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે શક્ય તેટલા નાના ટુકડા કરો. તે આકૃતિ 9.9 માં આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેને એકબીજા સાથે જોડો.

શંકુના વક્રપૃષ્ઠના ટુકડાને આવી રીતે જોડતા □ABCD એ લગભગ લંબચોરસ બને છે.

AB અને CD ની કુલ લંબાઈ $2\pi r$ છે.

$\therefore$ ABCD લંબચોરસની બાજુ AB ની લંબાઈ πr અને બાજુ CD ની લંબાઈ πr છે.



આકૃતિ 9.9

લંબચોરસની બાજુ BC ની લંબાઈ = શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ = l છે.

$\therefore$ શંકુનું વક્રપૃષ્ઠફળ એટલે જ લંબચોરસનુ ક્ષેત્રફળ.

$\therefore$ શંકુના વક્રપૃષ્ઠફળનું ક્ષેત્રફળ = લંબચોરસનુ ક્ષેત્રફળ = AB × BC = $\pi r \times l = \pi rl$

હવે, શંકુનું કુલપૃષ્ઠફળનું સૂત્ર પણ તૈયાર કરી શકાશે.

શંકુનું કુલપૃષ્ઠફળ = વક્રપૃષ્ઠનું ક્ષેત્રફળ + પાયાનું ક્ષેત્રફળ

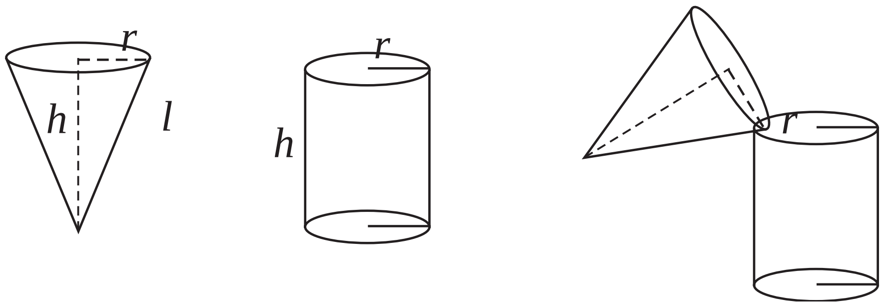
$= \pi rl + \pi r^2$

$= \pi r(l + r)$

અહીં એક મહત્વની બાબત ધ્યાનમાં આવી ? શંકુ બંધ ન હોય (વિદૂષકની જન્મદિવસે પહેરાતી ટોપી જેવો હોય) તો વક્રપૃષ્ઠ એ તેનું એક જ પૃષ્ઠ હશે. એટલે તેનું પૃષ્ઠફળ πrl સૂત્રથી શોધી શકાય.

કૃતિ : એક કાર્ડબોર્ડ લો. તેમાંથી એક બંધ વર્તુળાકાર નળાકાર તૈયાર કરો. એટલે પાયાની ત્રિજ્યા અને ઊંચાઈ સમાન હોય તેવો એક શંકુ અને એક બાજુથી બંધ એવો વર્તુળાકાર નળાકાર તૈયાર કરો. એટલે શંકુની લંબ ઊંચાઈ અને વર્તુળાકાર નળાકારની ઊંચાઈ સમાન હોય તેવો એક શંકુ અને વર્તુળાકાર નળાકાર લો.

શંકુ ઝીણી રેતીથી સંપૂર્ણ ભરી લો અને તે રેતી વર્તુળાકાર નળાકારમાં ઠાલવો. વર્તુળાકાર નળાકાર સંપૂર્ણ ભરાય ત્યાં સુધી આ કૃતિ કરો. વર્તુળાકાર નળાકારને પૂર્ણ ભરવા માટે કેટલા શંકુ ભરીને રેતી જોઈ તે માપો.



આકૃતિ 9.10

વર્તુળાકાર નળાકારને પૂર્ણ ભરવા માટે ભરેલા ત્રણ શંકુ જોઈએ.

જાણી લઈએ.

શંકુનું ઘનફળ (Volume of a cone)

$$3 \times \text{શંકુનું ઘનફળ} = \text{વર્તુળાકાર નળાકારનું ઘનફળ}$$

$$\therefore\ 3 \times \text{શંકુનું ઘનફળ} = \pi r^2 h$$

$$\therefore\ \text{શંકુનું ઘનફળ} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

(i) શંકૂના પાયાનું ક્ષેત્રફળ = πr^2

(ii) શંકુનું વક્રપૃષ્ઠફળ = πrl

(iii) શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ = $\pi r(l + r)$

(iv) શંકુનું ઘનફળ = $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા.(1) શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા (r) અને લંબ ઊંચાઈ (h) આપેલ છે તે પરથી ત્રાંસી ઊંચાઈ (l) શોધો.

