ریاضی حصّہ - II

نویں جماعت

بھارت کا آئین

حصہ 4 الف

بنیادی فرائض

حصہ 51 الف

بنیادی فرائض – بھارت کے ہر شہری کا یہ فرض ہوگا کہ وہ...

(الف) آئین پر کاربند رہے اور اس کے نصب العین اور اداروں، قومی پرچم اور قومی ترانے کا احترام کرے۔

(ب) ان اعلیٰ نصب العین کو عزیز رکھے اور ان کی تقلید کرے جو آزادی کی تحریک میں قوم کی رہنمائی کرتے رہے ہیں۔

(ج) بھارت کے اقتدارِاعلیٰ، اتحاد اور سالمیت کو مستحکم بنیادوں پر استوار کر کے ان کا تحفّظ کرے۔

(د) ملک کی حفاظت کرے اور جب ضرورت پڑے قومی خدمت انجام دے۔

(ہ) مذہبی، لسانی اور علاقائی وطبقاتی تفرقات سے قطع نظر بھارت کے عوام الناس کے مابین یک جہتی اور عام بھائی چارے کے جذبے کو فروغ دے نیز ایسی حرکات سے باز رہے جن سے خواتین کے وقار کو ٹھیس پہنچتی ہو۔

(و) ملک کی ملی جلی ثقافت کی قدر کرے اور اُسے برقرار رکھے۔

(ز) قدرتی ماحول کو جس میں جنگلات، جھیلیں، دریا اور جنگلی جانور شامل ہیں محفوظ رکھے اور بہتر بنائے اور جانداروں کے تیئں محبت وشفقت کا جذبہ رکھے۔

(ح) دانشورانہ رویے سے کام لے کر انسان دوستی اور تحقیقی واصلاحی شعور کو فروغ دے۔

(ط) قومی جائداد کا تحفظ کرے اور تشدد سے گریز کرے۔

(ی) تمام انفرادی اور اجتماعی شعبوں کی بہتر کارکردگی کے لیے کوشاں رہے تاکہ قوم متواتر ترقی و کامیابی کی منازل طے کرنے میں سرگرمِ عمل رہے۔

(ک) اگر ماں باپ یا ولی ہے، چھے سال سے چودہ سال تک کی عمر کے اپنے بچے یا وارڈ، جیسی بھی صورت ہو، کے لیے تعلیم کے مواقع فراہم کرے۔

سرکاری فیصلہ نمبر: ابھیاس - ۲۱۱۶/ پر.نمبر ۱۶/۴۳) ایس ڈی -۴ مورخہ ۲۵/اپریل ۲۰۱۶ء کے مطابق قائم کی گئی رابطہ کمیٹی کی نشست ۳/مارچ ۲۰۱۷ء میں اس کتاب کو درسی کتاب کے طور پر منظوری دی گئی۔

ریاضی

حصّہ - II

نویں جماعت

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی و ابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ - ۴۱۱۰۰۴

اپنے اسمارٹ فون میں انسٹال کردہ Diksha App کے ذریعے درسی کتاب کے پہلے صفحے پر درج Q.R. code اسکین کرنے سے ڈیجیٹل درسی کتاب اور ہر سبق میں درج Q.R. code کے ذریعے متعلقہ سبق کی درس و تدریس کے لیے مفید سمعی و بصری ذرائع دستیاب ہوں گے۔

85DRGL

پہلا ایڈیشن : ۲۰۱۸ء (2018)
تیسرا اصلاح شدہ ایڈیشن : ۲۰۲۲ء (2022)

© مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ - ۴۱۱۰۰۴
اس کتاب کے جملہ حقوق مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ کے حق میں محفوظ ہیں۔ اس کتاب کا کوئی بھی حصہ ڈائرکٹر، مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل کی تحریری اجازت کے بغیر کسی بھی شکل میں شائع نہ کیا جاسکتا۔

ریاضی مضمون کی کمیٹی

- ڈاکٹر منگلا نارلیکر (صدر)
- ڈاکٹر شریمتی جے شری اترے (رکن)
- شری رما کانت سرودے (رکن)
- شری دادا سوسرڈے (رکن)
- شری سندیپ پنچ بھائی (رکن)
- شریمتی لتا تلے کر (رکن)
- شریمتی اجولا گوڈبولے (رکن سکریٹری)

ریاضی مضمون کی مجلس عاملہ

- شریمتی پوجا جادھو
- شری پرمودٹھونبرے
- شری راجندر چودھری
- شری انا پاپریٹ
- شری شریپاد دیشپانڈے
- شری بنسی ہوالے
- شری اُمیش ریلے
- شری چندن کلکرنی
- شریمتی انیتا جاوے
- شریمتی با گیشری چوہان
- شری کلیان کڑیکر
- شری سندیش سوناونے
- شری سجیت شندے
- ڈاکٹر ہنومنت جگتاپ
- شری پرتاپ کاشد
- شری کاشی رام بویسانے
- شری پپو گاڑے
- شریمتی روہنی شرکے
- شری رام ونہیال کر
- جناب انصار شیخ
- شریمتی سورنا دیش پانڈے
- شری گنیش کولتے
- شری سریش داتے
- شری پرکاش جھینڈے
- شری شری کانت رتن پارکھی
- شری سوریہ کانت شہانے
- شری پرکاش کاپسے
- جناب سلیم ہاشمی
- شریمتی آریا بھڑے
- شری ملند بھاکرے
- شری گیانیشور ماشالکر
- شری لکشمن داونکر
- شری سدھیر پاٹل
- شری راجارام بنڈگر
- شری پردیپ گوڈسے
- شری رویندر کھندارے
- شری ساگر سکوڑے

- شریمتی پراجکتی گوکھلے (مہمان رکن)
- شری وی۔ڈی۔گوڈبولے (مہمان رکن)
- شریمتی تروبین پوپٹ (مہمان رکن)

Urdu Translators
Mr. Ansari Abdul Hameed Abdul Majeed
Mr. Momin Al-Nasir Abdus Samad

Co-ordinator (Urdu)
Khan Navedul Haque Inamul Haque
Special Officer for Urdu,
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

Co-ordinator (Marathi)
Smt. Ujwala S. Godbole
I/C. Special Officer for Mathematics
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

Urdu D.T.P. & Layout
Altaf Ameen (Sadan Graphics)
Malegaon-423203

Cover, Art work & Designing
Dhan Shri Mukashi, Pune

Computer Designing
Sandeep Koli, Mumbai

Production
Shri Sachin Mehta (C.P.O)
Shri Sanjay Kamble (Production Officer)
Shri Prashant Harne (Asst. Production Officer)

Paper
70, GSM Creamwove

Print Order
N/PB/2017-18/

Printer

Publisher
Shri Vivek Uttam Gosavi (Controller)
M.S. Bureau of Textbook Production,
Prabhadevi, Mumbai - 25

بھارت کا آئین

تمہید

ہم بھارت کے عوام متانت وسنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بھارت کو
ایک **مقتدر سماج وادی غیر مذہبی عوامی جمہوریہ** بنائیں
اوراس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں:
انصاف، سماجی، معاشی اور سیاسی؛
آزادی خیال، اظہار، عقیدہ، دین اور عبادت؛
مساوات بہ اعتبارِ حیثیت اور موقع،
اوران سب میں
اُخوّت کو ترقّی دیں جس سے فرد کی عظمت اور **قوم کے اتحاد اور سالمیت** کا تیقّن ہو؛
**اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھبّیس نومبر ۱۹۴۹ء کو یہ آئین ذریعۂ ہٰذا اختیار کرتے ہیں،
وضع کرتے ہیں اوراپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔**

راشٹر گیت

جَنَ گَنَ مَنَ - اَدِھ نایک جَیَہ ہے
بھارَتَ - بھاگیَہ وِدَھاتا۔

پَنْجاب، سِندُھ، گُجراتَ، مَراٹھا
دراوِڑَ، اُتکَل، بَنگَ،

وِنْدھیہ، ہِماچَل، یَمُنا، گنگا،
اُچّھَل جَل دِھ تَرَنگَ،

تَوشُبھَ نامے جاگے، تَوشُبھ آشِسَ ماگے،
گاہے تَوجَیَہ گاتھا،

جَنَ گَنَ منگل دَایَک جَیَہ ہے،
بھارَتَ - بھاگیَہ وِدھاتا۔

جَیَہ ہے، جَیَہ ہے، جَیَہ ہے،
جَیَہ جَیَہ جَیَہ، جَیَہ ہے۔

عہد

بھارت میرا ملک ہے۔ سب بھارتی میرے بھائی اور بہنیں ہیں۔

مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور مَیں اس کے عظیم و گونا گوں وِرثے پر فخر محسوس کرتا ہوں۔ مَیں ہمیشہ اِس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کروں گا۔

میں اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزّت کروں گا اور ہر ایک سے خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا۔

میں اپنے ملک اور اپنے لوگوں کے لیے خود کو وقف کرنے کی قسم کھاتا ہوں۔ اُن کی بہتری اور خوش حالی ہی میں میری خوشی ہے۔

پیش لفظ

عزیز طلبہ!

نویں جماعت میں آپ کا استقبال ہے۔

ابتدائی تعلیم کا نصاب مکمل کرکے آپ ثانوی سطح پر مطالعہ کی ابتدا کررہے ہو۔ آٹھویں جماعت تک ریاضی کے لیے صرف ایک درسی کتاب تھی۔ اب ریاضی حصہ I اور ریاضی حصہ II، ان کتابوں کا مطالعہ کرنا ہے۔

آٹھویں جماعت تک ریاضی کی درسی کتاب میں خط، مثلث، ذو اربعۃ الاضلاع، دائرہ وغیرہ کی خصوصیت کی تصدیق کرچکے ہو۔ اب مزید کچھ خصوصیت کا آپ منطقی دلائل کے ذریعے مرحلہ وار ثابت کرنا سیکھیں گے۔ منطقی دلائل پیش کرنے کی مہارت کاروباری تمام شعبوں میں اہمیت کی حامل ہے۔ درسی کتاب میں یہ مہارت سیکھنے کا موقع ہے۔

درسی کتاب میں مذکور سرگرمیوں (عملی کام) سے متعلق اساتذہ سے، جماعت کے دوست یا سہیلیوں سے بحث ومباحثہ کیجیے اور ان سرگرمیوں پر عمل کرکے خصوصیت کے ثبوت کا مطالعہ کیجیے۔ ثبوت کے ہر مرحلے کی دی ہوئی وجوہات پر بحث ومباحثہ کیجیے اور اس خصوصیت کو سمجھ لیجیے۔

اس درسی کتاب میں اعلیٰ ریاضی کے مطالعہ کے لیے کارآمد 'علم مثلث اور محددی علم ہندسہ' جیسی اکائیوں کو شامل کیا گیا ہے۔ اسی طرح کاروبار اور لین دین میں کارآمد ومفید 'سطح کا رقبہ اور حجم' اکائیوں کا مطالعہ بھی آپ کریں گے۔

انٹرنیٹ کا استعمال کرکے مختلف عملی کام سمجھ لیجیے۔ درسی کتاب کا تفصیلی مطالعہ، عمل سے مربوط درس اور اعادہ، ان تین طریقوں سے ہی بلاشبہ ریاضی کا سفر آپ خوشی ومسرت سے مکمل کرسکیں گے۔ آیئے تو پھر اساتذہ سرپرست، دوست یا سہیلیاں اور انٹرنیٹ ان سب کو ہمراہ لے کر ریاضی کا مطالعہ کریں۔ اس مطالعہ کے لیے آپ کو نیک تمنائیں!

ڈاکٹر سنیل مگر

ڈائرکٹر

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی

وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ

پونہ

مورخہ : ۲۸/اپریل ۲۰۱۷ء اکشیہ ترتیہ

بھارتی شمسی تاریخ : ۸/ویشاکھ ۱۹۳۹

نویں جماعت ریاضی حصہ II نصاب سے طلبہ میں درج ذیل صلاحیتوں کا ارتقا متوقع ہے۔

زمرہ	اکائی	متوقع صلاحیتیں
.1 علم ہندسہ	1.1 اقلیدس	● دیے ہوئے بیان سے استعمال کے قابل دستیاب معلومات (دیا ہوا ہے) اور اس کی بنا پر ثابت کرنے کے لیے بیان (ثابت کرنا ہے) اسے ٹھیک ڈھنگ سے پیش کرنا۔ ● منطقی دلائل پیش کر کے ثابت کرنا ہے بیان کو ثابت کرنے کی صلاحیت کو فروغ دینا۔
	1.2 متوازی خطوط اور زاویوں کی جوڑیاں	● متوازی خطوط اور تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویوں کی مختلف جوڑیاں پہچاننا۔ ● زاویوں کی جوڑیوں کی خصوصیت سمجھنا اور ان کا استعمال بروقت کرنا۔
	1.3 مثلث کے زاویے اور ضلعوں کا مسئلہ	● دی ہوئی معلومات، 'دیا ہوا ہے' اور 'ثابت کرنا ہے' کی نوعیت میں لکھ کر ثبوت دینا۔
	1.4 متشابہ مثلث	● متشابہ مثلثوں کو پہچاننا، ان کے اضلاع کی نسبتیں لکھنا۔
	1.5 دائرہ	● متماثل مثلثوں کی آزمائشوں کا استعمال کر کے دائرہ کی خصوصیت ثابت کرنا۔ ● داخلی دائرہ، حائط دائرہ بنانا۔
	1.6 ہندسی عمل	● مثلث کی مخصوص باتیں دی ہوں تو مثلث بنانا۔
	1.7 ذو اربعۃ الاضلاع	● مخصوص ذو اربعۃ الاضلاع کی خصوصیات کا ثبوت لکھنا۔ ● ICT Tools کی مدد سے مثلث، ذو اربعۃ لاضلاع، دائرہ کی خصوصیات کی تصدیق کرنا۔
.2 محددی علم ہندسہ	2.1 محددی علم ہندسہ	● مستوی میں واقع ہر نقطہ سے مربوط محددین کی مرتب جوڑی کا مطلب بتانا۔ ● محددین کا استعمال کر کے مخصوص نقطہ کو بیان کرنا۔ ● ICT Tools کا استعمال کر کے مستوی میں نقاط کے محددین معلوم کرنا۔
.3 مساحت	3.1 سطح کا رقبہ اور حجم	● کرہ اور مخروط کی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کرنا۔
.4 علم مثلث	4.1 علم مثلث	● مشابہ مثلثوں اور فیثا غورث کے مسئلہ کا استعمال کر کے مثلثیاتی نسبتیں بتانا اور ان کا استعمال کرنا۔

اساتذہ کے لیے ہدایات

نویں جماعت ریاضی حصہ – II کی درسی کتاب کا اساتذہ پہلے تفصیلی مطالعہ کریں۔ اس میں دی ہوئی تمام سرگرمیاں (عملی کام) اور تجربات سمجھ لیں۔ عملی کام کے دو حصے ہیں ایک ثبوت لکھنا اور دوسرا خصوصیات کا اور سیکھے ہوئے نتائج کا تجربے کے ذریعے تصدیق کرنا۔ یہ عملی کام کرنے کے لیے اور کتاب سے زیادہ تحریک دلانے کے لیے بحث و مباحثہ، سوال و جواب، اجتماعی سرگرمی جیسے مختلف طریقوں کا استعمال کرنا اساتذہ سے متوقع ہے۔ درسی کتاب کے عملی کام طلبہ سے کروائیں اور اس جیسے کئی عملی کام تیار کرنے کے لیے طلبہ کی رہنمائی کریں۔

مسئلوں کے ثبوت یاد کرنے کی بجائے ان کے منطقی دلائل پر غور کر کے اُن کی پیش کش کرنا زیادہ اہم ہے۔ منطقی دلائل سے غور وفکر کی قوت کو ابھارنے کے لیے مختلف مثالیں درسی کتاب میں شامل کی گئی ہیں۔ ایسی کئی مثالیں استاد اور طالب علم مل کر بنائیں۔ فکر انگیز مثالیں درسی کتاب میں تارے کی علامت لگا کر دی ہوئی ہیں۔ طلبہ مختلف انداز سے غور کر کے منطقی دلائل کے طریقے سے کوئی ثبوت دیں، عملی کام کریں یا مثالیں حل کریں تو اساتذہ ایسے طلبہ کی حوصلہ افزائی کریں۔

قدر پیمائی کرتے وقت آزادانہ جوابی سوالات اور سرگرمی شیٹ پر بھی اساتذہ توجہ دیں۔ قدر پیمائی کے ایسے طریقے کو فروغ دینے کی اساتذہ کوشش کریں۔ اسی کے ساتھ درسی کتاب میں نمونہ کے طور پر تجربات کی فہرست دی ہوئی ہے۔ نیز دستیاب وسائل سے آپ خود انواع و اقسام کے تجربات بنا سکتے ہیں۔ اسی طرح وسائل تعلیم بھی بنائے جا سکتے ہیں۔ درسی کتاب میں مختلف عملی کام کو تجربات کے ساتھ ہم آہنگ کیا گیا ہے۔ اس پر مبنی قدر پیمائی کے طریقے کا استعمال اگلی جماعت کی صلاحیت کو فروغ دینے میں یقیناً کارآمد ہوگا۔ ہمیں ایسی امید ہے۔

نمونہ تجربات کی فہرست

1. عددی خط پر دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا۔
2. متوازی خطوط اور تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویوں کی خصوصیت کو وسائل کا استعمال کر کے جانچنا۔
3. مختلف وسائل کے ذریعے مثلث کے اضلاع اور زاویوں کی خصوصیت کی جانچ کرنا۔
4. قائمۃ الزاویہ مثلث اور وسطانیہ کی خصوصیات کی تصدیق کرنا۔
5. مثلث بنانے کے لیے مثلثوں کی مختلف پیمائشیں لے کر تمام اقسام کے ہندسی عمل کرنا۔
6. مخروط کی خمدار سطح کے رقبہ کا اندازہ لگانے کے لیے ایک عملی کام دیا ہوا ہے۔ وہ عملی کام 'r' نصف قطر والے دائرہ کے لیے کرنا اور دائرہ کا رقبہ πr^2 ہے۔ اس کی تصدیق کرنا۔
7. کسی کمرے اور اس کی تمام چیزوں کی پیمائشوں کو دھیان میں رکھ کر پیمانے کے مطابق نقشہ، ترسیمی کاغذ پر بنانا۔
8. اسکول کے میدان پر X اور Y محور بنا کر طلبہ کے مقام کے محددین طے کرنے کے لیے عملی کام انجام دینا۔
9. مستطیلی منشور کی جسامت کے ڈبے کا حجم ضابطے کی مدد سے معلوم کرنا اور اسی ڈبے میں لبالب پانی بھر کر پانی کا حجم ناپنا۔ دونوں جوابوں کا موازنہ کرنا اور اسی طرح کئی سہ رخی اجسام والی چیزوں کے حجم کی تصدیق کرنا۔

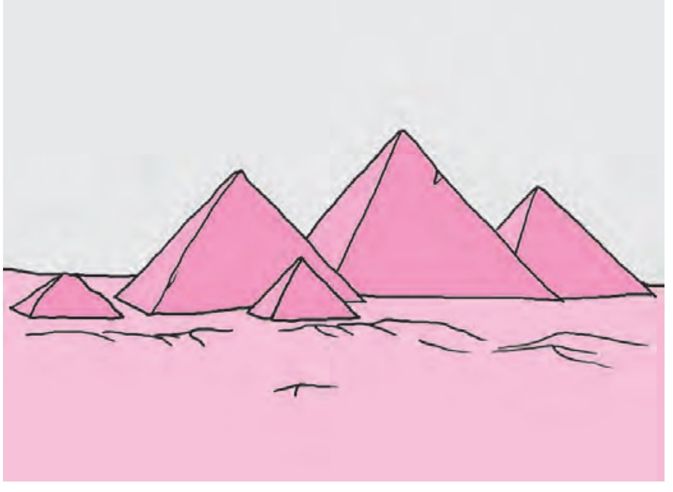
فہرست

	ابواب	صفحات
.1	علم ہندسہ کے بنیادی تصورات	1 سے 12
.2	متوازی خطوط	13 سے 23
.3	مثلث	24 سے 50
.4	مثلث بنانا	51 سے 56
.5	ذواربعۃ الاضلاع	57 سے 75
.6	دائرہ	76 سے 87
.7	محددی علم ہندسہ	88 سے 99
.8	علم مثلث	100 سے 113
.9	سطح کا رقبہ اور حجم	114 سے 123
●	جوابات کی فہرست	124 سے 128

1 علم ہندسہ کے بنیادی تصورات Basic Concept of Geometry

آیئے، سیکھیں

- نقطہ، خط اور مستوی
- مشروط بیانات
- نقطہ کے محدد اور فاصلہ
- ثبوت
- درمیانیت



کیا آپ نے بازو کی تصویر پہچان لی؟
مصر کے اہرام کی تصویر ہے۔ 3000 قبل مسیح میں اتنی عظیم تعمیر پہلے کے لوگوں نے کس طرح کی ہوگی؟ فن تعمیر اور علم ہندسہ ان علوم میں ترقی ہوئے بغیر اس قسم کی تعمیر ناممکن ہے۔

علم ہندسہ (جیومیٹری) اس کے نام سے ہی اس کے علم کی ابتدا سمجھ میں آتی ہے۔ جیومیٹری یونانی لفظ 'Geo' یعنی زمین اور Metron معنی پیمائش۔ اس بنا پر زمین کی پیمائش کی ضرورت محسوس ہونے سے اس مضمون کی ابتدا ہوئی ایسا قیاس ہے۔

کئی ممالک میں علم ہندسہ کی ترقی مختلف زمانوں اور مختلف تعمیر کے لیے ہوئی۔ ایسی کہانی مشہور ہے کہ 'تھیلیس' قدیم یونانی ریاضی داں مصر میں جا کر اہرام کے سائے کی لمبائی ناپ کر متشابہ مثلثوں کی خصوصیت کا استعمال کر کے اہرام کی اونچائی معلوم کی تھی۔ ایسا قیاس کیا جاتا ہے کہ فیثا غورث بھی تھیلیس کا شاگرد تھا۔

قدیم بھارتیوں کو بھی علم ہندسہ مضمون کا گہرا علم تھا۔ ویدک زمانہ میں بھارتی لوگ یدنیہ کنڈ کی تعمیر کے لیے علم ہندسہ کی خصوصیات کا استعمال کرتے تھے۔ دھاگے کی مدد سے کس طرح ناپا جاتا ہے اور مختلف شکل کس طرح بنانا چاہیے اس بات کا ذکر شلوستر میں ملتا ہے۔ بعد کے زمانے میں آریہ بھٹ، وراہ میر، برہم گپت، بھاسکراچاریہ وغیرہ ریاضی دانوں نے اس مضمون میں قیمتی اضافہ کیا۔

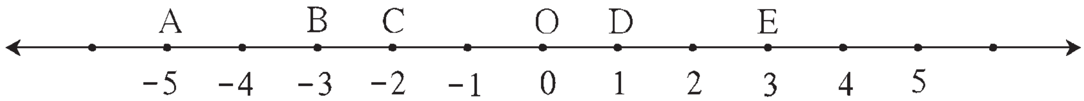
آیئے سمجھ لیں

علم ہندسہ کے بنیادی تصورات : نقطہ ، خط اور مستوی۔ (Basic concept in Geometry : Point, line and Plane)

جس طرح ہم اعداد کی تعریف نہیں کرتے، اسی طرح نقطہ، خط اور مستوی کی تعریف نہیں کی جاتی۔ یہ علم ہندسہ کے بنیادی تصورات ہیں۔ خط اور مستوی نقاط کے سیٹ ہیں۔ خط یعنی مستقیم خط ہوتا ہے اسے ذہن میں رکھیے۔

نقطوں کے محدد اور فاصلہ (Co-ordinates of points and distance)

ذیل کے عددی خط دیکھیے۔



شکل 1.1

یہاں نقطہ D عددی خط پر 1 ظاہر کرتا ہے۔ عدد 1 کو نقطہ D کا محدد کہتے ہیں۔ نقطہ B، عددی خط پر -3 عدد کو ظاہر کرتا ہے، اس لیے نقطہ B کا محدد -3 ہے۔ اسی طرح نقطہ A کا محدد -5 اور E کا محدد 3 ہے۔

نقطہ D سے نقطہ E، 2 اکائی فاصلہ پر واقع ہے یعنی E اور D ان دو نقاط کے درمیان فاصلہ 2 اکائی ہے۔ یہاں ہم اکائی ناپ کر دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں۔ اس عددی خط پر نقطہ A اور B کے درمیان فاصلہ 2 اکائی ہے۔

اب نقاط کے محددین کا استعمال کر کے فاصلہ کس طرح معلوم کیا جاتا ہے، دیکھیں گے۔

دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا یعنی ان نقاط کے محددین میں سے بڑے محدد سے چھوٹا محدد تفریق کرنا۔

نقطہ D کا محدد 1 ہے۔ E کا محدد 3 ہے اور ہم جانتے ہیں کہ $3 > 1$

اس لیے نقطہ E اور D کے درمیان فاصلہ $3-1$ یعنی 2 ہے۔

نقطہ E اور D کے درمیان فاصلہ کو $d(E,D)$ کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ یہ فاصلہ یعنی l (ED)، قطعہ ED کی لمبائی ہے۔

$$d(E, D) = 3 - 1 = 2$$
$$\therefore\ l(ED) = 2$$
$$d(E, D) = l(ED) = 2$$
اسی طرح، $d(E, D) = 2$

$$d(C, D) = 1 - (-2)$$
$$= 1 + 2 = 3$$
$$\therefore\ d(C, D) = l(CD) = 3$$
اسی طرح، $d(C, D) = 3$

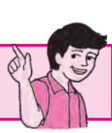
اب $d(A,B)$ معلوم کریں گے۔

نقطہ A کا محدد -5 ہے، نقطہ B کا محدد -3 ہے اور $-3 > -5$

$\therefore\ d(A, B) = -3 - (-5) = -3+5 = 2$ ... (یہ مثبت عدد ہے)

اوپر دی ہوئی تمام مثالوں سے سمجھ میں آتا ہے کہ دو مختلف نقاط کے درمیان فاصلہ مثبت عدد ہوتا ہے۔ اسی طرح اگر P، Q ایک ہی نقطہ ہو تو $d(P, Q) = 0$ اسے دھیان میں رکھیے۔

اسے دھیان میں رکھیں



- دو نقاط کے درمیان فاصلہ، ان کے محددین کے بڑے محدد میں سے چھوٹا محدد تفریق کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔
- کسی بھی دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ غیر منفی حقیقی عدد ہوتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

درمیانیت (Betweenness)

اگر P,Q,R ہم خطی نقاط ہوں تو ذیل میں دی ہوئی اشکال کے مطابق تین صورتیں ممکن ہو سکتی ہیں۔

شکل 1.2

(i) نقطہ P، نقاط R اور Q کے درمیان ہے۔

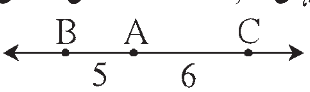
(ii) نقطہ R، نقاط P اور Q کے درمیان ہے۔

(iii) نقطہ Q، نقاط P اور R کے درمیان ہے۔

اگر $d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R)$ ہو تو اس طرح کہا جاتا ہے کہ نقطہ Q، نقاط P اور R کے درمیان واقع ہے اور اسے P – Q – R سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال (1) ایک عددی خط پر B,A اور C نقاط اس طرح واقع ہیں کہ $d(A, B) = 5$، $d(B, C) = 11$ اور $d(A, C) = 6$ ہو تو بتایئے کون سا نقطہ دیگر دو نقاط کے درمیان واقع ہے؟

حل : یہاں B,A اور C نقاط میں سے کون سا نقطہ دیگر دو نقاط کے درمیان ہے، اسے ہم ذیل کے مطابق بتا سکتے ہیں۔



شکل 1.3

$d(B,C) = 11$ ... (I)

$d(A,B) + d(A,C) = 5 + 6 = 11$ ... (II)

$\therefore d(B, C) = d(A, B) + d(A, C)$ ... [(I) اور (II) کی رُو سے]

اس لیے نقطہ A، نقاط B اور C کے درمیان واقع ہے۔

مثال (2) ایک راستے پر مستقیم خط میں U, V اور A شہر واقع ہیں۔ U اور A شہروں کے درمیان فاصلہ 215 کلومیٹر، V اور A شہر کے درمیان فاصلہ 140 کلومیٹر اور U اور V کے درمیان فاصلہ 75 کلومیٹر ہے۔ تو بتایئے کون سا شہر کن دو شہروں کے درمیان واقع ہے؟

حل : $d(U,V) = 75$ ؛ $d(V,A) = 140$ ؛ $d(U,A) = 215$

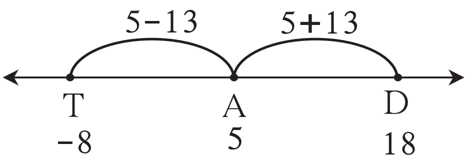
$d(U,V) + d(V,A) = 75 + 140 = 215$ ؛ $d(U,A) = 215$

$$\therefore d(U,A) = d(U,V) + d(V,A)$$

اس لیے V شہر U اور A شہروں کے درمیان واقع ہے۔

مثال (3) ایک عددی خط پر نقطہ A کا محدد 5 ہے۔اسی عددی خط پر نقطہ A سے 13 اکائی فاصلہ پر واقع نقطہ کا محدد معلوم کیجیے۔

حل : عددی خط پر نقطہ A سے 13 اکائی فاصلہ پر شکل کے مطابق نقطہ A سے بائیں جانب نقطہ T اور دائیں جانب نقطہ D اس طرح دو نقاط لیجیے۔



شکل 1.4

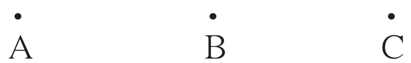
نقطہ A کے بائیں جانب نقطہ T کا محدد $= 5 - 13 = -8$

نقطہ A کے دائیں جانب نقطہ D کا محدد $= 5 + 13 = 18$

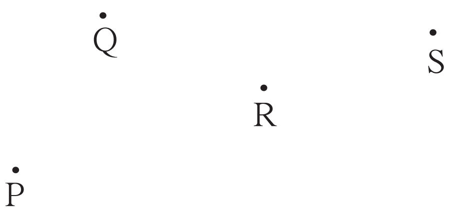
اس لیے نقطہ A سے 13 اکائی فاصلہ پر واقع نقاط کے محدد 8− اور 18 ہوں گے۔

تصدیق کیجیے۔ $d(A,D) = d(A,T) = 13$

عملی کام :



(1) نقاط B, A اور C ہم خطی نقاط ہیں؟ رسی کھینچ کر تصدیق کیجیے کہ وہ ایک خط میں واقع ہوں تو کون سا نقطہ دیگر دو نقاط کے درمیان ہے۔ اسے لکھیے۔



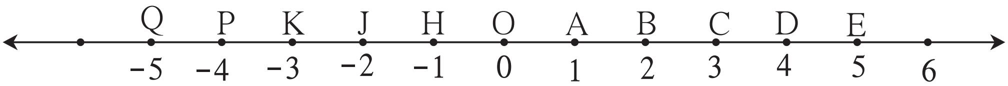
(2) بازو میں دی ہوئی شکل میں R, Q, P اور S چار نقاط دیے ہوئے ہیں۔ان میں سے کون سے تین نقاط ہم خطی ہیں اور کون سے تین نقاط ہم خطی نہیں ہیں۔ جانچ کیجیے۔ جو تین نقاط ہم خطی ہیں ان کی درمیانیت لکھیے۔

(3) قواعد کے لیے طلبہ کو قطار میں کھڑے رہنے کے لیے کہا گیا ہے۔ ہر قطار کے طلبہ مستقیم خط میں ہیں یا نہیں کیسے آزمائیں گے؟

(4) روشنی کی شعاعیں خطِ مستقیم میں سفر کرتی ہیں یہ آپ کیسے تصدیق کریں گے؟ گذشتہ جماعت میں آپ نے جو سائنسی تجربہ کیا ہے اسے یاد کیجیے۔

مشقی سیٹ 1.1

(1) ذیل میں دیے ہوئے عددی خط کی مدد سے ذیل کے فاصلے معلوم کیجیے۔



شکل 1.5

(i) $d(B,E)$ (ii) $d(J, A)$ (iii) $d(P, C)$ (iv) $d(J, H)$

(v) $d(K, O)$ (vi) $d(O, E)$ (vii) $d(P, J)$ (viii) $d(Q, B)$

(2) نقطہ A کا محدد x اور نقطہ B کا محدد y ہے۔ تو ذیل کے تعلق سے $d(A, B)$ معلوم کیجیے۔

(i) $x = 1, y = 7$ (ii) $x = 6, y = -2$ (iii) $x = -3, y = 7$

(iv) $x = -4, y = -5$ (v) $x = -3, y = -6$ (vi) $x = 4, y = -8$

(3) ذیل میں دی ہوئی معلومات کے مطابق کون سا نقطہ دیگر دو نقاط کے درمیان ہے طے کیجیے۔ دیے ہوئے نقاط غیر ہم خطی ہوں تو اسے بھی لکھیے۔

(i) $d(P, R) = 7$, $d(P, Q) = 10$, $d(Q, R) = 3$

(ii) $d(R, S) = 8$, $d(S, T) = 6$, $d(R, T) = 4$

(iii) $d(A, B) = 16$, $d(C, A) = 9$, $d(B, C) = 7$

(iv) $d(L, M) = 11$, $d(M, N) = 12$, $d(N, L) = 8$

(v) $d(X, Y) = 15$, $d(Y, Z) = 7$, $d(X, Z) = 8$

(vi) $d(D, E) = 5$, $d(E, F) = 8$, $d(D, F) = 6$

(4) ایک عددی خط پر نقاط A، B اور C اس طرح واقع ہیں کہ $d(A,C) = 10$, $d(C,B) = 8$, تو $d(A,B)$ معلوم کیجیے۔ تمام ممکنات پر غور کیجیے۔

(5) X، Y اور Z ہم خطی نقاط ہیں۔ $d(X, Y) = 17$ ، $d(Y, Z) = 8$ ہو تو $d(X, Z)$ معلوم کیجیے۔

(6) شکل بنا کر ذیل کے سوالات کے جوابات لکھیے۔

(i) اگر A – B – C اور $l(AC) = 11$ ، $l(BC) = 6.5$ ہو تو $l(AB) = ?$

(ii) اگر R – S – T اور $l(ST) = 3.7$ ، $l(RS) = 2.5$ ہو تو $l(RT) = ?$

(iii) اگر X – Y – Z اور $l(XZ) = 3\sqrt{7}$ ، $l(XY) = \sqrt{7}$ ، ہو تو $l(YZ) = ?$

(7) تین غیر ہم خطی نقاط سے کون سی شکل بنتی ہے؟

آئیے سمجھ لیں

نویں جماعت کے ریاضی حصہ 1 میں سیٹ باب میں ہم نے اجتماعی سیٹ ، انقطاعی سیٹ کا مطالعہ کیا ہے۔اس کا استعمال کر کے قطعہ خط ، شعاع اور خط کی وضاحت نقاط کے سیٹ کی صورت میں کریں گے۔

(1) قطعہ خط (Line Segment) : نقطہ A نقطہ B اور ان دونوں نقاط کے درمیان کے تمام نقاط کا اجتماعی سیٹ قطعہ خط AB ہوتا ہے۔

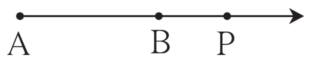
شکل 1.6

قطعہ خط AB کو مختصراً قطعہ AB لکھا جاتا ہے۔قطعہ (AB) کو قطعہ (BA) بھی کہتے ہیں۔نقطہ A اور نقطہ B یہ قطعہ AB کے اختتامی نقاط ہیں۔

قطعہ خط کے اختتامی نقاط کے درمیان کے فاصلہ کو قطعہ خط کی لمبائی کہتے ہیں۔ $l(AB) = d(A,B)$ ، $l(AB) = 5$ کو $AB = 5$ بھی لکھتے ہیں۔

(2) شعاع AB (Ray AB)

فرض کیجیے A اور B دو مختلف نقاط ہیں۔قطعہ AB پر واقع نقاط اور A – B – P ایسے تمام نقاط P کا اجتماعی سیٹ شعاع AB ہے۔یہاں نقطہ A کو شعاع AB کا مبداء کہتے ہیں۔



شکل 1.7

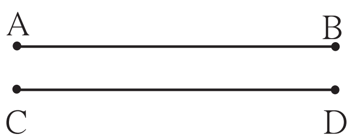
(3) خط AB : (Line AB)

شعاع AB کے نقاط کا سیٹ اور اس کے مخالف شعاع کے نقاط کا سیٹ مل کر جو اجتماعی سیٹ بنتا ہے وہ خط AB کے نقاط کا سیٹ ہوتا ہے۔
قطعہ AB کے نقاط کا سیٹ، خط AB کے نقاط کے سیٹ کا ضمنی سیٹ ہوتا ہے۔

(4) متماثل قطعاتِ خط (Congruent Segments)

اگر دیے ہوئے دو قطعات کی لمبائیاں مساوی ہوتو وہ قطعات متماثل ہوتے ہیں۔

اگر $l(AB) = l(CD)$ ہوتو قطعہ $CD \cong$ قطعہ AB



شکل 1.8

(5) قطعات کی متماثلت کی خصوصیات (Properties of Congruent Segment)

(i) عکسی خصوصیت (Reflexivity) ہر قطعہ خط،خود کے متماثل ہوتا ہے۔ قطعہ $AB \cong$ قطعہ AB

(ii) تشاکلی خاصیت (Symmetry) اگر قطعہ $CD \cong$ قطعہ AB ہوتو قطعہ $AB \cong$ قطعہ CD

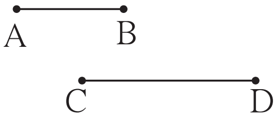
(iii) انتقالی عبوری خاصیت (Transitivity) اگر قطعہ $CD \cong$ قطعہ AB اور قطعہ $EF \cong$ قطعہ CD ہوتو قطعہ $EF \cong$ قطعہ AB۔

(6) قطعہ کا وسطی نقطہ (Mid point of a Segment)

اگر A – M – B اور قطعہ $MB \cong$ قطعہ AM ہوتو نقطہ M، قطعہ AB کا وسطی نقطہ کہلاتا ہے۔ہر قطعہ خط کا ایک اور صرف ایک ہی وسطی نقطہ ہوتا ہے۔

شکل 1.9

(7) قطعات خط کا موازنہ **(Comparison of Segments) :**



شکل 1.10

قطعہ AB کی لمبائی قطعہ CD سے کم ہو، یعنی

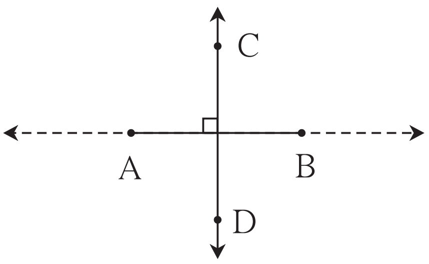
اگر $l(AB) < l(CD)$ ہو تو قطعہ CD > قطعہ AB یا

قطعہ CD > قطعہ AB اس طرح لکھتے ہیں۔

قطعات کا چھوٹا - بڑا پن اُن کی لمبائی پر منحصر ہوتا ہے۔

(8) قطعات یا شعاعوں کی عمودیت

: (Perpendicularity of Segments or rays)

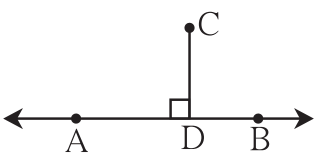


شکل 1.11

دو قطعات، دو شعاعیں یا ایک شعاع اور ایک قطعہ خط انھیں شامل کرنے والے خط اگر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں تو وہ دو قطعہ خط، وہ دو شعاعیں یا ایک شعاع اور ایک قطعہ خط ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔

شکل 1.11 میں خط CD ⊥ قطعہ AB، شعاع CD ⊥ قطعہ AB

(9) نقطہ کا خط سے فاصلہ **(Distance of a point from a line)**



شکل 1.12

اگر خط AB ⊥ قطعہ CD اور نقطہ D، خط AB پر واقع ہو تو قطعہ CD کی لمبائی کو نقطہ C کا خط AB سے فاصلہ کہتے ہیں۔ نقطہ D کو عمود کا پایہ (Foot) کہتے ہیں۔

اگر $l(CD) = a$ ہو تو نقطہ C، خط AB سے a فاصلہ پر ہے۔

مشقی سیٹ 1.2

1. ذیل کی جدول میں عمودی خط پر واقع نقاط کے محدد دیے ہوئے ہیں۔ اس بنا پر ذیل کے قطعہ خط متماثل ہیں یا نہیں طے کیجیے۔

نقطہ	A	B	C	D	E
محدد	−3	5	2	−7	9

(i) قطعہ AB اور قطعہ DE (ii) قطعہ BC اور قطعہ AD (iii) قطعہ BE اور قطعہ AD

2. نقطہ M، قطعہ AB کا وسطی نقطہ ہے اور AB = 8 ہو تو AM = ?

3. نقطہ P، قطعہ CD کا وسطی نقطہ ہے اور CP = 2.5 ہو تو قطعہ CD کی لمبائی معلوم کیجیے۔

4. اگر AB = 5 سم، BP = 2 سم اور AP = 3.4 سم ہو تو قطعات خط کا چھوٹا بڑا پن طے کیجیے۔

(5) شکل 1.13 کی بنا پر ذیل کے سوالات کے جوابات لکھیے۔

شکل 1.13

(i) شعاع RP، کی مخالف شعاع کا نام لکھیے۔

(ii) شعاع PQ اور شعاع RP کا انقطاعی سیٹ لکھیے۔

(iii) قطعہ PQ اور قطعہ QR کا اجتماعی سیٹ لکھیے۔

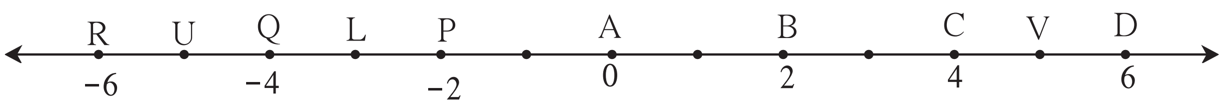
(iv) قطعہ QR کن شعاعوں کا ضمنی سیٹ ہے۔

(v) مبدا، R کی دو مخالف شعاعوں کی جوڑیاں لکھیے۔

(vi) مبدا، S کی کوئی دو مخالف شعاعوں کے نام لکھیے۔

(vii) شعاع SP اور شعاع ST کا انقطاعی سیٹ لکھیے۔

(6) ذیل کی شکل 1.14 کی بنا پر سوالات کے جوابات لکھیے۔



شکل 1.14

(i) نقطہ B سے ہم فاصلہ واقع نقاط کون سے ہیں۔

(ii) نقطہ Q سے ہم فاصلہ نقاط کی ایک جوڑی لکھیے۔

(iii) $d(U, V)$، $d(P, C)$، $d(V, B)$، $d(U, L)$ معلوم کیجیے۔

مشروط بیان اور عکس (Conditional Statements and Converse)

جو بیان 'جب– تب' یا 'اگر–تو' کی صورت میں لکھے جاتے ہیں انھیں مشروط بیان کہتے ہیں۔ مشروط بیان میں جب سے شروع ہونے والے بیان کو مقدم (دیا ہوا ہے) اور تب سے شروع ہونے والے بیان کو 'تالی' (جوابی) کہتے ہیں۔

مثلاً : 'معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں' یہ بیان ہے۔

مشروط بیان : جب دیا ہوا ذو اربعۃ الاضلاع معین ہو تو اس کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔ اگر کوئی مشروط بیان دیا گیا ہو اور اس کے 'مقدم' اور 'تالی' حصہ کو تبدیل کر دیا گیا ہو تو حاصل ہونے والا نیا بیان اصل بیان کا عکس بیان (Converse) کہلاتا ہے۔

کوئی مشروط بیان صحیح ہو تو ضروری نہیں کہ اس کا عکس بیان بھی صحیح ہی ہو۔ ذیل کی مثال دیکھیے۔

مشروط بیان : جب کوئی ذوار بعتہ الاضلاع معین ہوتو اس کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

عکس بیان : جب کسی ذوار بعتہ الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوں تب وہ ذوار بعتہ الاضلاع معین ہوتا ہے۔

اس مثال میں اصل بیان اور اس کے عکس دونوں صحیح ہیں۔

مشروط بیان : اگر کوئی عدد مفرد عدد ہو تو، وہ عدد جفت یا طاق ہوتا ہے۔

عکس بیان : اگر کوئی عدد جفت یا طاق عدد ہو تو وہ مفرد عدد ہوتا ہے۔

اس میں اصل بیان درست ہے مگر عکس بیان درست نہیں۔

آیئے سمجھ لیں

ثبوت (Proofs)

ہم نے زاویہ، مثلث، ذوار بعتہ الاضلاع وغیرہ شکلوں کی کئی خصوصیات کا مطالعہ کیا ہے۔ ان خصوصیات کو ہم نے تجرباتی طریقے سے سیکھا ہے۔ اس جماعت میں ہم 'علم ہندسہ' مضمون کو دوسرے نقطہ نظر سے دیکھنے والے ہیں۔ اس نقطہ نظر کا سہرا تیسری صدی قبل مسیح کے عظیم یونانی ریاضی داں اقلیدس کے سر جاتا ہے۔ علم ہندسہ کی اس زمانے میں جو معلومات تھی، اسے انھوں نے اچھے ڈھنگ سے مربوط کر کے جمع کیا۔ اس میں باضابطگی پیدا کی۔ انھوں نے خاص طور پر کچھ کلیات یا منظور بیانات کو مفروضہ (Postulate) یا تسلیم کردہ بیان کے طور پر قبول کیا، اور اس کی بنیاد پر منطقی دلائل سے نئی خصوصیت ثابت کر سکتے ہیں۔ ثابت کی ہوئی خصوصیات کو مسئلے (Theorems) کہتے ہیں۔

اقلیدس

اقلیدس کے پیش کردہ مفروضات میں سے کچھ مفروضے ذیل میں دیے ہوئے ہیں۔

(1) ایک نقطہ سے بے شمار خطوط گزرتے ہیں۔

(2) دو متفرق نقاط سے ایک اور صرف ایک خط گزرتا ہے۔

(3) کسی بھی نقطہ کو مرکز مان کر دیے ہوئے نصف قطر کا دائرہ کھینچا جا سکتا ہے۔

(4) تمام قائمہ زاویے ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

(5) دو خطوط اور ان کا ایک تقاطع ہوں تو تقاطع کے ایک جانب بننے والے داخلہ زاویوں کی جمع دو قائمہ زاویوں سے کم ہو تو وہ خط اسی سمت بڑھانے پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

ان میں سے کچھ مفروضات کی ہم نے عملی طور پر تصدیق کر چکے ہیں۔

کسی خصوصیت کا منطقی ثبوت دے سکیں تو اس خصوصیت کو صحیح مان لیا جاتا ہے۔ اس کے لیے دی ہوئی منطقی دلیل کو اس خصوصیت یعنی اس مسئلہ کا ثبوت (Proof) کہتے ہیں۔

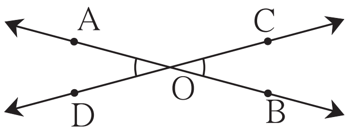
کوئی مشروط بیان صحیح ہے ایسا ہمیں ثابت کرنا ہو تب اس کے 'مقدم' حصہ کے بیان کو 'دیا ہوا ہے' بیان کہتے ہیں۔ اور تالی حصہ کو 'ثابت کرنا ہے' کہتے ہیں۔

ثبوت کی راست ثبوت اور بالواسطہ ثبوت اس طرح دو قسمیں ہیں۔

ایک دوسرے کو قطع کرنے والے دو خطوط سے بنے ہوئے زاویوں کی خصوصیت کا راست ثبوت دیں گے۔

خصوصیت : دوخطوط ایک دوسرے کوقطع کرتے ہیں تب متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : خط AB اور خط CD ایک دوسرے کونقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔



شکل 1.15

A – O – B ، C – O – D

ثابت کرنا ہے : (i) $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) $\angle BOC = \angle AOD$

ثبوت : (خطی جوڑی کے زاویے) ... (I) ... $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$

(خطی جوڑی کے زاویے) ... (II) ... $\angle BOC + \angle BOD = 180^\circ$

[بیان (I) اور (II) کی روسے] ... $\angle AOC + \angle BOC = \angle BOC + \angle BOD$

($\angle BOC$ کا اخراج کرکے) ... $\therefore \angle AOC = \angle BOD$

اسی طرح $\angle BOC = \angle AOD$ ثابت کیا جاسکتا ہے۔

بالواسطہ ثبوت (Indirect Proof)

اس طریقہ میں شروع میں تالی بیان غلط تسلیم کیا جاتا ہے۔اس کے سہارے صرف منطقی دلائل اور پہلے سے قبول شدہ صحیح بیانات کے سہارے مرحلہ وار ایک نتیجہ تک پہنچتے ہیں ۔ یہ نتیجہ معلوم شدہ صحیح خصوصیت یا 'تالی' بیان سے،یعنی دی ہوئی معلومات کے برخلاف ہوتا ہے۔اس لیے تالی بیان غلط ہے، ایسا سمجھنا غلط ہے ایسا نتیجہ نکالتے ہیں۔یعنی تالی بیان صحیح ہے یہ قبول کیا جاتا ہے۔درج ذیل مثال کا مطالعہ کیجیے۔

بیان : دو سے بڑا مفرد عدد، طاق عدد ہوتا ہے۔

مشروط بیان : اگر p ، 2 سے بڑا مفرد عدد ہوتو p طاق عدد ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : اگر p ، 2 سے بڑا مفرد عدد ہے۔یعنی p کا 1 اور p یہی دو عاد ہیں۔

ثابت کرنا ہے : p، طاق عدد ہے۔

ثبوت : فرض کیجیے p طاق عدد نہیں ہے۔

یعنی p جفت عدد ہے۔

اس لیے 2 ، p کا عاد ہے۔ ... (I)

لیکن p ، 2 سے بڑا مفرد عدد ہے ... (دیا ہوا ہے)

اس لیے p کے 1 اور p یہی دو عاد ہیں۔ ... (II)

بیان (I) اور (II) سے 'دیا ہوا ہے' کے متضاد آتا ہے۔

اس لیے فرض کیا ہوا بیان غلط ہے۔

اس لیے p ، 2 سے بڑا مفرد عدد ہوتو وہ طاق عدد ہوتا ہے،ثابت ہوا۔

مشقی سیٹ 1.3

1. ذیل کے بیانات ''اگر ۔تب'' کی صورت میں لکھیے۔

(i) متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(ii) مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔

(iii) متساوی الساقین مثلث میں راس اور قاعدے کے وسطی نقطہ کو ملانے والا قطعہ خط قاعدے پر عمود ہوتا ہے۔

2. ذیل کے بیانات کا عکس بیان لکھیے۔

(i) دو متوازی خطوط اور ان کا تقاطع دیا جائے تو حاصل ہونے والے متبادلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(ii) دو خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کریں تو داخلہ زاویوں کی ایک جوڑی متمم ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

(iii) مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔

مجموعہ سوالات 1

1. ذیل کے کثیر متبادل سوالوں کے جواب میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) ہر قطعہ خط کے کتنے وسطی نقاط ہوتے ہیں؟

(A) صرف ایک (B) دو (C) تین (D) کئی

(ii) دو متفرق خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب ان کے انقطاعی سیٹ میں کتنے نقاط ہوتے ہیں؟

(A) بے شمار (B) دو (C) ایک (D) ایک بھی نہیں

(iii) تین مختلف نقاط کو شامل کرنے والے کتنے خطوط ہوتے ہیں؟

(A) دو (B) تین (C) ایک یا تین (D) چھ

(iv) نقطہ A کا محدد -2 اور نقطہ B کا محدد 5 ہو تو $d(A, B) = ?$

(A) -2 (B) 5 (C) 7 (D) 3

(v) اگر P-Q-R، $d(P, Q) = 2$، $d(P, R) = 10$ ہو تو $d(Q, R) = ?$

(A) 12 (B) 8 (C) $\sqrt{96}$ (D) 20

2. عددی خط پر P, Q, R نقاط کے محدد بالترتیب 3 , -5 اور 6 ہیں۔ تو ذیل کے بیانات صحیح ہیں یا نہیں لکھیے۔

(i) $d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$ (ii) $d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)$

(iii) $d(R,P) + d(P,Q) = d(R,Q)$ (iv) $d(P,Q) - d(P,R) = d(Q,R)$

3. ذیل میں کچھ نقاط کے جوڑیوں کے محدد دیے گئے ہیں۔ اس بنا پر ہر جوڑی کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

(i) 3, 6 (ii) $-9, -1$ (iii) $-4, 5$ (iv) $0, -2$

(v) $x + 3, x - 3$ (vi) $-25, -47$ (vii) $80, -85$

.4 عددی خط پر نقطہ P کا محدد 7− ہے تو نقطہ P سے 8 اکائی فاصلہ پر واقع نقاط کے محدد معلوم کیجیے۔

.5 دی ہوئی معلومات کے لحاظ ذیل کے سوالات کے جوابات لکھیے۔

(i) اگر A–B–C، $d(A, C) = 17$، $d(B, C) = 6.5$ ہو تو $d(A, B) = ?$

(ii) اگر P–Q–R، $d(P, Q) = 3.4$، $d(Q, R) = 5.7$ ہو تو $d(P, R) = ?$

.6 عددی خط پر نقطہ A کا محدد 1 ہے نقطہ A سے 7 اکائی فاصلہ پر واقع نقاط کے محدد معلوم کیجیے۔

.7 ذیل کے بیانات مشروط صورت میں لکھیے۔

(i) ہر معین مربع ہوتا ہے۔

(ii) خطی جوڑی کے زاویے ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

(iii) مثلث تین قطعہ خط سے بنی ہوئی شکل ہوتی ہے۔

(iv) صرف دو عادوالے عدد کو مفرد عدد کہتے ہیں۔

.8 ذیل کے بیان کے عکس بیان لکھیے۔

(i) اگر کسی کثیر الاضلاع کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ °180 ہو تو وہ شکل مثلث ہوتی ہے۔

(ii) دو زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ °90 ہو تو وہ ایک دوسرے کے مکملہ زاویہ ہوتے ہیں۔

(iii) دو متوازی خطوط اور تقاطع کے قطع کرنے سے بننے والے نظیری زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(iv) کسی عدد کے ہندسوں کا مجموعہ 3 سے تقسیم ہوتا ہو تو وہ عدد 3 سے تقسیم پذیر ہے۔

.9 مقابل کے بیانات میں 'دیا ہوا ہے' اور 'ثابت کرنا ہے' بیان لکھیے۔

(i) اگر مثلث کے تینوں اضلاع متماثل ہوں تو اس کے تینوں زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(ii) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

.10 ذیل کے بیانات کے لیے نامزد شکل بنا کر اس بنا پر 'دیا ہوا ہے' اور 'ثابت کرنا ہے'، لکھیے۔

(i) دو متساوی الاضلاع مثلث، متشابہ مثلث ہوتے ہیں۔

(ii) اگر خطی جوڑی کے زاویے متماثل ہوں تو اس کا ہر زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

(iii) مثلث کے دو ضلعوں پر کھینچے ہوئے ارتفاع اگر متماثل ہوں تو وہ دونوں ضلعے متماثل ہوتے ہیں۔

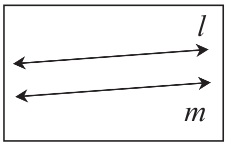
❑❑❑

2 Parallel Lines متوازی خطوط

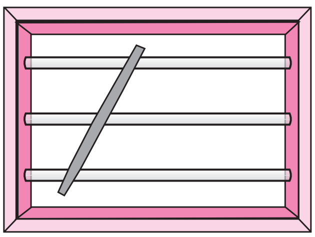
آیئے، سیکھیں

- متوازی خطوط اور تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویوں کی خصوصیت
- متوازی خطوط کے خصوصیات کا استعمال
- متوازی خطوط کے لیے آزمائشیں

آیئے ذرا یاد کریں



متوازی خطوط : جو خطوط ایک ہی مستوی میں واقع ہوتے ہیں لیکن ایک دوسرے کو کبھی بھی قطع نہیں کرتے تو ان خطوط کو متوازی خطوط کہتے ہیں۔



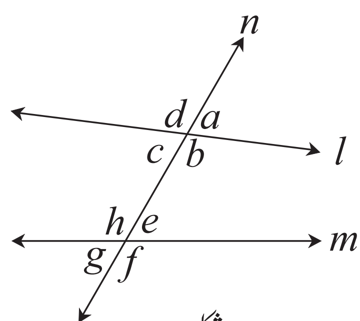
بازو کی شکل دیکھیے۔

کھڑکی کی افقی متوازی سلاخ پر ایک لکڑی ترچھی پکڑ کر دیکھیے۔ کتنے زاویے بنے ہوئے دکھائی دیتے ہیں؟

دو خطوط اور ان کے تقاطع سے بننے والے زاویوں کی جوڑیاں یاد آتی ہیں؟

شکل 2.1 میں خط l اور خط m کا خط n تقاطع ہے یہاں 8 زاویے بن جاتے ہیں۔

ان کی جوڑیاں ذیل کے مطابق ہیں۔



شکل 2.1

نظیری زاویوں کی جوڑیاں

(i) $\angle d, \angle h$

(ii) $\angle a,$ $\square$

(iii) $\angle c,$ $\square$

(iv) $\angle b,$ $\square$

داخلی متبادلہ زاویوں کی جوڑیاں

(i) $\angle c, \angle e$

(ii) $\angle b, \angle h$

خارجی متبادلہ زاویوں کی جوڑیاں

(i) $\angle d, \angle f$

(ii) $\angle a, \angle g$

تقاطع کے ایک جانب کے داخلہ زاویوں کی جوڑیاں

(i) $\angle c, \angle h$

(ii) $\angle b, \angle e$

کچھ اہم خصوصیات :

(1) دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

(2) خطی جوڑی کے زاویے ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

(3) جب نظیری زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہوتی ہے تب نظیری زاویوں کی بقیہ تمام جوڑیاں متماثل ہوتے ہیں۔

(4) جب متبادلہ زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہوتی ہے تب متبادلہ زاویوں کے دیگر تمام جوڑیاں متماثل ہوتی ہیں۔

(5) جب خط تقاطع کے ایک ہی جانب داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے تب داخلہ زاویوں کی دوسری جوڑی کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ بھی 180° ہوتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

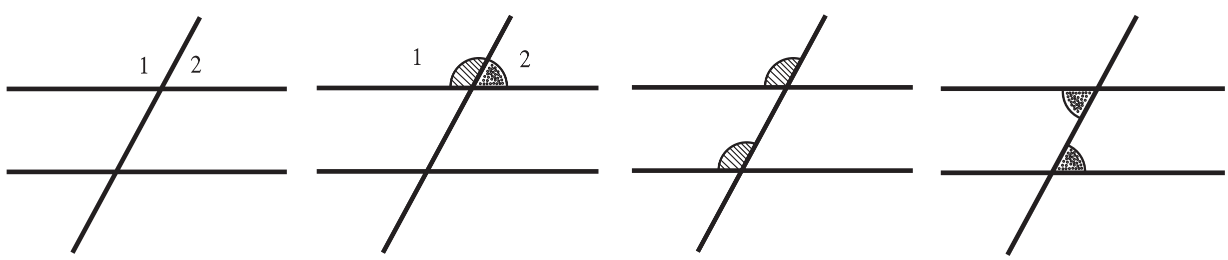
متوازی خطوط کی خصوصیات (Properties of Parallel Lines)

عملی کام : دو متوازی خطوط اور تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویوں کی خصوصیات کی تصدیق کرنا۔

عمل : رنگین موٹے کاغذ کا ایک ٹکڑا لیجیے۔ اس پر دو متوازی خطوط بنایئے اور تقاطع کھینچیے ۔

ان تینوں خطوط پر سیدھی تیلیاں گوند سے چسپاں کیجیے۔ یہاں بنے ہوئے آٹھ زاویوں میں سے زاویہ 1 اور زاویہ 2 کی پیمائشوں کے رنگین کارڈ کے ٹکڑے کاٹ کر لیجیے۔ (نیچے کی شکل میں دکھائے ہوئے طریقے کے مطابق)

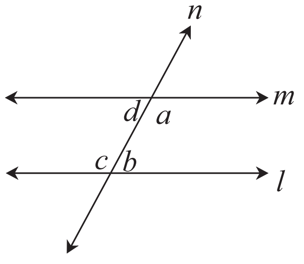
یہ ٹکڑے متعلقہ نظیری زاویے، متبادلہ زاویے اور داخلہ زاویے کی جانب رکھ کر خصوصیات کی تصدیق کیجیے۔



دو متوازی خطوط کے خط تقاطع کی وجہ سے بننے والے زاویوں کی، عملی کام سے تصدیق کردہ خصوصیات کو اب ہم ثابت کریں گے۔ ان خصوصیات کو ثابت کرنے کے لیے ہم اقلیدس کے موضوعات کا استعمال کریں گے۔

دو خطوط اور ان کا ایک تقاطع کھینچیں تو ایک جانب بننے والے داخلہ زاویوں کا دو قائمہ زاویوں سے کم ہوگا۔ تب وہ مستقیم خط اسی سمت میں بڑھانے پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

داخلہ زاویوں کا مسئلہ (Interior angle of Theorem) :



شکل 2.2

مسئلہ : دو متوازی خطوط کو ایک تقاطع کے قطع کرنے پر، تقاطع کے کسی بھی ایک ہی جانب کے داخلہ زاویے ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : خط m || خط l اور خط n تقاطع ہے۔ اس لیے شکل کے مطابق $\angle a$ ، $\angle b$ اور $\angle c$ ، $\angle d$ داخلہ زاویے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : $\angle a + \angle b = 180°$

$\angle d + \angle c = 180°$

ثبوت : $\angle a$ اور $\angle b$ کی پیمائشوں کے مجموعے کے تعلق سے تین ممکنات ہو سکتے ہیں۔

(i) $\angle a + \angle b < 180°$ (ii) $\angle a + \angle b > 180°$ (iii) $\angle a + \angle b = 180°$

ان میں سے (i) $\angle a + \angle b < 180°$ کو درست فرض کرنے پر

خط l اور خط m کو $\angle a$ اور $\angle b$ تقاطع کے جس جانب ہیں انھیں اس جانب بڑھانے پر ایک دوسرے کو قطع کریں گے۔ ... (اقلیدس کے موضوعات کے مطابق)

لیکن خط l اور خط m متوازی خطوط ہیں۔

$\therefore \angle a + \angle b < 180°$ ... (یہ ناممکن ہے) (I)

اب فرض کیجیے $\angle a + \angle b > 180°$ یہ درست ہے۔

$\therefore \angle a + \angle b > 180°$

لیکن ، $\angle a + \angle d = 180°$

اور ، $\angle c + \angle b = 180°$ ... (خطی جوڑی کے زاویے)

$\therefore \angle a + \angle d + \angle b + \angle c = 180° + 180° = 360°$

$\therefore \angle c + \angle d = 360° - (\angle a + \angle b)$

اگر $\angle a + \angle b > 180°$ ہو تو $[360° - (\angle a + \angle b)] < 180°$

$\therefore \angle c + \angle d < 180°$

اس لیے اگر ایسا ہو تو $\angle c$ اور $\angle d$، تقاطع کے جس جانب ہیں اس سمت بڑھانے پر خط l اور خط m ایک دوسرے کو قطع کریں گے۔

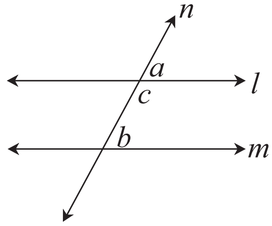
$\therefore \angle c + \angle d < 180$ ... (یہ ناممکن ہے) ... (II)

$\angle a + \angle b > 180°$ ... (یہ صرف ممکن ہے) ... [بیان (I) اور (II) کی بنا پر]

$\therefore \angle a + \angle b = 180°$ اسی طرح، $\angle c + \angle d = 180°$

دھیان میں رکھیے اس ثبوت میں ہم نے $\angle a + \angle b > 180°$، $\angle a + \angle b < 180°$ ان دونوں ممکنات کے تضاد کی وجہ سے مسترد کر دیا یعنی یہ ایک بالواسطہ ثبوت ہے۔

نظیری زاویوں اور متبادلہ زاویوں کی خصوصیت (Corresponding angles and Alternate Angles Theorem)



شکل 2.3

مسئلہ : دو متوازی خطوط اور ایک تقاطع کے ذریعے بننے والے نظیری زاویوں کی جوڑیوں کے زاویوں کی پیمائشیں مساوی ہوتی ہیں۔

دیا ہوا ہے : خط $m \parallel$ خط l اور خط n تقاطع ہے۔

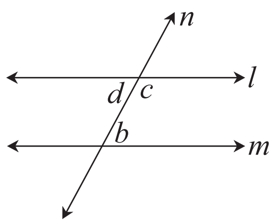
ثابت کرنا ہے : $\angle a = \angle b$

ثبوت : (خطی جوڑی کے زاویے) ... (I) ... $\angle a + \angle c = 180°$

(متوازی خطوط کے داخلہ زاویوں کی خصوصیت)... (II) ... $\angle b + \angle c = 180°$

[بیان (I) اور (II) کی بناء پر] ... $\angle a + \angle c = \angle b + \angle c$

$\therefore \angle a = \angle b$



شکل 2.4

مسئلہ : دو متوازی خطوط کو ایک تقاطع قطع کرتا ہے تو بننے والے متبادلہ زاویوں کی جوڑی کے زاویوں کی پیمائشیں مساوی ہوتی ہیں۔

دیا ہوا ہے : خط $m \parallel$ خط l، خط n، تقاطع ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\angle d = \angle b$

ثبوت : (خطی جوڑی کے زاویے) ... (I) ... $\angle d + \angle c = 180°$

(متوازی خطوط کے داخلہ زاویوں کی خصوصیت) ... (II) ... $\angle c + \angle b = 180°$

[بیان (I) اور (II) کی بناء پر] ... $\angle d + \angle c = \angle c + \angle b$

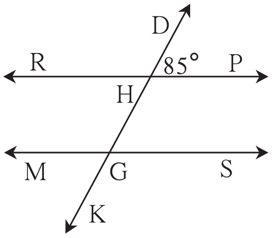
$\therefore \angle d = \angle b$

مشقی سیٹ 2.1

1. شکل 2.5 میں خط MS || خط RP اور خط DK ان کا تقاطع ہے
$m\angle DHP = 85^\circ$، ہو تو ذیل کے زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

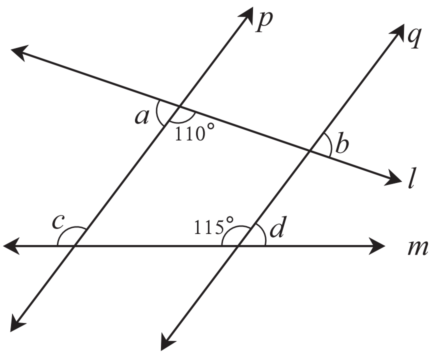
(i) $\angle RHD$ (ii) $\angle PHG$

(iii) $\angle HGS$ (iv) $\angle MGK$



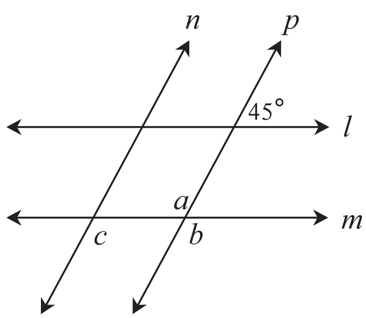
شکل 2.5

2. شکل 2.6 کا مشاہدہ کیجیے۔ خط q || خط p اور خط l اور خط m تقاطع ہیں۔ کچھ زاویوں کی پیمائشیں دی ہوئی ہیں۔ اس معلومات کی بناء پر $\angle a$، $\angle b$، $\angle c$ اور $\angle d$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



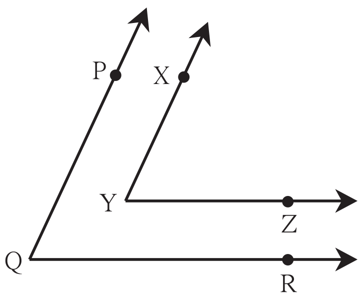
شکل 2.6

3. شکل 2.7 میں، خط m || خط l اور خط p || خط n ہے۔ ایک زاویے کی دی ہوئی پیمائش کی بناء پر $\angle a$، $\angle b$، $\angle c$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 2.7

*4. شکل 2.8 میں $\angle PQR$ اور $\angle XYZ$ کی ساقین ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔
تو ثابت کیجیے کہ $\angle PQR \cong \angle XYZ$

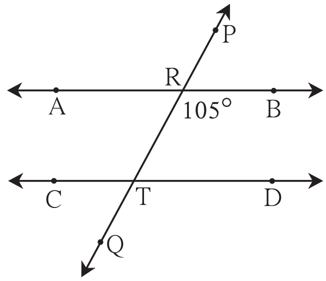


شکل 2.8

5. شکل 2.9 میں خط CD ∥ خط AB اور خط PQ تقاطع ہوتو شکل میں دی ہوئی زاویہ کی پیمائش کی بناء پر ذیل کے زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

(i) $\angle ART$ (ii) $\angle CTQ$

(iii) $\angle DTQ$ (iv) $\angle PRB$

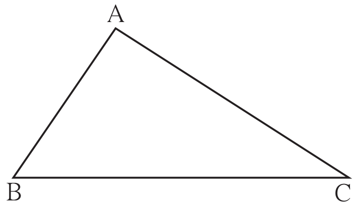


شکل 2.9

آئیے سمجھ لیں

متوازی خطوط کے خصوصیات کا استعمال

متوازی خطوط اوران کے تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویوں کی خصوصیات کا استعمال کر کے مثلث کی ایک خصوصیت ثابت کریں گے۔



شکل 2.10

مسئلہ : کسی بھی مثلث کے تمام زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

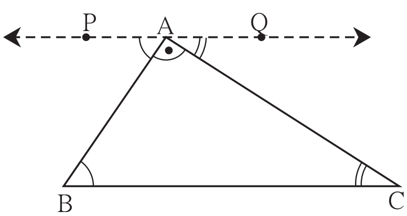
دیا ہوا ہے : ΔABC، ایک مثلث ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$

عمل : نقطہ A سے، قطعہ BC کے متوازی خط l کھینچیے ۔

اس پر نقاط P اور Q اس طرح لیجیے کہ P – A – Q

ثبوت : قطعہ BC ∥ خط PQ اور خط AB تقاطع ہے۔



شکل 2.11

$\angle ABC = \angle PAB$ ... (I) (متبادلہ زاویے)

قطعہ BC ∥ خط PQ اور خط AC تقاطع ہے۔

$\therefore \angle ACB = \angle QAC$ ... (II) ... (متبادلہ زاویے)

بیان (I) اور (II) کی بناء پر،

$\angle ABC + \angle ACB = \angle PAB + \angle QAC$ ... (III)

مساوات (III) کے طرفین میں $\angle BAC$ جمع کرنے پر

$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \angle PAB + \angle QAC + \angle BAC$

$= \angle PAB + \angle BAC + \angle QAC$

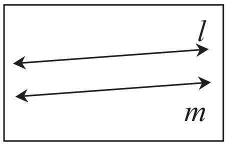
$= \angle PAC + \angle QAC$ ... $(\because \angle PAB + \angle BAC = \angle PAC)$

$= 180^\circ$ ... (خطی جوڑی کے زاویے)

یعنی مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

آیئے، بحث کریں

بازو کی مستوی میں کیا خط l اور خط m ایک دوسرے کے متوازی ہیں؟ کس طرح طے کریں گے؟



شکل 2.12

آیئے سمجھ لیں

متوازی خطوط کے لیے آزمائشیں (Tests for parallel lines)

دو خطوط اور ان کے تقاطع کے ذریعے بننے والے زاویوں کی جانچ کر کے ہم طے کر سکتے ہیں کہ وہ دونوں خطوط متوازی ہیں یا نہیں۔

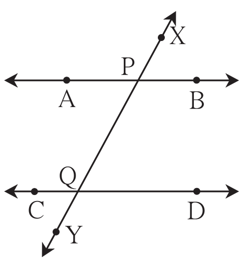
(i) تقاطع کے ایک جانب کے داخلہ زاویوں کی جوڑی متمم زاویوں کی ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

(ii) متبادلہ زاویوں کی ایک جوڑی مساوی پیمائشوں کی ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

(iii) نظیری زاویوں کی ایک جوڑی کی پیمائش مساوی ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

متوازی خطوط کے داخلہ زاویوں کی آزمائش (Interior angles test)

مسئلہ : دو متفرق خطوط کو ایک تقاطع قطع کرتا ہے اور تقاطع کے ایک جانب کے داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ $180°$ ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔



شکل 2.13

دیا ہوا ہے : خط AB اور خط CD کا خط XY تقاطع ہے۔

$\angle BPQ + \angle PQD = 180°$

ثابت کرنا ہے : خط CD || خط AB

ثبوت : یہ آزمائش ہم بالواسطہ طریقے سے ثابت کریں گے۔

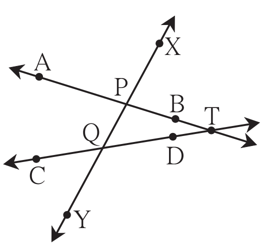
فرض کیجیے۔ 'ثابت کرنا ہے' بیان غلط ہے۔

اس لیے خط AB اور خط CD متوازی نہیں ہیں۔

(فرض کیجیے یہ بیان صحیح ہے)

فرض کیجیے خط AB اور خط CD ایک دوسرے کو نقطہ T پر قطع کرتے ہیں۔

اس لیے ΔPQT بنتا ہے۔



شکل 2.14

$\angle TPQ + \angle PQT + \angle PTQ = 180°$ ... (مثلث کے زاویوں کا مجموعہ)

لیکن، $\angle TPQ + \angle PQT = 180°$ ... (دیا ہوا ہے)

اس وجہ سے مثلث کے دو زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ $180°$ ہے۔

لیکن مثلث کے تین زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے۔

$\therefore \angle PTQ = 0°$ حاصل ہوتا ہے۔

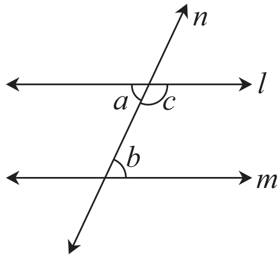
اس لیے خط PT اور خط QT، یعنی خط AB اور خط CD مختلف خطوط نہیں ہیں۔ ہمیں خط AB اور خط CD مختلف خطوط ہیں ایسا دیا ہوا ہے۔ یعنی 'دیا ہوا ہے' کے متضاد ہے۔

اس لیے ہمارا مفروضہ بیان غلط ہے۔ یعنی خط AB اور خط CD متوازی ہیں۔

اس بناء پر دو خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کیا جائے تو ایک جانب حاصل ہونے والے داخلہ زاویوں کی جوڑی متمم ہو تب وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔ یہ ثابت ہو جاتا ہے۔ اس خصوصیت کو متوازی خطوط کے داخلہ زاویوں کی خصوصیت کہتے ہیں۔

اب ہم اس خصوصیت کو مفروضہ کے طور پر مان کر دیگر دو آزمائشیں ثابت کریں گے۔

متبادلہ زاویوں کی آزمائش (Alternate angles test) :



شکل 2.15

مسئلہ : دو خطوط کو ایک تقاطع قطع کرتا ہے تو بننے والے متبادلہ زاویوں کی ایک جوڑی کی پیمائش مساوی ہو تو وہ خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : خط l اور خط m کا خط n تقاطع ہے۔

$\angle a$ اور $\angle b$ متبادلہ زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہے۔

$\therefore \angle a = \angle b$

ثابت کرنا ہے : خط $l \parallel$ خط m

ثبوت :

$\angle a + \angle c = 180°$ ... (خطی جوڑی کے زاویے)

$\angle a = \angle b$ ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore \angle b + \angle c = 180°$

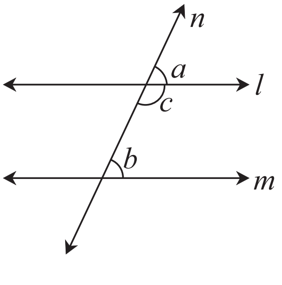
لیکن $\angle b$ اور $\angle c$ یہ تقاطع کے ایک جانب کے داخلہ زاویے ہیں

$\therefore$ خط $l \parallel$ خط m ... (داخلہ زاویے کی آزمائش کی بنا پر)

اس خصوصیت کو متوازی خطوط کے متبادلہ زاویوں کی آزمائش کہتے ہیں۔

نظیری زاویوں کی آزمائش (Corresponding angles Test)

مسئلہ : دو خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کیا جائے تو بننے والے نظیری زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہو تو وہ متوازی خطوط ہوتے ہیں۔



شکل 2.16

دیا ہوا ہے : خطوط l اور m ان کا خط n تقاطع ہے۔ $\angle a$ اور $\angle b$ نظیری زاویوں کی جوڑی ہے۔

$\therefore \angle a = \angle b$

ثابت کرنا ہے : خط $l \parallel$ خط m

ثبوت :

$\angle a + \angle c = 180°$ ... (خطی جوڑی کے زاویے)

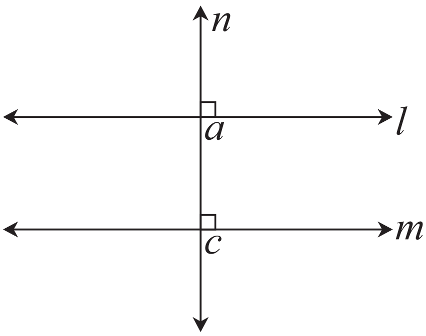
$\angle a = \angle b$ ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore \angle b + \angle c = 180°$

یعنی تقاطع کے ایک جانب کے داخلہ زاویہ متمم ہوتے ہیں۔

$\therefore$ خط $l \parallel$ خط m ... (داخلہ زاویے کی آزمائش)

اس خصوصیت کو متوازی خطوط کے نظیری زاویوں کی آزمائش کہتے ہیں۔



شکل 2.17

نتیجہ صریح 1 : اگر ایک مستوی میں دو خطوط ایک خط پر عمود ہوں تو وہ دونوں خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : خط $l \perp$ خط n اور خط $m \perp$ خط n

ثابت کرنا ہے : خط $l \parallel$ خط m

ثبوت : (دیا ہوا ہے) ... خط $l \perp$ خط n اور خط $m \perp$ خط n

$\therefore \ \angle a = \angle c = 90°$

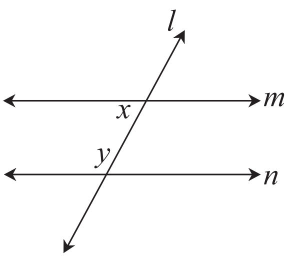
$\angle a$ اور $\angle c$، یہ خط l اور خط m کے خط n تقاطع کی وجہ سے بنے ہوئے نظیری زاویے ہیں۔

(متوازی خطوط کے نظیری زاویوں کی آزمائش) ... $\therefore$ خط $l \parallel$ خط m

نتیجہ صریح II : ثابت کیجیے اگر ایک مستوی میں دو خطوط اسی مستوی میں واقع ایک تیسرے خط کے متوازی ہوں تو وہ خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

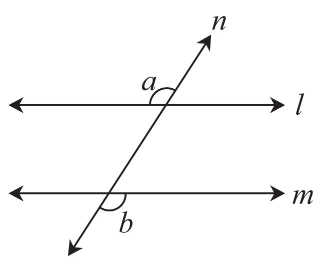
مشقی سیٹ 2.2

1. شکل 2.18 میں $y = 108°$ اور $x = 71°$ ہو تو بتائیے کیا خط m اور خط n متوازی ہیں؟ وجہ لکھیے۔



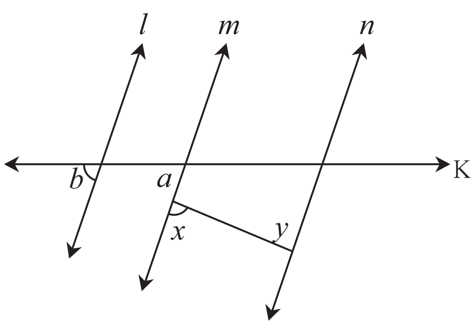
شکل 2.18

2. شکل 2.19 میں اگر $\angle a \cong \angle b$ ہو تو ثابت کیجیے خط $l \parallel$ خط m



شکل 2.19

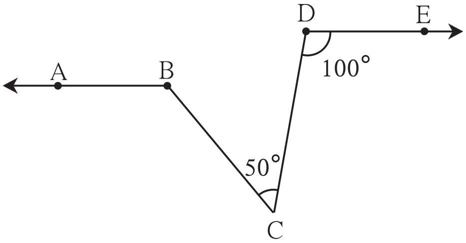
3. شکل 2.20 میں اگر $\angle a \cong \angle b$ اور $\angle x \cong \angle y$ ہو تو ثابت کیجیے خط $l \parallel$ خط n



شکل 2.20

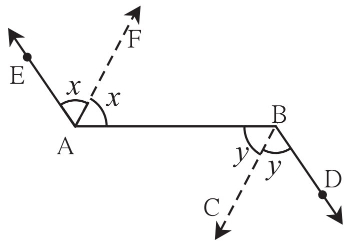
4. شکل 2.21 میں اگر شعاع BA $\parallel$ شعاع DE، $\angle C = 50°$ اور $\angle D = 100°$ ہو تو $\angle ABC$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

(ہدایت : نقطہ C سے خط AB کے متوازی خط کھینچیے)



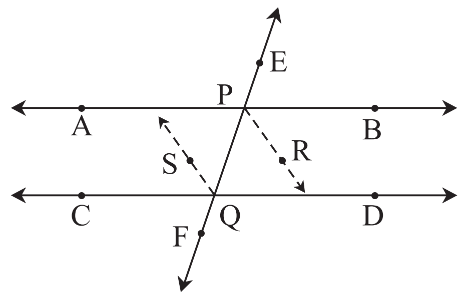
شکل 2.21

5. شکل 2.22 میں شعاع BD || شعاع AE، شعاع AF، یہ $\angle EAB$ کی اور شعاع BC، یہ $\angle ABD$ کی ناصف ہیں۔ تو ثابت کیجیے کہ خط BC || خط AF



شکل 2.22

6. خط AB اور خط CD کو خط EF بالترتیب P اور Q نقاط پر قطع کرتا ہے۔ شعاع PR اور شعاع QS یہ متوازی شعاعیں ہیں جو بالترتیب $\angle BPQ$ اور $\angle PQC$ کی ناصف ہیں۔ تو ثابت کیجیے کہ خط AB || خط CD



شکل 2.23

مجموعہ سوالات 2

1. ذیل کے بیانات کی خالی جگہوں کو پر کرنے کے لیے دیے ہوئے متبادلات میں سے صحیح متبادل کا انتخاب کیجیے۔

(i) دو متوازی خطوط کو ایک تقاطع قطع کرتا ہو تو تقاطع کے ایک ہی جانب کے داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ .... ہوتا ہے۔

(A) 0° (B) 90° (C) 180° (D) 360°

(ii) دو خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کرتے ہیں تو .... زاویے بنتے ہیں۔

(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

(iii) دو متوازی خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کرتے ہوں تو بننے والے زاویوں میں سے ایک زاویہ کی پیمائش 40° ہو تو اس کے نظیری زاویہ کی پیمائش .... ہے۔

(A) 40° (B) 140° (C) 50° (D) 180°

(iv) ΔABC میں، $\angle A = 76^\circ$، $\angle B = 48^\circ$ ہو تو $\angle C$ کی پیمائش .... ہے۔

(A) 66° (B) 56° (C) 124° (D) 28°

(v) دو متوازی خطوط کو ایک تقاطع سے قطع کرنے پر بننے والے متبادلہ زاویوں کی جوڑی میں ایک زاویہ کی پیمائش 75° ہو تو دوسرے زاویے کی پیمائش .... ہے۔

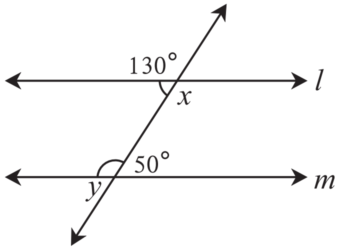
(A) 105° (B) 15° (C) 75° (D) 45°

2*. شعاع PQ اور شعاع PR ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ نقطہ B، یہ $\angle QPR$ کے اندرون میں اور نقطہ A، $\angle RPQ$ کے بیرون میں واقع ہے۔ شعاع PB اور شعاع PA ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ اس بناء پر شکل بنائیے اور ذیل کے زاویوں کی جوڑیاں لکھیے۔

(i) متماثل زاویے (ii) متمم زاویے (iii) مکملہ زاویے

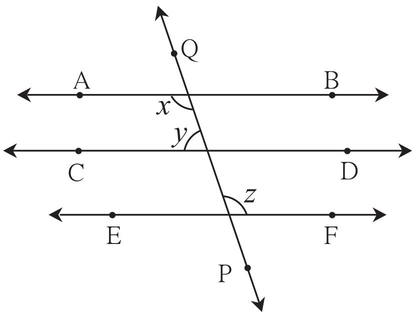
.3 اگر ایک خط، ایک مستوی میں دو متوازی خطوط میں سے ایک خط پر عمود ہو تب وہ دوسرے خط پر بھی عمود ہوتا ہے۔ یہ ثابت کیجیے۔

.4 شکل 2.24 میں دکھائے ہوئے کے مطابق زاویوں کی پیمائش کی مدد سے $\angle x$ اور $\angle y$ کی قیمتیں معلوم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ خط m || خط l



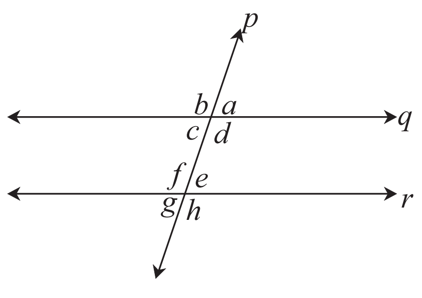
شکل 2.24

.5 شکل 2.25 میں خط EF || خط CD || خط AB اور خط QP ان کا تقاطع ہے۔ اگر $y : z = 3 : 7$ ہو تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔



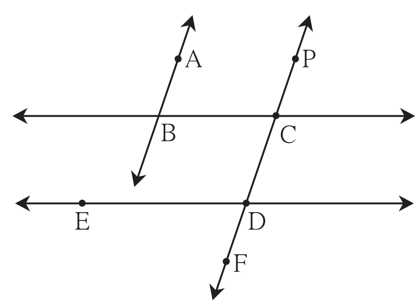
شکل 2.25

.6 شکل 2.26 میں، اگر خط q || خط r، خط P ان کا تقاطع ہے اور $a = 80°$ ہو تو f اور g کی قیمتیں معلوم کیجیے۔



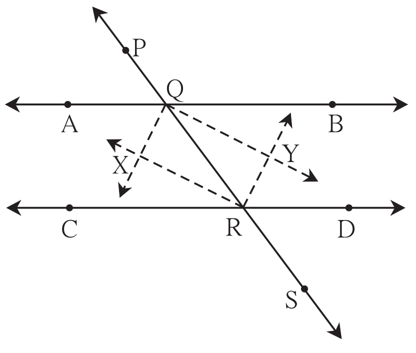
شکل 2.26

.7 شکل 2.27 میں اگر خط CF || خط AB اور خط ED || خط BC ہو تو ثابت کیجیے کہ $\angle ABC \cong \angle FDE$



شکل 2.27

.8 شکل 2.28 میں خط CD || خط AB اور خط PS ان کا تقاطع ہے۔ شعاع QX، شعاع QY، شعاع RX اور شعاع RY زاویوں کی ناصف ہوں تو دکھائیے کہ □ QXRY ایک مستطیل ہے۔



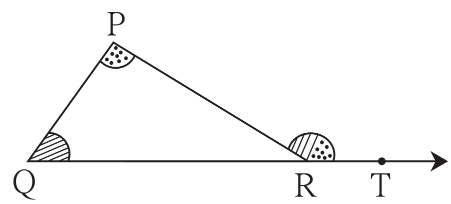
شکل 2.28

Triangle مثلث

آیئے، سیکھیں

- مثلث کے بعید داخلہ زاویوں کا مسئلہ
- مثلث کا وسطانیہ
- مثلثوں کی متماثلت
- قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر پر کھینچے گئے وسطانیہ کی خصوصیت
- متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ
- عمودی ناصف کا مسئلہ
- 30°-60°-90° پیمائش کے مثلث کی خصوصیت
- زاویے کے ناصف کا مسئلہ
- متشابہ مثلث

عملی کام : ایک موٹی دفتی پر کسی بھی پیمائش کا $\triangle PQR$ بنایئے۔شکل کے مطابق شعاع QR پر نقطہ T لیجیے۔رنگین موٹے کارڈ شیٹ کے $\angle P$ اور $\angle Q$ کی پیمائش کے ٹکڑے کاٹ لیجیے۔ان ٹکڑوں کو $\angle PRT$ میں رکھ کر دیکھیے۔وہ مکمل طور پر سما جاتا ہے۔

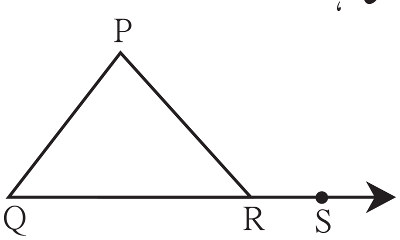


شکل 3.1

آیئے سمجھ لیں

مثلث کے بعید داخلہ زاویوں کا مسئلہ (Theorem of Remote Interior angles of a Triangle)

مسئلہ : مثلث کے ایک خارجہ زاویہ کی پیمائش،اس کے بعید داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کے مجموعے کے مساوی ہوتی ہے۔



شکل 3.2

دیا ہوا ہے : $\triangle PQR$ کا، $\angle PRS$ کا خارجہ زاویہ ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$

ثبوت : مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

$\therefore \angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = 180^\circ$ ... (I)

$\angle PRQ + \angle PRS = 180^\circ$ ... (II) (خطی جوڑی کے زاویے)

اس لیے بیان (I) اور (II) کی بناء پر

$$\angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle PRS$$

$\therefore \angle PQR + \angle QPR = \angle PRS$ ... ($\angle PRQ$ کا اخراج کرنے سے)

لہٰذا مثلث کے ایک خارجہ زاویہ کی پیمائش،اس کے بعید داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

غور کیجیے

شکل 3.2 میں نقطہ R سے قطعہ PQ کے متوازی خط کھینچ کر کیا اس مسئلہ کا کوئی دوسرا ثبوت دے سکتے ہیں؟

آیئے سمجھ لیں

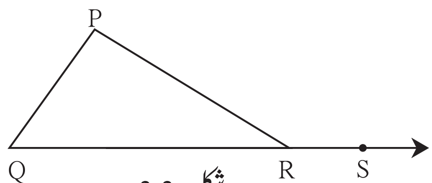
مثلث کے خارجہ زاویہ کی خصوصیت (Property of an Exterior angle of a Triangle)

a اور b ان دو اعداد کا مجموعہ $(a+b)$، عدد a سے بڑا اور b سے بھی بڑا ہوتا ہے۔ یعنی $a+b>b$ ، $a+b>a$

اس کا استعمال کر کے مثلث کے خارجہ زاویہ کی درج ذیل خصوصیت حاصل ہوتی ہے۔

$\triangle PQR$ کا $\angle PRS$ خارجہ زاویہ ہو تو $\angle PRS > \angle Q$ ، $\angle PRS > \angle P$

$\therefore$ مثلث کا خارجہ زاویہ، اس کے ہر بعید داخلہ زاویہ سے بڑا ہوتا ہے۔



شکل 3.3

حل کردہ مثالیں :

مثال **(1)** : ایک مثلث کے زاویوں کی پیمائشوں کی نسبت $5:6:7$ ہے۔ تو اس کے تمام زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

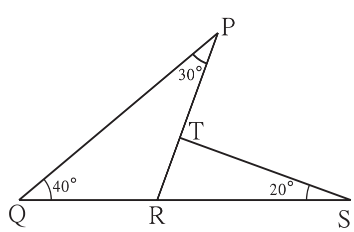
حل : فرض کیجیے مثلث کے زاویوں کی پیمائشیں $5x, 6x$ اور $7x$ ہیں۔

$$5x + 6x + 7x = 180^\circ$$
$$18x = 180^\circ$$
$$x = 10^\circ$$

$5x = 5 \times 10 = 50^\circ$, $\quad 6x = 6 \times 10 = 60^\circ$, $\quad 7x = 7 \times 10 = 70^\circ$

مثلث کے زاویوں کی پیمائشیں بالترتیب 50° ، 60° اور 70° ہیں۔

مثال **(2)** : بازو کی شکل 3.4 کا مشاہدہ کر کے $\angle PRS$ اور $\angle RTS$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 3.4

حل : $\triangle PQR$ کا خارجہ زاویہ $\angle PRS$ ہے۔

بعید داخلہ زاویوں کے مسئلہ کی رو سے،

$$\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$$
$$= 40^\circ + 30^\circ$$
$$\angle PRS = 70^\circ$$

اب $\triangle RTS$ میں

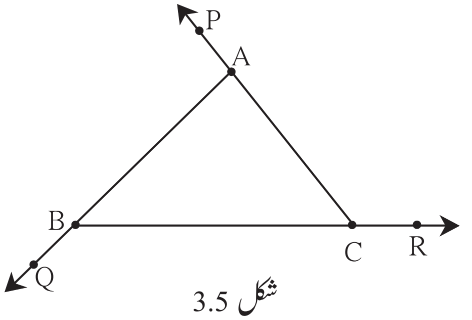
$\angle TRS + \angle RTS + \angle TSR = \square$ ... (مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ)