(i) $r = 6$ સેમી, $h = 8$ સેમી

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (6)^2 + (8)^2$

$\therefore l^2 = 36 + 64$

$\therefore l^2 = 100$

$\therefore l = 10$ સેમી

$\therefore$ શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ 10 સેમી.

(ii) $r = 9$ સેમી, $h = 12$ સેમી

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (9)^2 + (12)^2$

$\therefore l^2 = 81 + 144$

$\therefore l^2 = 225$

$\therefore l = 15$ સેમી

$\therefore$ શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ 15 સેમી.

ઉદા.(2) એક શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા 12 સેમી અને લંબ ઊંચાઈ 16 સેમી હોય તો શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ, વક્રપૃષ્ઠફળ અને કુલપૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = 3.14$)

(i) $r = 12$ સેમી, $h = 16$ સેમી

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (12)^2 + (16)^2$

$\therefore l^2 = 144 + 256$

$\therefore l^2 = 400$

$\therefore l = 20$ સેમી

$\therefore$ શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ 20 સેમી.

(ii) શંકુનું વક્રપૃષ્ઠફળ $= \pi rl$

$= 3.14 \times 12 \times 20$

$= 753.6$ ચોસેમી

(iii) શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= \pi r(l + r)$

$= 3.14 \times 12(20+12)$

$= 3.14 \times 12 \times 32$

$= 1205.76$ ચોસેમી

ઉદા.(3) એક શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ 704 ચોસેમી. અને પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી હોય તો શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= \pi r(l + r)$

$\therefore \quad 704 = \frac{22}{7} \times 7\ (l + 7)$

$\therefore \quad \frac{704}{22} = l + 7$

$\therefore \quad 32 = l + 7$

$\therefore \quad 32 - 7 = l$

$\therefore \quad l = 25$ સેમી

$\therefore$ શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ 25 સેમી.

ઉદા.(4) એક શંકુના પાયાનું ક્ષેત્રફળ 1386 ચોસેમી છે અને શંકુની ઊંચાઈ 28 સેમી છે તો શંકુનું વક્રપૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

શંકુનું પાયાનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$

$\therefore \quad 1386 = \frac{22}{7} \times r^2$

$\therefore \quad \frac{1386 \times 7}{22} = r^2$

$\therefore \quad 63 \times 7 = r^2$

$\therefore \quad 441 = r^2$

$\therefore \quad r = 21$ સેમી

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (21)^2 + (28)^2$

$\therefore l^2 = 441 + 784$

$\therefore l^2 = 1225$

$\therefore l = 35$ સેમી

શંકુનું વક્રપૃષ્ઠફળ $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 21 \times 35$

$= 22 \times 21 \times 5$

$= 2310$ ચોસેમી

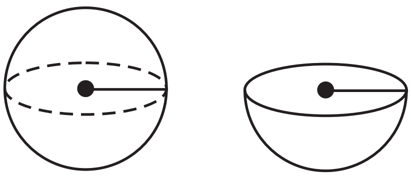
મહાવરાસંગ્રહ 9.2

1. શંકુની લંબ ઊંચાઈ 12 સેમી અને ત્રાંસી ઊંચાઈ 13 સેમી હોય તો શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા કેટલી ?
2. એક શંકુનું કુલપૃષ્ઠફળ 7128 સેમી^{2} અને શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા 28 સેમી હોય તો શંકુનું ઘનફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)
3. એક શંકુનું વક્રપૃષ્ઠફળ 251.2 સેમી^{2} અને પાયાની ત્રિજ્યા 8 સેમી હોય તો શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ અને લંબ ઊંચાઈ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)
4. 6 મી ત્રિજ્યા અને 8 મી ત્રાંસી ઊંચાઈ વાળી બંધ શંકુ આકાર ઘનાકૃતિ બનાવવાનો દર 10 રૂ પ્રતિ ચોરસ મીટર હોય તો તે ઘનાકૃતિ બનાવવા લાગનારો ખર્ચ શોધો.($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)
5. શંકુનું ઘનફળ 6280 ઘનસેમી અને પાયાની ત્રિજ્યા 20 સેમી છે. તો શંકુની લંબ ઊંચાઈ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)
6. શંકુનું વક્રપૃષ્ઠફળ 188.4 ચોસેમી અને ત્રાંસી ઊંચાઈ 10 સેમી છે. તો શંકુની લંબ ઊંચાઈ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)
7. એક શંકુનું ઘનફળ 1232 સેમી^{3} અને ઊંચાઈ 24 સેમી છે, તો તે શંકુનું વક્રપૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)
8. એક શંકુનું વક્રપૃષ્ઠફળ 2200 ચોસેમી અને ત્રાંસી ઊંચાઈ 50 સેમી હોય તો શંકુનું કુલપૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)
9. એક શંકુ આકાર તંબુમાં 25 માણસો રહ્યા છે. દરેકને જમીન પરની 4 ચોમી જગ્યા જુવે છે જો તંબુની ઊંચાઈ 18 મીટર હોય તો તંબુનું ઘનફળ કેટલું ?