$\therefore \square + \angle RTS + \square = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS = \square$

مثال **(3)** : ثابت کیجیے کہ مثلث کے اضلاع ایک ہی سمت میں بڑھانے سے بننے والے خارجہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ °360 ہوتا ہے۔



شکل 3.5

دیا ہوا ہے : $\angle PAB$ ، $\angle QBC$ اور $\angle ACR$ یہ تینوں $\triangle ABC$ کے خارجہ زاویے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : $\angle PAB + \angle QBC + \angle ACR = 360^\circ$

ثبوت : اس مثال کا ثبوت ہم دو طریقوں سے دے سکتے ہیں۔

طریقہ (I)

$\triangle ABC$ میں اگر $\angle PAB$ خارجہ زاویہ ہو تو اس کے تعلق سے $\angle ABC$ اور $\angle ACB$ بعید داخلہ زاویے ہیں۔

$$\angle BAP = \angle ABC + \angle ACB \quad \text{... (I)}$$

اسی طرح

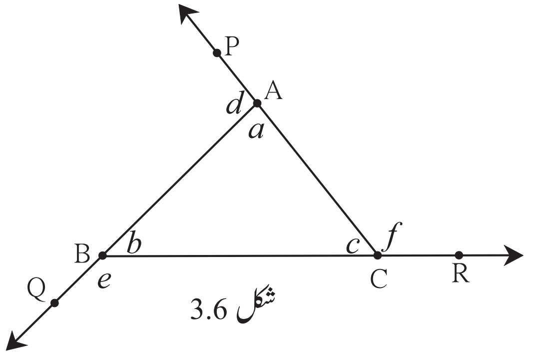
$$\angle ACR = \angle ABC + \angle BAC \quad \text{... (II)}$$ ... (بعید داخلہ زاویے)

اور ، $$\angle CBQ = \angle BAC + \angle ACB \quad \text{... (III)}$$

مساوات (I)، (II)، (III) کے طرفین کی جمع کرنے پر

$$\angle BAP + \angle ACR + \angle CBQ$$
$$= \angle ABC + \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC + \angle BAC + \angle ACB$$
$$= 2\angle ABC + 2\angle ACB + 2\angle BAC$$
$$= 2(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$$
$$= 2 \times 180^\circ$$ ... (مثلث کے داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ)
$$= 360^\circ$$

طریقہ (II)



شکل 3.6

$\angle c + \angle f = 180^\circ$ ...(خطی جوڑی کے زاویے)

اسی طرح، $\angle a + \angle d = 180^\circ$

اور $\angle b + \angle e = 180^\circ$

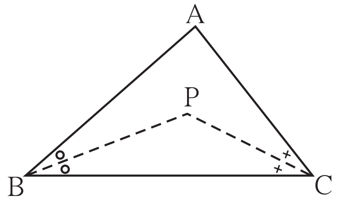
$$\therefore\ \angle c + \angle f + \angle a + \angle d + \angle b + \angle e = 180^\circ \times 3 = 540^\circ$$
$$\angle f + \angle d + \angle e + (\angle a + \angle b + \angle c) = 540^\circ$$
$$\therefore\ \angle f + \angle d + \angle e + 180^\circ = 540^\circ$$
$$\therefore f + d + e = 540^\circ - 180^\circ$$
$$= 360^\circ$$

مثال (4) : شکل 3.7 میں $\triangle ABC$ کے، $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف

اگر نقطہ P پر قطع کرتے ہوں تو

ثابت کیجیے کہ $\angle BPC = 90 + \frac{1}{2}\angle BAC$

خالی جگہ پر کر کے ثبوت مکمل کیجیے۔



شکل 3.7

ثبوت : $\triangle ABC$ میں،

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \boxed{}$ ... (مثلث کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ)

$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2} \times \boxed{}$ ... (طرفین کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب کرنے پر)

$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ$

$\therefore \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ ... (I)

$\triangle BPC$ میں،

$\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180^\circ$ ... (مثلث کے داخلہ زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ)

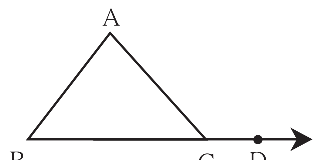
$\therefore \angle BPC + \boxed{} = 180^\circ$ ... [بیان (I) کی بناء پر]

$\therefore \angle BPC = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC)$

$\therefore = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

$= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

مشقی سیٹ 3.1



شکل 3.8

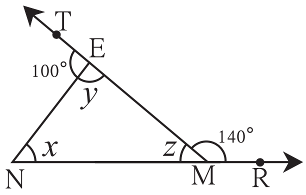
.1 شکل 3.8 میں $\triangle ABC$ کا $\angle ACD$ خارجہ زاویہ ہے۔ $\angle B = 40^\circ$،
$\angle A = 70^\circ$ ہو تو $m\angle ACD$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

.2 $\triangle PQR$ میں، $\angle P = 70^\circ$، $\angle Q = 65^\circ$ ہو تو $\angle R$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

.3 مثلث کے زاویوں کی پیمائشیں x°، $(x-20)^\circ$ اور $(x-40)^\circ$ ہو تو ہر زاویے کی پیمائش معلوم کیجیے۔

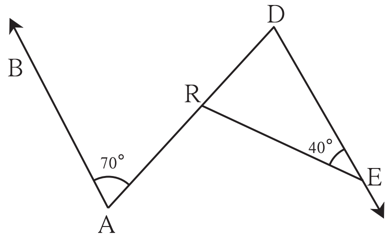
.4 مثلث کے تین زاویوں میں سے، ایک زاویہ، سب سے چھوٹے زاویہ کا دگنا اور دوسرا زاویہ، سب سے چھوٹے زاویہ کا تین گنا ہے۔ تو ان تینوں زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

5. شکل 3.9 میں دیے ہوئے زاویوں کی پیمائشوں کی بنا پر x ، y اور z کی قیمتیں معلوم کیجیے۔



شکل 3.9

6. شکل 3.10 میں DE خط || AB خط، دی ہوئی پیمائشوں کی بنا پر ∠DRE اور ∠ARE کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

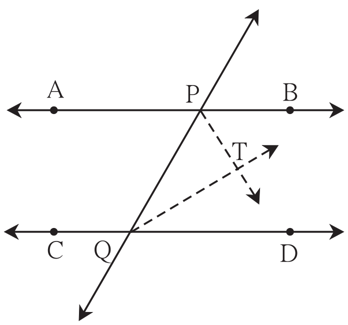


شکل 3.10

7. △ABC میں ∠A اور ∠B کے ناصف، نقطہ O پر قطع کرتے ہیں اگر ∠C = 70° ہو تو ∠AOB کی پیمائش معلوم کیجیے۔

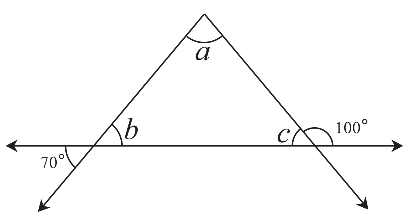
8. شکل 3.11 میں CD خط || AB خط اور خط PQ ان کا تقاطع ہے۔ شعاع PT اور شعاع QT بالترتیب ∠BPQ اور ∠PQD کی ناصف ہیں۔

تو ثابت کیجیے کہ ∠PTQ = 90°



شکل 3.11

9. شکل 3.12 میں دی ہوئی معلومات کی مدد سے $\angle a$، $\angle b$ اور $\angle c$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

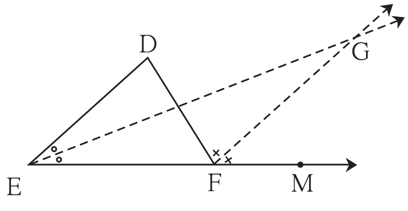


شکل 3.12

*10. شکل 3.13 میں، GF ضلع || DE ضلع، شعاع EG اور شعاع FG بالترتیب ∠DEF اور ∠DFM کی ناصف ہیں تو

ثابت کیجیے (i) ∠DEF = ∠EDF

(ii) EF = FG

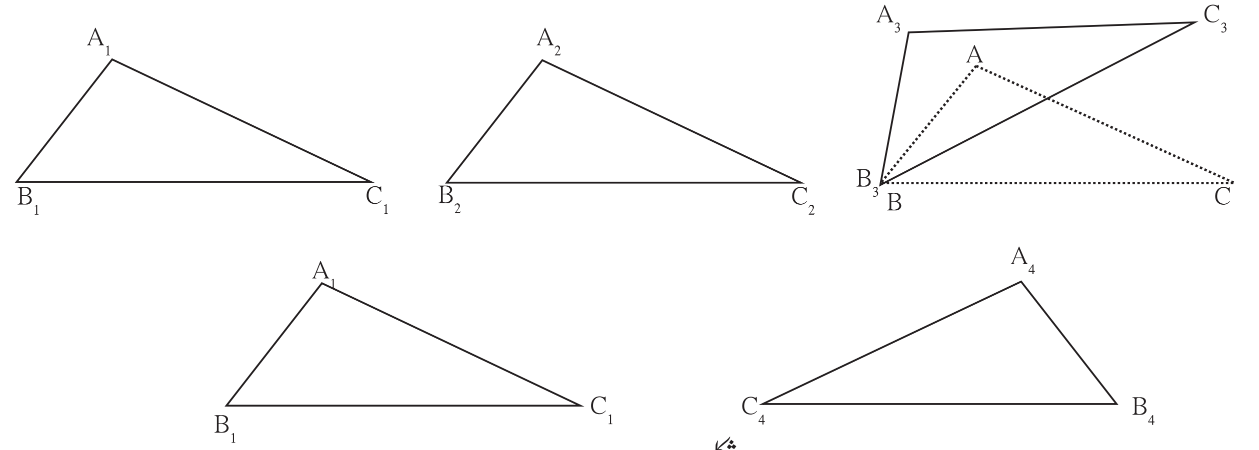


شکل 3.13

آئیے سمجھ لیں

مثلثوں کی متماثلت (Congruence of Triangles)

ایک قطعہ خط دوسرے پر رکھنے پر منطبق ہوتا ہو تب وہ دو قطعات متماثل ہوتے ہیں۔ اسی طرح ایک زاویہ کو اٹھا کر دوسرے زاویے پر رکھنے پر منطبق ہوتے ہوں تو وہ دو زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ اس بات کو ہم جانتے ہیں۔ اسی طرح ایک مثلث کو اٹھا کر دوسرے مثلث پر رکھنے پر منطبق ہوتے ہیں تو وہ دو مثلث متماثل ہوتے ہیں۔ اگر $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ متماثل ہو تب اسے $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ کی صورت میں دکھایا جاتا ہے۔



شکل 3.14

عملی کام :

کسی بھی پیمائش کا ایک مثلث $\triangle ABC$ موٹی دفتی سے کاٹ لیجیے۔ اسے کارڈ شیٹ پر ایک جگہ رکھ کر اس کے اطراف سے پنسل گھما کر اس کی نقل بنائیے۔ اس مثلث کو $\triangle A_1B_1C_1$ نام دیجیے۔

اب اس دفتی کے مثلث کو ہٹا کر دوسرے جانب سرکا کر وہاں دوسری نقل بنائیے۔ اسے $\triangle A_2B_2C_2$ نام دیجیے۔ اس کے بعد اوپر کی شکل کے مطابق اس مثلث کو تھوڑا گھما کر ایک اور نقل بنائیے۔ اس نقل کو $\triangle A_3B_3C_3$ نام دیجیے۔ بعد میں مثلث نما دفتی کو اٹھا کر دوسری جانب اوندھا رکھ کر اسی کی نقل بنائیے اور نئے مثلث کو $\triangle A_4B_4C_4$ نام دیجیے۔

کیا آپ کے دھیان میں آ گیا؟ $\triangle A_1B_1C_1$، $\triangle A_2B_2C_2$، $\triangle A_3B_3C_3$ اور $\triangle A_4B_4C_4$ یہ سب $\triangle ABC$ کے متماثل ہیں کیونکہ $\triangle ABC$ ہر ایک پر منطبق ہو جاتا ہے۔ $\triangle A_3B_3C_3$ کے لیے تصدیق کیجیے۔ لیکن اسے $\angle A$ کو $\angle A_3$، $\angle B$ کو $\angle B_3$ اور $\angle C$ کو $\angle C_3$ پر رکھنے پر $\triangle ABC \cong \triangle A_3B_3C_3$ کہہ سکتے ہیں۔ پھر $AB = A_3B_3$، $BC = B_3C_3$ اور $CA = C_3A_3$ بھی منطبق ہو جاتے ہیں۔

اس سے یہ بات سمجھ میں آتی ہے کہ دو مثلثوں کی متماثلت کی جانچ کے دوران ان کے زاویے اور ضلعے مخصوص ترتیب سے یعنی ایک سے ایک مطابقت رکھتے ہیں۔

اگر $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ ہو تو $\angle A = \angle P$، $\angle B = \angle Q$ اور $\angle C = \angle R$ ... (I)

اور $AB = PQ$، $BC = QR$، $CA = RP$ ... (II) اس طرح کل چھ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

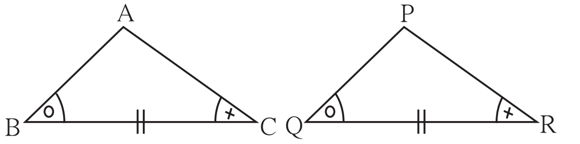
یعنی ان مثلثوں کے زاویوں اور ضلعوں کی ایک سے ایک مطابقت کی وجہ سے ان کے تین زاویے مساوی اور تین ضلعے مساوی ہیں۔

اوپر کے تمام چھے مساواتیں متماثل مثلث کے لیے صحیح ہیں۔ اس لیے تین مخصوص مساواتیں مساوی معلوم ہونے پر تمام چھے مساواتیں صحیح ہوجاتی ہیں اور وہ دونوں مثلث متماثل ہوتے ہیں۔ وہ کیسے آیئے دیکھتے ہیں۔

(1) جب ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے $\triangle ABC$ کے دو زاویے، $\triangle PQR$ کے دو زاویوں کے مساوی ہوں اور ان زاویوں کا مشمولی ضلع مساوی ہوں تو وہ دو مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

اس خصوصیت کو ' زاویہ-ضلع-زاویہ ' آزمائش کہتے ہیں۔

اسے مختصراً زاضل زا آزمائش لکھتے ہیں۔

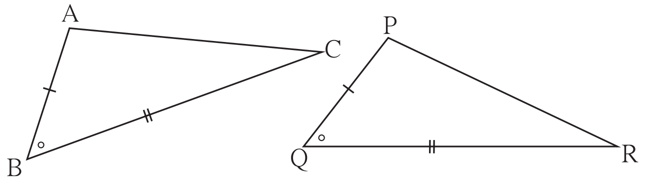


شکل 3.15

(2) جب ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے $\triangle ABC$ کے دو اضلاع $\triangle PQR$ کے دو اضلاع کے مساوی ہوں اور $\triangle ABC$ کے ان دو اضلاع کے درمیان کا زاویہ $\triangle PQR$ کے دو نظیری اضلاع کے درمیان کے زاویہ کے مساوی ہوں تو وہ دو مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

اس خصوصیت کو 'ضلع-زاویہ-ضلع' آزمائش کہتے ہیں۔

اور اسے مختصراً ضل زا ضل آزمائش لکھتے ہیں۔

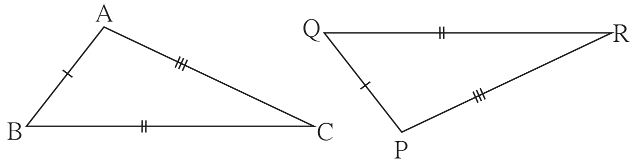


شکل 3.16

(3) جب $\triangle ABC$ کے تین اضلاع ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے $\triangle PQR$ کے نظیری اضلاع کے مساوی ہوں تو وہ مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

اس خصوصیت کو 'ضلع-ضلع-ضلع' آزمائش کہتے ہیں۔

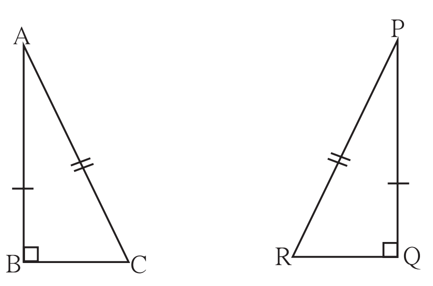
اور اسے مختصراً ضل ضل ضل آزمائش لکھتے ہیں۔



شکل 3.17

(4) $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ دونوں قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں۔ ان مثلثوں میں $\angle B$ اور $\angle Q$ قائمہ زاویے ہیں اور دونوں مثلثوں کے وتر مساوی ہیں۔ نیز $AB = PQ$ ہو تو وہ مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

اس آزمائش کو وتر ضلع آزمائش کہتے ہیں۔



شکل 3.18

اسے دھیان میں رکھیں

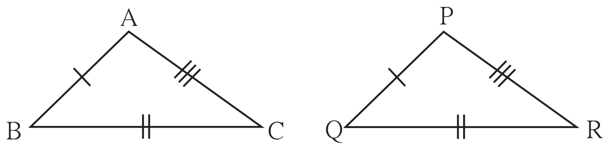
ہم نے مثلث کی کچھ پیمائشیں دی ہوں تو مثلث بنایا ہے۔(مثلاً دو زاویہ اور ان کا مشمولی ضلع، تین ضلعے، دو اضلاع اور ان کا مشمولی زاویہ) ان میں سے کوئی بھی معلومات دی جائے تو ایک ہی مثلث بنا سکتے ہیں، اس بات کا ہمیں تجربہ ہے۔ اس لیے دو مثلثوں میں ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے یہ تین ارکان دیے ہوئے ہوں تو دونوں مثلث متماثل ہوتے ہیں۔ یہ بات سمجھ میں آتی ہے۔ پھر ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے ان کے تینوں زاویے مساوی اور تینوں ضلعے بھی مساوی ہوتے ہیں۔

دو مثلث متماثل ہوں تو ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے ان کے تینوں زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ اور تینوں اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔ اس کا استعمال علم ہندسہ کی کئی مثالوں میں ہوتا ہے۔

مشقی سیٹ 3.2

1. ذیل کے مثالوں میں مثلث کی جوڑیوں کے ارکان کو یکساں نشانات سے دکھائے ہوئے حصے متماثل ہیں اس معلومات کی مدد سے ہر جوڑی کے مثلث جس آزمائش کی بنا پر متماثل ہوتے ہیں وہ آزمائش شکل کے نیچے دی ہوئی خالی جگہ میں لکھیے۔

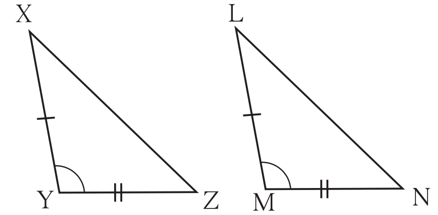
(i)



آزمائش ....

$\Delta\ ABC \cong \Delta\ PQR$

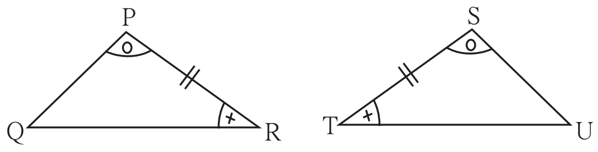
(ii)



آزمائش ....

$\Delta\ XYZ \cong \Delta\ LMN$

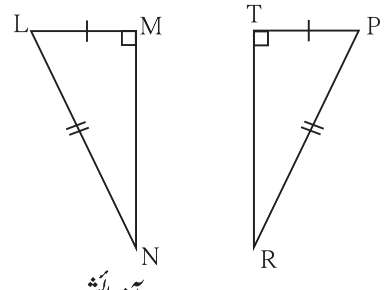
(iii)



آزمائش ....

$\Delta\ PRQ \cong \Delta\ STU$

(iv)



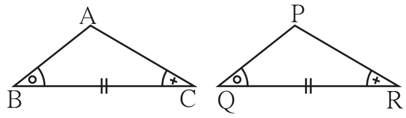
آزمائش ....

$\Delta\ LMN \cong \Delta\ PTR$

شکل 3.19

2. ذیل کے مثلثوں کی جوڑیوں میں ظاہر کی گئی معلومات کا مشاہدہ کیجیے۔ وہ مثلث کس آزمائش کے لحاظ سے متماثل ہیں۔ اسے لکھیے اور ان کے بقیہ متماثل ارکان بھی لکھیے۔

(i)



شکل 3.20

شکل میں دی ہوئی معلومات کے مطابق،

$\triangle PQR$ اور $\triangle ABC$ میں،

$\angle ABC \cong \angle PQR$

قطعہ BC $\cong$ قطعہ QR

$\angle ACB \cong \angle PRQ$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (آزمائش ______)

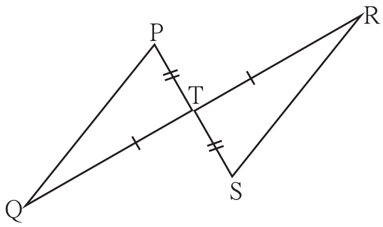
$\therefore \angle BAC \cong$ ______ ....

(متماثل مثلث کے نظیری زاویے)

قطعہ AB $\cong$ ______ اور ______ $\cong$ قطعہ PR

(متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ...

(ii)



شکل 3.21

شکل میں ہوئی معلومات کے مطابق،

$\triangle STR$ اور $\triangle PTQ$ میں،

قطعہ PT $\cong$ قطعہ ST

$\angle PTQ \cong \angle STR$ ... (متقابلہ زاویے)

قطعہ TQ $\cong$ قطعہ TR

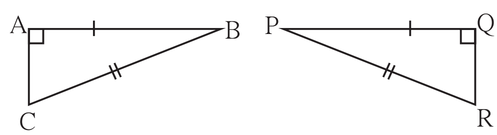
$\therefore \Delta PTQ \cong \Delta STR$ ... آزمائش ______

$\therefore \angle TPQ \cong$ ______
اور ______ $\cong \angle TRS$
.... (متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے)

ضلع PQ $\cong$ ______

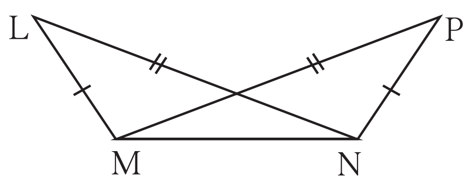
(متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ...

(3) ذیل کی شکل میں دی گئی معلومات کی مدد سے ΔABC اور ΔPQR کی متماثلت کی آزمائش اور بقیہ متماثل ارکان لکھیے۔



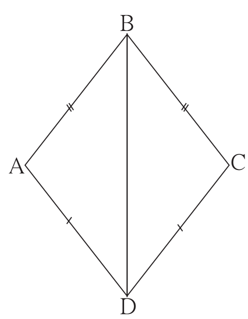
شکل 3.22

(4) ذیل کی شکل میں دی ہوئی معلومات کے مطابق
ΔLMN اور ΔPNM میں $LM = PN$،
$LN = PM$ ہو تو یہ مثلث کس آزمائش کے تحت متماثل ہیں لکھیے
اور بقیہ متماثل ارکان بھی لکھیے۔



شکل 3.23

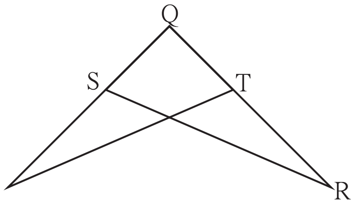
(5) شکل 3.24 میں، قطعہ BC $\cong$ قطعہ AB اور
قطعہ CD $\cong$ قطعہ AD ہو تو
ثابت کیجیے کہ $\Delta ABD \cong \Delta CBD$



شکل 3.24

(6) شکل 3.25 میں $\angle P \cong \angle R$ ، قطعہ QR $\cong$ قطعہ PQ ہوتو

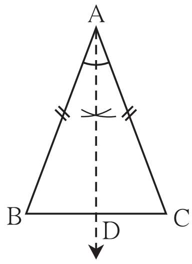
ثابت کیجیے $\Delta PQT \cong \Delta RQS$



شکل 3.25

آیئے سمجھ لیں

متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ (Isosceles triangle theorem)



شکل 3.26

مسئلہ : اگر ایک مثلث کے دو ضلعے متماثل ہوں تب ان ضلعوں کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : ΔABC میں، ضلع AC $\cong$ ضلع AB

ثابت کرنا ہے : $\angle ABC \cong \angle ACB$

عمل : ΔABC میں $\angle BAC$ کا ناصف کھینچیے جو ضلع BC کو جہاں قطع کرتا ہے اس نقطہ کا نام D دیجیے۔

ثبوت : ΔABD اور ΔACD میں

قطعہ AC $\cong$ قطعہ AB ... (دیا ہوا ہے)

$\angle BAD \cong \angle CAD$ .... (عمل)

قطعہ AD $\cong$ قطعہ AD .... (مشترک ضلع)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ ... ______

$\therefore \angle ABD \cong$ ______ ... (متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے)

$\therefore \angle ABC \cong \angle ACB$ $\because$ B - D - C

نتیجہ صریح : مثلث کے تینوں اضلاع متماثل ہوں، تب اس کے تینوں زاویے متماثل ہوتے ہیں اور ہر زاویہ کی پیمائش 60° ہوتی ہے۔ (آپ اس نتیجہ صریح کا ثبوت لکھیے)

متساوی الساقین مثلث کے مسئلہ کا عکس : (Converse of an Isosceles triangle theorem)

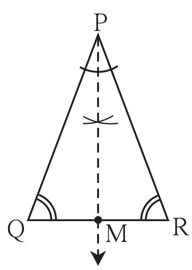
مسئلہ : اگر ایک مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تب ان زاویوں کے مقابل کے ضلعے متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : $\triangle PQR$ میں $\angle PQR \cong \angle PRQ$

ثابت کرنا ہے : ضلع PR $\cong$ ضلع PQ

عمل : $\angle P$ کا ناصف کھینچیے۔ جو ضلع QR کو جہاں قطع کرتا ہے۔ اس نقطہ کو M نام دیجیے۔

ثبوت : $\triangle PQM$ اور $\triangle PRM$ میں



شکل 3.27

$\angle PQM \cong$ ______ ... (دیا ہوا ہے)

$\angle QPM \cong \angle RPM$ ... ______

قطعہ PM $\cong$ ______ ... (مشترک ضلع)

$\therefore \Delta PQM \cong \Delta PRM$ ... آزمائش ______

$\therefore$ قطعہ PR $\cong$ قطعہ PQ متماثل مثلث کے نظیری اضلاع

نتیجہ صریح : مثلث کے تینوں زاویے متماثل ہوں تو اس کے تینوں اضلاع متماثل ہوتے ہیں۔ آپ اس نتیجہ صریح کا ثبوت لکھیے۔

اوپر دیے ہوئے دونوں ذیلی مسئلوں کے بیانات ایک دوسرے کے عکس ہیں۔

غور کیجیے

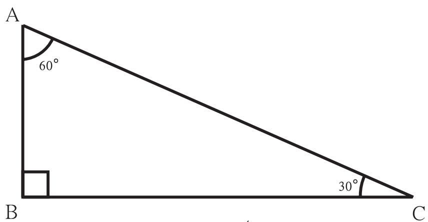
(1) کیا متساوی الساقین مثلث کے مسئلہ کا ثبوت، مختلف عمل کے ذریعے دے سکتے ہیں؟

(2) کیا متساوی الساقین مثلث کے مسئلہ کا ثبوت، کسی عمل کے بغیر دے سکتے ہیں؟

آیئے سمجھ لیں

90° – 60° – 30° پیمائش کے مثلث کی خصوصیات (Property of 30°–60°–90° triangle)

عملی کام I :



شکل 3.28

گروہ کے ہر طالب علم کو ایک ایسا قائمۃ الزاویہ مثلث بنانے کے لیے کہیں

جس کا ایک زاویہ 30° کا ہو۔

ہر طالب علم 30° پیمائش کے زاویے کے مقابل کے ضلع اور وتر کی لمبائی ناپ لے۔

گروہ کا ایک طالب علم تمام طلبہ کے بنائے ہوئے مثلثوں کے لیے ذیل کا جدول مکمل کرلے۔

مثلثوں کے نمبر شمار	مثلث 1	مثلث 2	مثلث 3	مثلث 4
30° زاویہ کے مقابل کا ضلع				
وتر کی لمبائی				

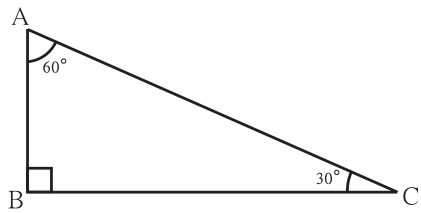
اوپر کے جدول کی بنا پر زاویوں کی پیمائشیں 30°، 60° اور 90° والے مثلث کے اضلاع کی کچھ خصوصیات حاصل ہوتی ہیں۔

عملی کام II : کمپاس بکس میں ایک گنیا کے زاویے 30°، 60° اور 90° ہوتے ہیں کیا ان کے اضلاع کے تعلق سے یہ خصوصیت حاصل ہوتی ہے؟ تصدیق کیجیے۔

اس عمل کی بنا پر ہمیں حاصل ہونے والی ایک اہم خصوصیت کو اب ہم ثابت کریں گے۔

مسئلہ : اگر قائمۃ الزاویہ کے حادہ زاویے 30° اور 60° کے ہوں تب 30° کے زاویے کے مقابل کا ضلع، وتر کا نصف ہوتا ہے۔

ذیل میں دیے ہوئے ثبوت کی خالی جگہ پُر کیجیے۔

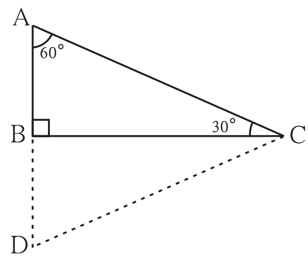


شکل 3.29

دیا ہوا ہے : قائمۃ الزاویہ ΔABC میں $\angle A = 60^\circ$، $\angle C = 30^\circ$، $\angle B = 90^\circ$

ثابت کرنا ہے : $AB = \frac{1}{2} AC$

عمل : قطعہ AB کو نقطہ D تک اس طرح بڑھائیے کہ $AB = BD$ اور قطعہ خط DC کھینچیے۔



شکل 3.30

ثبوت : ΔABC اور ΔDBC میں

قطعہ AB $\cong$ قطعہ DB ... [ ]

$\angle ABC \cong \angle DBC$ ... [ ]

قطعہ BC $\cong$ قطعہ BC ... [ ]

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DBC$ ... [ ]

$\therefore \angle BAC \cong \angle BDC$ ... (متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے)

$\triangle ABC$ میں $\angle BAC = 60^\circ$ ، $\therefore \angle BDC = 60^\circ$

اب $\triangle ADC$ میں

$\angle DAC = \angle ADC = \angle ACD = 60^\circ$ ... (مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180°)

$\therefore$ $\triangle ADC$ ، یہ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

$\therefore AC = AD = DC$ ... (متساوی الساقین مثلث کے مسئلہ کے عکس کا نتیجہ صریح)

لیکن، (عمل) ... $AB = \frac{1}{2} AD$

$\therefore AB = \frac{1}{2} AC$ .... $(\because AD = AC)$

عملی کام : اوپر کی شکل 3.29 کی مدد سے خالی چوکون مکمل کرکے ذیل کے مسئلے کا ثبوت لکھیے

قائمۃ الزاویہ مثلث میں دیگر زاویے 30° ، 60° ہوں تو 60° زاویے کے مقابل کا ضلع، وتر $\times \frac{\sqrt{3}}{2}$ ہوتا ہے۔

اوپر کے مسئلے میں، ہم جانتے ہیں، $AB = \frac{1}{2} AC$

(فیثاغورث کے مسئلہ کی رُو سے) ... $AB^2 + BC^2 =$ [ ]

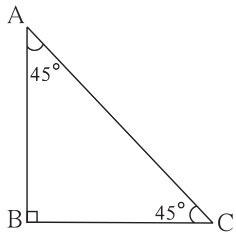
$\frac{1}{4} AC^2 + BC^2 =$ [ ]

$\therefore BC^2 = AC^2 - \frac{1}{4} AC^2$

$\therefore BC^2 =$ [ ]

$\therefore BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

عملی کام : قائمۃ الزاویہ مثلث کے زاویے جب $45°$, $45°$, $90°$ ہوں تب قائمہ زاویہ بنانے والا ہر ضلع، وتر $\times \frac{1}{\sqrt{2}}$ ہوتا ہے۔



شکل 3.31

$\triangle ABC$ میں، $\angle B = 90°$ اور $\angle A = \angle C = 45°$

$\therefore BC = AB$

فیثاغورث کے مسئلہ کی رُو سے،

$AB^2 + BC^2 = \boxed{}$

$AB^2 + \boxed{} = AC^2 \quad \ldots (\because BC = AB)$

$\therefore 2AB^2 = \boxed{}$

$\therefore AB^2 = \boxed{}$

$\therefore AB = \frac{1}{\sqrt{2}} AC$

اس مسئلہ کو $90°–45°–45°$ کے مثلث کا مسئلہ کہتے ہیں۔

اسے دھیان میں رکھیں

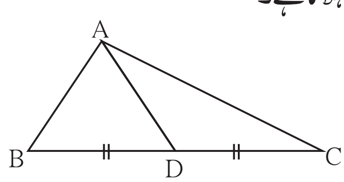
(1) قائمۃ الزاویہ مثلث کے زاویے $30°, 60°$ اور $90°$ ہوں تب $30°$ زاویے کے مقابل کا ضلع $\frac{\text{وتر}}{2}$ ہوتا ہے اور $60°$ کے زاویے کے مقابل کا ضلع وتر $\times \frac{\sqrt{3}}{2}$ ہوتا ہے۔ اس مسئلہ کو $90°–60°–30°$ کا مسئلہ کہتے ہیں۔

(2) قائمۃ الزاویہ مثلث کے زاویے $45°$، $45°$ اور $90°$ ہوں تب قائمہ زاویہ بنانے والا ہر ضلع $\frac{\text{وتر}}{\sqrt{2}}$ ہوتا ہے۔ اس مسئلہ کو $90°–45°–45°$ کا مسئلہ کہتے ہیں۔

آیئے ذرا یاد کریں

مثلث کا وسطانیہ (Median of a triangle)

مثلث کے راس اور اس کے مقابل کے ضلع کے وسطی نقطہ کو ملانے والا قطعہ خط، اس مثلث کا وسطانیہ کہلاتا ہے۔

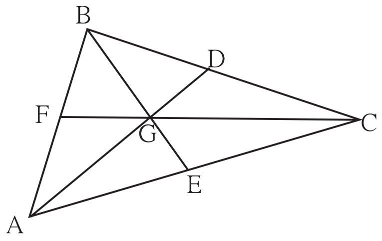


شکل 3.32

شکل میں نقطہ D، ضلع BC کا وسطی نقطہ ہے اس لیے قطعہ AD، یہ ΔABC کا وسطانیہ ہے۔

عملی کام I :

کوئی بھی ایک مثلث ABC بنائیے۔اس مثلث کے BE, AD اور CF وسطانیے کھینچئے۔ان کے نقطہ تراکز کو G نام دیجیے۔AG اور GD کی لمبائی کا موازنہ تقسیم کار (Divider) کی مدد سے کیجیے۔ AG کی لمبائی، GD کے دگنا ہے۔اس کی تصدیق کیجیے۔

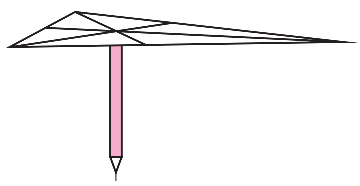


شکل 3.33

اسی طرح کیا BG کی لمبائی GE، کے دگنا اور CG کی لمبائی GF کی لمبائی کے دگنا ہوتی ہے؟اس کی بھی تصدیق کیجیے۔

اس بنا پر ہندسی وسط (تینوں وسطانیوں کا نقطہ تراکز) ہر وسطانیہ کو 1 : 2 اس کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔اس خصوصیت کو دھیان میں رکھیے۔

عملی کام II : ΔABC،اس مثلث کو ایک موٹے کاغذ پر بنا کر کاٹ لیجیے۔اس کے تینوں وسطانیہ کھینچئے۔ان کے نقطہ تراکز کو نقطہ G نام دیجیے۔اب ایک پنسل لیجیے جس کا نچلا حصہ ہموار ہو۔ہموار حصے کو اوپر کی جانب کر کے اسے کھڑا کیجیے۔مثلث کے نقطہ G کو پنسل کے ہموار حصے پر رکھ کر دیکھیے کہ توازن برقرار رہتا ہے۔تصدیق کیجیے۔


شکل 3.34

اس بناء پر وسطانیوں کے نقطہ تراکز یا 'ہندسی مرکز' کی اہم خصوصیت سمجھ میں آتی ہے۔

قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کے وسطانیہ کی خصوصیت

عملی کام : فرض کیجیے شکل 3.35 میں ΔABC قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

قطعہ BD وسطانیہ ہے۔

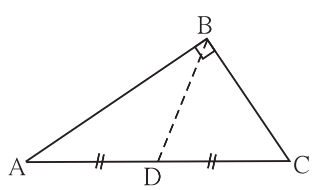
تقسیم کار کی مدد سے درج ذیل قطعات خط کی لمبائیاں ناپ کر لکھیے۔

l(AD) =......... l(DC) =............ l(BD) = ...

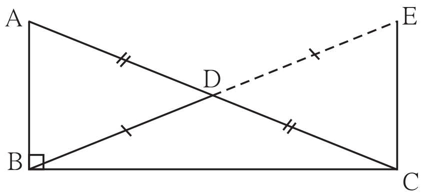
اس بنا پر $(AC)\ \frac{1}{2} = (BD)$ خصوصیت حاصل ہوتی ہے۔

تصدیق کیجیے۔

اب ہم اس خصوصیت کو ثابت کریں گے۔



شکل 3.35



شکل 3.32

مسئلہ : قائمۃ الزاویہ مثلث میں، وتر پر کھینچے گئے وسطانیہ کی لمبائی وتر کا نصف ہوتی ہے۔

دیا ہوا ہے : قائمۃ الزاویہ $\triangle ABC$ میں قطعہ BD وسطانیہ ہے۔

ثابت کرنا ہے : $BD = \frac{1}{2} AC$

عمل : شعاع BD، پر ایک نقطہ E اس طرح لیجیے کہ B – D – E ،
$l(BD) = l(DE)$ اور قطعہ EC کھینچیے۔

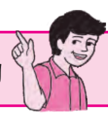
ثبوت : ذیل میں ثبوت کے اہم مرحلے دکھائے گئے ہیں۔ درمیان کے مرحلے، بیانات اور وجوہات لکھ کر ثبوت مکمل کیجیے۔

$\Delta ADB \cong \Delta CDE$ (ضل زاضل آزمائش) ...

قطعہ $AB \parallel$ قطعہ EC (متبادلہ زاویوں کی آزمائش) ...

$\Delta ABC \cong \Delta ECB$ (ضل زاضل آزمائش) ...

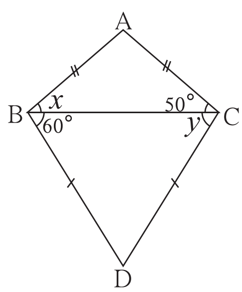
$BD = \frac{1}{2}(AC)$



اسے دھیان میں رکھیں

کسی بھی قائمۃ الزاویہ مثلث میں، وتر پر کھینچے گئے وسطانیہ کی لمبائی وتر کا نصف ہوتی ہے۔

مشقی سیٹ 3.3

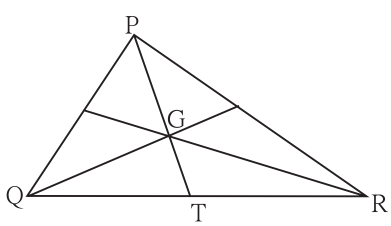


شکل 3.37

(1) شکل 3.37 میں دیئے گئے زاویوں کی پیائشیں دیکھیے۔ x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔ اسی طرح $\angle ABD$ اور $\angle ACD$ کی پیائشیں معلوم کیجیے۔

(2) قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی 15 ہو تب اس پر کھینچے گئے وسطانیہ کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(3) قائمۃ الزاویہ مثلث ΔPQR میں، $\angle Q = 90°$، $QR = 5, PQ = 12$ اور QS، قطعہ PR کا وسطانیہ ہے۔ تب QS کی قیمت معلوم کیجیے۔



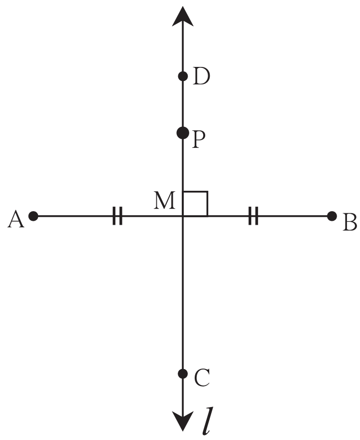
شکل 3.38

(4) شکل 3.38 میں ΔPQR کا نقطہ G ہندسی مرکز ہے۔ اگر سم $GT = 2.5$ ہو تو PG اور PT کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

آیئے ذرا یاد کریں

عملی کام : مناسب لمبائی کا قطعہ AB کھینچیے۔ اس کے وسطی نقطے کو M نام دیجیے۔نقطہ M سے گذرنے والا اور قطعہ AB پر عمود ہو، ایسا خط l کھینچیے۔خط l، قطعہ AB کا عمودی ناصف ہے۔کیا یہ بات دھیان میں آ گئی ؟

خط l پر کہیں بھی نقطہ p لیجیے۔ PA اور PB کے فاصلوں کا موازنہ تقسیم کار کی مدد سے کیجیے۔کیا حاصل ہوا؟ PA = PB یہی حاصل ہوا نا؟اس سے یہ بات سمجھ میں آتی ہے کہ قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع کوئی بھی نقطہ، اس قطعہ خط کے اختتامی نقاط سے ہم فاصلہ ہوتا ہے۔



شکل 3.39

اب کمپاس کی مدد سے، نقطہ A اور B سے ہم فاصلہ نقاط C اور D جیسے کچھ نقاط لیجیے۔

تمام نقاط خط l پر ہی ہیں نا؟اس بات سے کیا سمجھ میں آیا؟ قطعہ خط کے سروں سے ہم فاصلہ ہر نقطہ، عمودی ناصف پر واقع ہوتا ہے۔یہ دو خصوصیات عمودی ناصف کے مسئلہ کے دو حصے ہیں، اب ہم انھیں ثابت کریں گے۔

آیئے سمجھ لیں

عمودی ناصف کا مسئلہ (Perpendicular bisector Theorem)

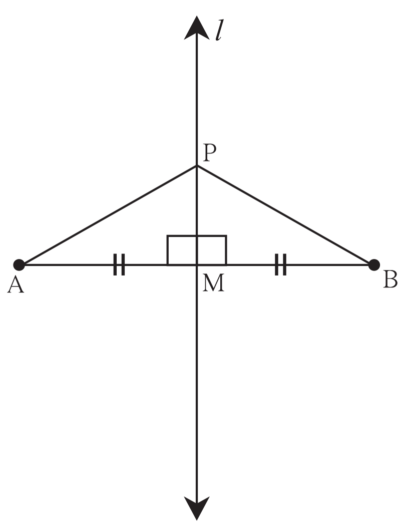
حصہ I : قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہر نقطہ، اس قطعہ کے اختتامی نقاط سے مساوی فاصلہ پر ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : خط l، قطعہ AB کا عمودی ناصف ہے، جو قطعہ AB کو نقطہ M پر قطع کرتا ہے۔

نقطہ P، خط l پر واقع کوئی ایک نقطہ ہے۔

ثابت کرنا ہے : l (PA) = l (PB)

عمل : قطعہ AP اور قطعہ BP کھینچیے ۔



شکل 3.40

ثبوت : ΔPMA اور ΔPMB میں

قطعہ PM ≅ قطعہ PM ... (مشترک ضلع)

∠PMA ≅ ∠PMB ... (ہر زاویہ قائمہ)

قطعہ AM ≅ قطعہ BM ... (نقطہ M وسطی نقطہ)

$\therefore \Delta PMA \cong \Delta PMB$ ... (ضل زاضل آزمائش)

$\therefore$ قطعہ PA $\cong$ قطعہ PB ... (متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع)

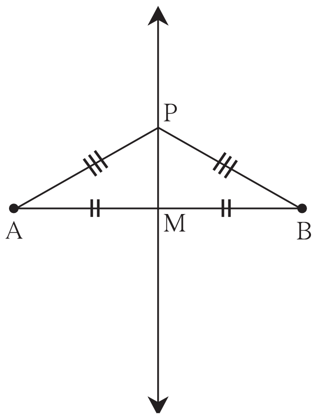
$\therefore l(PA) = l(PB)$

اس بنا پر قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہر نقطہ، اس قطعہ کے اختتامی نقاط سے ہم فاصلہ ہوتا ہے۔

حصہ II : قطع خط کے اختتامی سروں سے ہم فاصلہ کوئی بھی نقطہ، اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : نقطہ P، قطعہ AB کے اختتامی نقاط سے مساوی فاصلے پر واقع کوئی نقطہ ہے۔ یعنی PA = PB

ثابت کرنا ہے : نقطہ P، قطعہ AB کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔



شکل 3.41

عمل : قطعہ AB کا وسطی نقطہ M لیجیے اور خط PM کھینچیے ۔

ثبوت : ΔPAM اور ΔPBM میں

قطعہ PA $\cong$ قطعہ PB ... ______

قطعہ AM $\cong$ قطعہ BM ... ______

قطعہ PM $\cong$ ______ ... (مشترک ضلع)

$\therefore \Delta PAM \cong \Delta PBM$ ... (______ آزمائش)

$\therefore \angle PMA \cong \angle PMB$ ... (متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے)

لیکن $\angle PMA +$ ______ $= 180°$

$\angle PMA + \angle PMA = 180°$ ... $(\because \angle PMB = \angle PMA)$

$2\angle PMA =$ ______

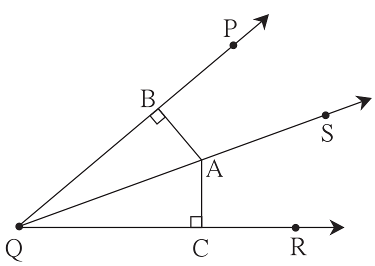
$\therefore \angle PMA = 90°$

قطعہ PM $\perp$ قطعہ AB ... (1)

(2) ... اسی طرح، ضلع AB کا وسطی نقطہ M ہے۔ ... (عمل)

اس لیے خط PM، قطعہ AB کا عمودی ناصف ہے۔ یعنی نقطہ P، قطعہ AB کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔

زاویہ کے ناصف کا مسئلہ (Angle Bisector Theorem)



شکل 3.42

حصہ I : زاویہ کے ناصف پر واقع ہر نقطہ، اس زاویہ کی ساقین سے ہم فاصلہ ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : شعاع QS یہ $\angle PQR$ کی ناصف ہے۔

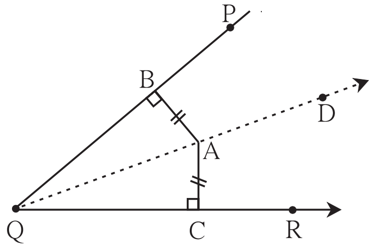
A، زاویہ کے ناصف پر واقع کوئی ایک نقطہ ہے۔ QP شعاع $\perp$ قطعہ AB،

QR شعاع $\perp$ قطعہ AC

ثابت کرنا ہے : قطعہ AC $\cong$ قطعہ AB

ثبوت : مثلثوں کی متماثلت کی مناسب وموزوں آزمائش کا استعمال کرکے ثبوت لکھیے۔

حصہ **II** : زاویہ کے ساقین سے مساوی فاصلہ پر واقع کوئی بھی نقطہ، اس زاویے کے ناصف پر ہوتا ہے۔



شکل 3.43

دیا ہوا ہے : ∠PQR کے اندرون میں A ایک نقطہ اس طرح واقع ہے کہ،

قطعہ QR ⊥ قطعہ AC

شعاع QP ⊥ قطعہ AB

AB = AC

ثابت کرنا ہے : شعاع QA، ∠PQR کی ناصف ہے یعنی

یعنی ∠BQA = ∠CQA

ثبوت : مثلث کی مناسب متماثلت کی آزمائش کا استعمال کرکے ثبوت لکھیے۔

آیئے ذرا یاد کریں

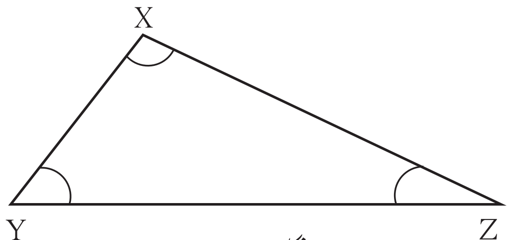
عملی کام I :

شکل کے مطابق، ضلع XY > ضلع XZ

ایسا △XYZ بنائیے۔

اب ∠Z اور ∠Y ناپیے۔

کون سا زاویہ بڑا ہے؟



شکل 3.44

آیئے سمجھ لیں

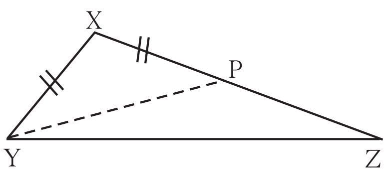
مثلث میں ضلعوں اور زاویوں کی غیر مساویت کی خصوصیت :

مسئلہ : جب مثلث کے دو ضلعوں میں سے ایک ضلع، دوسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے تب بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ چھوٹے ضلع کے مقابل کے زاویے سے بڑا ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : △XYZ، میں ضلع XY > ضلع XZ

ثابت کرنا ہے : ∠XYZ > ∠XZY

عمل : ضلع XZ پر نقطہ P، اس طرح لیجیے کہ $l(XY) = l(XP)$، قطعہ YP کھینچیے ۔



شکل 3.45

ثبوت : Δ XYP میں،

(عمل) ... XY = XP

(متماثل اضلاع کے مقابل کے زاویے مساوی) ... ∴ ∠XYP = ∠XPY ... (I)

∠XPY، △YPZ کا خارجہ زاویہ ہے۔

(خارجہ زاویہ کا مسئلہ) ... ∴ ∠XPY > ∠PZY

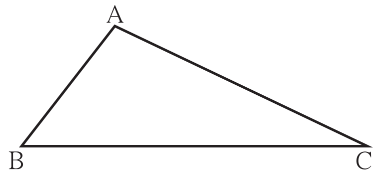
بیان (I) کی بنا پر ... ∠XYP > ∠PZY

(اگر $a > b$ اور $c > 0$ ہو تو $a + c > b$) ... ∠XYP + ∠PYZ > ∠PZY

∴ ∠XYZ > ∠PZY یعنی ، ∠XYZ > ∠XZY

مسئلہ : مثلث کے دو زاویے غیر مساوی پیمائشوں کے ہوں تب بڑے زاویے کے مقابل کا ضلع، چھوٹے زاویے کے مقابل کے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کا ثبوت بالواسطہ طریقے سے دے سکتے ہیں۔ ذیل میں دیے ہوئے ثبوت کی خالی جگہ پر کیجیے اور ثبوت مکمل کیجیے۔



شکل 3.46

دیا ہوا ہے : ΔABC میں $\angle B > \angle C$

ثابت کرنا ہے : $AC > AB$

ثبوت : $\triangle ABC$ کے اضلاع AB اور AC کے لمبائیوں میں درج ذیل میں سے ایک اور صرف ایک ہی مفروضہ ممکن ہوسکتا ہے۔

(i) $AC < AB$ (ii) ______ (iii) ______

(1) فرض کیجیے۔ $AC < AB$

مثلث کے غیر مساوی ضلعوں میں سے بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ، چھوٹے ضلع کے مقابل کے زاویے سے ______ ہوتا ہے۔

$\therefore \angle C >$ ______

لیکن (دیا ہوا ہے) ... $\angle C < \angle B$

یعنی یہاں تضاد پایا جاتا ہے۔

(یہ مفروضہ غلط ہے) ... $\therefore$ ______ $<$ ______

(2) اگر، $AC = AB$

ہوتو $\angle B = \angle C$

لیکن (دیا ہوا ہے) ... ______ $>$ ______

یعنی یہاں دوبارہ تضاد پیدا ہوتا ہے۔

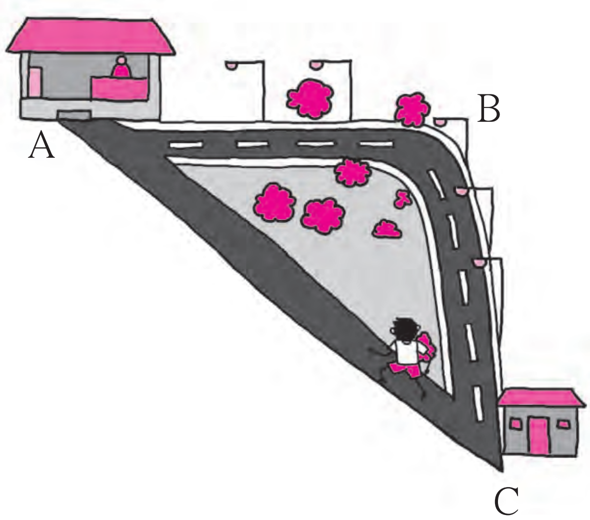
(یہ مفروضہ غلط ہے) ... $\therefore$ ______ $=$ ______

اب یہی ایک ممکنہ مفروضہ باقی رہتا ہے۔ ... $\therefore AC > AB$

$\therefore \quad AC > AB$

آیئے ذرا یاد کریں

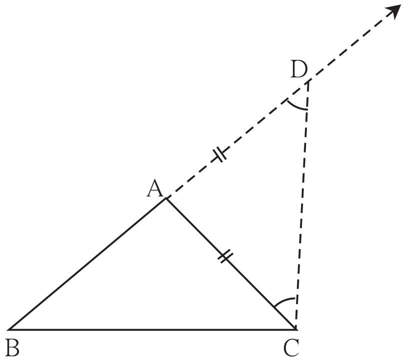
گذشتہ جماعت میں ہم نے ایک عملی کام کیا تھا۔ اس کی مدد سے مثلث کی ایک خصوصیت دیکھی تھی، اسے یاد کریں۔



بازو کی تصویر کے مطابق مقام A پر ایک دکان ہے۔ سمیر C مقام پر کھڑا تھا۔ دکان تک پہنچنے کے لیے اس نے $C \to B \to A$ اس پکی سڑک کی بجائے $C \to A$ راستہ اختیار کیا۔ کیونکہ اس کے دھیان میں یہ بات آئی تھی کہ یہ راستہ کم لمبائی کا ہے۔ یعنی مثلث کی کون سی خصوصیت اس کے دھیان میں آئی تھی؟

مثلث کے کوئی بھی دو ضلعوں کا مجموعہ تیسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔ اس خصوصیت کو اب ہم ثابت کریں گے۔

مسئلہ : مثلث کے کسی بھی دو ضلعوں کی لمبائی کا مجموعہ، تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔



شکل 3.47

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ کوئی ایک مثلث ہے۔

ثابت کرنا ہے : $AB + AC > BC$

$AB + BC > AC$

$AC + BC > AB$

عمل : شعاع BA پر نقطہ D اس طرح لیجیے کہ $AD = AC$

ثبوت : $\triangle ACD$ میں $AC = AD$ ... (عمل)

$\therefore \angle ACD = \angle ADC$ ... (متماثل اضلاع کے مقابل کے زاویے)

$\therefore \angle ACD + \angle ACB > \angle ADC$ ...(اگر $a > b$ اور $c>0$ ہو تو $a + c > b$)

$\therefore \angle BCD > \angle ADC$

$\therefore$ ضلع BD > ضلع BC ... (مثلث کے بڑے زاویے کے مقابل کا ضلع بڑا)

$\therefore BA + AD > BC$ ...($\because BD = BA + AD$)

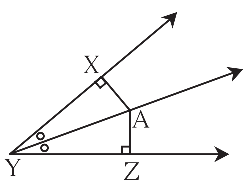
$BA + AC > BC$ ... ($\because AD = AC$)

اسی طرح $AB + BC > AC$

اور $BC + AC > AB$ ثابت کر سکتے ہیں۔

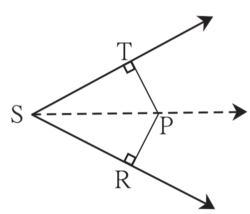
مشقی سیٹ 3.4

(1) شکل 3.48 میں، نقطہ A، یہ $\angle XYZ$ کے ناصف پر واقع ہے۔
اگر سم $AX = 2$ ہو تو AZ معلوم کیجیے۔



شکل 3.48

(2) شکل 3.49 میں $\angle RST = 56°$، شعاع ST $\perp$ PT قطعہ، شعاع SR $\perp$ PR قطعہ اور PT قطعہ $\cong$ PR قطعہ ہو تو $\angle RSP$ معلوم کیجیے۔ وجہ لکھیے۔



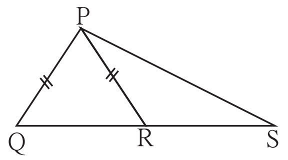
شکل 3.49

(3) $\triangle PQR$ میں سم $PQ = 10$، سم $QR = 12$، سم $PR = 8$ ہو تو مثلث کا سب سے بڑا اور سب سے چھوٹا زاویہ معلوم کیجیے۔

(4) $\triangle FAN$ میں، $\angle A = 40°$, $\angle F = 80°$ ہو تو مثلث کے سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے ضلع کے نام وجہ کے ساتھ لکھیے؟

(5) ثابت کیجیے کہ متساوی الاضلاع مثلث '' متساوی الزاویہ مثلث'' ہوتا ہے۔

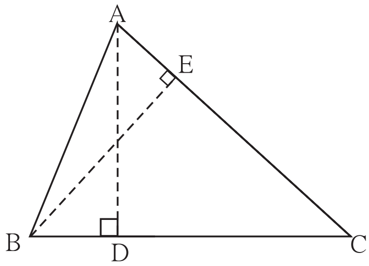
(6) △ABC میں، ∠BAC کا ناصف، ضلع BC پر عمود ہو تو ثابت کیجیے کہ △ABC، متساوی الساقین مثلث ہیں۔



شکل 3.50

(7) شکل 3.50 میں اگر قطعہ PQ ≅ قطعہ PR ہو تو دکھایئے کہ

قطعہ PS > قطعہ PQ



شکل 3.51

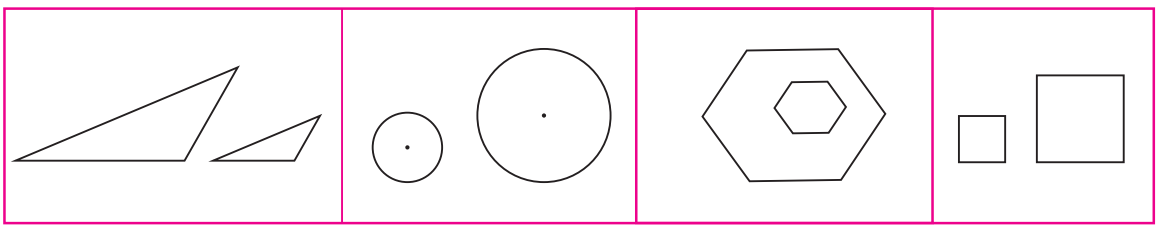
(8) شکل 3.51 میں ΔABC کے قطعہ AD اور قطعہ BD ارتفاع ہیں اور

AE = BD ہو تو ثابت کیجیے قطعہ BE ≅ قطعہ AD

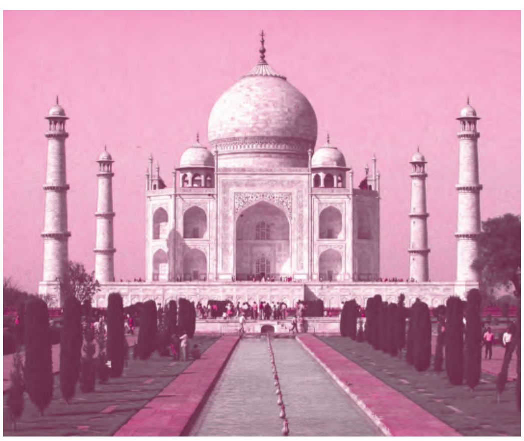
آیئے سمجھ لیں

متشابہ مثلث (Similar Triangles)

مقابل کے اشکال کا مشاہدہ کیجیے۔



ہر حصہ میں دکھائی ہوئی دو–دو شکلوں کی جسامت (Shape) ایک جیسی ہے۔ لیکن وہ شکلیں چھوٹی بڑی ہیں، یعنی وہ متماثل نہیں ہیں۔
ایسی ایک جیسی دکھائی دینے والی شکلیں، یعنی ایسی ہو بہو نظر آنے والی شکلیں متشابہ شکلیں کہلاتی ہیں۔



کسی فوٹو، اس فوٹو کی مدد سے نکالا گیا بڑا فوٹو اس میں متشابہت پائی جاتی ہے۔ اسی طرح راستہ اور راستے کا نقشہ میں متشابہت پائی جاتی ہے۔

دو شکلوں کے درمیان اضلاع کی متناسبت، متشابہ اشکال کی اہم خصوصیت ہے۔ متشابہ شکلوں میں اگر زاویے ہوں تب وہ متماثل ہوتے ہیں، اُسی پیمائش کے رہنا ضروری ہے۔ دو راستوں میں جو زاویہ ہے، وہی زاویہ ان کے نقشہ میں نہ ہو تو وہ نقشہ غلط فہمی پیدا کرسکتا ہے۔

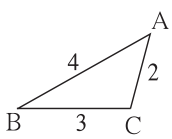
ITC Tools or Links

موبائیل یا کمپیوٹر پر کوئی فوٹو دیکھیے، اسے چھوٹا یا بڑا بنانے کے لیے آپ کیا کرتے ہیں؟ اسے یاد کیجیے۔

اسی طرح کسی فوٹو کا مخصوص حصہ دیکھنے کے لیے آپ کون سا عمل کرتے ہیں۔ یاد کیجیے۔

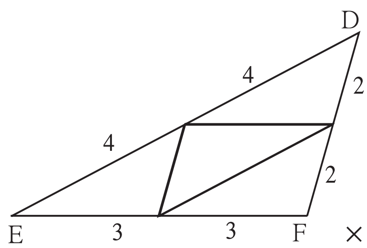
اب ہم متشابہ مثلث کی خصوصیت ایک عمل کے ذریعے سمجھنے کی کوشش کریں گے۔

عملی کام : 4 سم، 3 سم اور 2 سم ضلعوں والا ایک مثلث کاغذ پر بنایئے۔ اس مثلث کو ایک موٹے کاغذ پر رکھیے۔ اس کے اطراف پنسل گھما کر اس قسم کے 14 مثلث کاٹ کر تیار کیجیے۔ کاغذ کے یہ مثلثی ٹکڑے متماثل ہیں اس بات کو دھیان میں رکھیں۔ انھیں ذیل کے مطابق ترتیب دے کر تین مثلث بنایئے۔



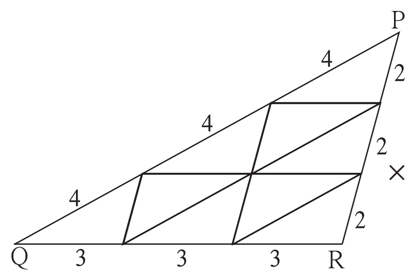
شکل 3.52

مثلث کی تعداد 1



شکل 3.53

مثلث کی تعداد 4



شکل 3.54

مثلث کی تعداد 9

ΔABC اور ΔDEF، یہ $ABC \leftrightarrow DEF$ مطابقت کے لحاظ سے متشابہ ہیں۔

$$\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$$

اور

$$\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}; \quad \frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad \frac{AC}{DF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

یعنی نظیری ضلعے تناسب میں ہیں۔

اسی طرح $\triangle DEF$ اور $\triangle PQR$ پر غور کیجیے۔

$DEF \leftrightarrow PQR$ اس مطابقت کے لحاظ سے کیا ان کے زاویے متماثل اور ضلع تناسب میں ہیں؟

آیئے سمجھ لیں

مثلثوں کی متشابہت

$\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ میں اگر $\angle C = \angle R$ ،$\angle B = \angle Q$ ،$\angle A = \angle P$ (i)

اور $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ (ii) ہو تو $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ متشابہ مثلث ہیں۔

'$\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$، متشابہ ہیں' اسے '$\triangle ABC \cong \triangle PQR$' لکھتے ہیں۔

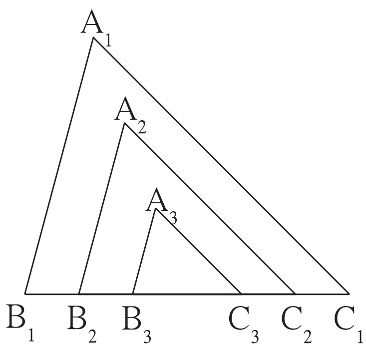
متشابہ مثلثوں کے نظیری زاویے اور نظیری ضلعوں کے درمیان باہمی تعلق ذیل کے عملی کام سے سمجھ لیں۔

عملی کام : $\triangle A_1B_1C_1$ نام کا کوئی ایک مثلث دبیز کاغذ (کارڈ شیٹ) پر بنایئے اور اسے کاٹ لیجیے۔ $\angle A_1$، $\angle B_1$ اور $\angle C_1$ کی پیمائش ناپیے۔

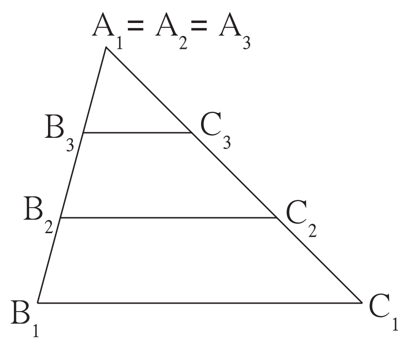
اسی طرح دبیز کاغذ پر $\triangle A_2B_2C_2$ اور $\triangle A_3B_3C_3$ نام کے مزید دو مثلث بنایئے اس طرح کہ $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3$ ،

$\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3$ اور $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3$، لیکن $B_1C_1 > B_2C_2 > B_3C_3$

اب ان دو مثلثوں کو کاٹ کر بازو میں رکھیے۔ تینوں مثلثوں کے اضلاع کی لمبائی ناپیے۔ ان مثلثوں کو ذیل کے دونوں طریقے کے مطابق ترتیب دیجیے۔



شکل 3.55



شکل 3.56

$\frac{A_1C_1}{A_2C_2}$, $\frac{B_1C_1}{B_2C_2}$, $\frac{A_1B_1}{A_2B_2}$ ان نسبتوں کی جانچ کیجیے۔ وہ مساوی ہیں، یہ تصدیق کیجیے۔

اسی طرح $\frac{A_1B_1}{A_3B_3}$, $\frac{B_1C_1}{B_3C_3}$, $\frac{A_1C_1}{A_3C_3}$ کیا یہ نسبتیں بھی مساوی ہیں، معلوم کیجیے۔

اس عملی کام سے یہ بات ذہن نشین کیجیے کہ جن مثلثوں کے نظیری زاویے مساوی پیمائش کے ہوتے ہیں، ان کے نظیری اضلاع کی نسبتیں بھی مساوی ہوتی ہیں۔ یعنی ان کے نظیری اضلاع یکساں تناسب میں ہوتے ہیں۔

ہم نے دیکھا کہ $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ میں اگر (i) $\angle A=\angle P$، $\angle B=\angle Q$، $\angle C=\angle R$ ہو تب (ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

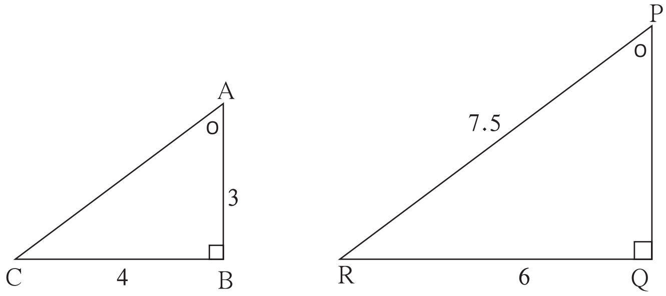
یعنی اگر نظیری زاویے مساوی ہوں تب نظیری اضلاع یکساں تناسب میں ہوتے ہیں۔ اس اصول کو تھوڑی محنت سے ثابت کر سکتے ہیں۔ ہم اسے کئی مثالوں میں استعمال کرنے والے ہیں۔

اسے دھیان میں رکھیں

- دو مثلثوں کے نظیری زاویے مساوی ہوں تب، وہ دونوں مثلث متشابہ ہوتے ہیں۔
- دو مثلث متشابہ ہوتے ہیں تب ان کے نظیری اضلاع تناسب میں ہوتے ہیں اور نظیری زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

مثال : شکل 3.57 میں $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ دکھائے ہوئے ہیں۔

ان دو مثلثوں میں دی ہوئی معلومات کا مشاہدہ کیجیے۔اس بناء پر جن کی لمبائی نہیں دی ہوئی ہو، ان اضلاع کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔



شکل 3.57

حل : ہر مثلث کے تمام داخلہ کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے۔

دی ہوئی معلومات کے مطابق،

$\angle A = \angle P$ اور $\angle B = \angle Q$ ، $\therefore\ \angle C = \angle R$

اس لیے $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ متشابۃ الزاویہ ہیں۔

$\therefore$ ان کے اضلاع یکساں تناسب میں ہیں۔

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

$$\therefore \frac{3}{PQ} = \frac{4}{6} = \frac{AC}{7.5}$$

$$\therefore\ 4 \times PQ = 18$$

$$\therefore\ PQ = \frac{18}{4} = 4.5$$

اسی طرح، $6 \times AC = 7.5 \times 4$

$$\therefore\ AC = \frac{7.5 \times 4}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

مشقی سیٹ 3.5

(1) اگر $\Delta XYZ \sim \Delta LMN$ ہو تب ان کے متماثل نظیری زاویے لکھیے اور نظیری اضلاع کی نسبتیں لکھیے۔

(2) $\triangle XYZ$ میں $XY = 4$ سم ، $YZ = 6$ سم ، $XZ = 5$ سم، اگر $\triangle XYZ \sim \triangle PQR$ اور $PQ = 8$ سم ہو تو $\triangle PQR$ کے بقیہ اضلاع کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

(3) متشابہ مثلثوں کی جوڑی کی کچی (رف) شکل بنائیے۔ مثلثوں کے نام دیجیے۔ ان کے نظیری زاویوں کو یکساں نشانات سے دکھائیے۔ اور مثلثوں کے نظیری اضلاع کی لمبائیوں کو تناسب میں بتانے والے اعداد سے ظاہر کیجیے۔

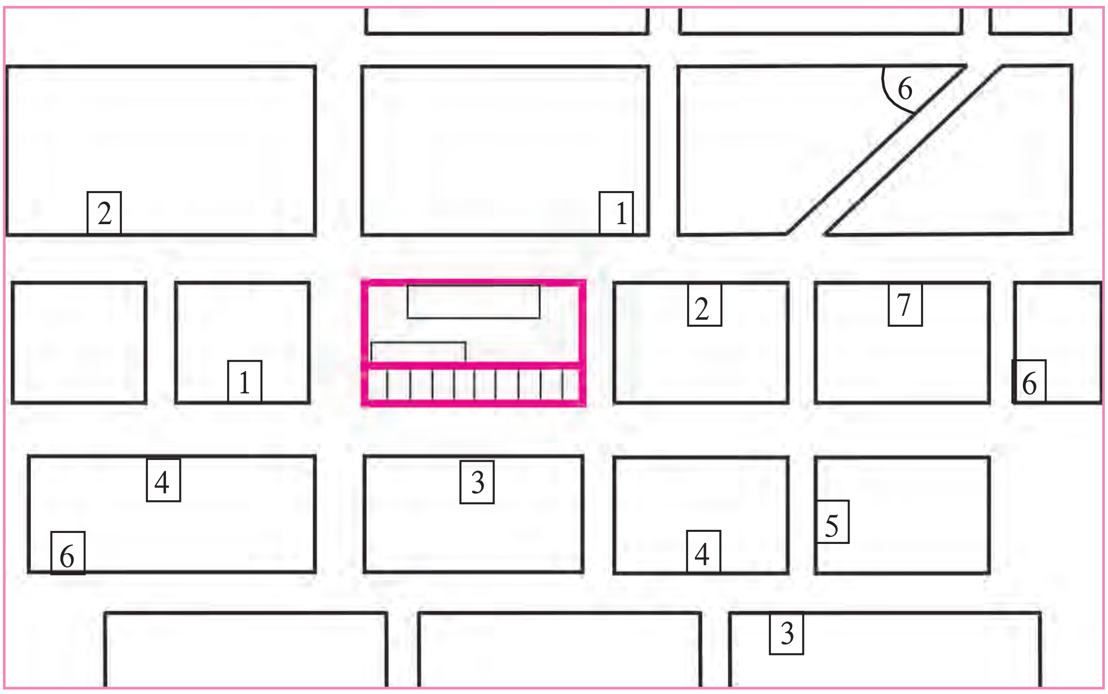
آیئے ذرا یاد کریں

آپ کو نقشہ بناتے وقت راستے پر فاصلہ مناسب پیمانے میں دکھانا ہے۔ جیسے 100 میٹر = 1 سم یا 50 میٹر = 1 سم۔

کیا آپ نے مثلث کی خصوصیت پر غور کیا؟ مثلث کے بڑے زاویے کے مقابل کا ضلع بڑا ہوتا ہے۔ ذرا یاد کیجیے۔

عملی کام :

آپ کے اسکول یا گھر کے اطراف کے 500 میٹر علاقہ کے راستے کا نقشہ تیار کرنا ہے۔ راستے کے دو مقام کے درمیان کا فاصلہ آپ کیسے ناپیں گے؟ عام طور پر 2 میٹر فاصلہ، آپ کتنے قدم چل کر طے کرتے ہیں؟ وہ دیکھیے۔ فرض کیجیے، دو میٹر فاصلہ میں تین قدم چلا جائے، تب اس تناسب سے 90 قدم یعنی 60 میٹر، اس طرح فرضی طور پر مقام طے کیجیے۔ مختصراً، اطراف کے تمام راستوں پر چل کر آپ کو مختلف فاصلے طے کرنا ہوگا۔ بعد میں جہاں راستے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں وہاں جو زاویہ بنتا ہے اس کی پیائش کا اندازہ لگایئے۔ راستے کی ناپی ہوئی لمبائی کے لیے مناسب پیمانہ لے کر نقشہ تیار کیجیے۔ اطراف کے دکانیں، چھوٹی دکانیں (ٹپریاں)، عمارتیں، بس اسٹینڈ، آٹو رکشا اسٹینڈ وغیرہ ظاہر کرنے کی کوشش کیجیے۔ ذیل میں نقشہ کا ایک نمونہ دیا ہوا ہے اور اس کی فہرست بھی دی ہوئی ہے۔



فہرست : 1. کتابوں کی دکان 2. بس اسٹینڈ 3. اسٹیشنری دکان 4. بینک
5. میڈیکل اسٹور 6. ہوٹل 7. سائیکل کی دکان

(1) ذیل میں دیے ہوئے کثیر متبادل سوالوں کے جواب میں سے صحیح جواب منتخب کیجیے۔

(i) ایک مثلث کے دو اضلاع 5 سم اور 1.5 سم ہوں تب مثلث کے تیسرے ضلع کی لمبائی .... نہیں ہوگی۔

(A) 3.7 سم (B) 4.1 سم (C) 3.8 سم (D) 3.4 سم

(ii) $\triangle PQR$ میں جب $\angle R > \angle Q$ ہو تو .... ہوگا۔

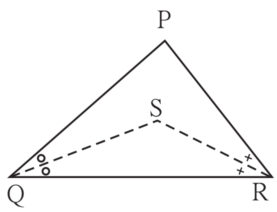
(A) $QR > PR$ (B) $PQ > PR$ (C) $PQ < PR$ (D) $QR < PR$

(iii) ΔTPQ میں $\angle T = 65°$، $\angle P = 95°$ ہو تب درج ذیل بیانات میں سے صحیح بیان کون سا ہے؟

(A) $PQ < TP$ (B) $PQ < TQ$ (C) $TQ < TP < PQ$ (D) $PQ < TP < TQ$

(2) $\triangle ABC$ متساوی الساقین مثلث ہے۔ جس میں $AB = AC$ ہے اور قطعہ BD اور CE دو وسطانیے ہیں تو دکھائیے کہ $BD = CE$

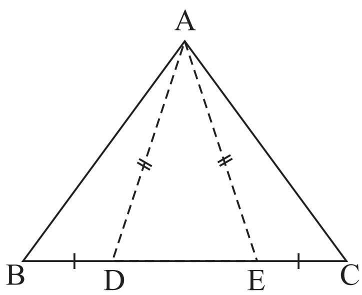
(3) $\triangle PQR$ میں اگر $PQ > PR$ ہے $\angle Q$ اور $\angle R$ کے ناصف ایک دوسرے کو نقطہ S پر قطع کرتے ہیں۔ تو دکھائیے کہ $SQ > SR$



شکل 3.58

(4) شکل 3.59 میں $\triangle ABC$ کے ضلع BC پر نقطہ D اور E نقاط اس طرح واقع ہیں کہ $BD = CE$، اسی طرح $AD = AE$ تو دکھائیے کہ

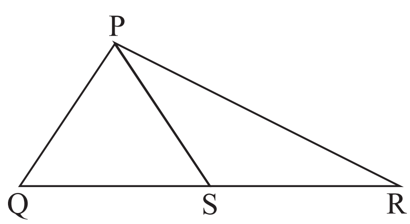
$$\triangle ABD \cong \triangle ACE$$



شکل 3.59

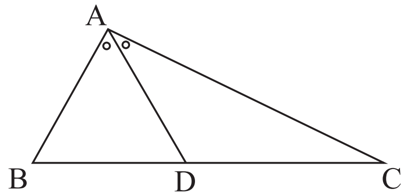
(5) شکل 3.60 میں $\triangle PQR$ کے ضلع QR پر نقطہ S کوئی ایک نقطہ ہے۔ ثابت کیجیے کہ

$$PQ + QR + RP > 2PS$$



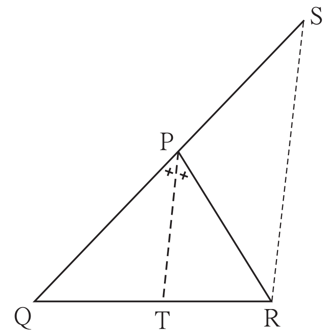
شکل 3.60

(6) شکل 3.61 میں $\triangle ABC$ کے $\angle BAC$ کا ناصف قطعہ BC کو نقطہ D پر قطع کرتا ہے۔ثابت کیجیے کہ $AB > BD$



شکل 3.61

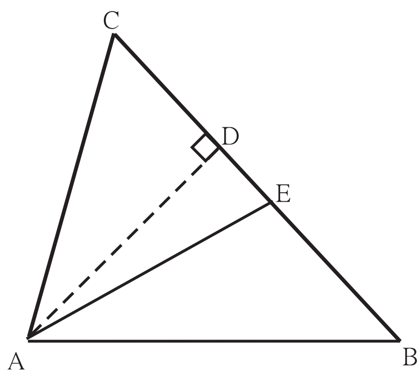
(7) شکل 3.62 میں قطعہ PT، یہ $\angle QPR$ کا ناصف ہے نقطہ R سے، قطعہ PT کے متوازی خط، شعاع QP کو نقطہ S پر قطع کرتا ہے۔تو ثابت کیجیے کہ $PS = PR$



شکل 3.62

(8) شکل 3.63 میں BC قطعہ $AD \perp$ قطعہ، قطعہ AE، یہ $\angle CAB$ کا ناصف ہے اور $E - D - C$ ہو تو دکھایئے کہ

$$m\angle DAE = \frac{1}{2}\,(m\angle C - m\angle B)$$



شکل 3.63

غور کیجیے

ہم نے سیکھا کہ دو مثلث متشابہ زاویہ ہوں تب اُن کے نظیری اضلاع یکساں تناسب میں ہوتے ہیں۔دو ذوار بعۃ الاضلاع متشابہ زاویہ ہوں تب کیا ان کے نظیری اضلاع یکساں تناسب میں ہوتے ہیں؟

مختلف شکلیں بنا کر تصدیق کیجیے۔

اس خصوصیت کو دیگر کثیر الاضلاع سے متعلق جانچیے۔

4 Constractions of triangles مثلث بنانا

BE66FP

آیئے ، سیکھیں

مثلث کے ارکان کی ذیل کے مطابق معلومات دی جائے تو مثلث بنانا۔

- قاعدہ، قاعدے کا کوئی ایک زاویہ اور بقیہ دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ
- قاعدہ، قاعدے کا کوئی ایک زاویہ اور باقی ماندہ دو اضلاع کی لمبائیوں کا فرق
- مثلث کا احاطہ اور قاعدے پر کے زاویے

آیئے ذرا یاد کریں

گزشتہ جماعت میں ہم نے ذیل کے مثلث بنانے کا عمل سیکھا ہے۔

★ تمام اضلاع کی لمبائی دی ہو تو مثلث بنانا۔

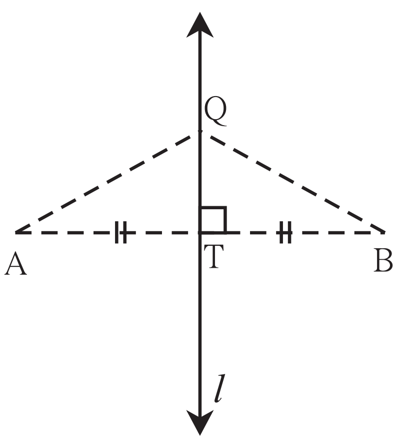
★ قاعدہ اور اسے شامل کرنے والے زاویے دیے ہوں تو مثلث بنانا۔

★ دو اضلاع اور ان میں شامل زاویہ دیا ہو تو مثلث بنانا۔

★ وتر اور ایک ضلع دیا ہو تو مثلث بنانا۔

عمودی ناصف کا مسئلہ :

- دیے ہوئے قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہر نقطہ، اس قطعہ خط کے اختتامی نقاط سے مساوی فاصلہ پر ہوتا ہے۔
- قطعہ خط کے اختتامی نقاط سے مساوی فاصلہ پر واقع ہر نقطہ، قطعہ خط کے سروں سے ہم فاصلہ ہوتا ہے۔



شکل 4.1

آیئے سمجھ لیں

(Construction of triangles) مثلث بنانا

مثلث کی بنانے کے لیے تین اہم ارکان کی ضرورت ہوتی ہے۔ تین زاویے اور تین اضلاع میں سے صرف 2 ارکان اور اس کے علاوہ اس مثلث کے تعلق سے کوئی معلومات دی جائے تب اس معلومات اور دیے ہوئے دو ارکان کا استعمال کر کے مثلث کس طرح بنایا جاتا ہے، اسے دیکھیں گے۔

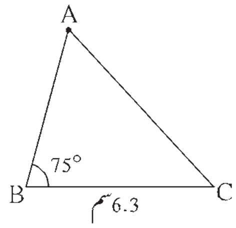
کوئی نقطہ، دو مختلف خطوط پر واقع ہوتو وہ نقطہ، ان خطوط کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے۔ اس خصوصیت کا ذیل کے ہندسی عمل میں کئی مرتبہ استعمال ہوا ہے۔

ہندسی عمل I

مثلث کا قاعدہ، قاعدہ پر کا ایک زاویہ اور باقی ماندہ دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ دیا ہو تو مثلث بنانا۔

مثال : ΔABC اس طرح بنائیے۔ جس میں سم $BC = 6.3$، $\angle B = 75°$ اور سم $AB+AC = 9$

حل : پہلے ہم مطلوبہ مثلث کی کچی شکل بنائیں گے۔



کچی شکل 4.2

وضاحت : کچی شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق سم $BC = 6.3$ کا قطعہ کھینچیے۔ نقطہ B پر قطعہ BC سے $75°$ زاویہ بنانے والی شعاع پر نقطہ D اس طرح لیجیے کہ سم $BD = AB + AC = 9$

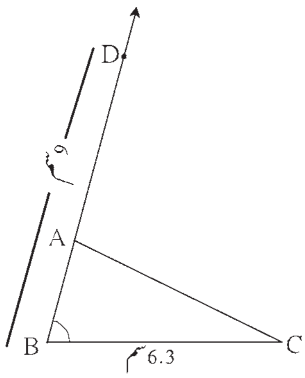
شعاع BD پر نقطہ A معلوم کرنا ہے۔

$$BA+AD = BA+AC = 9$$

$$\therefore\ AD = AC$$

$\therefore$ اس لیے نقطہ A، قطعہ CD کے عمودی ناصف پر ہے۔

اس لیے شعاع BD اور قطعہ CD کا عمودی ناصف کے نقطہ تقاطع یعنی A ہے۔



کچی شکل 4.3

ہندسی عمل کے مراحل :

(1) 6.3 سم لمبائی کا قطعہ BC کھینچیے۔

(2) نقطہ B سے $75°$ کا زاویہ بنانے والی شعاع BP کھینچیے۔

(3) شعاع BP، پر نقطہ D اس طرح لیجیے کہ سم $d(B, D) = 9$

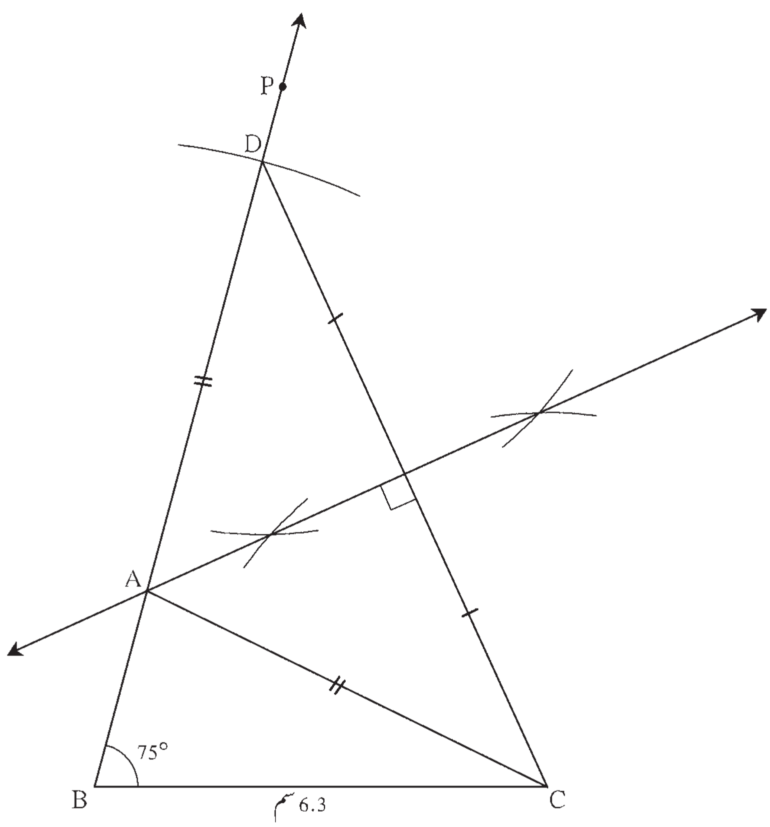
(4) قطعہ DC کھینچیے۔

(5) قطعہ DC کا عمودی ناصف کھینچیے۔

(6) قطعہ DC کا عمودی ناصف اور شعاع BP کے نقطہ تقاطع کو A نام دیجیے۔

(7) قطعہ AC کھینچیے۔

ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔



پکی شکل 4.4

مشقی سیٹ 4.1

.1 ΔPQR بنائیے۔جس میں $QR = 4.2$ سم قاعدہ، $m\angle Q = 40^\circ$ اور $PQ + PR = 8.5$ سم

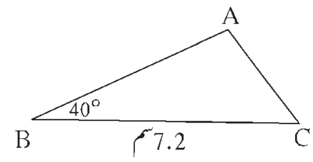
.2 ΔXYZ بنائیے۔جس میں $YZ = 6$ سم قاعدہ، $XY + XZ = 9$ سم اور $m\angle XYZ = 50^\circ$

.3 ΔABC بنائیے۔جس میں $BC = 6.2$ سم قاعدہ، $m\angle ACB = 50^\circ$ اور $AB+AC = 9.8$ سم

.4 ΔABC بنائیے۔جس میں $BC = 3.2$ سم قاعدہ، $m\angle ACB = 45^\circ$ اور ΔABC کا احاطہ 10 سم ہے۔

ہندسی عمل II

مثلث کا قاعدہ،باقی ماندہ دو اضلاع کی لمبائیوں کا فرق اور قاعدہ پر کا کوئی ایک زاویہ دیا ہوا ہو تو مثلث بنانا۔

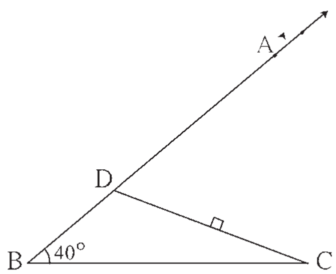


کچی شکل 4.5

مثال : ΔABC میں $BC = 7.5$ سم، $m\angle ACB = 40^\circ$،

$AB - AC = 3$ سم ہوتو ΔABC بنائیے۔

حل : پہلے ہم مطلوبہ شکل کی کچی شکل بنائیں گے۔



کچی شکل 4.6

وضاحت : $AB - AC = 3$ سم اس لیے $AB > AC$، قطعہ BC کھینچیے۔قطعہ BC سے 40° زاویہ بنانے والی شعاع BL کھینچیے۔اس شعاع پر نقطہ A معلوم کرنا ہے۔

نقطہ D شعاع BL پر اس طرح لیجیے کہ $BD = 3$ سم اور B–D–A

$BD = AB - AD = 3$ اور (دیا ہوا ہے) $AB - AC = 3$

$AD = AC$

اس لیے نقطہ A قطعہ DC کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔

اس لیے نقطہ A شعاع BL اور قطعہ DC کے عمودی ناصف کا نقطہ تقاطع ہے۔

ہندسی عمل کے مراحل :

(1) 7.5 سم لمبائی کا قطعہ BC کھینچیے۔

(2) نقطہ B سے 40° زاویہ بنانے والی شعاع BL کھینچیے۔

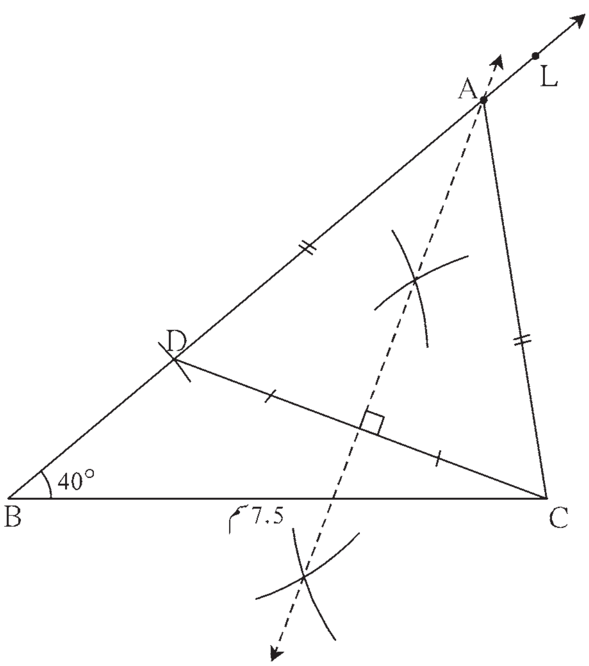
(3) شعاع BL پر نقطہ D اس طرح لیجیے کہ $BD = 3$ سم

(4) قطعہ CD پر اس کا عمودی ناصف کھینچیے۔

(5) قطعہ CD کا عمودی ناصف، شعاع BL کو جہاں قطع کرتا ہے، اس نقطہ کا نام A دیجیے۔

(6) قطعہ AC کھینچیے۔

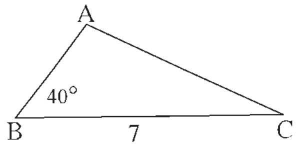
ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔



پکی شکل 4.7

مثال 2. ΔABC میں $BC = 7$ سم ضلع، $\angle B = 40^\circ$ اور $AC - AB = 3$ سم ہو تو ΔABC بنائیے۔

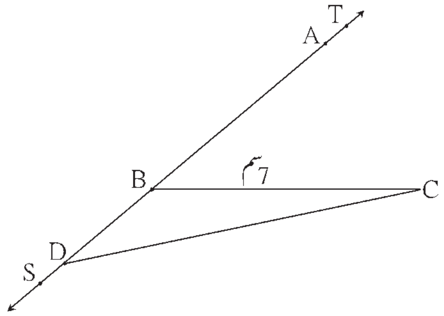
حل : کچی شکل بنائیں گے۔



کچی شکل 4.8

سم $BC = 7$ کھینچیے ۔ $AC > AB$

قطعہ BC کے نقطہ B سے 40° کا زاویہ بنانے والی شعاع BT کھینچ سکتے ہیں۔اس شعاع پر نقطہ A واقع ہے شعاع BT کی مخالف شعاع پر نقطہ D اس طرح لیجیے کہ سم $BD = 3$