10. એક ખેતરમાં ઢોર માટેનો ચારો શંકુ આકાર ઢગલો કરીને રાખ્યો છે. રાશિ (ઢગલા) ની ઊંચાઈ 2.1 મી અને તેના પાયાનો વ્યાસ 7.2 મી છે. તો ચારાના ઢગલાનું ઘનફળ શોધો. વરસાદના લક્ષણો દેખાય તો એવા પ્રસંગે આ ઢગલાને પ્લાસ્ટિકથી ઢાંકવા માટે ખેડૂતને કેટલા ચોમી પ્લાસ્ટિકની જરૂર પડશે ? ($\pi = \frac{22}{7}$ અને $\sqrt{17.37} = 4.17$ લો.)

જાણી લઈએ.

ગોળાનું પૃષ્ઠફળ (Surface area of sphere)



આકૃતિ 9.11

પોકળ ગોળાનું વક્રપૃષ્ઠફળ $= 4\pi r^2$

$\therefore$ અર્ધગોળાનું વક્રપૃષ્ઠફળ $= 2\pi r^2$

નક્કર અર્ધગોળાનું કુલ પૃષ્ઠફળ = વક્રપૃષ્ઠફળ + વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ

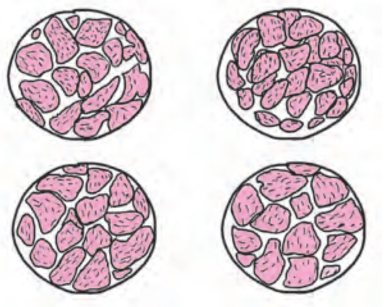
$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$

કૃતિ :

એક મોસંબી લઈ તેના બે ભાગ કરો.

એક ભાગ કાગળ પર ઉંધો મૂકી તેની ફરતે પેન્સિલથી વર્તુળ દોરો. આવા કુલ ચાર વર્તુળ દોરો. હવે મોસંબીના ચાર સરખા ટૂકડા કરો.



દરેક ટુકડાની છાલના નાના નાના ટુકડા કરો. એક વર્તુળ તે ટુકડાથી લગભગ ભરાઈ જશે. તે જુઓ. આ રીતે ચારેય વર્તુળ પૂર્ણ ભરાઈ જશે. આ પરથી,

ગોળાના વક્રપૃષ્ઠફળ $= 4 \times$ વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ

$= 4\,\pi r^2$

ગણેલાં ઉદાહરણો

(1) એક ગોળાની ત્રિજ્યા 7 સેમી હોય, તો તે ગોળાનું વક્રપૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

ઉકેલ: ગોળાનું વક્રપૃષ્ઠફળ $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times (7)^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 88 \times 7$

$= 616$

ગોળાનું વક્રપૃષ્ઠફળ $= 616$ ચોસેમી

(2) વક્રપૃષ્ઠફળ 1256 ચોસેમી હોય એવા ગોળાની ત્રિજ્યા શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ: ગોળાનું વક્રપૃષ્ઠફળ $= 4\pi r^2$

$\therefore \quad 1256 = 4 \times 3.14 \times r^2$

$\therefore \quad \frac{1256}{4 \times 3.14} = r^2$

$\therefore \quad \frac{31400}{314} = r^2$

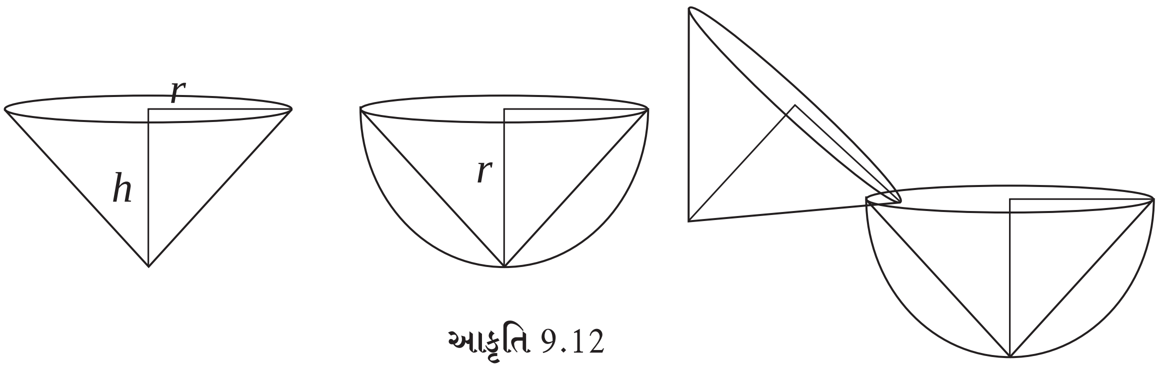
$\therefore \quad 100 = r^2$

$\therefore \quad 10 = r$

$\therefore \quad r = 10$ સેમી

$\therefore$ ગોળાની ત્રિજ્યા $= 10$ સેમી

કૃતિ : એક શંકુ અને એક અર્ધગોળ એવા લો કે, અર્ધગોળની ત્રિજ્યા અને શંકુની ઊંચાઈ સમાન હોય તેમજ શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા અને અર્ધગોળની ત્રિજ્યા સમાન હોય.શંકુને રેતીથી પૂર્ણ પણે ભરો. પૂર્ણ ભરેલો શંકુ અર્ધગોળામાં ઠાલવો.અર્ધગોળ પૂર્ણ ભરવા માટે કેટલા શંકુ લાગે છે તે જુઓ.



આકૃતિ 9.12

એક અર્ધગોળ ભરવા માટે બે શંકુ ભરીને રેતી જોઈએ.

$\therefore$ $2 \times$ શંકુનું ઘનફળ $=$ અર્ધગોળાનું ઘનફળ

$\therefore$ અર્ધગોળાનું ઘનફળ $= 2 \times$ શંકુનું ઘનફળ

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times r$

$= \frac{2}{3} \pi r^3$

$\therefore$ ગોળાનું ઘનફળ $= 2 \times$ અર્ધગોળનું ઘનફળ

$= 2 \times \frac{2}{3} \pi r^3$

$\therefore$ ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3} \pi r^3$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

- અર્ધગોળાનું ઘનફળ $= \frac{2}{3}\pi r^3$
- નક્કર અર્ધગોળાનું કુલપૃષ્ઠફળ $= 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

ગણેલાં ઉદાહરણો :

ઉદા.(1) એક ગોળાની ત્રિજ્યા 21 સેમી છે. તો તે ગોળાનું ઘનફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

ઉકેલ : ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (21)^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21$

$= 88 \times 441$

$\therefore$ ગોળાનું ઘનફળ = 38808 ઘસેમી

ઉદા.(2) 113040 ઘનસેમી ઘનફળવાળા ગોળાની ત્રિજ્યા શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore\ 113040 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times r^3$

$\therefore\ \frac{113040 \times 3}{4 \times 3.14} = r^3$

$\therefore\ \frac{28260 \times 3}{3.14} = r^3$

$\therefore\ 9000 \times 3 = r^3$

$\therefore\ r^3 = 27000$

$\therefore\ r$ = 30 સેમી

ગોળાની ત્રિજ્યા 30 સેમી છે.

ઉદા.(3) વક્રપૃષ્ઠફળ 3.14 ચોસેમી વાળા ગોળાનું ઘનફળ કેટલું? ($\pi = 3.14$ લો.)

ગોળાનું વક્રપૃષ્ઠફળ $= 4\pi r^2$

$\therefore\ 314 = 4 \times 3.14 \times r^2$

$\therefore\ \frac{314}{4 \times 3.14} = r^2$

$\therefore\ \frac{31400}{4 \times 314} = r^2$

$\therefore\ \frac{100}{4} = r^2$

$\therefore\ 25 = r^2$

$\therefore\ r$ = 5 સેમી

ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 5^3$

$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 125$

= 523.33 ઘસેમી

મહાવરાસંગ્રહ 9.3

1. નીચે આપેલી સંખ્યા ગોળાની ત્રિજ્યા દર્શાવે છે.
   (i) 4 સેમી (ii) 9 સેમી (iii) 3.5 સેમી
   તો તે ગોળાના વક્રપૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધો. (π = 3.14 લો.)
2. 5 સેમી ત્રિજ્યા વાળા નક્કર અર્ધગોળાનું વક્રપૃષ્ઠફળ અને કુલપૃષ્ઠફળ શોધો. (π = 3.14 લો.)
3. વક્રપૃષ્ઠફળ 2826 સેમી^{2} હોય તેવા ગોળાનું ઘનફળ શોધો. (π = 3.14 લો.)
4. 38808 ઘસેમી ઘનફળ ધરાવતા ગોળાનું વક્રપૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)
5. એક અર્ધગોળાનું ઘનફળ 18000 π ઘસેમી છે. તો ગોળાનો વ્યાસ શોધો.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 9