کچی شکل 4.9

اب $AD = AB + BD = AB + 3 = AC$

کیونکہ دیا ہوا ہے۔ سم $AC - AB = 3$

$\therefore \quad AD = AC$

اس لیے نقطہ A قطعہ CD کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔

ہندسی عمل کے مراحل :

(1) 7 سم لمبائی کا قطعہ BC کھینچیے ۔

(2) نقطہ B سے 40° زاویہ بنانے والی شعاع BT کھینچیے ۔

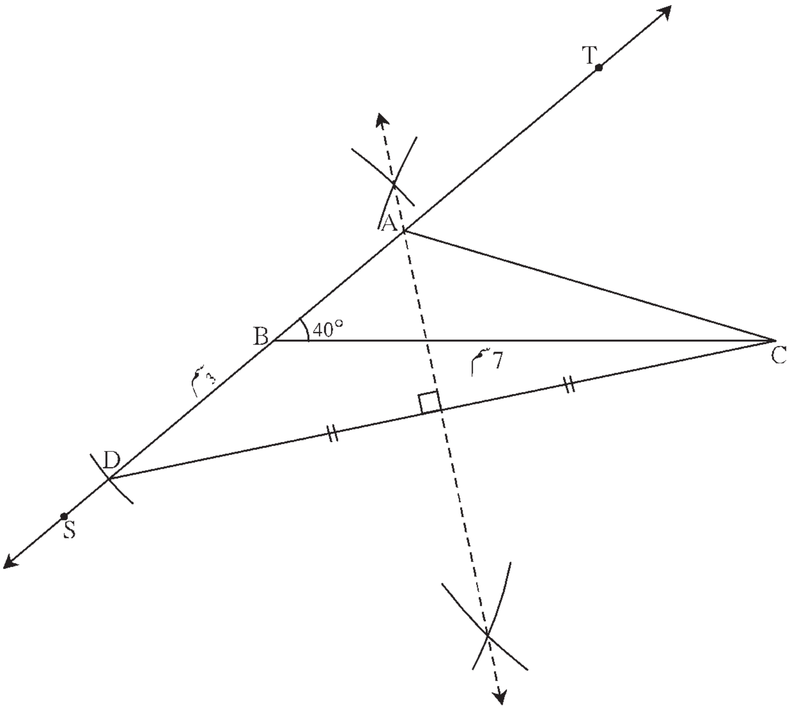
(3) شعاع BT کے مخالف شعاع BS پر نقطہ D اس طرح لیجیے کہ سم $BD = 3$

(4) قطعہ DC کا عمودی ناصف کھینچیے ۔

(5) قطعہ DC کا عمودی ناصف، شعاع BT کو جہاں قطع کرتا ہے، اس نقطہ کو A نام دیجیے۔

(6) قطعہ AC کھینچیے ۔

ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔



پکی شکل 4.10

مشقی سیٹ 4.2

1) ΔXYZ بنائیے۔جس میں سم $YZ = 7.4$ ، $m\angle XYZ=45^\circ$ اور سم $XY - XZ = 2.7$

2) ΔPQR بنائیے۔جس میں سم $QR = 6.5$ ، $m\angle PQR=40^\circ$ اور سم $PQ - PR = 2.5$

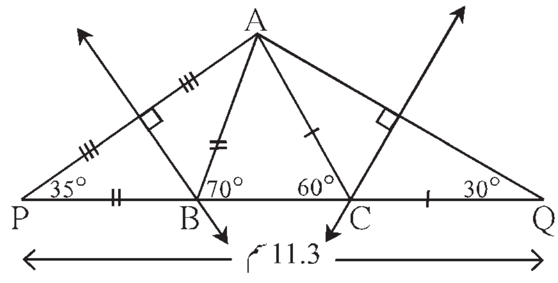
3) ΔABC بنائیے۔جس میں سم $BC = 6$ ، $m\angle ABC=100^\circ$ اور سم $AC - AB = 2.5$

ہندسی عمل III

مثلث کا احاطہ اور قاعدہ پر کے دونوں زاویے دیے ہوں تو مثلث بنانا۔

مثال : ΔABC میں $AB + BC + AC = 11.3$ سم، $\angle B = 70°$، $\angle C = 60°$ ہو تب ΔABC بنائیے۔

حل : کچی شکل بنائیں گے۔



کچی شکل 4.11

وضاحت : اس شکل میں قطعہ BC پر نقاط P اور Q اس طرح لیا کہ

$PB = AB,\ CQ = AC$

$PQ = PB + BC + CQ = AB + BC + AC = 11.3$ سم

اب ΔPAB میں، $PB = BA$ ..... (عمل)

$\therefore$ $\angle APB = \angle PAB$ اور $\angle APB + \angle PAB =$ ΔABC کا خارجہ زاویہ $= 70°$ ... (بعید داخلہ زاویوں کا مسئلہ)

$\therefore$ $\angle APB = \angle PAB = 35°$ اسی طرح , $\angle CQA = \angle CAQ = 30°$

اب مثلث ΔPAQ بنایا جاسکتا ہے کیونکہ اس کے دو زاویے اور ان کو شامل کرنے والا ضلع PQ معلوم ہے۔

پھر $BA = BP$، اس لیے نقطہ B قطعہ AP کے عمودی ناصف پر ہے۔ اور $CA = CQ$

اس لیے نقطہ C قطعہ AQ کے عمودی ناصف پر ہے۔

$\therefore$ AP اور AQ کے عمودی ناصف کھینچیے۔ یہ خط PQ کو جہاں قطع کرتے ہیں وہاں بالترتیب B اور C نقطہ حاصل ہوتا ہے۔

ہندسی عمل کے مراحل :

(1) 11.3 سم لمبائی کا قطعہ PQ کھینچیے۔

(2) نقطہ P پر 35° پیمائش کا زاویہ بنانے والی شعاع کھینچیے۔

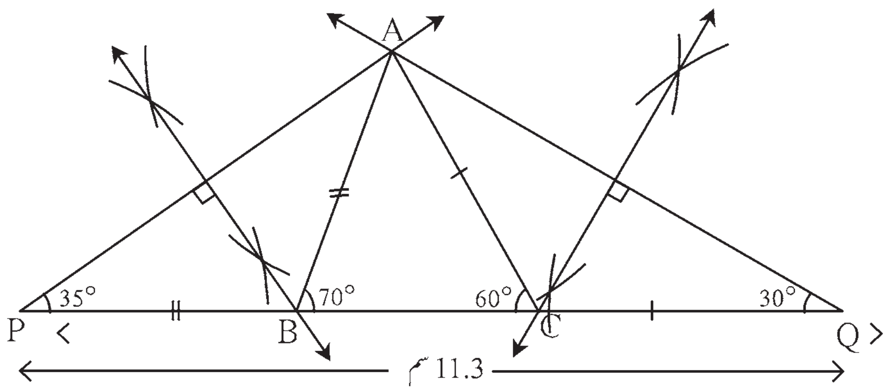
(3) نقطہ Q پر 30° پیمائش کا زاویہ بنانے والی شعاع کھینچیے۔

(4) دونوں شعاعوں کے نقطہ تقاطع کو A نام دیجیے۔

(5) قطعہ AP اور AQ کا عمودی ناصف کھینچیے۔ وہ خط PQ کو جن نقاط پر قطع کرتے ہیں انھیں بالترتیب B اور C نام دیجیے۔

(6) قطعہ AB اور قطعہ AC کھینچیے۔

ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔



پکی شکل 4.12

مشقی سیٹ 4.3

1. ΔPQR اس طرح بنائیے کہ $\angle Q = 70°$، $\angle R = 80°$ اور $PQ + QR + PR = 9.5$ سم
2. ΔXYZ اس طرح بنائیے کہ $\angle Y = 58°$، $\angle X = 46°$ اور مثلث کا احاطہ 10.5 سم ہے۔
3. ΔLMN اس طرح بنائیے کہ $\angle M = 60°$، $\angle N = 80°$ اور $LM + MN + NL = 11$ سم

مجموعہ سوالات 4

1. ΔXYZ اس طرح بنائیے کہ $XY + XZ = 10.3$ سم، $YZ = 4.9$ سم، $\angle XYZ = 45°$
2. ΔABC اس طرح بنائیے کہ $\angle B = 70°$، $\angle C = 60°$ اور $AB + BC + CA = 11.2$
3. ایسا مثلث بنائیے۔جس مثلث کا احاطہ 14.4 سم ہے اور جس کے اضلاع کی نسبت 2 : 3 : 4 ہے۔
4. ΔPQR اس طرح بنائیے کہ سم $PQ - PR = 2.4$ سم، $QR = 6.4$ سم اور $\angle PQR = 55°$

ITC Tools or Links

دیے ہوئے مثلث کو کمپیوٹر پر 'جیوجبرا' سافٹ ویئر کی مدد سے بنائیے اور لطف اٹھائیے۔ ہندسی عمل 3 کو سافٹ ویئر میں مختلف طریقوں سے بنا کر دکھایا گیا ہے۔اس طریقہ کا بھی عملی مطالعہ کیجیے۔

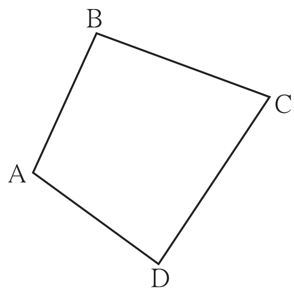
5 ذو اربعۃ الاضلاع Quadrilateral

BEF2HC

آیئے، سیکھیں

- متوازی الاضلاع
- مستطیل
- مثلث کے دو ضلعوں کے وسطی نقطہ کا مسئلہ
- متوازی الاضلاع کی کسوٹیاں
- مربع
- معین
- ذوزنقہ

آیئے ذرا یاد کریں



شکل 5.1

1. □ABCD سے متعلق درج ذیل جوڑیاں لکھیے۔

متواتر ضلعوں کی جوڑیاں

(1) .... ، .... (2) .... ، ....

(3) .... ، .... (4) .... ، ....

متواتر زاویوں کی جوڑیاں

(1) .... ، .... (2) .... ، ....

(3) .... ، .... (4) .... ، ....

مقابل کے ضلعوں کی جوڑیاں : (1) .... ، .... (2) .... ، ....

مقابل کے زاویوں کی جوڑیاں : (1) .... ، .... (2) .... ، ....

یاد کیجیے، میری قسمیں اور خصوصیت دیکھیے

میں ذو اربعۃ الاضلاع ہوں

- میری مقابل کے ضلعوں کی دونوں جوڑیاں متوازی
  - میری خصوصیت
    - مقابل کے ضلع متماثل ....
    - مقابل کے زاویے ....
    - وتر ....
- میرے تمام زاویے قائمہ
  - میری خصوصیت
    - مقابل کے ضلع ....
    - وتر ....
- میرے تمام اضلاع مساوی لمبائی کے
  - میری خصوصیت
    - مقابل کے زاویے ....
    - وتر ....
- میرے تمام زاویے مساوی تمام ضلعے مساوی
  - میری خصوصیت
    - وتر ....
- میرے مقابل کے ضلعوں کی ایک جوڑی متوازی ہے۔

ذواربعۃ الاضلاع کی مختلف قسمیں اوران کی خصوصیات آپ کو معلوم ہیں۔ضلعے اور زاویے کی پیمائش کرنا، تہہ کرنا، جیسے عملی کام کے ذریعے انھیں آپ سمجھ چکے ہیں۔تو اب ہم مطالعہ کریں گے کہ یہ خصوصیت منطق سے کس طرح ثابت کرتے ہیں۔

کسی خصوصیت کو منطق سے ثابت کرتے ہیں تب اس خصوصیت کو مسئلہ کہتے ہیں۔

مستطیل، معین اور مربع یہ مخصوص متوازی الاضلاع ہیں۔کس طرح، یہ اس سبق کے مطالعہ سے آپ سمجھ جائیں گے، اس لیے مطالعہ کی شروعات ہم متوازی الاضلاع سے کریں گے۔

آیئے سمجھ لیں

متوازی الاضلاع (Parallelogram)

جس ذواربعۃ الاضلاع مقابل کے ضلعوں کی دونوں جوڑیاں متوازی ہوتی ہیں۔اس ذواربعۃ الاضلاع کو متوازی الاضلاع کہتے ہیں۔

مسئلہ ثابت کرتے وقت، مثالیں حل کرتے وقت، اس ذواربعۃ الاضلاع کی شکل بار بار بنانا ہوتی ہے۔لہٰذا اس شکل کو کس طرح بنایا جا سکتا ہے اس پر غور کریں گے۔

فرض کیجیے ہمیں ABCD□، متوازی الاضلاع بنانا ہے۔

طریقہ I :

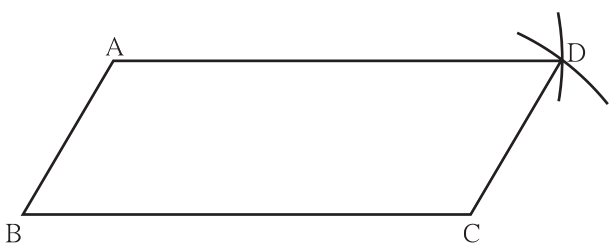
- پہلے AB اور BC کوئی بھی لمبائی کے اور ایک دوسرے سے کوئی بھی پیمائش کا زاویہ بنانے والے قطعہ خط کھینچیے۔
- اب قطعہ AD اور قطعہ BC متوازی ہونا چاہیے۔اس لیے نقطہ A سے قطعہ BC کے متوازی خط کھینچیے۔

شکل 5.2

- اسی طرح DC قطعہ ‖ AB قطعہ، اس لیے نقطہ C سے قطعہ AB کے متوازی خط کھینچیے۔دونوں خط جس نقطہ پر قطع کرتے ہیں، وہ نقطہ D ہے۔لہٰذا اس طرح بننے والا ذواربعۃ الاضلاع ABCD، متوازی الاضلاع ہے۔

طریقہ II :

- قطعہ AB اور قطعہ BC کوئی بھی لمبائی کے ایک دوسرے سے کسی بھی پیمائش کا زاویہ بنانے والے قطعات کھینچیے۔
- کمپاس میں BC فاصلہ لے کر اور نقطہ A کو مرکز مان کر ایک قوس کھینچیے۔



شکل 5.3

- کمپاس میں AB فاصلہ لے کر اور نقطہ C کو مرکز مان کر پہلے قوس کو قطع کرنے والا قوس کھینچیے۔
- قوسین کے نقطہ تقاطع کو D نام دیجیے۔قطعہ AD اور قطعہ CD بنایئے۔اس طرح بننے والا ABCD□ متوازی الاضلاع ہے۔

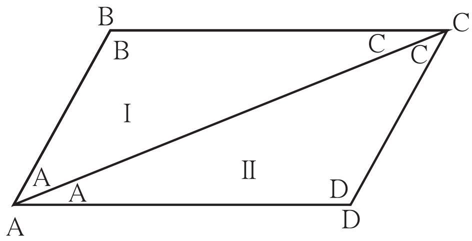
دوسرے طریقہ سے کھینچا گیا ذواربعۃ الاضلاع ہم نے مقابل کے ضلعے مساوی والا ذواربعۃ الاضلاع کھینچا ہے۔ اس کا مقابل کا ضلع متوازی کیوں آتا ہے۔ یہ ایک مسئلہ کے ثبوت سے آپ کو سمجھ میں آجائے گا۔

عملی کام I : متواتر ضلعے مختلف لمبائی کے اور ان کا درمیانی زاویہ مختلف پیمائشوں کا لے کر پانچ مختلف متوازی الاضلاع بنائیے۔

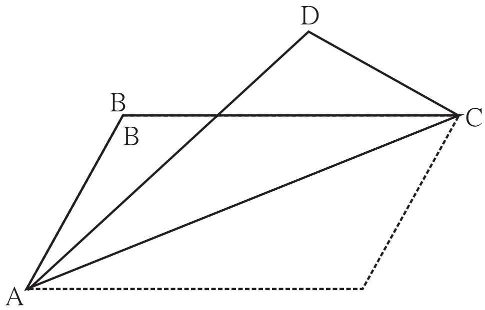
متوازی الاضلاع کے مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے متماثل مثلثوں کا استعمال کرتے ہیں۔ اسے کس طرح استعمال میں لایا جائے، اسے سمجھنے کے لیے درج ذیل عمل کیجیے۔

عملی کام II

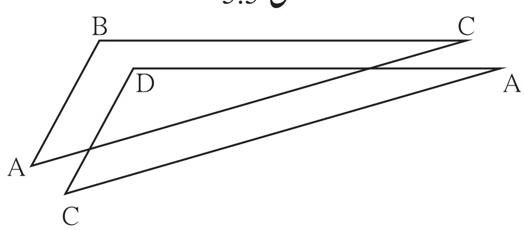
- ایک موٹے کاغذ پر □ABCD متوازی الاضلاع بنائیے۔ اس کا وتر AC بنائیے۔ شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق راسوں کے نام ذواربعۃ الاضلاع کے اندر ہی لکھیے۔
- وتر AC پر تہہ کرکے دیکھیے کہ △ADC اور △CBA ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔
- □ABCD اس کے AC وتر پر کاٹ کر △ADC اور △CBA علیحدہ کیجیے۔ △CBA کو پلٹ کر دیکھیے کہ وہ کیا △ADC پر منطبق ہوتا ہے۔



شکل 5.4



شکل 5.5



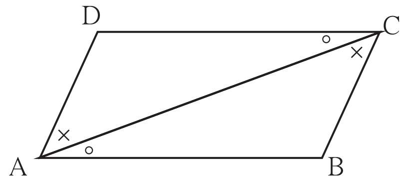
شکل 5.6

کیا دکھائی دیا؟ △CBA کا کون سا ضلع △ADC کے کون سے ضلع پر منطبق ہوا؟ △CBA کا کون سا زاویہ △ADC کے کون سے زاویے پر منطبق ہوا۔

ضلع DC، ضلع BC پر اور ضلع AD، ضلع BC پر منطبق ہوتا ہے۔ اسی طرح ∠B، ∠D پر منطبق ہوتا ہے۔

یعنی ایسا دکھائی دیتا ہے کہ متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعے اور مقابل کے زاویے متماثل ہیں۔ آیئے متوازی الاضلاع کی اس خصوصیت کو ہم ثابت کریں۔

مسئلہ **1.** متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلع متماثل ہوتے ہیں اور مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔



شکل 5.7

دیا ہوا ہے : □ABCD متوازی الاضلاع ہے۔ اس لیے

ضلع AD ∥ ضلع BC ، ضلع AB ∥ ضلع DC

ثابت کرنا ہے : قطعہ BC ≅ قطعہ AD ، قطعہ AB ≅ قطعہ DC ،

$\angle ADC \cong \angle CBA$ اور $\angle DAB \cong \angle BCD$

ہندسی عمل : وتر AC کھینچیے ۔

ثبوت : ضلع AB ∥ ضلع DC اور وتر AC تقاطع ہے۔

$\therefore \angle DCA \cong \angle BAC$ ...... (1)

اور $\angle DAC \cong \angle BCA$ ...... (2)

} .... متبادلہ زاویے

اب، △ADC اور △CBA میں،

$\angle DAC \cong \angle BCA$ ... [بیان (2) کی بناء پر]

$\angle DCA \cong \angle BAC$ ... [بیان (1) کی بناء پر]

ضلع AC ≅ ضلع CA ... (مشترک ضلع)

$\therefore \Delta ADC \cong \Delta CBA$ ... (زا-ضل-زا کی آزمائش)

∴ ضلع AD ≅ ضلع CB ... (متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع)

اور ضلع DC ≅ ضلع AB ... (متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع)

اسی طرح، $\angle ADC \cong \angle CBA$ ... (متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے)

اسی طرح $\angle DAB \cong \angle BCD$ ... (ثابت کر سکتے ہیں)

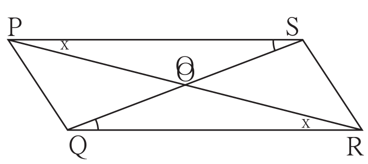
غور کیجیے

مذکورہ بالا کی طرح $\angle DAB \cong \angle BCD$ ثابت کرنے کے لیے ہندسی عمل میں کیا کچھ تبدیلی کرنا پڑے گی؟ وہ تبدیلی کر کے کس طرح ثبوت لکھا جائے گا؟

متوازی الاضلاع کی مزید ایک خصوصیت سمجھنے کے لیے ذیل کا عملی کام کیجیے۔

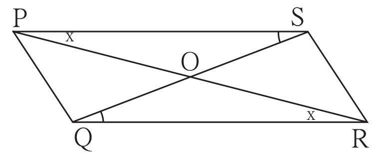
عملی کام : □PQRS کوئی بھی ایک متوازی الاضلاع بنائیے۔ وتر PR اور وتر QS کھینچ کر ان کے نقطۂ تقاطع کو O نام دیجیے۔

ہر وتر کے بننے والے دو حصوں کی لمبائیوں کا موازنہ تقسیم کار (Divider) کی مدد سے کیجیے۔ آپ کو کیا دکھائی دیا؟



شکل 5.8

مسئلہ 2. متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔



شکل 5.9

دیا ہوا ہے : □PQRS متوازی الاضلاع ہے۔

وتر PR اور وتر QS ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : قطعہ RO ≅ قطعہ PO، قطعہ QO ≅ قطعہ SO،

ثبوت : △POS اور △ROQ میں،

$\angle OPS \cong \angle ORQ$ ... (متبادلہ زاویے)

قطعہ PS ≅ قطعہ RQ ... (متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعے)

$\angle PSO \cong \angle RQO$ ... (متبادلہ زاویے)

$\therefore\ \Delta POS \cong \Delta ROQ$ ... (زا-ضل-زا کی آزمائش)

∴ قطعہ PO ≅ قطعہ RO ...

اور , قطعہ SO ≅ قطعہ QO ...

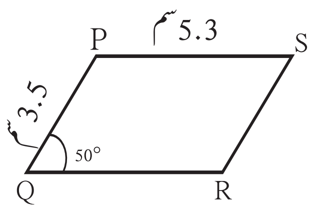
} ... (متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع)

اسے دھیان میں رکھیں

- متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعے متماثل ہوتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

حل کردہ مثالیں :

مثال 1 : □PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے۔ PQ = 3.5 سم، PS = 5.3 سم، ∠Q = 50° ہو تو □PQRS کے دیگر اضلاع کی لمبائیاں اور زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 5.10

حل : □PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے۔

$\therefore\ \angle Q + \angle P = 180°$ ... (داخلہ زاویے)

$\therefore\ 50° + \angle P = 180°$

$\therefore\ \angle P = 180° - 50° = 130°$

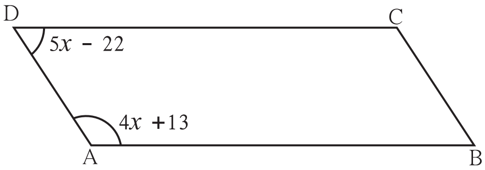
اب, $\angle P = \angle R$ اور , $\angle Q = \angle S$ ... (متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویے)

$\therefore\ \angle R = 130°$ اور, $\angle S = 50°$

اسی طرح, $PS = QR$ اور, $PQ = SR$ ... (متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعے)

$\therefore\ QR = 5.3$ اور, $SR = 3.5$

مثال 2 : $\square ABCD$ ایک متوازی الاضلاع ہے۔ $\square ABCD$ میں $\angle A = (4x + 13)^\circ$ ، $\angle D = (5x - 22)^\circ$ ہوتب $\angle B$ اور $\angle C$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 5.11

حل : متوازی الاضلاع کے متواتر زاویے متمم ہوتے ہیں۔

یہاں $\angle A$ اور $\angle D$ متواتر زاویے ہیں۔

$$\therefore (4x + 13)^\circ + (5x - 22)^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore 9x - 9 = 180$$

$$\therefore 9x = 189$$

$$\therefore x = 21$$

$$\therefore \angle A = 4x + 13 = 4 \times 21 + 13 = 84 + 13 = 97^\circ \quad , \therefore \angle C = 97^\circ$$

$$\angle D = 5x - 22 = 5 \times 21 - 22 = 105 - 22 = 83^\circ \quad , \therefore \angle B = 83^\circ$$

مشقی سیٹ 5.1

.1 متوازی الاضلاع $\square WXYZ$ کے وتر نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ $m\angle XYZ = 135^\circ$ ہوتب $m\angle XWZ = ?$ ، $m\angle YZW = ?$ اگر $l(OY) = 5$ سم ہوتب $l(WY) = ?$

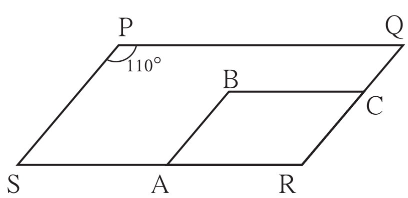
.2 متوازی الاضلاع $\square ABCD$ میں $\angle A = (3x + 12)^\circ$ ، $\angle B = (2x - 32)^\circ$ ہوتب x کی قیمت معلوم کیجیے۔اس کی مدد سے $\angle C$ اور $\angle D$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

.3 ایک متوازی الاضلاع کا احاطہ 150 سم ہے اور ایک ضلع دوسرے ضلع سے 25 سم بڑا ہے تو اس متوازی الاضلاع کے تمام ضلعوں کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

.4 ایک متوازی الاضلاع کے متواتر دو زاویوں کی نسبت 1 : 2 ہے تو اس متوازی الاضلاع کے تمام زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

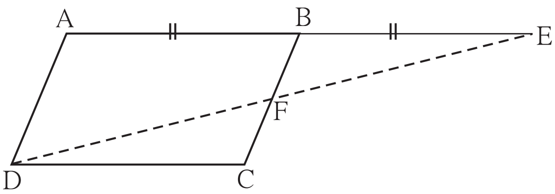
.5 متوازی الاضلاع $\square ABCD$ کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ $AO = 5$ ، $BO = 12$ اور $AB = 13$ ہوتب دکھائیے کہ $\square ABCD$ معین ہے۔

.6 شکل 5.12 میں $\square PQRS$ اور $\square ABCR$ ، یہ دونوں متوازی الاضلاع ہیں۔ $\angle P = 110^\circ$ ہوتب $\square ABCR$ کے تمام زاویوں کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 5.12

7. ABCD□ متوازی الاضلاع ہے۔ شعاع AB پر نقطہ E اس طرح ہے کہ BE = AB تب ثابت کیجیے کہ خط ED، قطعہ BC کو نقطہ F پر تنصیف کرتا ہے۔



شکل 5.13

متوازی خطوط کی آزمائشیں

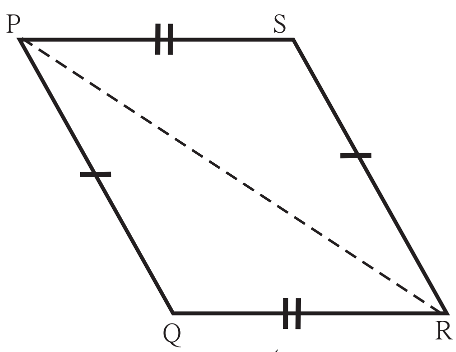
1. دو خطوط کو ایک تقاطع قطع کرتا ہے تو بننے والے نظیری زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہوتی ہے، تب وہ دونوں خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔
2. دو خطوط کو ایک تقاطع قطع کرتا ہے تو بننے والے متبادلہ زاویوں کی ایک جوڑی متماثل ہوتی ہے، تب وہ دونوں خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔
3. دو خطوط کو ایک تقاطع قطع کرتا ہے اور اگر داخلہ زاویوں کی ایک جوڑی متمم ہو تب وہ دونوں خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

متوازی الاضلاع کی آزمائشیں (Test for Parallelogram)

فرض کیجیے PQRS□ میں PS = QR اور PQ = SR ہے۔
PQRS□ متوازی الاضلاع ثابت کرنا ہے۔ اس کے لیے ہمیں بتانا ہوگا کہ ذوا ربعۃ الاضلاع کے ضلعوں کی کون سی جوڑیاں متوازی ہیں؟
اس کے لیے متوازی خطوط کی کون سی آزمائش کا استعمال کرنا سودمند ہوگا؟
آزمائش کے لیے ضروری زاویے حاصل کرنے کے لیے کون سے خط کو تقاطع کے طور پر لینا سہولت بخش ہوگا۔

شکل 5.14

مسئلہ : ذوا ربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویوں کی جوڑیاں متماثل ہوتی ہیں تب وہ ذوا ربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔



شکل 5.15

دیا ہوا ہے : PQRS□ میں،
ضلع PS ≅ ضلع QR
ضلع PQ ≅ ضلع SR

ثابت کرنا ہے : PQRS□ متوازی الاضلاع ہے۔

ہندسی عمل : وتر PR کھینچیے۔

ثبوت : △SPR اور △QRP میں،

ضلع SP ≅ ضلع QR ... (دیا ہوا ہے)
ضلع SR ≅ ضلع QP ... (دیا ہوا ہے)
ضلع PR ≅ ضلع RP ... (مشترک ضلع)
∴ Δ SPR ≅ Δ QRP ... (ضل ضل ضل آزمائش)

$\therefore \angle SPR \cong \angle QRP$ ... (متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے)

اسی طرح، $\angle PRS \cong \angle RPQ$ ... (متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے)

$\angle SPR$ اور $\angle QRP$ یہ قطعہ PS اور قطعہ QR کے تقاطع خط PR سے بننے والے متبادلہ زاویے ہیں۔

$\therefore$ ضلع PS $\parallel$ ضلع QR ... (I) ... (متوازی خطوط کی متبادلہ زاویوں کی آزمائش)

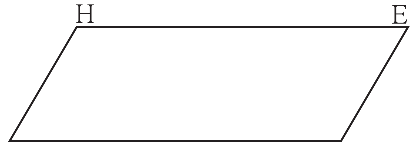
اسی طرح $\angle PRS$ اور $\angle RPQ$، یہ قطعہ PQ اور قطعہ SR کے تقاطع خط PR کی وجہ سے بننے والے متبادلہ زاویے ہیں۔

$\therefore$ ضلع PQ $\parallel$ ضلع SR ... (II) ... (متوازی خطوط کی متبادلہ زاویوں کی آزمائش)

$\therefore$ I اور II بیان کی بنا پر $\square$PQRS متوازی الاضلاع ہے۔

متوازی الاضلاع بنانے کے دو طریقے ابتدا میں دیے ہوئے ہیں۔ دوسرے طریقے میں مقابل کے ضلع مساوی والا ذو اربعۃ الاضلاع بنایا گیا ہے۔ ایسا ذو اربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع کیوں ہوتا ہے، کیا اب سمجھ میں آیا؟

مسئلہ 3 : ذو اربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویوں کی جوڑیاں متماثل ہوتی ہیں تب وہ متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔ درج ذیل دیے ہوئے دعویٰ کو ثابت کرنا ہے اور ثبوت میں خالی جگہ پُر کیجیے۔



شکل 5.16

دیا ہوا ہے : $\square$EFGH میں $\angle E \cong \angle G$ اور

$\angle .... \cong \angle ....$

ثابت کرنا ہے : $\square$EFGH ....

ثبوت : فرض کیجیے، $m\angle E = m\angle G = x$ اور $m\angle H = m\angle F = y$

ذو اربعۃ الاضلاع کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ .... ہوتا ہے۔

$\therefore \quad m\angle E + m\angle G + m\angle H + m\angle F = ...$

$\therefore \quad x + ... + y + ... = ...$

$\therefore \quad \square x + \square y = ...$

$\therefore \quad x + y = 180^\circ$

$\therefore \quad \angle G + \angle H = ...$

قطعہ HE اور قطعہ HG کو تقاطع خط HG کے ذریعے قطع کرنے سے $\angle G$ اور $\angle H$ یہ داخلہ زاویے بن گئے ہیں۔

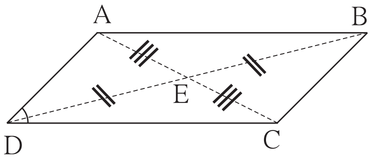
$\therefore$ ضلع HE $\parallel$ ضلع GH ... (I) ... (متوازی خطوط کے داخلہ زاویوں کی آزمائش)

اسی طرح، $m\angle G + m\angle F = ...$

$\therefore$ ضلع .... $\parallel$ ضلع .... (II) ... (متوازی خطوط کے داخلہ زاویوں کی آزمائش)

$\therefore$ (I) اور (II) کی بناء پر $\square$EFGH .... ہے۔

مسئلہ : ذواربعۃ الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہوں تب وہ ذواربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔



شکل 5.16

دیا ہوا ہے : ABCD□ کے وتر ایک دوسرے کی نقطہ E پر تنصیف کرتے ہیں۔

یعنی قطعہ CE ≅ قطعہ AE اور قطعہ DE ≅ قطعہ BE

ثابت کرنا ہے : ABCD□ متوازی الاضلاع ہے۔

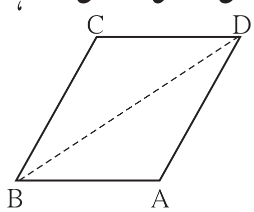
ثبوت : درج ذیل سوالوں کے جواب تلاش کیجیے اور ثبوت آپ خود لکھیے۔

1. قطعہ DC ∥ قطعہ AB، ثابت کرنے کے لیے متبادلہ زاویوں کی کون سی جوڑی متماثل دکھانا ہوگی؟
   متبادلہ زاویوں کی وہ جوڑی کس تقاطع سے حاصل ہوگی؟
2. متبادلہ زاویوں کی منتخب کی گئی جوڑی میں زاویے کون کون سے مثلثوں کے زاویے ہیں؟
3. اُن میں سے کون کون سے مثلث کس آزمائش سے متماثل ہوتے ہیں؟
4. اسی طرح غور کرکے بتائیے کہ کیا قطعہ BC ∥ قطعہ AD ثابت کیا جاسکتا ہے؟

کسی ذواربعۃ الاضلاع کو متوازی الاضلاع ثابت کرنا ہو تب اوپر دیا ہوا مسئلہ استعمال کیا جاسکتا ہے۔اس لیے ان مسئلوں کو متوازی الاضلاع کی آزمائش کہتے ہیں۔

مزید ایک مسئلہ متوازی الاضلاع کی آزمائش کے طور پر استعمال کرتے ہیں۔

مسئلہ : ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے اضلاع کی ایک جوڑی متماثل اور متوازی ہو تب وہ ذواربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔



شکل 5.18

دیا ہوا ہے : ABCD□ میں قطعہ DA ≅ قطعہ CB اور

قطعہ DA ∥ قطعہ CB

ثابت کرنا ہے : ABCD□ متوازی الاضلاع ہے۔

ہندسی عمل : وتر BD کھینچیے۔

ذیل میں دیے ہوئے ثبوت کو آپ تفصیل کے ساتھ لکھیے۔

(ضل زاضل آزمائش) ... △CBD ≅ △ADB

(متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے) ... ∴ ∠CDB ≅ ∠ABD

(متوازی خطوط کی متبادلہ زاویوں کی آزمائش) ... ∴ قطعہ CD ∥ قطعہ BA

اسے دھیان میں رکھیں

★ جس ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویوں کی جوڑیاں متماثل ہوتی ہیں تب وہ ذواربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔

★ جس ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے اضلاع کی جوڑیاں متماثل ہوتی ہیں تب وہ ذواربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔

★ جس ذواربعۃ الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں وہ ذواربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔

★ جس ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے اضلاع کی ایک جوڑی متماثل اور متوازی ہوتی ہے،تب وہ ذواربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔

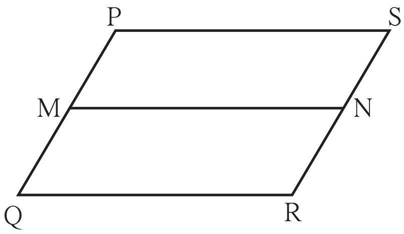
ان مسئلوں کو متوازی الاضلاع کی آزمائشیں کہتے ہیں۔

غور کیجیے

بیاض میں چھپے ہوئے خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔ان خطوط کا استعمال کرکے کوئی ایک متوازی الاضلاع کس طرح بنایا جاسکتا ہے؟

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) □PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے۔ضلع PQ کا وسطی نقطہ M اور ضلع RS کا وسطی نقطہ N ہے۔تب ثابت کیجیے □PMNS اور □MQRN متوازی الاضلاع ہیں۔



شکل 5.19

دیا ہوا ہے : □PQRS متوازی الاضلاع ہے۔ضلع PQ اور ضلع RS کے بالترتیب M اور N وسطی نقاط ہیں۔

ثابت کیجیے کہ : □PMNS متوازی الاضلاع ہے۔

□MQRN متوازی الاضلاع ہے۔

ثبوت : ضلع SR ∥ ضلع PQ

(I) ... $(\because P-M-Q\ ;\ S-M-Q)$ ∴ ضلع SN ∥ ضلع PM

اسی طرح ، ضلع SR = ضلع PQ

∴ $\frac{1}{2}$ ضلع PQ = $\frac{1}{2}$ ضلع SR

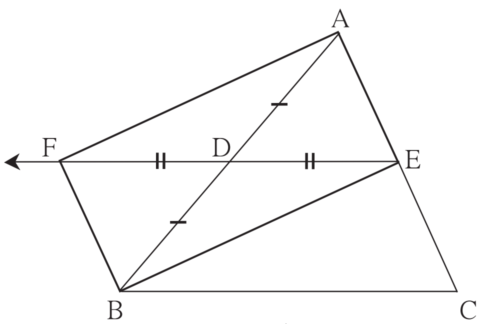
(II) ... (∵ M اور N وسطی نقاط ہیں۔) ... ∴ ضلع SN = ضلع PM

∴ (I) اور (II) کی بناء پر □PMNQ متوازی الاضلاع ہے۔

اسی طرح، □MQRN متوازی الاضلاع ثابت کیا جاسکتا ہے۔

مثال (2) △ABC کے ضلع AB اور ضلع AC کے بالترتیب D اور E وسطی نقاط ہیں۔شعاع ED پر نقطہ F اس طرح ہے کہ ED = DF تو ثابت کیجیے کہ □AFBE متوازی الاضلاع ہے۔

اس مثال میں دیا ہوا ہے اور ثابت کرنا ہے یہ آپ لکھیے اور ثبوت میں دی ہوئی خالی جگہ پُر کر کے اسے مکمل کیجیے۔



شکل 5.20

دیا ہوا ہے : ....

ثابت کرنا ہے : ....

ثبوت : قطعہ AB اور قطعہ EF، یہ □AFBE کے [   ] ہیں۔

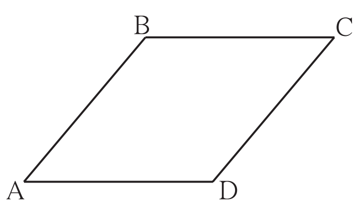
قطعہ AD ≅ قطعہ DB ....([   ])

(ہندسی عمل) ... قطعہ [   ] ≅ قطعہ [   ]

∴ □AFBE کے وتر ایک دوسرے کی [   ]

∴ [   ] آزمائش سے □AFBE متوازی الاضلاع ہے۔

مثال (3) ثابت کیجیے کہ کوئی بھی معین، متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔



شکل 5.21

دیا ہوا ہے : □ABCD ایک معین ہے۔

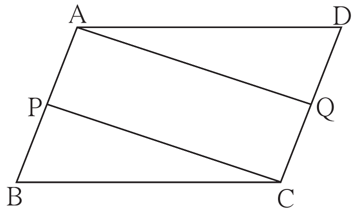
ثابت کرنا ہے : □ABCD متوازی الاضلاع ہے۔

ثبوت : (دیا ہوا ہے) ... ضلع AB = ضلع BC = ضلع CD = ضلع DA

∴ ضلع AB = ضلع CD اور ضلع BC = ضلع DA

∴ □ABCD متوازی الاضلاع ہے۔ ... (متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعوں کی آزمائش)

مشقی سیٹ 5.2

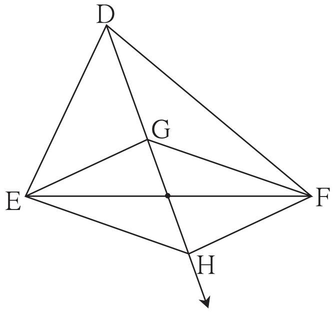


شکل 5.22

.1 شکل 5.22 میں، ABCD□ متوازی الاضلاع ہے۔
نقطہ P اور نقطہ Q بالترتیب ضلع AB اور ضلع DC کے وسطی نقاط ہیں تو ثابت کیجیے APCQ□ متوازی الاضلاع ہے۔

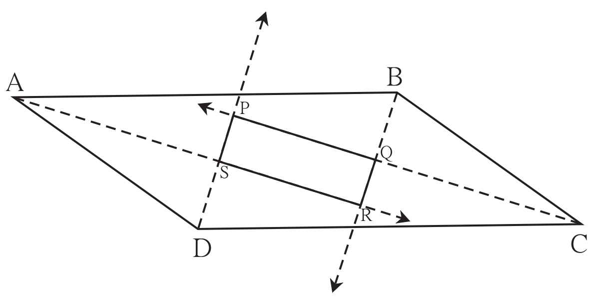
.2 کوئی بھی مستطیل متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔ اسے ثابت کیجیے۔

.3 شکل 5.23 میں، نقطہ G، یہ △DEF کا ہندسی مرکز ہے۔ شعاع DG پر نقطہ H اس طرح ہے کہ D – G –H اور DG = GH تو
ثابت کیجیے : GEHF□ متوازی الاضلاع ہے۔



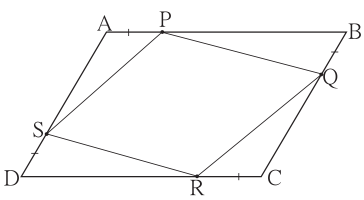
شکل 5.23

*4. ثابت کیجیے کہ متوازی الاضلاع کے چاروں زاویوں کے ناصفوں سے بننے والا ذواربعۃ الاضلاع مستطیل ہوتا ہے۔ (شکل 5.24)



شکل 5.24

.5 متصلہ شکل 5.25 میں ABCD□، متوازی الاضلاع کے اضلاع
پر P، Q، R، S نقاط اس طرح ہیں کہ
AP = BQ = CR = DS تو ثابت کیجیے کہ
PQRS□ متوازی الاضلاع ہے۔



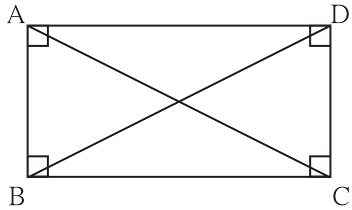
شکل 5.25

آیئے سمجھ لیں

مستطیل، معین اور مربع کی مخصوص خصوصیات (Properties of rectangle, rhombus and Square)

مستطیل، معین اور مربع یہ متوازی الاضلاع ہی ہوتے ہیں۔ اس کی وجہ سے مقابل کے ضلع مساوی ہونا، مقابل زاویے مساوی ہونا اور وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرنا یہ خصوصیت تینوں قسم کے ذواربعۃ الاضلاع میں ہوتی ہے۔

لیکن اس کے علاوہ کچھ زائد خصوصیت ہر قسم کے ذواربعۃ الاضلاع میں ہوتی ہیں۔ آیئے اس پر غور کرتے ہیں۔ ان خصوصیات کا ثبوت آگے مختصراً دیا ہوا ہے۔ دیے ہوئے مراحل کو دھیان میں رکھ کر اس ثبوت کو آپ تفصیل کے ساتھ لکھیے۔



شکل 5.26

مسئلہ : مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : $\square$ABCD مستطیل ہے۔

ثابت کرنا ہے : وتر BD $\cong$ وتر AC

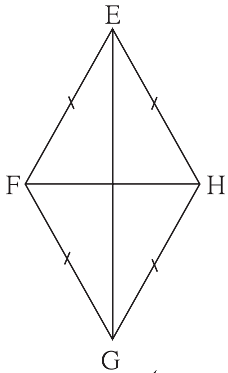
ثبوت : مختصر اً دیے ہوئے ثبوت کو وجوہات کے ساتھ مکمل کیجیے۔

Δ ADC $\cong$ Δ DAB ... (ضل زاضل آزمائش)

وتر BD $\cong$ وتر AC ... (متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع)

مسئلہ : مربع کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے، ثابت کرنا ہے اور ثبوت آپ لکھیے۔



شکل 5.27

مسئلہ : معین کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : $\square$EFGH معین ہے۔

ثابت کرنا ہے : (i) وتر EG، وتر HF کا عمودی ناصف ہے۔

(ii) وتر HF، وتر EG کا عمودی ناصف ہے۔

ثبوت :

(i)

قطعہ EH $\cong$ قطعہ EF
قطعہ GH $\cong$ قطعہ GF } ... (دیا ہوا ہے)

قطعہ خط کے اختتامی نقاط سے ہم فاصلہ ہر نقطہ اُس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر ہوتا ہے۔

$\therefore$ نقطہ E اور نقطہ G یہ قطعہ HF کے عمودی ناصف پر ہیں۔

دو مختلف نقاط سے ایک اور صرف ایک خط گزرتا ہے۔

$\therefore$ خط EG، وتر HF کا عمودی ناصف خط ہے۔

$\therefore$ وتر EG، وتر HF کا عمودی ناصف ہے۔

(ii) اسی طرح وتر HF، وتر EG کا عمودی ناصف ہے ثابت کر سکتے ہیں۔

ذیل کے مسئلوں کا ثبوت آپ لکھیے۔

- مربع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
- معین کے وتر، اس کے مقابل کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔
- مربع کے وتر، اس کے مقابل کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

اسے دھیان میں رکھیں

- مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔
- مربع کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔
- معین کے وتر، ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
- مربع کے وتر، ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
- معین کے وتر، مقابل کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔
- مربع کے وتر، مقابل کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

مشقی سیٹ 5.3

.1 $\square$ABCD مستطیل کے وتر نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ اگر سم AC = 8 ہوتب BO = ?

اگر ∠CAD = 35° ہوتب ∠ACB = ?

.2 $\square$PQRS معین ہے۔ اگر سم PQ = 7.5 ہوتب QR = ?

اگر ∠QPS = 75° ہوتب ∠PQR = ? ، ∠SRQ = ?