1. 0.9 મી વ્યાસ અને 1.4 મી લંબાઈ વાળા રોડરોલરના 500 ફેરાથી કેટલી જમીન દબાવી શકાય? ($\pi = \frac{22}{7}$)
2. એક લંબઘનાકાર ઘરઘરાઉ મત્સ્યાલય બનાવવા માટે 2 મિમી જાડાઈનો કાચ વાપર્યો છે. મત્સ્યાલયના દિવાલની બહારથી લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે સેંટીમીટરમાં 60.4 × 40.4 × 40.2 છે. તો તે મત્સ્યાલયમાં વધુમાં વધુ કેટલું પાણી સમાઈ શકે ?
3. એક શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા અને લંબ ઊંચાઈ નો ગુણોત્તર 5:12 છે. શંકુનું ઘનફળ 314 ઘમી. હોય તો તેની લંબ ઊંચાઈ અને ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધો. (π = 3.14 લો.)
4. એક ગોળાનું ઘનફળ 904. 32 ઘસેમી છે તો તે ગોળાની ત્રિજ્યા શોધો. (π = 3.14 લો.)
5. એક ઘનનું કુલપૃષ્ઠફળ 864 ચોસેમી છે તો તેનું ઘનફળ શોધો.
6. જે ગોળાનું પૃષ્ઠફળ 154 ચોસેમી છે તેવા ગોળાનું ઘનફળ શોધો.
7. એક શંકુનું કુલપૃષ્ઠફળ 616 ચોસેમી. છે તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ તેના પાયાની ત્રિજ્યા કરતા ત્રણગણી હોય તો તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધો.
8. વર્તુળાકાર કૂવાનો અંદરનો વ્યાસ 4.20 મીટર છે. કૂવાની ઊંડાઈ 10 મીટર છે તો તેની અંદરનું વક્રપૃષ્ઠફળ કેટલું ? કૂવાના અંદરના વક્રપૃષ્ઠનું સમારકામ કરવા માટે પ્રતિચોમી 52 રૂપિયાના દરે કેટલો ખર્ચ થશે ?
9. એક રોડરોલરની લંબાઈ 2.1 મીટર અને તેનો વ્યાસ 1.4 મીટર છે. એક મેદાનને સપાટ કરતા રોલરના 500 ફેરા પૂર્ણ થાય છે. તો રોલર વડે કેટલા ચોમી મેદાન સપાટ થશે. મેદાન સપાટ કરવા માટે પ્રતિ ચોમી 7 રૂપિયાના દરે કેટલો ખર્ચ થશે ?

ઉત્તરસૂચિ

1. ભૂમિતિની મૂળભૂત સંકલ્પના

મહાવરાસંગ્રહ 1.1

1. (i) 3 (ii) 3 (iii) 7 (iv) 1
(v) 3 (vi) 5 (vii) 2 (viii) 7

2. (i) 6 (ii) 8 (iii) 10 (iv) 1 (v) 3 (vi) 12

3. (i) P–R–Q (ii) સમરેખ નથી. (iii) A–C–B (iv) સમરેખ નથી.
(v) X–Z–Y (vi) સમરેખ નથી.

4. 18 અને 2 **5.** 25 અને 9 **6.** (i) 4.5 (ii) 6.2 (iii) $2\sqrt{7}$ **7.** ત્રિકોણ

મહાવરાસંગ્રહ 1.2

1. (i) નથી. (ii) નથી. (iii) છે. **2.** 4 **3.** 5 **4.** BP < AP < AB

5. (i) કિરણ RS અથવા કિરણ RT (ii) કિરણ PQ (iii) રેખ QR (iv) કિરણ QR અને કિરણ RQ ઇ.
(v) કિરણ RQ અને કિરણ RT વગેરે. (vi) કિરણ SR , કિરણ ST. (vii) બિંદુ S

6. (i) બિંદુ A અને બિંદુ C , બિંદુ D અને બિંદુ P (ii) બિંદુ L અને બિંદુ U , બિંદુ P અને બિંદુ R
(iii) $d(U,V) = 10$,$d(P,C) = 6$, $d(V,B) = 3$, $d(U,L) = 2$

મહાવરાસંગ્રહ 1.3

1. (i) જો એકાદ ચતુષ્કોણ સમાંતરભુજ હોય તો તે ચતુષ્કોણના સંમુખ ખૂણા એકરૂપ હોય છે.
(ii) જો એકાદ ચતુષ્કોણ લંબચોરસ હોય તો તે ચતુષ્કોણના વિકર્ણ એકરૂપ હોય છે.
(iii) જો એકાદ ત્રિકોણ સમદ્વિભુજ હોય તો તે ત્રિકોણના શિરોબિંદુ અને પાયાના મધ્યબિંદુ ને જોડનાર રેખાખંડ પાયાને લંબ હોય છે.

2. (i) જો બે રેખા અને તેની છેદિકા આપેલી હોય અને તેમના વ્યુત્ક્રમ ખૂણા એકરૂપ હોય તો તે બે રેખા સમાંતર હોય છે.
(ii) બે સમાંતર રેખાને એક છેદિકા છેદતી હોય ત્યારે આંતરખૂણાની જોડી પૂરક હોય છે.
(iii) જો એકાદ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ એકરૂપ હોય તો તે ચતુષ્કોણ લંબચોરસ છે.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 1

1. (i) A (ii) C (iii) C (iv) C (v) B

2. (i) અસત્ય (ii) અસત્ય (iii) સત્ય (iv) અસત્ય

3. (i) 3 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 2 (v) 6 (vi) 22 (vii) 165

4. –15 અને 1 (5) (i) 10.5 (ii) 9.1 (6) –6 અને 8

2. સમાંતર રેખા

મહાવરાસંગ્રહ 2.1

1. (i) 95° (ii) 95° (iii) 85° (iv) 85°
2. $\angle a = 70^\circ$, $\angle b = 70^\circ$, $\angle c = 115^\circ$, $\angle d = 65^\circ$
3. $\angle a = 135^\circ$, $\angle b = 135^\circ$, $\angle c = 135^\circ$
5. (i) 75° (ii) 75° (iii) 105° (iv) 75°

મહાવરાસંગ્રહ 2.2

1. ના 4. $\angle ABC = 130^\circ$

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 2

1. (i) C (ii) C (iii) A (iv) B (v) C 4. $x = 130^\circ$ $y = 50^\circ$
5. $x = 126^\circ$ 6. $f = 100^\circ$; $g = 80^\circ$

2. ત્રિકોણ

મહાવરાસંગ્રહ 3.1

1. 110° 2. 45° 3. $80^\circ, 60^\circ, 40^\circ$ 4. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$
5. $60^\circ, 80^\circ, 40^\circ$ 6. $\angle DRE = 70^\circ$, $\angle ARE = 110^\circ$
7. $\angle AOB = 125^\circ$ 9. $30^\circ, 70^\circ, 80^\circ$

મહાવરાસંગ્રહ 3.2

1. (i) બાબાબા (ii) બાખૂબા (iii) ખૂબાખૂ (iv) કર્ણભુજા
2. (i) ખૂબાખૂ, $\angle BAC \cong \angle QPR$, રેખ AB ≅ રેખ PQ, રેખ AC ≅ રેખ PR
   (ii) બાખૂબા, $\angle TPQ \cong \angle TSR$, $\angle TQP \cong \angle TRS$, રેખ PQ ≅ રેખ SR
3. કર્ણભુજા, $\angle ACB \cong \angle QRP$, $\angle ABC \cong \angle QPR$, રેખ AC ≅ રેખ QR
4. બાબાબા, $\angle MLN \cong \angle MPN$, $\angle LMN \cong \angle MNP$, $\angle LNM \cong \angle PMN$

મહાવરાસંગ્રહ 3.3

1. $x = 50^\circ$, $y = 60^\circ$, $\angle ABD = 110^\circ$, $\angle ACD = 110^\circ$.
2. 7.5 એકમ 3. 6.5 એકમ 4. $l(PG) = 5$ સેમી, $l(PT) = 7.5$ સેમી

મહાવરાસંગ્રહ 3.4

1. 2 સેમી 2. 28° 3. $\angle QPR$, $\angle PQR$ 4. બાજુ NA, બાજુ FN

મહાવરાસંગ્રહ 3.5

1. $\dfrac{XY}{LM} = \dfrac{YZ}{MN} = \dfrac{XZ}{LN}$, $\angle X \cong \angle L$, $\angle Y \cong \angle M$, $\angle Z \cong \angle N$
2. $l(QR) = 12$ સેમી, $l(PR) = 10$ સેમી