.3 $\square$IJKL مربع کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ M پر قطع کرتے ہیں۔ تب ∠IMJ، ∠JIK اور ∠LJK کی پیمائشیں طے کیجیے۔

.4 ایک معین کے وتروں کی لمبائیاں بالترتیب 20 سم اور 21 سم ہیں تو اس معین کا ضلع اور احاطہ معلوم کیجیے۔

.5 درج ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط، وجہ کے ساتھ لکھیے۔

(i) ہر متوازی الاضلاع معین ہوتا ہے۔ (ii) ہر معین، مستطیل ہوتا ہے۔

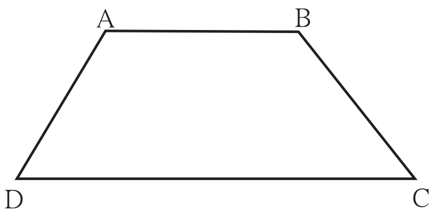
(iii) ہر مستطیل متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔ (iv) ہر مربع، مستطیل ہوتا ہے۔

(v) ہر مربع، معین ہوتا ہے۔ (vi) ہر متوازی الاضلاع مستطیل ہوتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

ذوزنقہ (Trapezium)

جس ذوار بعۃ الاضلاع کے مقابل کے اضلاع کی صرف ایک جوڑی متوازی ہوتی ہے اس ذوار بعۃ الاضلاع کو ذوزنقہ کہتے ہیں۔



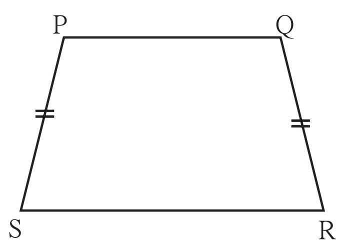
شکل 5.28

متصلہ شکل میں $\square$ABCD کے صرف AB اور DC ضلعے ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔ لہٰذا یہ ذوزنقہ ہے۔

متوازی خطوط کی خصوصیت کے لحاظ سے ∠A اور ∠D ان متواتر زاویوں کی جوڑی متمم ہے۔ اسی طرح ∠B اور ∠C ان متواتر زاویوں کی جوڑی بھی متمم ہے۔

ذوزنقہ میں متواتر زاویوں کی دو جوڑیاں متمم ہوتی ہیں۔

ذوزنقہ کے غیر متوازی اضلاع کی جوڑی متماثل ہو تب اس ذوار بعۃ الاضلاع کو متساوی الساقین (Isosceles Trapzium) کہتے ہیں۔

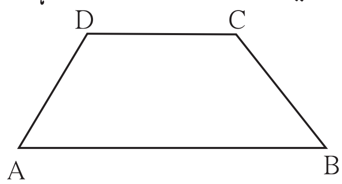


شکل 5.29

کسی بھی ذوزنقہ کے غیر متوازی ضلعوں کے وسطی نقاط کو جوڑنے والے قطعہ خط کو اس ذوزنقہ کا وسطانیہ کہتے ہیں۔

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) □ABCD کے زاویوں کی پیمائشیں 8 : 7 : 5 : 4 کے تناسب میں ہیں تب دکھائیے کہ □ABCD ذوزنقہ ہے۔



شکل 5.30

حل : فرض کیجیے ∠A ، ∠B ، ∠C ، ∠D کی پیمائشیں بالترتیب $(4x)^\circ$ ، $(5x)^\circ$ ، $(7x)^\circ$ اور $(8x)^\circ$ ہیں۔

ذوار بعۃ الاضلاع کے تمام زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 360° ہوتا ہے۔

$\therefore\ 4x + 5x + 7x + 8x = 360$

$\therefore\ 24x = 360$, $\therefore\ x = 15$

$\angle A = 4 \times 15 = 60^\circ$, $\angle B = 5 \times 15 = 75^\circ$, $\angle C = 7 \times 15 = 105^\circ$,

اور, $\angle D = 8 \times 15 = 120^\circ$

اب, $\angle B + \angle C = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$

∴ ضلع CD ∥ ضلع BA ... (I)

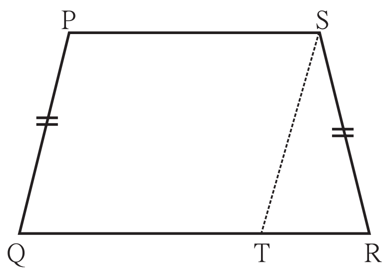
لیکن , $\angle B + \angle A = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ \neq 180^\circ$

∴ ضلع BC اور ضلع AD ایک دوسرے کے متوازی نہیں ہیں۔ ... (II)

∴ □ABCD ذوزنقہ ہے۔ ... [بیان (1) اور (2) کی رُو سے]

مثال (2) ذوزنقہ □PQRS میں ضلع QR ∥ ضلع PS اور ضلع SR ≅ ضلع PQ، ضلع PS < ضلع QR تب

ثابت کیجیے : ∠PQR ≅ ∠SRQ



شکل 5.31

دیا ہوا ہے : □PQRS میں ضلع QR ∥ ضلع PS اور ضلع SR ≅ ضلع PQ

ثابت کرنا ہے : ∠PQR ≅ ∠SRQ

عمل : نقطہ S سے ضلع PQ کے متوازی ایک قطعہ خط کھینچا وہ ضلع QR کو نقطہ T پر قطع کرتا ہے۔

ثبوت : □PQRS میں

قطعہ PS ≅ قطعہ QT ... (دیا ہوا ہے اور Q – T – R)

قطعہ PQ ≅ قطعہ ST ...(عمل)

∴ □PQTS متوازی الاضلاع ہے۔

∴ ∠PQT ≅ ∠STR ... (I) ... (نظیری زاویے)

اسی طرح, قطعہ PQ ≅ قطعہ ST

لیکن , قطعہ PQ ≅ قطعہ SR ... (دیا ہوا ہے)

∴ قطعہ ST ≅ قطعہ SR

∴ ∠STR ≅ ∠SRT ... (II) (متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ)

∴ ∠PQT ≅ ∠SRT ... [بیان (I) اور (II) کی رُو سے]

∴ ∠PQR ≅ ∠SRQ ... Q – T – R

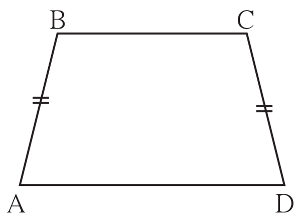
اس بنا پر ثابت ہوتا ہے کہ متساوی الساقین ذوزنقہ کے قاعدہ پر کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

مشقی سیٹ 5.4

.1 □IJKL میں KL ضلع || IJ ضلع ہے۔ $\angle I = 108°$، $\angle K$ 53° تب $\angle J$ اور $\angle L$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

.2 □ABCD میں AD ضلع || BC ضلع اور DC ضلع ≅ AB ضلع اور اگر $\angle A = 72°$ تب $\angle B$ اور $\angle D$ کی پیمائشیں طے کیجیے۔

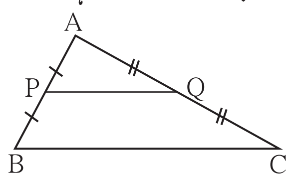
.3 شکل 5.32 میں □ABCD میں AD ضلع < BC ضلع، AD ضلع || BC ضلع اور اگر CD ضلع ≅ BA ضلع ہو تب ثابت کیجیے کہ $\angle ABC \cong \angle DCB$



شکل 5.32

مثلث کے دو ضلعوں کے وسطی نقاط کا مسئلہ (Theorem of midpoints of two sides of triangle)

بیان : ایک مثلث کے کوئی دو ضلعوں کے وسطی نقاط کو جوڑنے والا قطعہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے اور اس ضلع کی لمبائی کے نصف ہوتا ہے۔

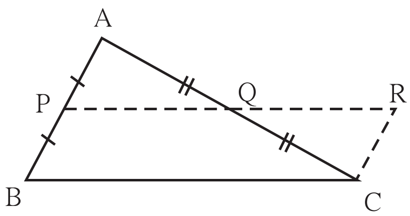


شکل 5.33

دیا ہوا ہے : △ABC میں نقطہ P، قطعہ AB کا وسطی نقطہ ہے اور Q، قطعہ AC کا وسطی نقطہ ہے۔

ثابت کرنا ہے : قطعہ BC || قطعہ PQ اور

$$PQ = \frac{1}{2} BC$$



شکل 5.34

عمل : قطعہ PQ کو R تک اس طرح بڑھائیں کہ PQ = QR قطعہ RC کھینچیے۔

ثبوت : △AQP اور △CQR میں

(عمل) ...	قطعہ PQ ≅ قطعہ QR
(Q قطعہ AC کا وسطی نقطہ ہے) ...	قطعہ AQ ≅ قطعہ QC
(متقابلہ زاویے) ...	$\angle AQP \cong \angle CQR$
(ضل زا ضل آزمائش) ...	∴ △AQP ≅ △CQR
(متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے) ... (1) ...	$\angle PAQ \cong \angle RCQ$
(متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ... (2) ...	∴ قطعہ AP ≅ قطعہ CR
[بیان (1) سے، متبادلہ زاویوں کی آزمائش] ...	خط AB ∥ خط CR
[بیان (2) سے] ...	قطعہ AP ≅ قطعہ CR

لیکن ، قطعہ AP ≅ قطعہ PB ≅ قطعہ CR , اور قطعہ PB ∥ قطعہ CR

∴ □PBCR متوازی الاضلاع ہے۔

$\therefore$ قطعہ PQ ∥ قطعہ BC اور PR = BC ... (کیوں کہ مقابل کے اضلاع مساوی لمبائی کے ہوتے ہیں)

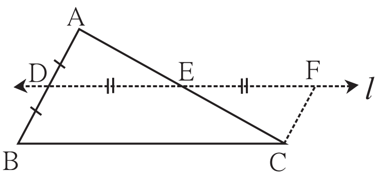
$PQ = \frac{1}{2} PR$ ... (عمل)

$\therefore PQ = \frac{1}{2} BC \quad \because PR = BC$

مثلث کے دوضلعوں کے وسطی نقاط کے مسئلہ کا عکس

مسئلہ : مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے گزرنے والا اور دوسرے ضلع کے متوازی خط تیسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

اس بیان کے لیے، شکل، دیا ہوا ہے، ثابت کرنا ہے، عمل دیے ہوئے ہیں۔اس بنا پر اس بیان کا ثبوت لکھنے کی کوشش کیجیے۔



شکل 5.35

دیا ہوا ہے : △ABC کے ضلع AB کا وسطی نقطہ D ہے۔
نقطہ D سے گزرنے والا ضلع BC کا متوازی خط l ہے، اور ضلع AC کو نقطہ E پر قطع کرتا ہے۔

ثابت کیجیے : AE = EC

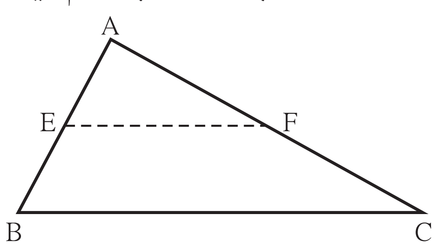
عمل : خط C سے خط AB کے متوازی خط کھینچیے۔ یہ خط، خط l کو جس نقطے پر قطع کرتا ہے اس نقطے کو F نام دیجیے۔

ثبوت : خط BC ∥ خط l ... (دیا ہوا ہے) اور کیے ہوئے عمل کا استعمال کر کے دکھایئے کہ □BCFD متوازی الاضلاع ہے۔

△ADE ≅ △CFE ثابت کیجیے اور اس کی مدد سے ثابت کیجیے کا ثبوت دیجیے۔

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) △ABC کے ضلع AB اور ضلع AC کے بالترتیب نقاط E اور F وسطی نقاط ہیں۔اگر E = 5.6 ہو تب BC کی لمبائی معلوم کیجیے۔



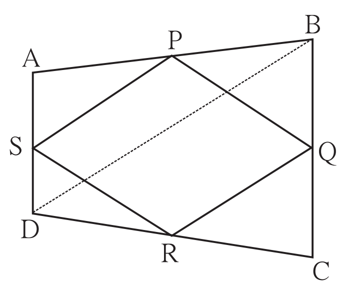
شکل 5.36

حل : △ABC میں نقطہ E اور نقطہ F بالترتیب ضلع AB اور ضلع AC کے وسطی نقاط ہیں۔

$EF = \frac{1}{2} BC$ ... (وسطی نقطہ کا مسئلہ)

$5.6 = \frac{1}{2} BC \quad \therefore BC = 5.6 \times 2 = 11.2$

مثال (2) ثابت کیجیے کہ کسی بھی ذو اربعۃ الاضلاع کے ضلعوں کے وسطی نقاط کو ترتیب سے جوڑنے سے بننے والا ذو اربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔



شکل 5.37

دیا ہوا ہے : □ABCD کے اضلاع CD ،BC ،AB اور AD کے وسطی نقاط بالترتیب R ،Q ،P اور S ہیں۔

ثابت کیجیے : □PQRS متوازی الاضلاع ہے۔

عمل : وتر BC کھینچیے۔

ثبوت : $\triangle ABD$ میں نقطہ S قطعہ AD کا وسطی نقطہ ہے اور نقطہ P، قطعہ AB کا وسطی نقطہ ہے۔

$\therefore$ PS ∥ DB اور $PS = \frac{1}{2} BD$ ... (1) ... (وسطی نقاط کے مسئلہ سے)

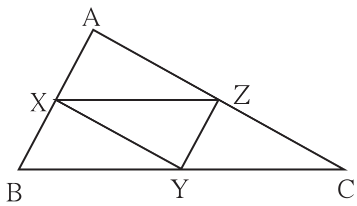
اسی طرح $\triangle DBC$ میں Q اور R بالترتیب BC اور DC اضلاع کے وسطی نقاط ہیں۔

$\therefore$ QR ∥ BD اور $QR = \frac{1}{2} BD$ ... (2) .... (وسطی نقاط کے مسئلہ سے)

$\therefore$ PS ∥ QR اور PS = QR ... [بیان (1) اور (2) سے]

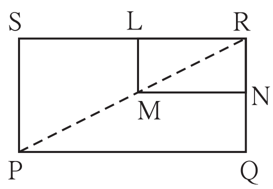
$\therefore$ □PQRS متوازی الاضلاع ہے۔

مشقی سیٹ 5.5



شکل 5.38

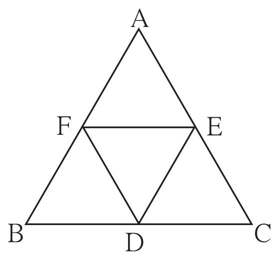
.1 شکل 5.38 میں $\triangle ABC$ کے ضلع AB، ضلع BC اور ضلع AC کے بالترتیب نقاط X، Y، Z وسطی نقاط ہیں۔ سم AB = 5، سم AC = 9، سم BC = 11 ہو تب XY، YZ اور ZX کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔



شکل 5.39

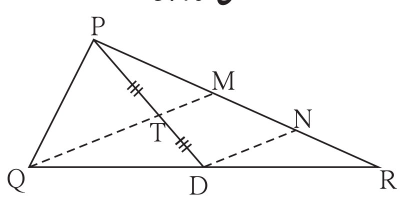
.2 شکل 5.39 میں □PQRS اور □MNRL مستطیل ہیں۔ نقطہ M، قطعہ PR کا وسطی نقطہ ہے۔

تب ثابت کیجیے (i) SL = LR (ii) $LN = \frac{1}{2} SQ$



شکل 5.40

.3 شکل 5.40 میں $\triangle ABC$ متساوی الاضلاع مثلث میں نقاط F، D، E بالترتیب ضلع AB، ضلع BC، ضلع AC کے وسطی نقاط ہیں۔ تب ثابت کیجیے کہ $\triangle FED$ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔



شکل 5.41

.4 شکل 5.41 میں قطعہ PD، یہ $\triangle PQR$ کا وسطانیہ ہے۔ نقطہ T، ضلع PD کا وسطی نقطہ ہے، QT بڑھانے پر PR کو M نقطہ پر قطع کرتا ہے تو

دکھایئے کہ $\frac{PM}{PR} = \frac{1}{3}$

[ہدایت : QM ∥ DN کھینچیے]

مجموعہ سوالات 5

.1 درج ذیل سوالوں کے متبادل جواب میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) جس ذوار بعۃ الاضلاع کے متواتر ضلعوں کی تمام جوڑیاں متماثل ہوتی ہیں تو اس ذوار بعۃ الاضلاع کا نام کون سا ہے؟

(A) مستطیل (B) متوازی الاضلاع (C) ذوزنقہ (D) معین

(ii) ایک مربع کے وتر کی لمبائی $12\sqrt{2}$ سم ہے تو اس کا احاطہ کتنا ہے؟

(A) 24 سم (B) $24\sqrt{2}$ سم (C) 48 سم (D) $48\sqrt{2}$ سم

(iii) ایک معین کے مقابل کے زاویوں کی پیمائش $(2x)°$ اور $(3x - 40)°$ ہوں تب $x = ?$

(A) 100° (B) 80° (C) 160° (D) 40°

.2 ایک قائمۃ الزاویہ ذو اربعۃ الاضلاع کے متوازی اضلاع بالترتیب 7 سم اور 24 سم ہیں۔ تب اس ذو اربعۃ الاضلاع کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

.3 مربع کے وتر کی لمبائی 13 سم ہے تو مربع کا ضلع معلوم کیجیے۔

.4 متوازی الاضلاع کے دو متصلہ اضلاع کی نسبت 4 : 3 ہے۔ اگر اس کا احاطہ 112 سم ہو تب اس کے تمام اضلاع کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

.5 معین کے وتر PR اور وتر QS کی لمبائیاں بالترتیب 20 سم اور 48 سم ہے۔ تب معین PQRS کے ضلع PQ کی لمبائی معلوم کیجیے۔

.6 مستطیل PQRS کے وتر ایک دوسرے کو M نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔ اگر $\angle QMR = 50°$ ہو تب $\angle MPS$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

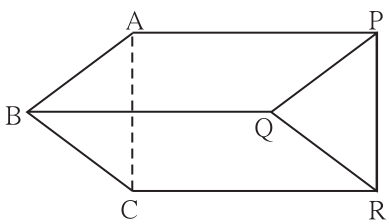
.7 متصلہ شکل 5.42 میں،

قطعہ PQ || قطعہ AB، قطعہ PQ ≅ قطعہ AB،

قطعہ PR || قطعہ AC، قطعہ PR ≅ قطعہ AC

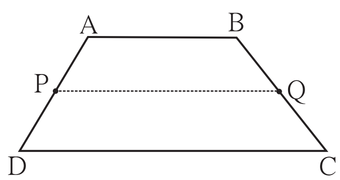
تو ثابت کیجیے کہ قطعہ QR || قطعہ BC اور

قطعہ QR ≅ قطعہ BC



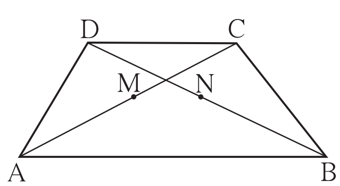
شکل 5.42

.8 متصلہ شکل 5.43 میں ABCD□ ذوزنقہ ہے۔ AB || DC ہے۔ P اور Q بالترتیب قطعہ AD اور قطعہ BC کے وسطی نقاط ہیں۔ تو ثابت کیجیے کہ PQ || AB اور $PQ = \frac{1}{2}(AB + DC)$



شکل 5.43

.9 متصلہ شکل 5.44 میں ABCD□ ذوزنقہ ہے۔ AB || DC ہے۔ M اور N بالترتیب وتر AC اور وتر DB کے وسطی نقاط ہیں تو ثابت کیجیے کہ MN || AB

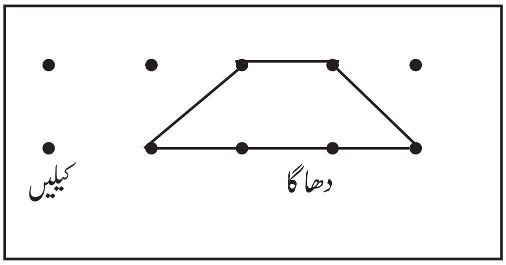


شکل 5.44

عملی کام :

ذواربعۃ الاضلاع کے مختلف مسئلوں کی تصدیق کرنا۔

وسائل : سم 10 × سم 15 کا پلائے ووڈ کا ایک ٹکڑا، 12 سے 15 کیلیں، موٹا دھاگا، پرانے دعوت نامے، قینچی

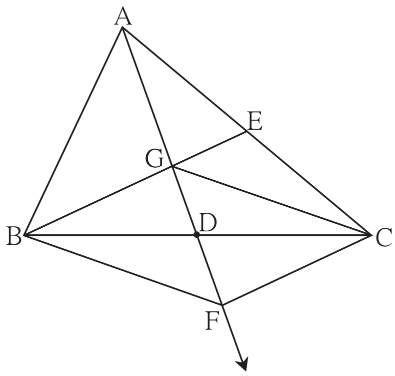


شکل 5.45

ہدایت : سم 10 × سم 15 کے پلائے ووڈ کے ٹکڑے پر مستقیم خط میں 2 سم کے فاصلے پر 5 کیلیں ٹھونکیے۔ اسی طرح نیچے کے خط مستقیم میں کیلیں ٹھونکیے۔ دوخطوط کے درمیان بھی 2 سم کا فاصلہ رکھیے۔ دھاگے سے مختلف ذواربعۃ الاضلاع (کیلیں کے سہارے) بنائیے۔ ضلع سے متعلق خصوصیات کی دھاگے کی مدد سے تصدیق کیجیے۔ اس کی مدد سے ذواربعۃ الاضلاع کے زاویوں سے متعلق خصوصیات کی تصدیق کیجیے۔

مزید معلومات کے لیے

مثلثوں کے ہندسی مرکز ہر وسطانیہ کو 1 : 2 کے تناسب میں تقسیم کرتے ہیں۔ یہ خصوصیت آپ کو معلوم ہے۔ نیچے دیے ہوئے ثبوت کا مطالعہ کیجیے۔



شکل 5.46

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ کے قطعہ AD اور قطعہ BE وسطانیہ ہیں۔ جو نقطہ G پر قطع ہوتے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : $AG : GD = 2 : 1$

عمل : شعاع AD پر نقطہ F اس طرح لیجیے کہ $G - D - F$ اور $GD = GF$

ثبوت : $\square BGCF$ کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔ ... (دیا ہوا ہے اور عمل)

$\therefore$ $\square BGCF$ متوازی الاضلاع ہے۔

$\therefore$ قطعہ $BE \parallel$ خط FC ... (متوازی الاضلاع کے مقابل کے اضلاع کو شامل کرنے والا خط)

اب $\triangle AFC$ کے ضلع AC کا E وسطی نقطہ ہے۔ ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore$ قطعہ $EB \parallel$ خط FC

مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے دوسرے ضلع کے متوازی خط، تیسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

$\therefore$ قطعہ AF کا G وسطی نقطہ ہے۔

$\therefore AG = GF$

$AG = 2GD$ $(\because GF = 2GD$, عمل$)$

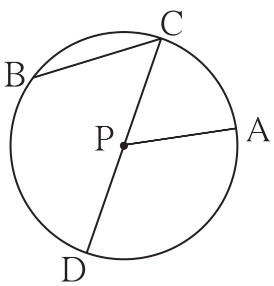
$\therefore \frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ یعنی , $AG : GD = 2 : 1$

دائرہ Circle

آیئے، سیکھیں

- دائرہ
- داخلی دائرہ
- دائرہ کے وتر کی خصوصیت
- حائط دائرہ

آیئے ذرا یاد کریں



شکل 6.1

متصلہ شکل میں P مرکز والے دائرہ کا مشاہدہ کیجیے۔
اس شکل کے لحاظ سے درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

∠CPA	....	....	....	....	قطعہ PA	....
....	مرکزی زاویہ	مرکز	نصف قطر	قطر	....	وتر

آیئے سمجھ لیں

دائرہ (Circle)

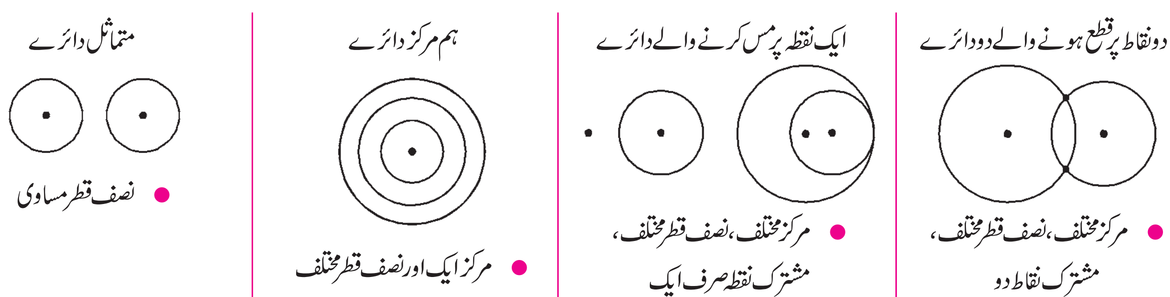
نقاط کے سیٹ کی صورت میں دائرہ کی تعریف کرتے ہیں۔

- مستوی میں ایک متعین نقطہ سے مساوی فاصلوں پر واقع تمام نقاط کے سیٹ کو دائرہ (Circle) کہتے ہیں۔
  اس متعین نقطہ کو دائرہ کا مرکز (Centre of a Circle) کہتے ہیں۔

دائرہ سے متعلق کچھ اصطلاحات :

- دائرہ کے مرکز اور دائرہ پر کے کوئی بھی نقطہ کو جوڑنے والے قطعہ خط کو دائرہ کا نصف قطر (radius) کہتے ہیں۔
- دائرہ کے مرکز اور دائرہ کے کوئی بھی نقطہ کے درمیان فاصلہ کو دائرہ کا نصف قطر کہتے ہیں۔
- دائرہ پر کے کوئی بھی دو نقاط کو جوڑنے والے قطعہ خط کو دائرہ کا وتر Chord کہتے ہیں۔
- دائرہ کے مرکز سے گذرنے والے وتر کو اس دائرہ کا قطر (Diameter) کہتے ہیں۔قطر، دائرہ کا سب سے بڑا وتر ہوتا ہے۔

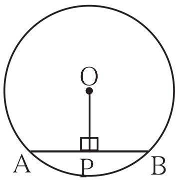
مستوی میں دائرے



شکل 6.2

(Properties of chord of a circle) دائرہ کے وتر کی خصوصیت

عملی کام : گروہ کے ہر طالب علم سے درج ذیل عملی کام کروائیے۔



شکل 6.3

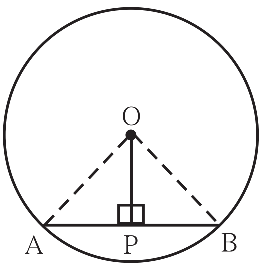
اپنی بیاض میں ایک دائرہ کھینچیے ۔اس میں ایک وتر کھینچیے ۔دائرہ کے مرکز سے وتر پر عمود کھینچیے ۔وتر کے دو حصے ہوجائیں گے۔ان کی لمبائیاں ناپیے۔

گروہ کا رہنما درج ذیل کے مطابق ایک جدول بنائے۔اس جدول میں تمام ہی مشاہدات کا اندراج کرے۔

طالب علم / لمبائی	1	2	3	4	5	6
l(AP)	.... سم					
l(PB)	.... سم					

ان مشاہدات کی بنا پر ذہن میں آنے والی خصوصیت لکھیے ۔اس خصوصیت کا ثبوت دیکھیں گے۔

مسئلہ : دائرہ کے مرکز سے وتر پر کھینچا گیا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔



شکل 6.4

دیا ہوا ہے : O مرکز والے دائرے کا قطعہ AB وتر ہے۔

قطعہ OP ⊥ وتر AB

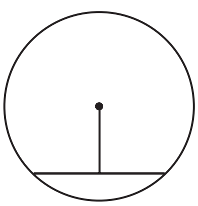
ثابت کیجیے : قطعہ BP ≅ قطعہ AP

ثبوت : قطعہ OA اور قطعہ OB کھینچیے ۔

ΔOPA اور ΔOPB میں،

(وتر AB ⊥ قطعہ OP) ...	∠ OPA ≅ ∠ OPB
(مشترک ضلع) ...	قطعہ OP ≅ قطعہ OP
(ایک ہی دائرہ کے نصف قطر) ...	وتر OA ≅ وتر OB
(وتر ضلع مسئلہ) ...	∴ ΔOPA ≅ ΔOPB
(متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ...	قطعہ PA ≅ قطعہ PB

عملی کام (II) گروہ کے ہر طالب علم سے درج ذیل عملی کام کروائیے۔


شکل 6.5

اپنی بیاض میں ایک دائرہ کھینچیے ۔اس میں ایک وتر کھینچیے ۔وتر کا وسطی نقطہ معلوم کیجیے۔

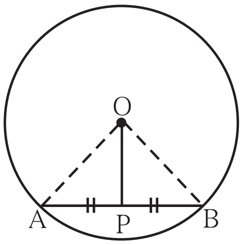
اس وسطی نقطہ اور دائرہ کے مرکز کو جوڑنے والا قطعہ خط کھینچیے ۔

اس قطعہ خط کے وتر سے جو زاویہ بنا ہے اسے ناپیے۔کیا سمجھ میں آتا ہے؟

آپ کے ناپے ہوئے زاویوں کی پیمائش ایک دوسرے کو بتائیے۔

اس بناء پر کون سی خصوصیت سمجھ میں آتی ہے۔اسے طے کیجیے۔

مسئلہ : دائرے کے مرکز اور وتر کے وسطی نقطہ کو جوڑنے والا قطعہ خط وتر پر عمود ہوتا ہے۔



شکل 6.6

دیا ہوا ہے : O مرکز والے دائرے کا قطعہ AB وتر ہے۔

وتر AB کا P وسطی نقطہ ہے اس لیے قطعہ PB $\cong$ قطعہ AP

ثابت کرنا ہے : وتر AB $\perp$ قطعہ OP

ثبوت : قطعہ OA اور قطعہ OB کھینچیے ۔

Δ AOP اور Δ BOP میں،

قطعہ OA $\cong$ قطعہ OB ... (ایک ہی دائرے کے نصف قطر)

قطعہ OP $\cong$ قطعہ OP ... (مشترک ضلع)

قطعہ AP $\cong$ قطعہ BP ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore \quad \Delta AOP \cong \Delta BOP$ ... (ضل ضل ضل آزمائش)

$\therefore \quad \angle OPA \cong \angle OPB$ ... (متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے) ...(I)

اب , $\angle OPA + \angle OPB = 180°$ ... (خطی جوڑی کے زاویے)

$\therefore \quad \angle OPB + \angle OPB = 180°$ ... [بیان (I) سے]

$2\angle OPB = 180°$

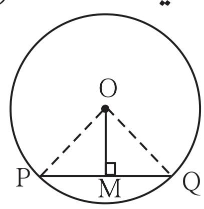
$\angle OPB = 90°$

$\therefore$ وتر AB $\perp$ قطعہ OP

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) : ایک دائرہ کا نصف قطر 5 سم ہے۔اس دائرہ کے ایک وتر کی لمبائی 8 سم ہے تو اس وتر کا دائرہ کے مرکز سے فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل : سب سے پہلے دی ہوئی معلومات کو ظاہر کرنے والی شکل بنائیں گے۔



شکل 6.7

فرض کیجیے O مرکز والے دائرہ کے وتر PQ کی لمبائی 8 سم ہے۔

وتر PQ $\perp$ قطعہ OM کھینچیے ۔

ہمیں پتہ ہے کہ دائرہ کے مرکز سے وتر پر کھینچا گیا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

PM = MQ = 4 سم

OQ = 5 سم ... (دائرے کا نصف قطر 5 سم دیا ہوا ہے)

قائمۃ الزاویہ ΔOMQ میں فیثاغورث کے مسئلہ کی رو سے

$$OM^2 + MQ^2 = OQ^2$$

$$OM^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\therefore \quad OM^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

$$\therefore \quad OM = 3$$

لہٰذا دائرہ کے مرکز سے وتر کا فاصلہ 3 سم ہے۔

مثال (2) : ایک دائرہ کا نصف قطر 20 سم ہے۔اس دائرہ کا ایک وتر، دائرہ کے مرکز سے 12 سم فاصلہ پر ہے۔تب اس وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے دائرہ کا مرکز O ہے۔ سم OD = 20 = نصف قطر۔ وتر CD، مرکز O سے 12 سم فاصلہ پر ہے۔

قطعہ CD ⊥ قطعہ OP

OP = 12 سم

CP = PD ... (دائرہ کے مرکز سے وتر پر کھینچا گیا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے)

قائمۃ الزاویہ ΔOPD میں فیثا غورث کے مسئلہ کی رُو سے،

$$OP^2 + PD^2 = OD^2$$

$$12^2 + PD^2 = 20^2$$

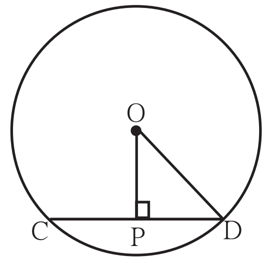
$$PD^2 = 20^2 - 12^2$$

$$PD^2 = (20+12)(20-12)$$

$$= 32 \times 8 = 256$$

$\therefore$ PD = 16 , $\therefore$ CP = 16

لیکن, CD = CP + PD = 16 + 16 = 32



شکل 6.8

وتر کی لمبائی 32 سم ہے۔

مشقی سیٹ 6.1

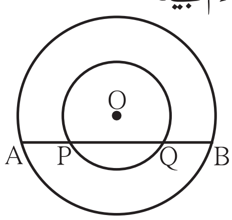
(1) دائرہ کے مرکز O سے وتر AB کا فاصلہ 8 سم ہے۔ وتر AB کی لمبائی 12 سم ہے، تو دائرہ کا قطر معلوم کیجیے۔

(2) ایک دائرہ کا قطر 26 سم ہے اور وتر کی لمبائی 24 سم ہے تو اس وتر کا دائرہ کے مرکز سے فاصلہ معلوم کیجیے۔

(3) دائرہ کے مرکز سے وتر کا فاصلہ 30 ہے اور دائرہ کا نصف قطر 34 ہے، تو وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(4) O مرکز والے دائرہ کا نصف قطر 41 ہے۔دائرہ کے وتر کی لمبائی 80 ہے تو وتر PQ کا مرکز سے فاصلہ معلوم کیجیے۔

(5) شکل 6.9 میں، مرکز O والے دو دائرے ہیں، ۔بڑے دائرہ کا وتر AB،
چھوٹے دائرہ کو نقطہ P اور Q پر قطع کرتا ہے تو ثابت کیجیے کہ AP = BQ



شکل 6.9

(6) ثابت کیجیے کہ دائرہ کا قطر اگر دائرہ کے دو وتروں کی تنصیف کرتا ہو تب وہ دونوں وتر ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

عملی کام I :

(1) اپنی سہولت والے نصف قطر کے دائرہ بنائیے۔

(2) ہر دائرہ میں مساوی لمبائی کے دو وتر کھینچیے ۔

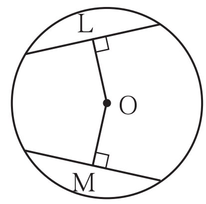
(3) دائرہ کے مرکز سے ہر وتر پر عمود کھینچیے ۔

(4) دائرہ کے مرکز سے ہر وتر کا فاصلہ ناپیے ۔

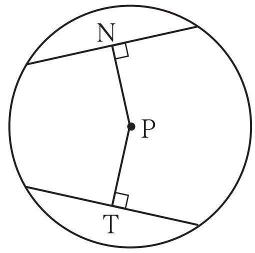
آئیے سمجھ لیں

دائرہ کے متماثل وتر اور ان کا دائرہ کے مرکز سے فاصلہ سے متعلق خصوصیت

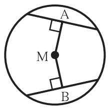
عملی کام II :



شکل (i)



شکل (ii)



شکل (iii)

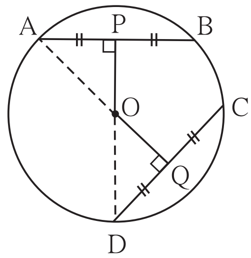
شکل (i) میں OL = OM، شکل (ii) میں PN = PT، شکل (iii) میں MA = MB کیا ایسا سمجھ میں آتا ہے؟

اس عملی کام سے دھیان میں آنے والی خصوصیت کو الفاظ میں لکھیے۔

آئیے سمجھ لیں

متماثل وتروں کی خصوصیت (Properties of congruent chords)

مسئلہ : ایک ہی دائرہ کے متماثل وتر دائرہ کے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔



شکل 6.10

دیا ہوا ہے : O مرکز والے دائرہ میں،

وتر AB $\cong$ وتر CD

OP $\perp$ AB، OQ $\perp$ CD

ثابت کرنا ہے : OP = OQ

عمل : O , A اور D, O کو جوڑیے۔

ثبوت : (دائرہ کے مرکز سے وتر پر کھینچا گیا عمود، وتر کی تنصیف کرتا ہے۔) ... $AP = \frac{1}{2}AB$, $DQ = \frac{1}{2}CD$

(دیا ہوا ہے) ... AB = CD

$\therefore$ AP = DQ

(مساوی لمبائی کے قطعات) ... (I) ... قطعہ AP $\cong$ قطعہ DQ

قائمۃ الزاویہ ΔAPO اور قائمۃ الزاویہ ΔDQO میں،

[بیان (I) سے] ... قطعہ AP $\cong$ قطعہ DQ

(ایک ہی دائرہ کے نصف قطر) ... وتر OA $\cong$ وتر OD

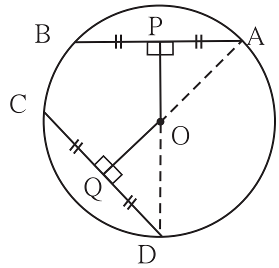
(وتر۔ ضلع مسئلہ) ... $\therefore$ ΔAPO $\cong$ ΔDQO

(متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ... $\therefore$ قطعہ OP $\cong$ قطعہ OQ

(متماثل قطعات کی لمبائی مساوی ہوتی ہے) ... $\therefore$ OP = OQ

دائرہ کے متماثل وتر دائرہ کے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

مسئلہ : ایک ہی دائرہ کے مرکز سے مساوی فاصلہ پر واقع وتر متماثل ہوتے ہیں۔



شکل 6.11

دیا ہوا ہے : O مرکز والے دائرہ میں،

وتر AB ⊥ قطعہ OP ، وتر CD ⊥ قطعہ OQ اور OP = OQ

ثابت کرنا ہے : وتر CD ≅ وتر AB

عمل : A,O اور D,O کو جوڑیے۔

ثبوت : درج ذیل بیانات کے لیے خالی جگہ پر کیجیے۔

قائمۃ الزاویہ ΔOPA اور قائمۃ الزاویہ ΔOQD میں،

[ ] ... وتر OD ≅ وتر OA

(دیا ہوا ہے۔) ... قطعہ OQ ≅ قطعہ OP

[ ] ... ΔOPA ≅ ΔOQD

(متماثل مثلثوں کے نظیری اضلاع) ... قطعہ AP ≅ قطعہ QD

(I) ... AP = QD

[ ] ... لیکن, $AP = \frac{1}{2}$ AB, $QD = \frac{1}{2}$ CD

(بیان (I) کی رُو سے) ... ∴ AP = QD

∴ AB = CD

∴ قطعہ AB ≅ قطعہ CD

مذکورہ بالا دونوں مسئلے ایک دوسرے کے عکس ہیں۔ اسے سمجھ لیجیے۔

اسے دھیان میں رکھیں

ایک دائرہ کے متماثل وتر دائرہ کے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

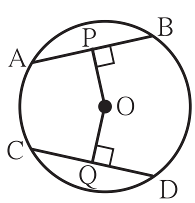
عملی کام :

مذکورہ بالا دونوں مسئلے ایک ہی دائرہ کی بجائے دو متماثل دائرے لے کر ثابت کر سکتے ہیں۔

1. متماثل دائروں کے متماثل وتر دائرے کے مرکزوں سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔
2. متماثل دائروں کے مرکزوں سے مساوی فاصلوں پر واقع وتر متماثل ہوتے ہیں۔

یہ دونوں مسئلوں کے لیے دیا ہوا ہے، ثابت کرنا ہے اور ثبوت لکھیے۔

حل کردہ مثالیں :



شکل 6.12

مثال (1) : دی ہوئی شکل 6.12 میں نقطہ O، دائرہ کا مرکز ہے اور

AB = CD ہے۔ اگر OP = 4 سم ہو تب OQ کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل : O مرکز والے دائرے میں،

(دیا ہوا ہے۔) ... وتر AB ≅ وتر CD

(شکل میں دکھایا ہوا ہے) ... $OP \perp AB$ ، $OQ \perp CD$

سم $OP = 4$ دیا ہوا ہے۔لہٰذا وتر AB کا دائرہ کے مرکز O سے فاصلہ 4 سم ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ ایک ہی دائرہ کے متماثل وتر دائرہ کے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

$\therefore$ $OQ = 4$ سم

مشقی سیٹ 6.2

(1) ایک دائرہ کا نصف قطر 10 سم ہے۔اس دائرہ میں دو وتر ہیں۔ ہر ایک کی لمبائی 16 سم ہے۔تو وہ وتر دائرہ کے مرکز سے کتنے فاصلہ پر ہیں؟

(2) ایک دائرہ میں دو مساوی لمبائی کے وتر ہیں۔دائرہ کے مرکز سے وہ 5 سم فاصلے پر ہیں۔دائرہ کا نصف قطر 13 سم ہے۔تو ان وتروں کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(3) مرکز C والے دائرہ کے قطعہ PM اور قطعہ PN متماثل وتر ہیں۔تو ثابت کیجیے کہ شعاع PC یہ $\angle NPM$ کی ناصف ہے۔

آیئے ذرا یاد کریں

گزشتہ جماعت میں ہم مختلف مثلث بنا کر ان کے زاویوں کے ناصف متراکز ہوتے ہیں۔اس خصوصیت کی تصدیق کر چکے ہیں۔مثلث کے زاویوں کے ناصفوں کا نقطہ تراکز 'I' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

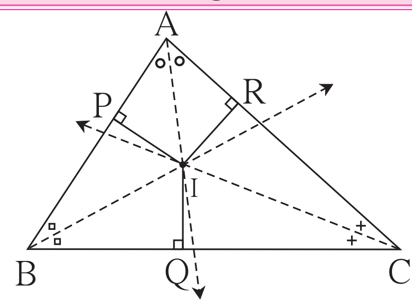
آیئے سمجھ لیں

مثلث کا داخلی دائرہ (Incircle of a triangle)

ΔABC کے تینوں زاویوں کے ناصف I نقطہ پر ملتے ہیں۔

زاویوں کے ناصفوں کو I نقطہ تراکز سے مثلث کے تینوں ضلعوں پر عمود کھینچے ہوئے ہیں۔

$IP \perp AB$ ، $IQ \perp BC$ ، $IR \perp AC$



شکل 6.13

زاویوں کے ناصفوں پر واقع ہر نقطہ زاویے کے دونوں ساقین (ضلعوں) سے مساوی فاصلے پر ہوتے ہیں اس کا مطالعہ ہم کر چکے ہیں۔

$\angle B$ کے ناصف پر I نقطہ ہے۔اس لیے $IP = IQ$

$\angle C$ کے ناصف پر I نقطہ ہے۔اس لیے $IQ = IR$

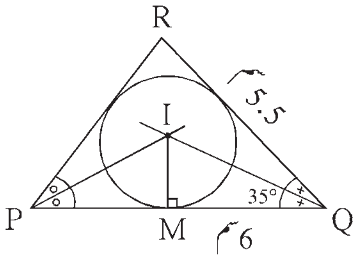
$\therefore$ $IP = IQ = IR$

نقطہ I، مثلث کے تینوں اضلاع سے یعنی AB ، AC ، BC سے ہم فاصلہ ہے۔

نقطہ I کو مرکز مان کر اور IP کو نصف قطر لے کر کھینچا گیا دائرہ ضلع AB ، AC اور BC کو اندرونی طور پر مس کرے گا۔ایسے دائرہ کو مثلث کا داخلی دائرہ کہتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

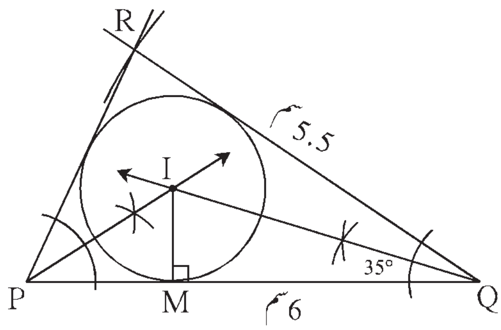
مثلث کا داخلی دائرہ بنانا (To construct incircle of a triangle)



کچی شکل 6.14

مثال : Δ PQR اس طرح بنایئے کہ سم $PQ = 6$، $\angle Q = 35°$ ، سم $QR = 5.5$ ، Δ PQR کا داخلی دائرہ بنایئے۔

پہلے کچی شکل بنایئے اور اس میں دی ہوئی معلومات دکھایئے۔



شکل 6.15

عمل کے مراحل :

(1) Δ PQR، دی ہوئی پیمائشوں کا مثلث بنایئے۔

(2) کوئی بھی دو زاویوں کے ناصف کھینچیے ۔

(3) زاویوں کے ناصفوں کے نقطہ تقاطع کا I نام دیجیے۔

(4) نقطہ I سے قطعہ PQ پر IM عمود کھینچیے ۔

(5) IM نصف قطر اور I کو مرکز مان کر دائرہ بنایئے۔

اسے دھیان میں رکھیں

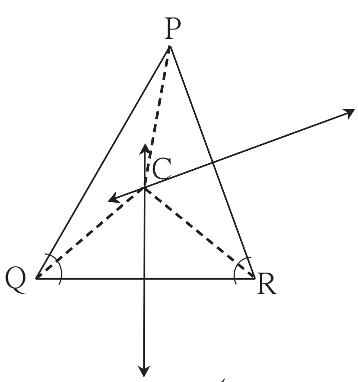
مثلث کے تینوں ضلعوں کو مس کرنے والے دائرہ کو مثلث کا داخلی دائرہ کہتے ہیں اور اس دائرہ کے مرکز کو داخلی مرکز کہتے ہیں۔

آیئے ذرا یاد کریں

گذشتہ جماعت میں ہم نے 'مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف متراکز ہوتے ہیں۔' اس خصوصیت کی مختلف مثلث بنا کر تصدیق کر چکے ہیں۔

مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصفوں کے نقطۂ تراکز کو 'C' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں



شکل 6.16

Δ PQR کے اضلاع کے عمودی ناصف 'C' نقطہ پر ملتے ہیں۔اس لیے 'C' عمودی ناصفوں کا نقطۂ تراکز ہے۔

مثلث کا حائط دائرہ (Circum circle)

نقطہ C، مثلث PQR کے تینوں اضلاع کے عمودی ناصفوں پر واقع ہے۔ PC، QC اور RC کو جوڑیئے۔ قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہر نقطہ، اس قطعہ خط کے اختتامی نقاط سے مساوی فاصلہ پر ہوتا ہے۔ ہم اس کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

(نقطہ C، قطعہ PQ کے عمودی ناصف پر ہے۔) ... $\therefore PC = QC$ ... (I)

(نقطہ C، قطعہ QR کے عمودی ناصف پر ہے۔) ... $\therefore QC = RC$ ... (II)

(بیان I اور II سے) ... $\therefore PC = QC = RC$

$\therefore$ نقطہ C کو مرکز مان کر PC کو نصف قطر لے کر بنایا گیا دائرہ مثلث کے تینوں راس سے گزرے گا۔ ایسے دائرہ کو مثلث کا حائط دائرہ کہتے ہیں۔