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 3

1. (i) D (ii) B (iii) B

5. ચતુષ્કોણ

મહાવરાસંગ્રહ 5.1

1. $\angle XWZ = 135^\circ$, $\angle YZW = 45^\circ$, l (WY) = 10 સેમી
2. $x = 40^\circ$, $\angle C = 132^\circ$, $\angle D = 48^\circ$
3. 25 સેમી , 50 સેમી , 25 સેમી , 50 સેમી
4. 60°, 120°, 60°, 120°
6. $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, $\angle R = 110^\circ$

મહાવરાસંગ્રહ 5.3

1. BO = 4 સેમી, $\angle ACB = 35^\circ$
2. QR = 7.5 સેમી, $\angle PQR = 105^\circ$, $\angle SRQ = 75^\circ$
3. $\angle IMJ = 90^\circ$, $\angle JIK = 45^\circ$, $\angle LJK = 45^\circ$
4. બાજુ = 14.5 સેમી, પરિમિતિ = 58 સેમી
5. (i) અસત્ય (ii) અસત્ય (iii) સત્ય (iv) સત્ય (v) સત્ય (vi) અસત્ય

મહાવરાસંગ્રહ 5.4

1. $\angle J = 127^\circ$, $\angle L = 72^\circ$ 2. $\angle B = 108^\circ$, $\angle D = 72^\circ$

મહાવરાસંગ્રહ 5.5

1. XY = 4.5 સેમી, YZ = 2.5 સેમી, XZ = 5.5 સેમી

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 5

1. (i) D (ii) C (iii) D 2. 25 સેમી, 3. $6.5\sqrt{2}$ સેમી
4. 24 સેમી, 32 સેમી, 24 સેમી, 32 સેમી 5. PQ = 26 સેમી 6. $\angle MPS = 65^\circ$

6. વર્તુળ

મહાવરાસંગ્રહ 6.1

1. 20 સેમી 2. 5 સેમી 3. 32 સેમી 4. 9 સેમી

મહાવરાસંગ્રહ 6.2

1. 6 સેમી 2. 24 સેમી

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 6

1. (i) A (ii) C (iii) A (iv) B (v) D (vi) C (vii) D 2. 2:1 4. 24 એકમ

7. નિર્દેશક ભૂમિતિ

મહાવરાસંગ્રહ 7.1

1. બિંદુ A : ચરણ II, બિંદુ B : ચરણ III, બિંદુ K : ચરણ I, બિંદુ D : ચરણ I
બિંદુ E : ચરણ I, બિંદુ F : ચરણ IV, બિંદુ G : ચરણ IV, બિંદુ H : Y–અક્ષ
બિંદુ M : X–અક્ષ, બિંદુ N : Y–અક્ષ, બિંદુ P : Y–અક્ષ, બિંદુ Q : ચરણ III

2. (i) ચરણ I (ii) ચરણ III (iii) ચરણ IV (iv) ચરણ II

મહાવરાસંગ્રહ 7.2

1. ચોરસ **2.** $x = -7$ **3.** $y = -5$ **4.** $x = -3$ **5.** 4 એકમ

6. (i) Y–અક્ષ (ii) X–અક્ષ (iii) Y–અક્ષ (iv) X–અક્ષ

7. X અક્ષપર (5,0) , Y અક્ષપર (0,5)

8. (–4,1), (–1.5, 1), (–1.5,5), (–4,5)

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 7

1. (i) C (ii) A (iii) B (iv) C (v) C (vi) B **2.** (i) Q (–2,2), R(4,–1)
(ii) T(0,–1), M(3,0) (iii) બિંદુ S (iv) બિંદુ O **3.** (i) ચરણ IV (ii) ચરણ III
(iii) ચરણ II (iv) ચરણ II (v) Y અક્ષ (vi) X અક્ષ **5.** (i) 3 એકમ
(ii) P(3,2), Q(3,–1), R (3,0) (iii) 0 **6.** બે રેખા. $y = 5, y = -5$ **7.** $|a|$

8. ત્રિકોણમિતિ

મહાવરાસંગ્રહ 8.1

1. (i) $\frac{QR}{PQ}$ (ii) $\frac{QR}{PQ}$ (iii) $\frac{QR}{PR}$ (iv) $\frac{PR}{QR}$

2. (i) $\frac{a}{c}$ (ii) $\frac{b}{a}$ (iii) $\frac{b}{c}$ (iv) $\frac{a}{b}$

3. (i) $\frac{MN}{LN}$ (ii) $\frac{LM}{LN}$ (iii) $\frac{LM}{MN}$ (iv) $\frac{MN}{LN}$

4. (i) $\frac{PQ}{PR}, \frac{RQ}{PR}, \frac{PQ}{RQ}$ (ii) $\frac{QS}{PS}, \frac{PQ}{PS}, \frac{QS}{PQ}$

મહાવરાસંગ્રહ 8.2

1. $\sin\theta : \frac{12}{37}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{21}{29}, \frac{8}{17}, \frac{1}{3}$; $\cos\theta : \frac{60}{61}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{20}{29}, \frac{15}{17}, \frac{4}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta : \frac{12}{35}, \frac{11}{60}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}, \frac{3}{4}$

2. (i) $\frac{11}{2}$ (ii) $\frac{93}{20}$ (iii) 5 (iv) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ (v) $\frac{3}{4}$ (vi) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{3}{5}$ 4. $\frac{8}{17}$

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 8

1. (i) A (ii) D (iii) C (iv) D
2. $\sin T = \frac{12}{13}, \cos T = \frac{5}{13}, \tan T = \frac{12}{5}, \sin U = \frac{5}{13}, \cos U = \frac{12}{13}, \tan U = \frac{5}{12}$
3. $\sin Y = \frac{8}{17}, \cos Y = \frac{15}{17}, \tan Y = \frac{8}{15}, \sin Z = \frac{15}{17}, \cos Z = \frac{8}{17}, \tan Z = \frac{15}{8}$
4. $\sin \theta = \frac{7}{25}, \tan \theta = \frac{7}{24}, \sin^2 \theta = \frac{49}{625}, \cos^2 \theta = \frac{576}{625}$
5. (i) 70 (ii) 60 (iii) 50

9. પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ

મહાવરાસંગ્રહ 9.1

1. 640 ચોસેમી , 1120 ચોસેમી 2. 20 એકમ 3. 81 ચોસેમી , 121.50 ચોસેમી
4. 3600 ચોસેમી 5. 20 મી 6. 421.88 ઘસેમી
7. 1632.80 ચોસેમી , 4144.80 ચોસેમી 8. 21 સેમી

મહાવરાસંગ્રહ 9.2

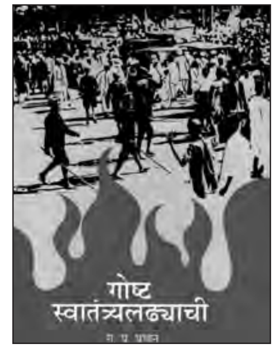
1. 5 સેમી 2. 36960 ઘસેમી 3. 10 સેમી, 6 સેમી 4. ₹ 2640
5. 15 સેમી 6. 8 સેમી 7. 550 ચોસેમી 8. 2816 ચોસેમી, 9856 ઘસેમી
9. 600 ઘમી 10. 28.51 ઘમી, 47.18 ચોમી

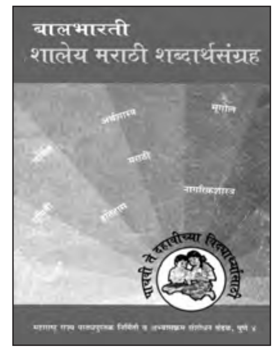
મહાવરાસંગ્રહ 9.3

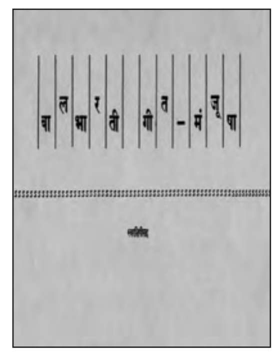
1. (i) 200.96 ચોસેમી , 267.95 ઘસેમી (ii) 1017.36 ચોસેમી , 3052.08 ઘસેમી
(iii) 153.86 ચોસેમી , 179.50 ઘસેમી
2. 157 ચોસેમી , 235.5 ચોસેમી 3. 14130 ઘસેમી 4. 5544 ચોસેમી 5. 60 સેમી

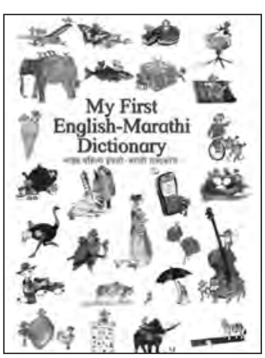
સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 9

1. 1980 ચોમી 2. 96801.6 ઘસેમી 3. 12 મી, 13 મી
4. 6 સેમી 5. 1728 ઘસેમી 6. 179.67 ઘસેમી
7. 21 સેમી 8. 132 ચોમી, ₹ 6864 9. 4620 ચોમી , ₹ 32340









- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.

पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५

મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ, પુણે ૪૧૧ ૦૦૪.

गुजराती गणित इ.९वी भाग-२

₹ 61.00