اسے دھیان میں رکھیں

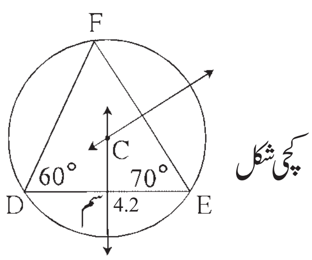
مثلث کے تمام راسوں سے گزرنے والے دائرہ کو مثلث کا حائط دائرہ کہتے ہیں اور اس دائرہ کے مرکز کو حائط مرکز کہتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

مثلث کا حائط دائرہ بنانا :

مثال : Δ DEF میں سم DE = 4.2، ∠ D=60°، ∠ E = 70° ہو تب Δ DEF بنایئے۔ اور اس کا حائط دائرہ بنایئے۔

پہلے کچی شکل بنایئے۔ اس میں دی ہوئی معلومات لکھیے۔



شکل 6.17

عمل کے مراحل :

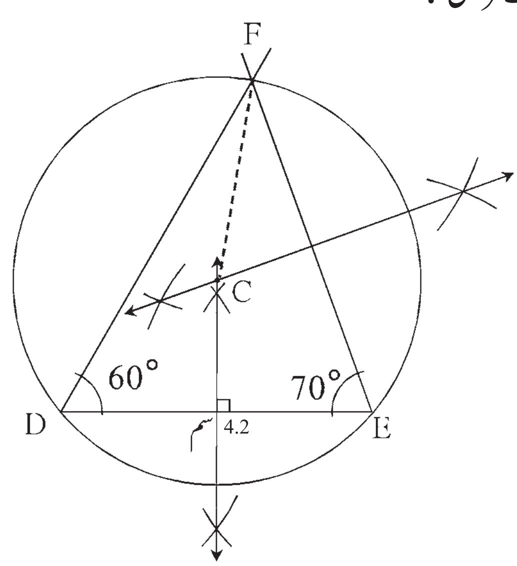
(1) دی ہوئی پیمائش کا مثلث DEF بنایئے۔

(2) کوئی دو اضلاع کے عمودی ناصف بنایئے۔

(3) وہ عمودی ناصف جہاں ملتے ہیں اس نقطہ کو C نام دیجیے۔

(4) قطعہ CF کھینچیے۔

(5) CF نصف قطر لے کر اور C کو مرکز مان کر دائرہ کھینچیے۔



شکل 6.18

عملی کام :

مختلف پیمائشوں کے اور مختلف قسم کے مثلث بنائیے۔ ان کے داخلی دائرے اور حائط دائرے بنائیے۔ اپنے مشاہدات کا درج ذیل جدول میں اندراج کیجیے اور بحث کیجیے۔

مختلف الاضلاع مثلث	متساوی الساقین مثلث	متساوی الاضلاع مثلث	مثلث کی قسم
مثلث کے اندر	مثلث کے اندر	مثلث کے اندر	داخلی دائرہ کے مرکز کا مقام
	مثلث کے اندر یا باہر یا مثلث پر	مثلث کے اندر	حائط دائرہ کے مرکز کا مقام

منفرجۃ الزاویہ مثلث	قائمۃ الزاویہ مثلث	حادۃ الزاویہ مثلث	مثلث کی قسم
			داخلی دائرہ کے مرکز کا مقام
	وتر کی وسط میں		حائط دائرہ کے مرکز کا مقام

اسے دھیان میں رکھیں

- مثلث کا داخلی دائرہ مثلث کے تمام اضلاع کو اندر سے مس کرتا ہے۔
- مثلث کا داخلی دائرہ بنانے کے لیے مثلث کے کوئی بھی دو زاویوں کے ناصف بنانا ہوتے ہیں۔
- مثلث کا حائط دائرہ مثلث کے تینوں راسوں سے گذرتا ہے۔
- مثلث کا حائط دائرہ بنانے کے لیے اس کے کوئی بھی دو اضلاع کے عمودی ناصف کھینچنا ہوتے ہیں۔
- حادہ الزاویہ مثلث کا حائط مرکز مثلث کے اندر ہوتا ہے۔
- قائمۃ الزاویہ مثلث کا حائط مرکز، وتر کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔
- منفرجۃ الزاویہ مثلث کا حائط مرکز مثلث کے باہر ہوتا ہے۔
- کسی بھی مثلث کے داخلی دائرہ کا داخلی مرکز۔ مثلث کے اندرونی حصہ میں ہوتا ہے۔

عملی کام : کوئی بھی ایک متساوی الاضلاع مثلث بنا کر اس کا حائط دائرہ اور داخلی دائرہ بنائیے۔

مذکورہ عملی کام کرتے وقت آپ کو درج ذیل کے بارے میں کیا مشاہدہ ہوتا ہے۔

(1) مثلث کا حائط دائرہ اور داخلی دائرہ بناتے وقت اس کے زاویے کے ناصف اور اضلاع کے عمودی ناصف یہ دونوں صرف ایک ہی ہیں۔ کیوں؟

(2) حائط دائرہ اور داخلی دائرہ کے مرکز صرف ایک ہی ہوتا ہے۔ کیوں؟

(3) حائط دائرہ کا نصف قطر اور داخلی دائرہ کے نصف قطر ناپ کر ان کی نسبت معلوم کیجیے۔

اسے دھیان میں رکھیں

- متساوی الاضلاع مثلث کا حائط دائرہ اور داخلی دائرہ بناتے وقت ان کے زاویے کے ناصف اور اضلاع کے ناصف ایک ہی ہوتے ہیں۔
- متساوی الاضلاع مثلث کا حائط مرکز اور داخلی مرکز دونوں ایک ہی ہوتے ہیں۔
- متساوی الاضلاع مثلث کا حائط دائرہ کے نصف قطر کی داخلی دائرہ کے نصف قطر سے نسبت 1 : 2 ہوتی ہے۔

مشقی سیٹ 6.3

(1) ΔABC اس طرح بنایئے کہ $\angle B=100^\circ$، $BC = 6.4$ سم، $\angle C = 50^\circ$ اور اس مثلث کا داخلی دائرہ بنایئے۔

(2) ΔPQR اس طرح بنایئے کہ $\angle P = 70^\circ$، $\angle R = 50^\circ$، $QR = 7.3$ سم اور اس مثلث کا حائط دائرہ بنایئے۔

(3) ΔXYZ اس طرح بنایئے کہ $XY = 6.7$ سم ، $YZ = 5.8$ سم ، $XZ = 6.9$ سم اور اس مثلث کا داخلی دائرہ بنایئے۔

(4) ΔLMN اس طرح بنایئے کہ $LM =7.2$ سم ، $\angle M = 105^\circ$، $MN = 6.4$ سم ہو تب مثلث LMN بنایئے اور اس کا حائط دائرہ بنایئے۔

(5) ΔDEF بنایئے $DE = EF =6$ سم، $\angle F = 45^\circ$ اور اس مثلث کا حائط دائرہ بنایئے۔

مجموعہ سوالات 6

.1 درج ذیل کثیر متبادل سوالوں کے دیے ہوئے جواب میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) ایک دائرہ کا نصف قطر 10 سم ہے۔اس کا ایک وتر دائرہ کے مرکز سے 6 سم فاصلہ پر ہے۔تو اس وتر کی لمبائی کتنی ہے؟

(A) 16 سم (B) 8 سم (C) 12 سم (D) 32 سم

(ii) مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف متراکز ہوتے ہیں۔اس نقطہ تراکز کو کیا کہتے ہیں؟

(A) ہندسی مرکز (B) حائط مرکز (C) داخلی مرکز (D) عمودی تراکز

(iii) مثلث کے تمام راسوں سے گذرنے والے دائرہ کو کیا کہتے ہیں؟

(A) حائط دائرہ (B) داخلی دائرہ (C) متماثل دائرے (D) ہم مرکز دائرے

(iv) ایک دائرے کے وتر کی لمبائی 24 سم ہے۔اس کا مرکز سے فاصلہ 5 سم ہو تو اس دائرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

(A) 12سم (B) 13سم (C) 14سم (D) 15سم

(v) 2.9 سم نصف قطر والے دائرہ میں زیادہ سے زیادہ کتنی لمبائی کے وتر ہو سکتے ہیں؟

(A) 3.5سم (B) 7سم (C) 10سم (D) 5.8سم

(vi) ایک دائرہ کا نصف قطر 4 سم ہے۔O دائرہ کا مرکز ہے۔ $l\,(OP) = 4.2$ سم ہو تو نقطہ P کا مقام کہاں ہے؟

(A) مرکز پر (B) دائرہ کے اندرونی حصہ میں (C) دائرہ کے بیرون میں (D) دائرہ پر

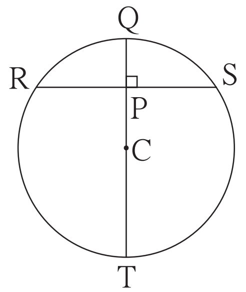
(vii) ایک دائرہ میں متوازی وتروں کی لمبائیاں 6 سم اور 8 سم ہے۔ اس دائرے کا نصف قطر 5 سم ہو تب ان وتروں کے درمیان کتنا فاصلہ ہے؟

(A) 2 سم (B) 1 سم (C) 8 سم (D) 7 سم

2. متساوی الاضلاع Δ DSP میں DS = 7.5 سم ہو تب Δ DSP کا حائط دائرہ اور داخلی دائرہ بنایئے۔ حائط دائرہ اور داخلی دائرہ کے نصف قطر ناپ کر لکھیے۔ حائط دائرہ کے نصف قطر کی داخلی دائرہ کے نصف قطر سے نسبت معلوم کیجیے۔

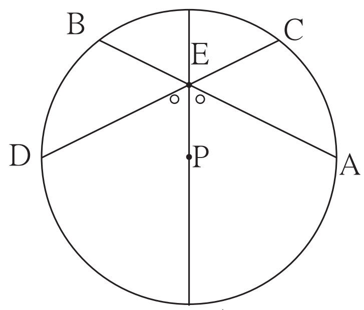
3. ΔNTS میں NT = 5.7 سم، TS = 7.5 سم اور $\angle$ NTS = 110° ہے تب Δ NTS بنا کر اس کا حائط دائرہ اور داخلی دائرہ بنایئے۔

4. شکل 6.19 میں C دائرہ کا مرکز ہے۔ قطعہ QT قطر ہے۔ CP = 5, CT = 13 ہو تب وتر RS معلوم کیجیے۔



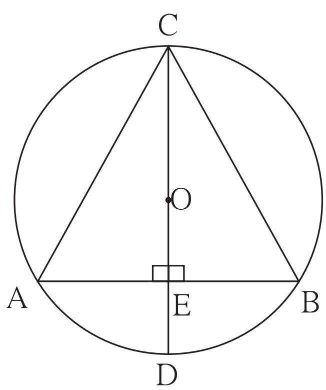
شکل 6.19

5. شکل 6.20 میں P دائرہ کا مرکز ہے۔ وتر AB اور وتر CD، قطر کو نقطہ E پر قطع کرتے ہیں۔ اگر $\angle$ AEP $\cong$ $\angle$ DEP تو ثابت کیجیے کہ AB = CD



شکل 6.20

6. شکل 6.21 میں O مرکز والے دائرہ کا قطر CD ہے اور AB وتر ہے۔ قطر CD، وتر AB کے E نقطہ پر عمود ہے۔ تو دکھایئے کہ ΔABC متساوی الساقین مثلث ہے۔



شکل 6.21

ITC Tools or Links

Geogebra Software کی مدد سے مختلف دائرے بنا کر درمیان میں وتروں کی خصوصیات کا عملی طور پر تجربہ کیجیے۔ الگ الگ حائط دائرے، مثلثوں کے داخلی دائرے بنایئے۔ Move Option کا استعمال کر کے اصل مثلثوں کی ساخت میں تبدیلی کر کے داخلی مرکز، حائط مرکز کے کس طرح تبدیل ہوتے ہیں۔ ان کا عملی طور پر مشاہدہ کیجیے۔

❑❑❑

7 محددی علم ہندسہ Co-ordinate Geometry

آیئے ، سیکھیں

- محور، مبداء اور ربع
- نقطہ کے مستوی میں محددین
- نقطہ مرتسم کرنا
- X– محور کے متوازی خط
- Y– محور کے متوازی خط
- خط کی مساوات

ایک عمارت کے سامنے میدان میں چنٹو اور اس کے دوست کرکٹ کھیل رہے تھے۔ ایک بزرگ وہاں تشریف لائے۔

بزرگ : ارے چنٹو، دتّا بھاؤ اسی سوسائٹی میں رہتے ہیں نا؟

چنٹو : جی ہاں، یہیں رہتے ہیں ۔ دوسرے منزلہ پر ان کا گھر ہے۔ یہاں سے وہ کھڑکی دکھ رہی ہے نا وہیں۔

بزرگ : ارے، دوسرے منزلہ پر مجھے پانچ کھڑکیاں دکھائی دے رہی ہیں۔ واقعی میں گھر کون سا ہے؟

چنٹو : دوسرے منزلے پر بائیں جانب سے تیسری کھڑکی ان کی ہے۔

چنٹو کے ذریعے کیے گئے دتّا بھاؤ کے گھر کے مقام کا وضاحتی بیان دراصل محددی علم ہندسہ کا اصل تصور ہے۔ گھر کا مقام واقعی سمجھنے کے لیے صرف منزلہ کا نمبر بتانا کافی نہیں ہے بلکہ بائیں طرف سے یا دائیں طرف سے کتنے نمبر پر گھر ہے بتانا ہوگا۔ یعنی ترتیب سے دو اعداد بتانا ہوگا۔ زمین سے دوسرا منزلہ بائیں طرف سے تیسری کھڑکی، اس طرح دو ترتیبی اعداد کا استعمال کرنا ہوتا ہے۔

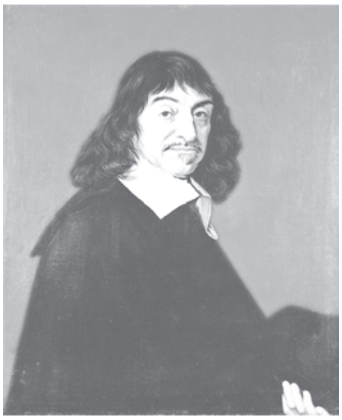
آیئے سمجھ لیں

محور، مبداء اور ربع (Axes, Origin, Quadrants)

دتّا بھاؤ کے گھر کے مقام دو ترتیبی اعداد سے حقیقی طور پر بتائے گئے ہیں۔ اسی طرح ایک دوسرے پر عمود، دو خطوط سے فاصلوں کے ذریعے مستوی میں کسی نقطہ کا مقام صحیح طور پر بتا سکتے ہیں۔

کسی نقطہ کا مستوی میں مقام بتانے کے لیے اس مستوی میں ایک افقی عددی خط کھینچتے ہیں۔ اس عددی خط کو X– محور کہتے ہیں۔

رینے دیکارٹ (1596 - 1650)



سترہویں صدی عیسوی میں فرانسیسی ریاضی داں رینے دیکارت نے مستوی میں نقطہ کا مقام بالکل صحیح طور پر ظاہر کرنے کے لیے ''محددی نظام'' پیش کیا۔اس نظام کو ''کارتیسین محددی نظام'' کہتے ہیں۔ دیکارت کے نام پر یہ نام دیا گیا ہے۔دیکارت نے سب سے پہلے علم ہندسہ اور الجبرا کے درمیان ربط پیدا کیا۔جس کی وجہ سے ریاضی میں انقلاب آیا۔

کارتیسین محددی نظام ہی تجزیاتی علم ہندسہ (Analytical Geometry) کا اساس ہے۔

'لاجیومیٹرک' رینے دیکارت کی پہلی کتاب ہے۔اس کتاب میں انھوں نے علم ہندسے کے مطالعہ کے لیے الجبرا کا استعمال کیا۔مستوی میں نقطہ حقیقی اعداد کی ترتیبی جوڑی سے ظاہر کر سکتے ہیں۔اسے انھوں نے سب سے پہلے اپنی کتاب میں پیش کیا۔اس مرتب جوڑی کو کارتیسین محددین کہتے ہیں۔

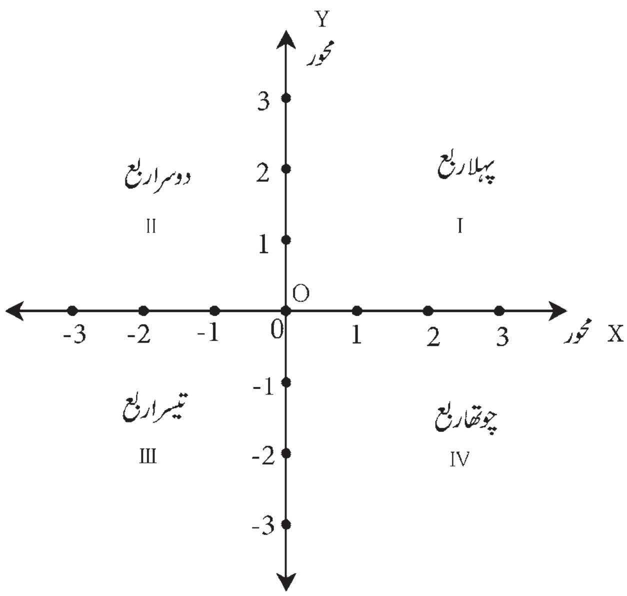
محددی علم ہندسہ کا استعمال علم طبیعات، انجینئرنگ، جہاز رانی، علم طبقات الارض اور فن جیسے مختلف شعبوں میں کیا جاتا ہے۔ٹیکنالوجی کی ترقی میں محددی علم ہندسہ اہمیت کا کردار ادا کرتا ہے۔جیوجبرا میں علم ہندسہ اور الجبرا میں ربط واضح طور پر دکھائی دیتا ہے۔Geometry اور Algebra ان دونوں الفاظ سے ہی 'Geogebra' نام دیا گیا ہے۔

X-محور پر 0 محدد والے نقطہ سے X محور پر عمود، دوسرا خط Y-محور ہے۔عام طور پر دونوں عددی خط پر 0 عدد ایک ہی نقطہ سے ظاہر کی جاتی ہے۔اس نقطہ کو مبداء (Origin) کہتے ہیں۔اسے انگریزی حرف O سے ظاہر کرتے ہیں۔

X-محور پر O کے دائیں طرف مثبت عدد جب کہ بائیں طرف منفی عدد دکھاتے ہیں۔

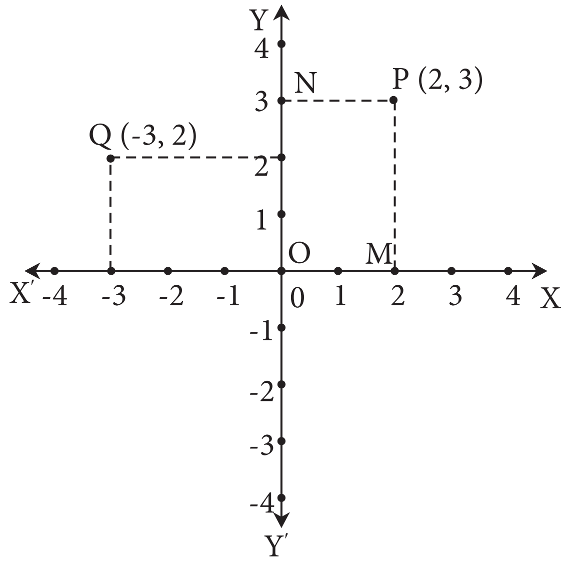
Y-محور پر O کے اوپر مثبت عدد اور نیچے منفی عدد دکھاتے ہیں۔

X اور Y محوروں کی وجہ سے مستوی کے چار حصے ہوجاتے ہیں۔ ہر حصہ کو ربع کہتے ہیں۔شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق گھڑی کی غیر ساعت دار سمت سے ربعات کے نمبر شمار دینے کا رواج ہے۔



شکل 7.1

(Co-ordinates of a point in a plane) مستوی میں نقطہ کے معاون محددین



شکل 7.2

X-محور اور Y-محور کے ذریعے متعین کیے گئے مستوی میں نقطہ P دکھایا گیا ہے۔اس کا مقام اس کے دونوں محوروں سے فاصلہ سے متعین کرتے ہیں ۔ اس کے لیے X-محور ⊥ PM قطعہ اور Y-محور ⊥ PN قطعہ بنائیے۔

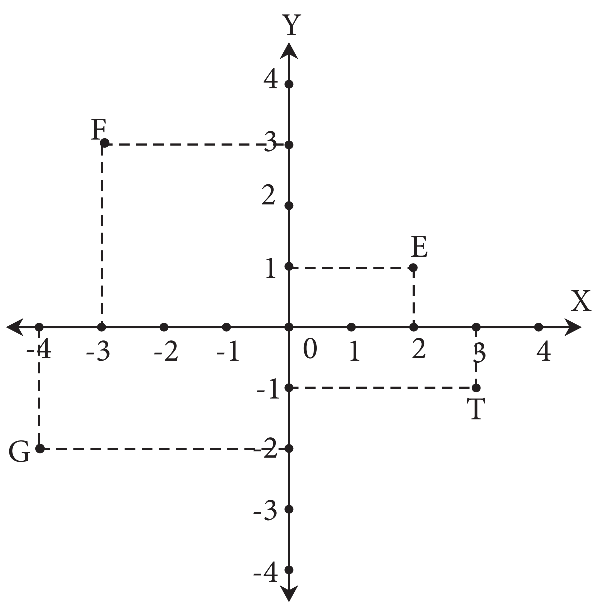
M کا X-محور پر محدد 2 ہے۔N کا Y-محور پر محدد 3 ہے۔اس لیے P کا x محدد 2 اور y محدد 3 ہے۔

نقطہ کا مقام بتاتے وقت اس کا x محدد پہلے بتانے کا رواج ہے۔اس مفروضے کے لحاظ سے p نقطہ کے محددین کا محوروں سے فاصلہ بالترتیب 2 ، 3 کا تعین کرتا ہے۔اور نقطہ P کے مقام کے اعداد کو (2, 3) جوڑی سے مختصراً بتاتے ہیں۔

نقطہ Q سے X-محور پر QS عمود کھینچا اور Y-محور پر QR عمود کھینچا۔ Q کا X-محور پر محدد 3− اور Y- محور پر محدد 2 ہے۔اس لیے نقطہ Q کے محددین (−3, 2) ہیں۔

مثال : متصلہ شکل میں دکھائے ہوئے T, G, F, E نقاط کے محددین لکھیے۔

حل :
- نقطہ E کے محددین (2,1) ہیں۔
- نقطہ F کے محددین (−3,3) ہیں۔
- نقطہ G کے محددین (−4,−2) ہیں۔
- نقطہ T کے محددین (3,−1) ہیں۔



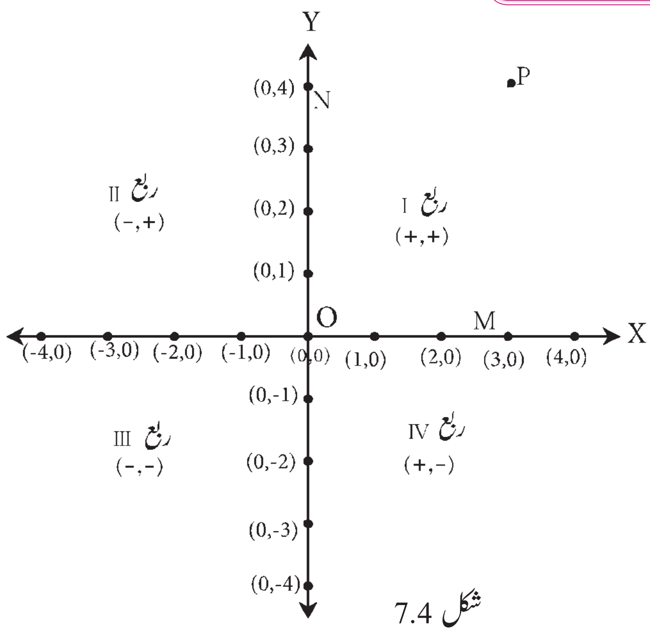
شکل 7.3

آیئے سمجھ لیں

محوروں پر نقاط کے محددین (Co-ordinate of points on the axes)

M نقطہ کا x محدد یعنی نقطہ M کا Y-محور سے فاصلہ ہے۔اس لیے M کا x محدد 3 ہے۔اس نقطہ کا اس X-محور سے فاصلہ 0 ہے۔اس لیے M کا y محدد 0 ہے اور اس بنا پر X-محور پر M نقطہ کے محددین (3,0) ہیں۔ Y-محور پر N نقطہ کا y محدد 4 ہے۔کیونکہ وہ نقطہ X-محور سے 4 فاصلہ پر ہے اور نقطہ N کا Y-محور سے فاصلہ صفر ہے اس لیے x محدد 0 ہے۔

اس بنا پر Y-محور پر نقطہ N کے محددین (0,4) ہیں۔



شکل 7.4

اب O مبدا X-اور Y-دونوں محوروں پر واقع ہے۔اس نقطہ کا X- اور Y-دونوں محوروں سے فاصلہ 0 ہے۔اس لیے O کے محددین (0,0) ہیں۔

اس بنا پر مستوی میں ہر نقطہ سے محددین کی ایک اور صرف ایک جوڑی (مرتب جوڑی) مربوط ہے۔

اسے دھیان میں رکھیں

- X-محور پر ہر نقطہ کا y محدد صفر ہوتا ہے۔
- Y-محور پر ہر نقطہ کا x محدد صفر ہوتا ہے۔
- مبدا کے محددین (0,0) ہوتے ہیں۔

مثال : درج ذیل نکات کس ربع میں واقع ہیں یا کس محور پر واقع ہیں۔پہچانیے۔

A(5,7), B(−6,4), C(4,−7), D(−8,−9), P(−3,0), Q(0,8)

حل : A(5, 7) کا x محدد مثبت اور y محدد مثبت ہے۔ $\therefore$ نقطہ A پہلے ربع میں واقع ہے۔

B(−6, 4) کا x محدد منفی اور y محدد مثبت ہے۔ $\therefore$ نقطہ B دوسرے ربع میں واقع ہے۔

C(4, −7) کا x محدد مثبت اور y محدد منفی ہے۔ $\therefore$ نقطہ C چوتھے ربع میں واقع ہے۔

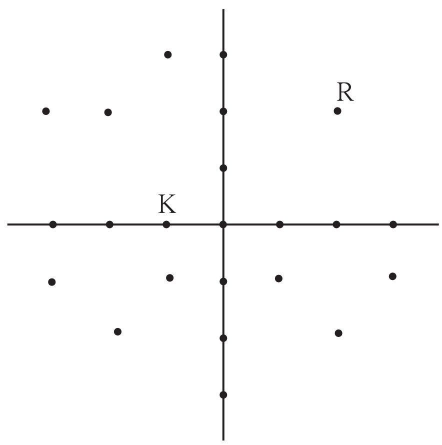
D(-8, −9) کا x محدد منفی اور y محدد منفی ہے۔ $\therefore$ نقطہ D تیسرے ربع میں واقع ہے۔

P (–3, 0) کا y محدد صفر ہے۔ ∴ نقطہ P، X-محور پر واقع ہے۔

Q (0, 8) کا x محدد صفر ہے۔ ∴ نقطہ Q، Y-محور پر واقع ہے۔

عملی کام : اسکول کے میدان پر متصلہ شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق ایک افقی اور ایک عمودی قطار میں طلبہ کو بٹھائیے، جس کی وجہ سے X-محور اور Y-محور بنتے ہیں۔

- مختلف رنگوں سے دکھائے ہوئے دھبوں کی جگہ چاروں ربعات میں طلبہ کو بٹھائیے۔
- اب مختلف طلبہ کے نام کے پہلے حرف کو ادا کر کے شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق کھڑا کیجیے اور ان کے محددین پوچھیے۔ مثلاً راجندر (2,2) اور کرشما (–1,0)
- اس طرح اس میدان میں عملی کام سے مستوی میں نقاط کے مقام کھیل کھیل اور مزاح سے آسانی سے واضح ہو جائیں گے۔



شکل 7.5

آیئے سمجھ لیں

دیے ہوئے محددین سے مربوط نقاط مرتسم کرنا (To plot the points with given co-ordinates)

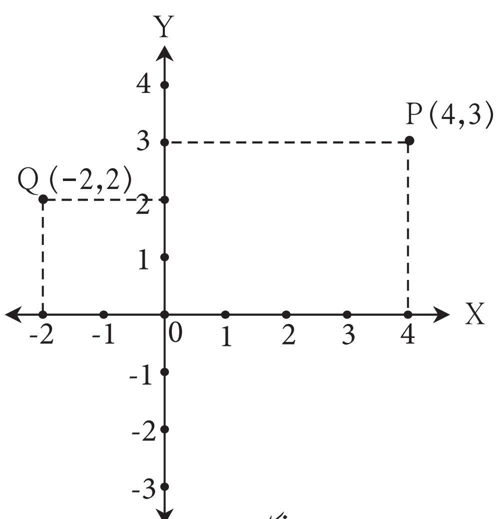
فرض کیجیے P(4,3) اور Q(–2, 2) نقاط کو مرتسم کرنا ہے۔

نقطہ مرتسم کرنے کا مرحلہ :

(i) مستوی میں X-محور اور Y-محور کھینچیے۔ مبداء دکھائیے۔

(ii) P(4, 3) اس نقطہ کو دکھانے کے لیے X-محور پر 4 عدد کو دکھانے والے نقطہ سے Y-محور کے متوازی خط کھینچیے۔

Y-محور پر 3 عدد دکھانے والے نقطہ سے X-محور کے متوازی خط کھینچیے۔



شکل 7.6

(iii) ان دونوں خطوط کا نقطہ تقاطع P(4, 3) نقطہ ہے۔ یہ نقطہ کس ربع میں ہے؟ مشاہدہ کیجیے۔

(iv) اسی طرح Q(−2, 2) اس نقطہ کو مرتسم کیجیے۔ کیا یہ نقطہ دوسرے ربع میں آیا ہے؟ اسی طرح محددی نظام سے R(−3, −4)، S(3, −1) نقاط مرتسم کیجیے۔

مثال : درج ذیل نقاط کس ربع میں ہیں یا کس محور پر؟ لکھیے۔

(i) (5,3)　(ii) (-2,4)　(iii) (2,-5)　(iv) (0,4)

(v) (-3,0)　(vi) (-2,2.5)　(vii) (5,3.5)　(viii) (-3.5,1.5)

(ix) (0, -4)　(x) (2,-4)

حل :

	محددین	ربع/ محور		محددین	ربع/ محور
(i)	(5,3)	ربع I	(vi)	(-2, -2.5)	ربع III
(ii)	(-2,4)	ربع II	(vii)	(5,3.5)	ربع I
(iii)	(2,-5)	ربع IV	(viii)	(-3.5,1.5)	ربع II
(iv)	(0,4)	Y-محور	(ix)	(0, -4)	Y-محور
(v)	(-3,0)	X-محور	(x)	(2,-4)	ربع IV

مشقی سیٹ 7.1

1. درج ذیل نقاط ان کے محددین کی بنا پر کس ربع میں یا کس محور پر؟ لکھیے۔

• A(-3,2), • B(-5,-2), • K(3.5,1.5), • D(2,10),
• E(37,35), • F(15,-18), • G(3,-7), • H(0,-5),
• M(12,0), • N(0,9), • P(0,2.5), • Q(-7,-3)

2. درج ذیل نقاط کس ربع میں ہو سکتے ہیں؟

(i) جن کے دونوں محددین مثبت ہیں۔

(ii) جن کے دونوں محددین منفی ہیں۔

(iii) جن کے x محدد مثبت اور y محدد منفی ہے۔

(iv) جن کے x محدد منفی اور y محدد مثبت ہے۔

3. مستوی میں ایک محددی نظام متعین کیجیے اور درج ذیل نقاط مرتسم کیجیے۔

L(-2,4), M(5,6), N(-3,-4), P(2,-3), Q(6,-5), S(7,0), T(0,-5)

آیئے سمجھ لیں

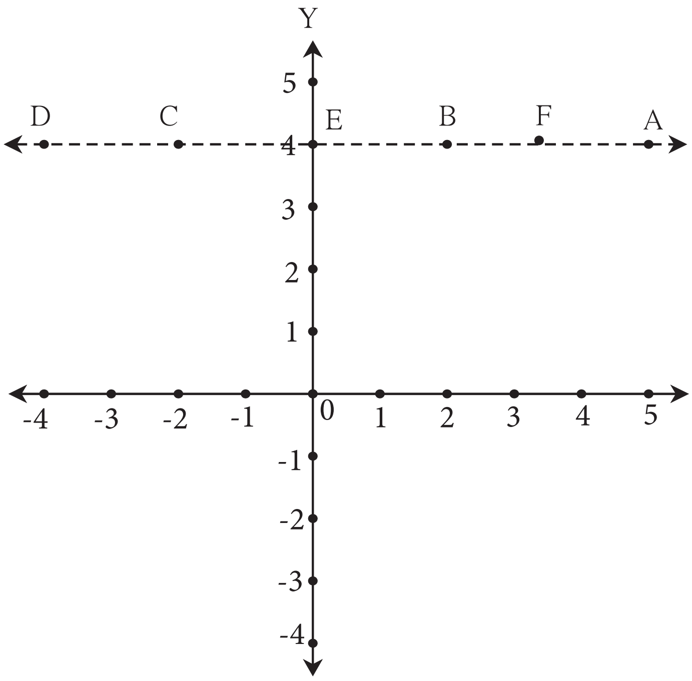
X-محور کے متوازی خط (Lines parallel to X-axis)

- ترسیمی کاغذ پر درج ذیل نقاط مرتسم کیجیے۔

A(5,4), B(2,4), C(−2,4), D(−4,4), E(0,4), F(3,4)

- نقاط کے محددین کا مشاہدہ کیجیے۔
- تمام نقاط کے y محدد مساوی ہیں۔کیا یہ سمجھ میں آیا؟
- تمام نقاط ہم خطی ہیں۔
- یہ خط کس محور کے متوازی ہے؟
- خط DA پر ہر نقطے کا y محدد مساوی ہے یعنی 4 ہے۔وہ مستقل ہے۔اس لیے خط DA کا بیان $y = 4$ مساوات سے کرتے ہیں۔کسی بھی نقطے کا y محدد 4 ہو تب وہ نقطہ اس خط X پر یعنی خط DA پر واقع ہے۔

X-محور سے 4 اکائی فاصلہ پر متوازی خط کی مساوات $y = 4$ ہے۔



شکل 7.7

آیئے، بحث کریں

- X-محور کے متوازی اور اس سے 6 اکائی فاصلہ پر X-محور کے نیچے کیا ایسا کوئی خط بنایا جا سکتا ہے؟
- (−3,−6)، (10,−6)، $(\frac{1}{2}, -6)$ کیا یہ تمام نقاط اس خط پر واقع ہیں؟
- اس خط کی مساوات کون سی ہوگی؟

اسے دھیان میں رکھیں

اگر $b > 0$ ہو اور $y = b$، X-محور کے متوازی $(0, b)$ نقطہ سے گزرنے والا خط کھینچیں تب وہ X-محور کے اس کے اوپر کی طرف متوازی ہوگی

اور $b < 0$ ہو تب وہ خط X-محور کے اس کے نیچے کی طرف کے متوازی ہوگی۔

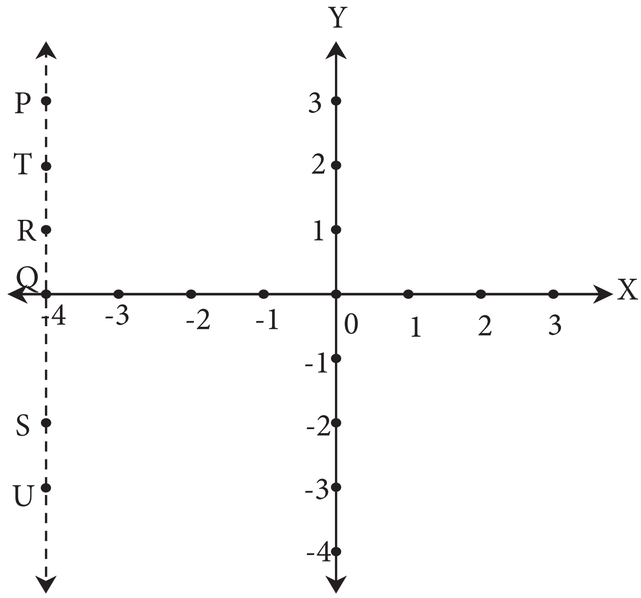
X-محور کے متوازی، خط کی مساوات $y = b$ کی صورت میں آتی ہے۔

آیئے سمجھ لیں

Y-محور کے متوازی خط (Lines parallel to Y-axis)

ترسیمی کاغذ پر درج ذیل نقاط مرتسم کیجیے۔

P(−4,3),   Q(−4,0),   R(−4,1),   S(−4,−2),   T(−4,2),   U(−4,−3)



شکل 7.8

- نقاط کے محددین کا مشاہدہ کیجیے۔
- کیا آپ کو یہ سمجھ میں آیا کہ تمام نقاط کے x محدد مساوی ہیں؟
- کیا تمام نقاط ہم خطی ہیں؟
- یہ خط کس محور کے متوازی ہے؟
- خط PS پر واقع ہر نقطے کا x محدد مساوی ہے یعنی 4− ہے۔ وہ مستقل ہے۔ اس لیے خط PS کا بیان $x = -4$ مساوات سے کرتے ہیں۔ جس نقطے کا x محدد 4− ہو تب وہ نقطہ اس خط پر یعنی خط PS پر واقع ہوگا۔

Y-محور کے بائیں طرف 4 اکائی فاصلہ پر متوازی خط کی مساوات $x = -4$ ہے۔

آیئے، بحث کریں

- کیا ایسا خط کھینچا جا سکتا ہے جو Y-محور کے متوازی اور اس سے 2 اکائی فاصلہ پر دائیں طرف واقع ہے؟
- (2,10)، (2,8)، $(2, -\frac{1}{2})$ کیا یہ تمام نقاط اس خط پر واقع ہیں؟
- اس خط کی مساوات کون سی ہے؟

اسے دھیان میں رکھیں

اگر $x = a$ یہ Y-محور کے متوازی، $(a, 0)$ سے گزرنے والا خط کھینچیں اور $a > 0$ ہو تب وہ خط Y محور کے دائیں جانب ہوتا ہے۔ اگر $a < 0$ ہو تب وہ خط Y-محور کے بائیں جانب ہوتا ہے۔ Y-محور کے متوازی خط کی مساوات $x = a$ کی صورت میں ہوتی ہے۔

اسے دھیان میں رکھیں

(1) X-محور پر واقع ہر نقطے کا y محدد 0 ہوتا ہے۔اسکے برعکس جس نقطے کا y محدد 0 ہوتا ہے، وہ X-محور پر واقع ہوتا ہے۔اس لیے X-محور کی مساوات $y = 0$ لکھتے ہیں۔

(2) Y-محور پر واقع ہر نقطے کا x محدد 0 ہوتا ہے۔اس کے برعکس جس نقطے کا x محدد 0 ہوتا ہے، وہ Y-محور پر واقع ہوتا ہے۔اس لیے Y-محور کی مساوات $x = 0$ لکھتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

خطی مساوات کی ترسیم (Graph of Linear equation)

مثال : $x = 2$ اور $y = -3$، ان مساواتوں کی ترسیم کھینچیے ۔

حل : (i) ترسیمی کاغذ پر X-محور اور Y-محور کھینچیے ۔

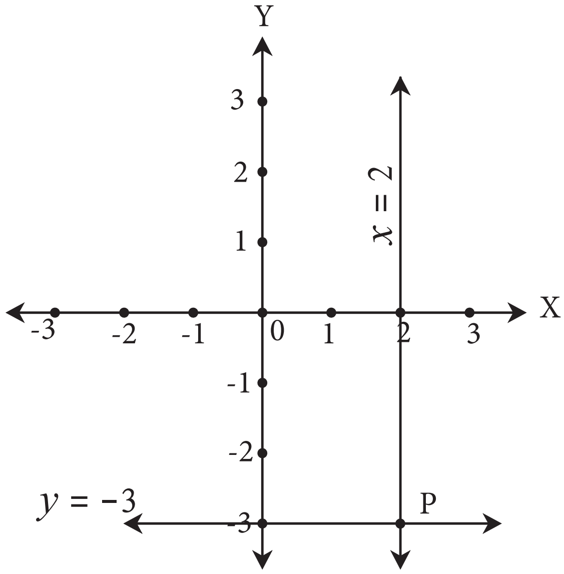
(ii) $x = 2$ دیا ہوا ہے۔اس لیے Y-محور کے دائیں طرف 2 اکائی فاصلے پر Y-محور کے متوازی خط کھینچیے ۔

(iii) $y = -3$ دیا ہوا ہے۔اس لیے X-محور کے نیچے کی طرف 3 اکائی فاصلے پر X-محور کے متوازی خط کھینچیے ۔

(iv) محوروں کے متوازی کھینچے گئے یہ خطوط دی ہوئی مساواتوں کی ترسیم ہیں۔

(v) یہ دونوں خطوط ایک دوسرے کو جہاں قطع کرتے ہیں اس P نقطہ کے محددین لکھیے۔

(vi) کیا P کے محددین $(2, -3)$ ہیں؟ اس کی تصدیق کیجیے۔



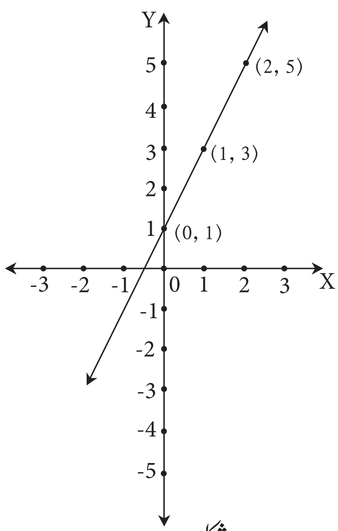
شکل 7.9

عام صورت میں خطی مساوات کی ترسیم

عملی کام :

ترسیمی کاغذ پر $(0, 1)$، $(1, 3)$، $(2, 5)$ نقاط مرتسیم کیجیے۔کیا وہ ہم خطی ہیں؟ جانچ کیجیے۔اگر ہم خطی ہوں تب ان سے گذرنے والا خط کھینچیے ۔

- وہ خط کن کن ربعات سے گذرتا ہے۔مشاہدہ کیجیے۔
- وہ خط Y-محور کو جس نقطہ پر قطع کرتا ہے اس نقطے کے محددین لکھیے ۔
- اس خط پر تیسرے ربع میں واقع کوئی بھی ایک نقطہ بتایئے۔اس کے محددین لکھیے ۔



شکل 7.10

مثال : $2x - y + 1 = 0$ یہ ایک دو متغیری عام صورت کی مساوات ہے۔اس مساوات کی ترسیم کھینچیے ۔

حل : $2x - y + 1 = 0$ یعنی $y = 2x + 1$

x کی کچھ قیمتیں لے کر اور اس کی بناء پر y کی نظیری قیمتیں معلوم کریں گے۔

مثلاً اگر $x = 0$ ، یہ قیمت مساوات میں رکھیں تو $y = 1$ قیمت حاصل ہوگی۔

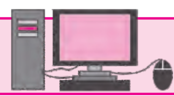
اس طرح x کی 0، 1، 2، $\frac{1}{2}$، -2 قیمتیں لے کر y کی قیمت معلوم کریں گے۔

ان قیمتوں کو مرتب جوڑی کی صورت میں جدول میں لکھیں گے۔

x	0	1	2	$\frac{1}{2}$	-2
y	1	3	5	2	-3
(x, y)	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(2, 5)$	$(\frac{1}{2}, 2)$	$(-2, -3)$

ان نقاط کو مرتسم کریں گے۔مرتسم نقاط ہم خطی ہیں۔اس کا اطمینان کرلیں گے۔ان تمام نقاط سے گذرنے والا خط کھینچیں گے۔یہ خط یعنی $2x - y + 1 = 0$ کی مساوات کی ترسیم ہے۔

ITC Tools or Links



Geogebra Software کی مدد سے X-محور اور Y-محور کھینچیے۔مختلف نقاط مرتسم کیجیے۔ Algebraic View میں نقاط کے محددین دیکھیے اور مطالعہ کیجیے۔محوروں کے متوازی خطوط کی مساواتیں دیکھیے ۔ Move Option کا استعمال کرکے خطوط کے مقام بدلتے رہیے۔X-محور اور Y-محور کی مساواتیں کون کون سی آتی ہیں؟

مشقی سیٹ 7.2

1. ترسیمی کاغذ پر $A(3, 0)$، $B(3, 3)$، $C(0, 3)$ نقاط مرتسم کیجیے۔ AB اور BC جوڑیے۔کون سی شکل حاصل ہوتی ہے۔اسے لکھیے ۔
2. Y-محور کے متوازی اور اس محور کے بائیں طرف 7 اکائی فاصلے پر واقع خط کی مساوات لکھیے ۔
3. X-محور کے متوازی اور اس محور کے نیچے 5 اکائی فاصلے پر واقع خط کی مساوات لکھیے ۔
4. نقطہ $Q(-3, -2)$ Y-محور کے متوازی واقع خط پر ہے۔اس خط کی مساوات لکھیے اور اس کی ترسیم کھینچیے ۔
5. Y-محور اور $x = -4$ متوازی خطوط ہیں تو ان دونوں خطوط کے درمیان کتنا فاصلہ ہے؟

6. درج ذیل میں سے کون سی مساواتوں کی ترسیم X-محور کے متوازی ہیں اور کون سی مساواتوں کی ترسیم Y-محور کے متوازی ہیں۔اسے لکھیے۔

(i) $x = 3$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x + 6 = 0$ (iv) $y = -5$

7. ترسیمی کاغذ پر A(2, 3)، B(6, –1) اور C(0, 5) نقاط مرتسم کیجیے۔اگر یہ نقاط ہم خطی ہوں تو ان کو شامل کرنے والا خط کھینچیے ۔ یہ خط X-محور اور Y-محور کو جن نقاط پر قطع کرتا ہے۔ان نقاط کے محددین لکھیے ۔

8. درج ذیل مساواتوں کی ترسیم ایک ہی محددی نظام سے مرتسم کیجیے۔ان کے نقطہ تقاطع کے محددین لکھیے ۔

$x + 4 = 0,\ y - 1 = 0,\ 2x + 3 = 0,\ 3y - 15 = 0$

9. درج ذیل مساواتوں کی ترسیم بنائیے۔

(i) $x + y = 2$ (ii) $3x - y = 0$ (iii) $2x + y = 1$

مجموعہ سوالات 7

1. درج ذیل کثیر متبادل سوالوں کے جواب میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) X-محور پر کوئی بھی نقطہ درج ذیل میں سے کس صورت میں ہوتا ہے؟

(A) (b, b) (B) $(0, b)$ (C) $(a, 0)$ (D) (a, a)

(ii) خط $y = x$، اس خط پر ہر نقطہ کے محددین درج ذیل میں سے کس صورت میں ہوتا ہے؟

(A) (a, a) (B) $(0, a)$ (C) $(a, 0)$ (D) $(a, -a)$

(iii) X محور کی مساوات درج ذیل میں سے کون سی ہے؟

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $x = y$

(iv) (-4,-3) یہ نقطہ کس ربع میں ہے؟

(A) پہلے (B) دوسرے (C) تیسرے (D) چوتھے

(v) (–5, 5)، (6, 5)، (–3, 5)، (0, 5) ان نقطہ کو شامل کرنے والے خط کی صورت کیسی ہوگی؟

(A) مبداء سے جانے والی (B) Y - محور کے متوازی

(C) X- محور کے متوازی (D) ان میں سے کوئی بھی نہیں

(iv) P(–1, 1)، Q(3, –4)، R(1, –1)، S(–2, –3)، T(–4, 4) ان نقاط میں سے چوتھے ربع میں کون سے نقاط ہیں؟

(A) P اور T (B) Q اور R (C) صرف S (D) P اور R

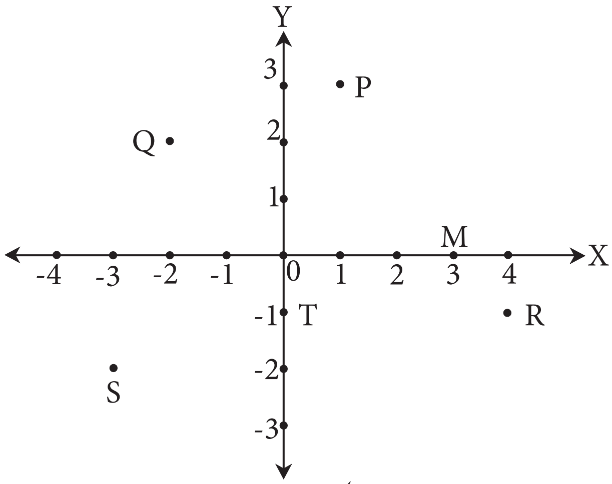
(2) شکل میں کچھ نقاط دکھائے ہوئے ہیں ۔ درج ذیل سوالوں کے جواب لکھیے ۔

(i) Q اور R نقاط کے محددین لکھیے ۔

(ii) T اور M نقاط کے محددین لکھیے ۔

(iii) تیسرے ربع میں کون سا نقطہ ہے؟

(iv) کس نقطہ کا x اور y محدد مساوی ہے۔



شکل 7.11

(3) درج ذیل نقاط مرتسم کیے بغیر لکھیے کہ وہ کس ربع یا محور پر واقع ہیں۔

(i) $(5, -3)$ (ii) $(-7, -12)$ (iii) $(-23, 4)$

(iv) $(-9, 5)$ (v) $(0, -3)$ (vi) $(-6, 0)$

(4) درج ذیل نقاط ایک ہی محددی نظام سے مرتسم کیجیے۔

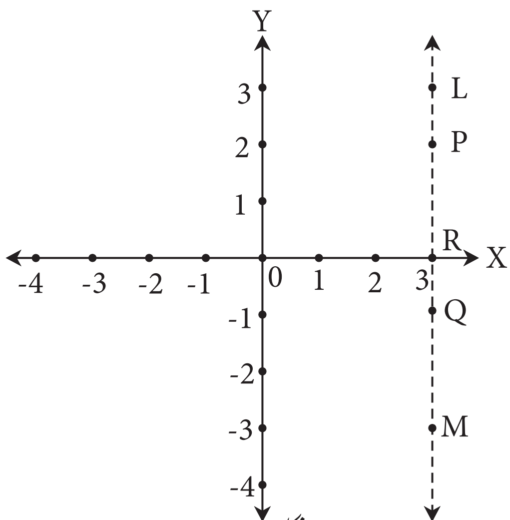
$A(1,3), B(-3,-1), C(1,-4), D(-2,3), E(0,-8), F(1,0)$

(5) متصلہ ترسیم میں خط LM یہ Y-محور کے متوازی ہے۔

(i) خط LM کا Y-محور سے کتنا فاصلہ ہے؟

(ii) P، Q، R ان نقاط کے محددین لکھیے ۔

(iii) نقطہ L اور نقطہ M کے x محدد میں فرق کتنا ہے؟



شکل 7.12

(6) X-محور کے متوازی اور X-محور سے 5 اکائی فاصلے پر کتنے خطوط ہیں۔ اُن کی مساواتیں لکھیے ۔

*(7) کسی بھی حقیقی عدد 'a' لے کر Y-محور اور $x = a$ خط کے درمیان کتنا فاصلہ ہے؟

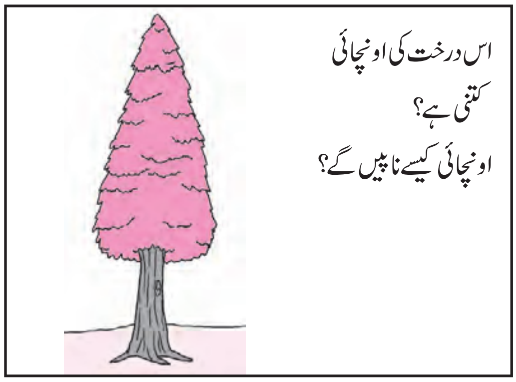
❑❑❑

8 علم مثلث Trigonometry

آیئے، سیکھیں

- علم مثلث کا تعارف
- مثلثیاتی نسبتوں کے درمیان باہمی تعلق
- مثلثیاتی نسبتیں
- مخصوص زاویوں کی مثلثیاتی نسبتیں

علم مثلث کا تعارف (Introduction to trigonometry)



ہم زمین پر فاصلہ ڈوری سے یا چلتے ہوئے ناپ سکتے ہیں۔لیکن سمندر میں جہاز کا روشنی کے مینار سے فاصلہ کس طرح ناپ سکتے ہیں؟ درخت کی اونچائی کیسے ناپیں گے؟

اوپر دی ہوئی تصاویر کا مشاہدہ کیجیے۔تصاویر میں سوال ریاضی سے تعلق رکھتا ہے۔ان سوالوں کے جوابات حاصل کرنے کے لیے ریاضی مضمون کی علم مثلث، شاخ کا استعمال ہوتا ہے۔علم مثلث کا استعمال انجینئرنگ، علم فلکیات، جہاز رانی وغیرہ شاخوں میں کیا جاتا ہے۔

علم مثلث (Trigonometry) یہ لفظ تین لاطینی الفاظ سے بنایا گیا ہے۔Tri یعنی تین، gona یعنی ضلع اور metron یعنی ناپ تول۔

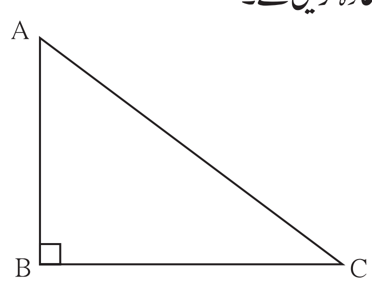
آیئے ذرا یاد کریں

ہم مثلث کا مطالعہ کر چکے ہیں۔قائمۃ الزاویہ مثلث، فیثا غورث کا مسئلہ، مشابہ مثلثوں کی خصوصیات پر مبنی علم مثلث مضمون کی ابتدا ہوتی ہے۔ ان کا اعادہ کریں گے۔

- ΔABC میں $\angle B$ قائمۃ الزاویہ ہے۔جبکہ $\angle B$ یعنی قائمہ زاویہ کے مقابل کا ضلع AC وتر ہے۔

$\angle A$ کے مقابل کا ضلع BC اور $\angle C$ کے مقابل کا ضلع AB ہے۔اس مثلث سے متعلق فیثا غورث کے مسئلہ کا بیان :

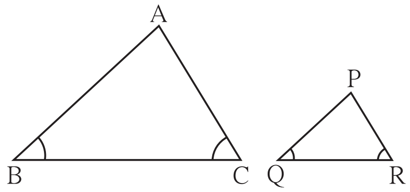
$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$



شکل 8.1

• اگر ΔABC ~ ΔPQR ہو تب ان کے نظیری اضلاع تناسب میں ہوتے ہیں۔

یعنی $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{AC}{PR}$



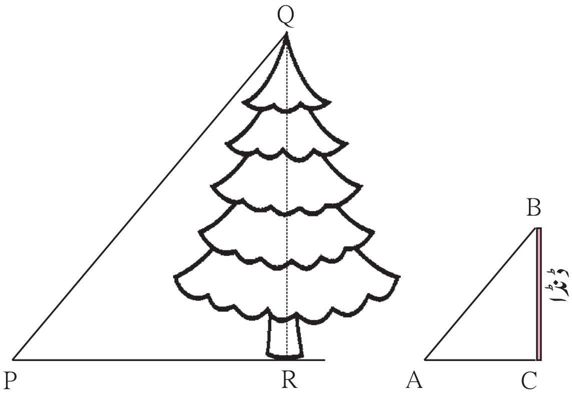
شکل 8.2

کسی بڑے درخت کی اونچائی ناپنا ہو تب متشابہ مثلثوں کے خصوصیت کا استعمال کرکے وہ کس طرح معلوم کرسکتے ہیں۔اسے دیکھیں گے۔

عملی کام :

(یہ تجربہ تیز دھوپ کے دوران کیجیے)

QR درخت کی اونچائی ہے۔ BC ایک ڈنڈے کی اونچائی ہے۔ چھوٹے ڈنڈے کو زمین میں کھڑا گاڑ کر اس کی اونچائی اور اس کے سایہ کی لمبائی ناپیے۔ درخت کے سایہ کی لمبائی ناپیے۔ سورج کی شعاعیں متوازی ہونے کی وجہ سے ΔPQR اور ΔABC



شکل 8.3

مشابہ زاویہ والے یعنی متشابہ مثلث ہیں۔ اسے سمجھ لیں۔ متشابہ مثلثوں کے نظیری اضلاع تناسب میں ہوتے ہیں۔

اس کا استعمال کرکے $\frac{BC}{AC}=\frac{QR}{PR}$ ملتا ہے۔

$$\text{درخت کی اونچائی} = QR = \frac{BC}{AC}\times PR$$

یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

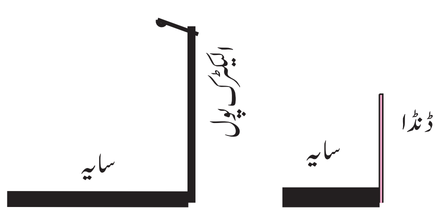
PR ، BC اور AC کی قیمتیں ہمیں معلوم ہیں۔ یہ قیمتیں مساوات میں رکھ کر QR کی لمبائی یعنی درخت کی اونچائی معلوم کی جاسکتی ہے۔

غور کیجیے

یہ تجربہ صبح 8 بجے کرنے کی بجائے دوپہر 11:30 یا 1:30 بجے کرنا سہولت بخش ہے۔ایسا کیوں؟

عملی کام :

مذکورہ بالا عملی کام کرکے آپ اپنے اطراف اونچے درخت کی اونچائی معلوم کیجیے۔ اطراف میں درخت نہ ہو تو کسی کھمبے (ستون) کی اونچائی معلوم کیجیے۔

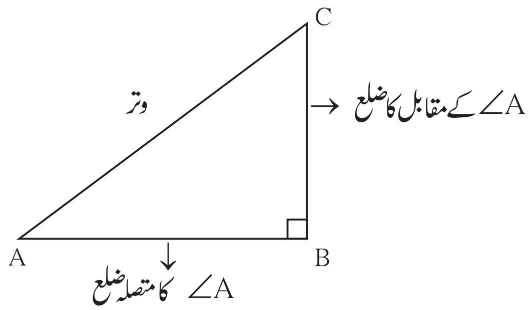


شکل 8.4

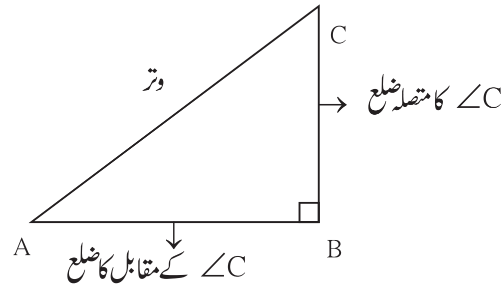
آیئے سمجھ لیں

قائمۃ الزاویہ مثلث سے متعلق کچھ اصطلاحات (Terms related to right angled triangle)

قائمۃ الزاویہ Δ ABC میں، ∠ B = 90° ہے تب ∠A اور ∠C حادہ زاویہ ہیں۔



شکل 8.5

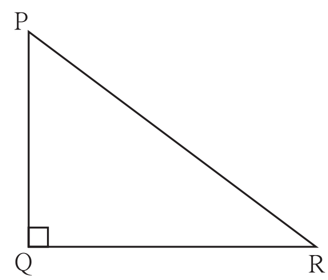


شکل 8.6

مثال : قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں،

∠P کے مقابل کا ضلع = ... , ∠P کا متصلہ ضلع = ...

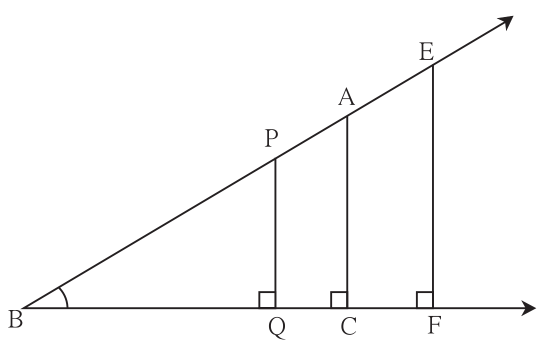
∠R کے مقابل کا ضلع = ... , ∠R کا متصلہ ضلع = ...



شکل 8.7

مثلثیاتی نسبتیں (Trigonometric Ratios)

متصلہ شکل 8.8 میں کچھ قائمۃ الزاویہ مثلث دکھائے ہوئے ہیں۔ ان کا ∠B مشترک زاویہ ہے۔اس کی وجہ سے تمام قائمۃ الزاویہ مثلث متشابہ ہیں۔



شکل 8.8

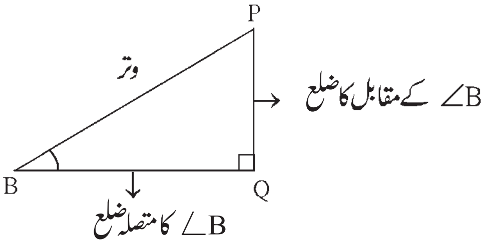
یہاں Δ ACB ~ Δ PQB

$$\therefore \frac{PB}{AB} = \frac{PQ}{AC} = \frac{BQ}{BC}$$

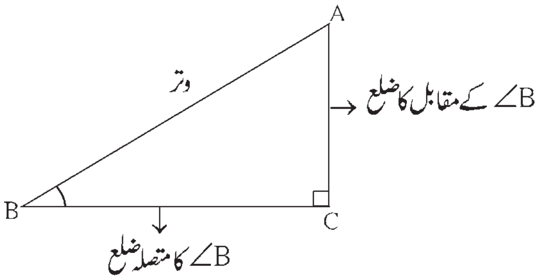
$\frac{PQ}{AC} = \frac{PB}{AB}$, $\therefore \frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB}$ ... (عمل تبدیل)

$\frac{QB}{BC} = \frac{PB}{AB}$, $\therefore \frac{QB}{PB} = \frac{BC}{AB}$ ... (عمل تبدیل)

درج ذیل اشکال 8.9 اور 8.10 کو شکل 8.8 سے علیحدہ کیے گئے مثلثوں کی ہیں۔



شکل 8.9



شکل 8.10

(i) $\triangle PQB$ میں،

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{\text{∠B کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

$\triangle ACB$ میں،

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\text{∠B کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

$\frac{PQ}{PB}$ اور $\frac{AC}{AB}$ مساوی نسبتیں ہیں۔

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{∠B کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$$

اس نسبت کو زاویہ B کی سائن (sine) نسبت کہتے ہیں۔اس نسبت کو مختصراً sinB لکھتے ہیں۔

(ii) ΔPQB اور ΔACB میں،

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\text{∠B کا متصلہ ضلع}}{\text{وتر}} \quad \text{اور} \quad \frac{BQ}{PB} = \frac{\text{∠B کا متصلہ ضلع}}{\text{وتر}}$$

$$\frac{BQ}{PB} = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{∠B کا متصلہ ضلع}}{\text{وتر}}$$

اس نسبت کو زاویہ B کی کوسائن (cosine) نسبت کہتے ہیں اس نسبت کو مختصراً cos B لکھتے ہیں۔

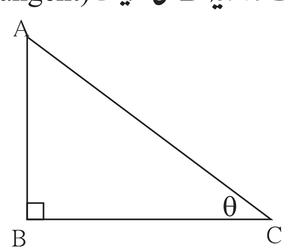
(iii) Δ PQB اور Δ ACB میں،

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\text{∠B کے مقابل کا ضلع}}{\text{∠B کا متصلہ ضلع}} \quad \text{اور} \quad \frac{PQ}{BQ} = \frac{\text{∠B کے مقابل کا ضلع}}{\text{∠B کا متصلہ ضلع}}$$

$$\frac{PQ}{BQ} = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{∠B کے مقابل کا ضلع}}{\text{∠B کا متصلہ ضلع}}$$

اس نسبت کو زاویہ B کی ٹینجینٹ (Tangent) نسبت کہتے ہیں اس نسبت کو مختصراً tan B لکھتے ہیں۔

مثال : کبھی کبھی قائمۃ الزاویہ مثلث کے حادہ زاویوں کی پیمائشوں کو θ (تھیٹا)، α (الفا)، β (بیٹا) وغیرہ لاطینی حروف سے ظاہر کرتے ہیں۔ متصلہ شکل 8.11 میں Δ ABC کے حادہ زاویہ C کی پیمائش θ حروف سے ظاہر کی گئی ہے ایسے وقت میں sin C, cos C, tan C نسبتوں کو بالترتیب $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ لکھتے ہیں۔



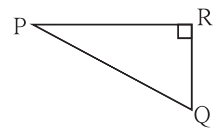
شکل 8.11

$\sin C = \sin \theta = \frac{AB}{AC}$, $\cos C = \cos \theta = \frac{BC}{AC}$, $\tan C = \tan \theta = \frac{AB}{BC}$

اسے دھیان میں رکھیں

- $\sin$ نسبت = زاویہ کے مقابل کا ضلع / وتر
- $\cos$ نسبت = زاویہ کا متصلہ ضلع / وتر
- $\tan$ نسبت = زاویہ کے مقابل کا ضلع / زاویہ کا متصلہ ضلع

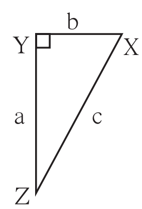
مشقی سیٹ 8.1



شکل 8.12

.1 متصلہ شکل 8.12 میں ΔPQR میں $\angle R$ قائمہ زاویہ ہے۔تب درج ذیل نسبتیں لکھیے۔

(i) $\sin P$ (ii) $\cos Q$ (iii) $\tan P$ (iv) $\tan Q$

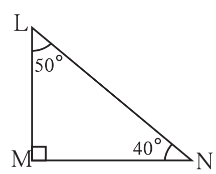


شکل 8.13

.2 متصلہ شکل 8.13 میں ΔXYZ قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

$\angle XYZ=90°$ ہے۔اضلاع کی لمبائیاں a، b، c دی ہوئی ہیں۔اس کی بناء پر درج ذیل نسبتیں لکھیے۔

(i) $\sin X$ (ii) $\tan Z$ (iii) $\cos X$ (iv) $\tan X$



شکل 8.14

.3 قائمۃ الزاویہ ΔLMN میں $\angle LMN=90°$، $\angle L=50°$ اور $\angle N= 40°$ ہے۔اس بنا پر درج ذیل نسبتیں لکھیے۔

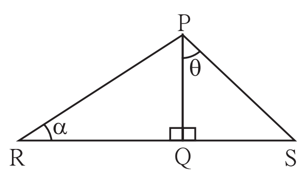
(i) $\sin 50°$ (ii) $\cos 50°$

(iii) $\tan 40°$ (iv) $\cos 40°$

.4 دی ہوئی شکل 8.15 میں $\angle PQR = 90°$، $\angle PQS = 90°$، $\angle PRQ = \alpha$ اور $\angle QPS=\theta$ ہو تب درج ذیل مثلثیاتی نسبتیں لکھیے۔

(i) $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$

(ii) $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$



شکل 8.15

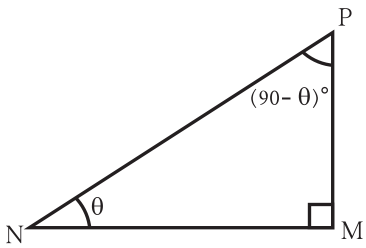
آیئے سمجھ لیں

مثلثیاتی نسبتوں کے درمیان باہمی تعلق (Relation among trignometric ratios)

شکل 8.16 میں ΔPMN قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔ $m\angle M=90°$،

$\angle P$ اور $\angle N$ ایک دوسرے کے مکملہ زاویے ہیں۔

اگر $m\angle N = \theta$ تب $m\angle P = 90 - \theta$



شکل 8.16

$$\sin\theta = \frac{PM}{PN} \quad \ldots(1)$$

$$\cos\theta = \frac{NM}{PN} \quad \ldots(2)$$

$$\tan\theta = \frac{PM}{NM} \quad \ldots(3)$$

$$\sin(90-\theta) = \frac{NM}{PN} \quad \ldots(4)$$

$$\cos(90-\theta) = \frac{PM}{PN} \quad \ldots(5)$$

$$\tan(90-\theta) = \frac{NM}{PM} \quad \ldots(6)$$

$\therefore \sin\theta = \cos(90-\theta)$ ... [بیان(1) اور (5) سے]

$\cos\theta = \sin(90-\theta)$ ... [بیان (2) اور (4) سے]

اب اس پر بھی توجہ دیجیے۔

$\tan\theta \times \tan(90-\theta) = \frac{PM}{NM} \times \frac{NM}{PM}$ ... [بیان (3) اور (6) سے]

$\therefore \tan\theta \times \tan(90-\theta) = 1$

اسی طرح، $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{PM}{PN}}{\frac{NM}{PN}} = \frac{PM}{PN} \times \frac{PN}{NM} = \frac{PM}{NM} = \tan\theta$

اسے دھیان میں رکھیں

$\cos(90-\theta) = \sin\theta,$ $\sin(90-\theta) = \cos\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta,$ $\tan\theta \times \tan(90-\theta) = 1$

* مزید معلومات کے لیے

$\frac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\,\theta,\quad \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta,\quad \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$

یعنی $\text{cosec}\,\theta$ ، $\sec\theta$ اور $\cot\theta$ بالترتیب $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ اور $\tan\theta$ کی معکوس نسبتیں ہیں۔

- $\text{cosec}\,\theta = \sec(90 - \theta)$
- $\sec\theta = \text{cosec}\,(90 - \theta)$
- $\cot\theta = \tan(90 - \theta)$
- $\tan\theta = \cot(90 - \theta)$

آیئے ذرا یاد کریں

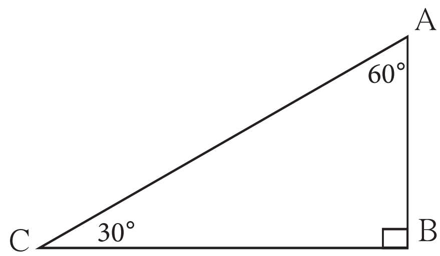
30° - 60° - 90° پیمائشوں کے مثلث کی خصوصیت

کسی مثلث کے زاویوں کی پیمائش $30°–60°–90°$ ہوں تب ہمیں معلوم ہے کہ $30°$ زاویہ کے مقابل کا ضلع وتر کے نصف ہوتا ہے۔ اور $60°$ زاویہ کے مقابل کا ضلع وتر کی لمبائی کے $\frac{\sqrt{3}}{2}$ گنا ہے۔

متصلہ شکل میں، قائمۃ الزاویہ ΔABC میں $\angle C=30°$ ، $\angle A=60°$ ،

$\angle B = 90°$ ہے۔

$\therefore\ AB = \frac{1}{2}AC$ اور $BC = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$



شکل 8.17

آیئے سمجھ لیں

30° اور 60° زاویوں کی مثلثیاتی نسبتیں (Trignometric ratios of 30°and 60° angles)

قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں، اگر $\angle R=30°$ ، $\angle P=60°$ ، $\angle Q = 90°$

اور فرض کیجیے $PQ = a$ تب

$PQ = \frac{1}{2}\ PR$

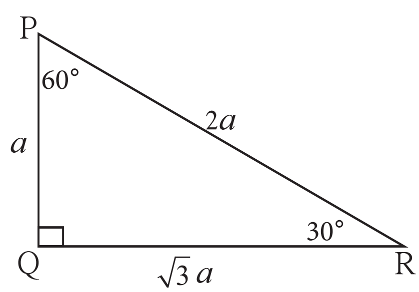
$a = \frac{1}{2}\ PR$

$\therefore\ PR = 2a$

$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} PR$

$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a$

$QR = \sqrt{3}\,a$



شکل 8.18

$\therefore$ اگر $PQ = a$ ہو تب $PR = 2a$ اور $QR = \sqrt{3}\,a$

(i) 30° پیمائش کے زاویہ کی مثلثیاتی نسبتیں

$$\sin 30° = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{PQ}{QR} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(ii) 60° پیمائش کے زاویہ کی مثلثیاتی نسبتیں

$$\sin 60° = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{QR}{PQ} = \frac{\sqrt{3}\,a}{a} = \sqrt{3}$$

قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں $\angle Q = 90°$ دیا ہوا ہے۔ $\angle P$ اور $\angle R$ ایک دوسرے کے مکملہ زاویہ ہیں۔اس لیے مکملہ زاویہ کے سائن اور کوسائن نسبتوں میں تعلق کی تصدیق کیجیے۔

$\cos \theta = \sin(90 - \theta)$

$\cos 30° = \sin(90° - 30°) = \sin 60°$

$\cos 30° = \sin 60°$

$\sin \theta = \cos(90 - \theta)$

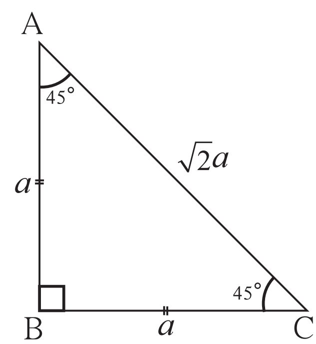
$\sin 30° = \cos(90° - 30°) = \cos 60°$

$\sin 30° = \cos 60°$

اسے دھیان میں رکھیں

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$
$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) 45° پیمائش کے زاویہ کی مثلثیاتی نسبتیں (Trignometric ratios of 45° angle)



شکل 8.19

قائمۃ الزاویہ ΔABC میں، $\angle B = 90°$، $\angle A = 45°$، $\angle C = 45°$

$\therefore$ یہ متساوی الساقین قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

فرض کیجیے $AB = a$ ہے تب $BC = a$

فیثاغورث کے مسئلہ کے رُو سے AC کی لمبائی معلوم کیجیے۔

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= a^2 + a^2$$

$$AC^2 = 2a^2$$

$$\therefore AC = \sqrt{2}\,a$$

پچھلی شکل 8.19 میں $\angle C = 45°$ ہے۔

$$\sin 45° = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

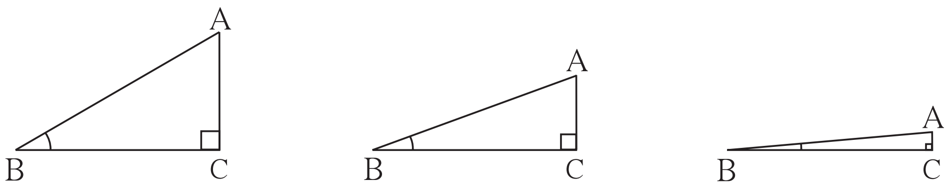
$$\cos 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

اسے دھیان میں رکھیں

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tan 45° = 1$$

(iv) 0° اور 90° پیمائشوں کے زاویوں کی مثلثیاتی نسبتیں

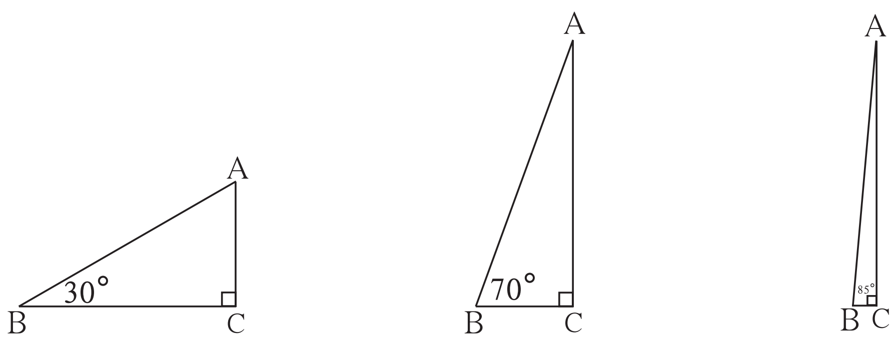


شکل 8.20

قائمۃ الزاویہ ΔACB میں $\angle C = 90°$ اور $\angle B = 30°$ ہے۔ اس لیے $\sin 30° = \frac{AC}{AB}$ یہ ہمیں معلوم ہے۔ AB کی لمبائی مستقل رکھ کر، $\angle B$ کی پیمائش جیسے جیسے کم ہوتی جاتی ہے۔ ویسے ویسے $\angle B$ کے مقابل کا ضلع AC کی لمبائی کم ہوتی جاتی ہے۔ اس لیے $\angle B$ کی پیمائش کم ہوتی ہے ویسے ویسے $\sin\theta$ کی قیمت بھی کم ہوتی ہے۔

$\therefore$ جب $\angle B$ کی پیمائش $0°$ ہوجائے گی تب AC کی لمبائی 0 ہوجائے گی۔

$$\therefore \sin 0° = \frac{AC}{AB} = \frac{0}{AB} \qquad \therefore \sin 0° = 0$$



شکل 8.21

اب شکل 8.21 میں دیکھیے اس قائمۃ الزاویہ مثلث میں $\angle B$ کی پیمائش جیسے جیسے بڑھتی جاتی ہے۔ ویسے ویسے AC کی لمبائی بڑھتی ہوئی نظر آتی ہے۔ $\angle B$ کی پیمائش اگر $90°$ ہو جاتی ہے۔ تب AB,AC کے مساوی ہو جائے گی۔

$$\therefore \sin 90° = \frac{AC}{AB} \qquad \therefore \sin 90° = 1$$

ہم نے قائمۃ الزاویہ مثلث کی مثلثیاتی نسبتیں دیکھ چکے ہیں۔

$\sin\theta = \cos(90 - \theta)$ اور $\cos\theta = \sin(90 - \theta)$

$$\therefore \cos 0° = \sin(90 - 0)° = \sin 90° = 1$$

اور $\cos 90° = \sin(90 - 90)° = \sin 0° = 0$

اسے دھیان میں رکھیں

$\sin 0° = 0, \quad \sin 90° = 1, \quad \cos 0° = 1, \quad \cos 90° = 0$

ہمیں معلوم ہے کہ،

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \therefore \tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

لیکن ، $\tan 90° = \dfrac{\sin 90°}{\cos 90°} = \dfrac{1}{0}$

لیکن $\frac{1}{0}$ یہ تقسیم نہیں کر سکتے۔ θ حادہ زاویہ بڑا ہوتے ہوتے $90°$ کے قریب ہوتے جاتا ہے۔ ویسے ویسے $\tan\theta$ تیزی سے خوب بڑھتا جاتا ہے۔ لیکن $\tan 90°$ کی قیمت طے نہیں کر سکتے۔

اسے دھیان میں رکھیں

مخصوص پیمائشوں کے زاویوں کی مثلثیاتی نسبتیں

زاویوں کی پیمائش / نسبتیں	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	طے نہیں کی جاسکتی

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) قیمت معلوم کیجیے : $2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$

حل :

$$2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$$
$$= 2 \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 2 + 0$$
$$= 2$$

مثال (2) قیمت معلوم کیجیے۔ $\frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ}$

حل : $56^\circ + 34^\circ = 90^\circ$ یعنی 56° اور 34° یہ مکملہ زاویوں کی پیمائشیں ہیں۔

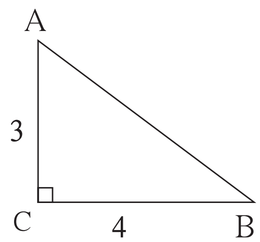
$$\sin \theta = \cos (90 - \theta)$$

$$\therefore \quad \sin 34^\circ = \cos (90 - 34)^\circ = \cos 56^\circ$$

$$\therefore \quad \frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ} = \frac{\cos 56^\circ}{\cos 56^\circ} = 1$$

مثال (3) قائمۃ الزاویہ ΔACB میں، اگر $\angle C = 90^\circ$، $AC = 3$، $BC = 4$ ہوتب $\angle A$ اور $\angle B$ کی درج ذیل مثلثیاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔

$\sin A, \ \sin B, \ \cos A, \ \tan B$



شکل 8.22

حل : قائمۃ الزویہ ΔACB میں فیثا غورث کے مسئلہ کی رُو سے

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$= 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$
$$= 5^2$$
$$AB = 5$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$$

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$$

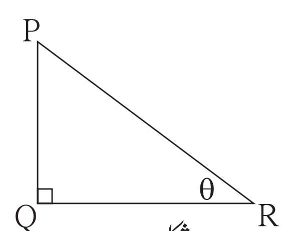
$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$$

مثال (4) قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں $\angle Q = 90^\circ$، $\angle R = \theta$ اوراگر $\sin \theta = \frac{5}{13}$ ہوتب $\cos\theta$ اور $\tan\theta$ معلوم کیجیے۔

حل : قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں $\angle R = \theta$

$$\sin \theta = \frac{5}{13}$$

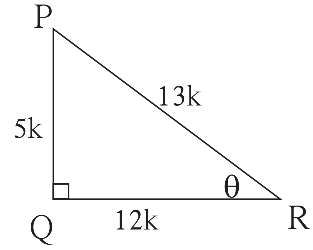
$$\therefore \quad \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$



شکل 8.23

$\therefore$ فرض کریں، PQ = 5k اور PR = 13k

فیثا غورث کے مسئلہ سے QR معلوم کریں گے۔



شکل 8.24

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

$$(5k)^2 + QR^2 = (13k)^2$$

$$25k^2 + QR^2 = 169\,k^2$$

$$QR^2 = 169\,k^2 - 25k^2$$

$$QR^2 = 144\,k^2$$

$$QR = 12k$$

اب قائمۃ الزاویہ ΔPQR میں $PQ = 5k,\ PR = 13k$ اور $QR = 12k$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}\ ,\ \tan\theta = \frac{PQ}{QR} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

غور کیجیے

(1) مذکورہ بالا مثالیں حل کرتے وقت PQ اور PR اضلاع کی لمبائی $5k$ اور $13k$ کیوں لی گئی ہیں؟

(2) کیا PQ اور PR کی لمبائی بالترتیب 5 اور 13 لی جاسکتی ہیں؟ لی جاسکتی ہوں تو تحریر میں کچھ تبدیلی کی جائے گی؟

مثلثیاتی نسبتوں کی اہم مساوات :

ΔPQR قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

$\angle PQR = 90°$، فرض کریں $\angle R = \theta$

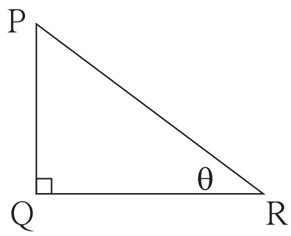
$$\sin\theta = \frac{PQ}{PR} \quad \ldots (1)$$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PR} \quad \ldots (2)$$

فیثا غورث کے مسئلہ کی رُو سے،

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

$$\therefore \frac{PQ^2}{PR^2} + \frac{QR^2}{PR^2} = \frac{PR^2}{PR^2}$$ ... (طرفین کے ہر رکن کو PR^2 سے تقسیم کیا)



شکل 8.25

$$\therefore \left(\frac{PQ}{PR}\right)^2 + \left(\frac{QR}{PR}\right)^2 = 1$$

$$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

... (بیان (1) اور (2) کی رُو سے]

اسے دھیان میں رکھیں

$(\sin\theta)^2$ یعنی $\sin\theta$ کا مربع اسے $\sin^2\theta$ لکھتے ہیں۔

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ یہ مساوات ہم نے فیثا غورث کا مسئلہ استعمال کرکے θ حادہ زاویہ والے قائمۃ الزاویہ مثلث کے لیے ثابت کر چکے ہیں۔ $\theta = 0°$ یا $\theta = 90°$ ہو تب بھی یہ مساوات مطمئن ہوتی ہے۔اس کی تصدیق کیجیے۔

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ یہ مساوات کسی بھی پیمائش کے زاویہ کے لیے مطمئن ہوتی ہے۔اس لیے اسے بنیادی متماثلہ مساوات یا دائمی مساوات کہتے ہیں۔

(i) $0 \le \sin\theta \le 1,\ 0 \le \sin^2\theta \le 1$ (ii) $0 \le \cos\theta \le 1,\ 0 \le \cos^2\theta \le 1$

مشقی سیٹ 8.2

1. درج ذیل جدول کے ہر ستون میں ایک نسبت دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے دیگر دو نسبتیں معلوم کیجیے اور خالی جگہ پر کیجیے۔

$\sin\theta$		$\frac{11}{61}$		$\frac{1}{2}$				$\frac{3}{5}$	
$\cos\theta$	$\frac{35}{37}$				$\frac{1}{\sqrt{3}}$				
$\tan\theta$			1			$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

.2 قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) $5\sin 30° + 3\tan 45°$

(ii) $\frac{4}{5}\tan^2 60° + 3\sin^2 60°$

(iii) $2\sin 30° + \cos 0° + 3\sin 90°$

(iv) $\frac{\tan 60}{\sin 60 + \cos 60}$

(v) $\cos^2 45° + \sin^2 30°$

(vi) $\cos 60° \times \cos 30° + \sin 60° \times \sin 30°$

.3 اگر $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ہو تب $\cos\theta$ معلوم کیجیے۔

.4 اگر $\cos\theta = \frac{15}{17}$ ہو تب $\sin\theta$ معلوم کیجیے۔

(1) درج ذیل کثیر متبادل سوالوں کے جواب سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) درج ذیل میں سے کون سا بیان صحیح ہے؟

(A) $\sin\theta = \cos(90-\theta)$ (B) $\cos\theta = \tan(90-\theta)$

(C) $\sin\theta = \tan(90-\theta)$ (D) $\tan\theta = \tan(90-\theta)$

(ii) $\sin 90°$ کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہے؟

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

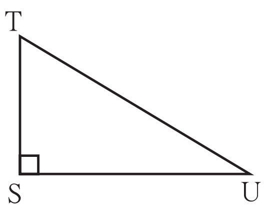
(iii) ؟ $2\tan 45° + \cos 45° - \sin 45° =$ کتنا

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(iv) ؟ $\frac{\cos 28°}{\sin 62°} =$ کتنا

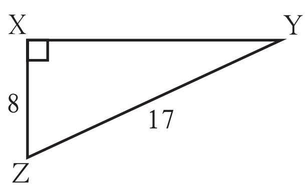
(A) 2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

(2) قائمۃ الزاویہ ΔTSU میں $TS = 5$، $\angle S = 90°$، $SU = 12$ ہو تب $\sin T, \cos T, \tan T$ معلوم کیجیے اسی طرح $\sin U, \cos U, \tan U$ معلوم کیجیے۔



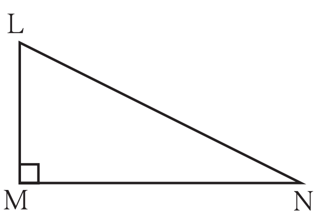
شکل 8.26

(3) قائمۃ الزاویہ مثلث ΔYXZ میں $\angle X = 90°$، $XZ = 8$ سم، $YZ = 17$ سم ہو تب $\sin Y, \cos Y, \tan Y$ اور $\sin Z, \cos Z, \tan Z$ معلوم کیجیے۔



شکل 8.27

(4) قائمۃ الزاویہ ΔLMN میں $\angle N = \theta$، $\angle M = 90°$، $\cos\theta = \frac{24}{25}$ ہو تب $\sin\theta$ اور $\tan\theta$ کی نسبتیں معلوم کیجیے۔ اسی طرح $(\sin^2\theta)$ اور $(\cos^2\theta)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔



شکل 8.28

(5) خالی جگہ پر کیجیے۔

(i) $\sin 20° = \cos \square°$

(ii) $\tan 30° \times \tan \square° = 1$

(iii) $\cos 40° = \sin \square°$

9 Surface area and Volume سطح کارقبہ اور حجم

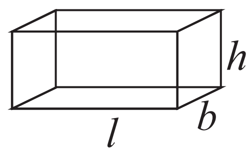
آیئے، سیکھیں

- مخروط کی سطحوں کا رقبہ
- کرّہ کی سطح کا رقبہ
- مخروط کا حجم
- کرّہ کا حجم

آیئے ذرا یاد کریں

ہم نے گذشتہ جماعت میں مستطیلی منشور (مکعب نما) مکعب، مدوّر استوانہ جیسے اجسام کی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کرنے کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

مستطیلی منشور : مستطیلی منشور (مکعب نما) کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب l, b, h ہو تب،



شکل 9.1

(i) مستطیلی منشور کی عمودی سطحوں کا رقبہ $= 2(l + b) \times h$

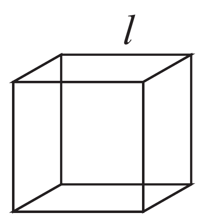
یہاں مستطیلی منشور کی عمودی 4 سطحوں کے رقبوں پر غور کیا گیا ہے۔

(ii) مستطیلی منشور کی کل سطحوں کا رقبہ $= 2(lb + bh + lh)$

یہاں، مستطیلی منشور کی چھے سطحوں کے رقبوں پر غور کیا گیا ہے۔

(iii) مستطیلی منشور کا حجم $= l \times b \times h$

مکعب : مکعب کا کنارہ (edge) l ہو تب



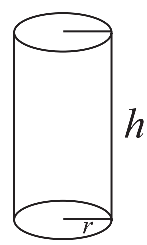
شکل 9.2

(i) مکعب کی کل سطحوں کا رقبہ $= 6l^2$

(ii) مکعب کی عمودی سطحوں کا رقبہ $= 4l^2$

(iii) مکعب کا حجم $= l^3$

مدّور استوانہ : مدوّر استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر r اور اونچائی h ہو تب



شکل 9.3

(i) مدوّر استوانہ کی خمدار سطح کا رقبہ $= 2\pi rh$

(ii) مدوّر استوانہ کی کل سطح کا رقبہ $= 2\pi r(r + h)$

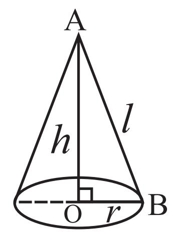
(iii) مدوّر استوانہ کا حجم $= \pi r^2 h$

مشقی سیٹ 9.1

1. ایک مستطیلی منشورشکل کے دوائیوں کے بکس کی لمبائی، چوڑائی اوراونچائی بالترتیب 20 سم، 12 سم اور 10 سم ہے تو اس بکس کے عمودی سطحوں کا رقبہ اورکل سطحوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔
2. ایک مستطیلی منشورشکل کے بکس کی کل سطحوں کا رقبہ 500 مربع اکائی ہے۔اس کی چوڑائی اوراونچائی بالترتیب 6 اور 5 اکائی ہے تو اس بکس کی لمبائی کتنی ہوگی؟
3. ایک مکعب کا ضلع 4.5 سم ہے، اس مکعب کے عمودی سطحوں کا رقبہ اورکل سطحوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔
4. ایک مکعب کی کل سطحوں کا رقبہ 5400 مربع سم ہے تو اس مکعب کی عمودی سطحوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔
5. ایک مستطیلی منشور کا حجم 34.50 مکعب میٹر ہے۔اس کی چوڑائی اوراونچائی بالترتیب 1.5 میٹر اور 1.15 میٹر ہے تو اس مستطیلی منشور کی لمبائی معلوم کیجیے۔
6. 7.5 سم کنارے والے مکعب کا حجم کتنا؟
7. ایک مدوّر استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر 20 سم اوراونچائی 13 سم ہے تو اس مدوّر استوانہ کی خمدار سطح کا رقبہ اورکل رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$
8. مدوّر استوانہ کی خمدار سطح کا رقبہ 1980 مربع سم ہے اور قاعدہ کا نصف قطر 15 سم ہو تو اس مدوّر استوانے کی اونچائی معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

آیئے سمجھ لیں

مخروط سے متعلق اصطلاحات اوران کا باہمی تعلق (Term related with a cone and their relation)



شکل 9.4

متصلہ شکل 9.4 کی شکل مخروط کی ہے۔مخروط کے قاعدہ کا مرکز O ہے اور مخروط کا راس A ہے۔

قطعہ OA نصف قطر OB پر عمود ہے۔لہٰذا OA مخروط کی بلندی (h) ہے۔ AB مخروط کی مائل بلندی (l) ہے۔

$\triangle AOB$ قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

$\therefore$ فیثا غورث مسئلہ کی رُو سے،

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$\therefore \quad l^2 = h^2 + r^2$$

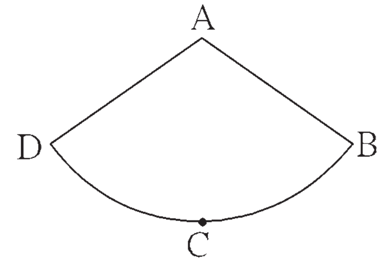
یعنی ، $(\text{مائل بلندی})^2 = (\text{بلندی})^2 + (\text{قاعدہ کا نصف قطر})^2$

مخروط کی سطح کا رقبہ (Surface Area of a Cone)

مخروط کی دو سطحیں ہوتی ہیں۔ (i) دائروی سطح (ii) خمدار سطح

ان میں سے دائرہ کے رقبہ کے ضابطے سے مخروط کے قاعدہ کا رقبہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے ضابطہ کس طرح معلوم کریں گے۔

اس کے لیے مخروط کی خمدار سطح کا مشاہدہ باریک بینی سے کریں گے۔



شکل 9.5

شکل 9.4 میں مخروط کو اس کی مائل بلندی AB پر سے کاٹ کر کھول دیا گیا ہے۔ اس کی بناوٹ متصلہ شکل 9.5 کے مطابق ملتی ہے۔ اس شکل کو دائروی پنکھڑی کہتے ہیں۔

شکل 9.4 اور شکل 9.5 کا موازنہ کیجیے۔ کیا اس بناء پر آپ کے ذہن میں ذیل کی باتیں آتی ہیں؟

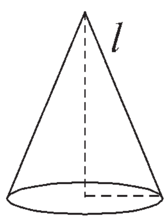
(i) دائروی پنکھڑی کا نصف قطر AB، یہ مخروط کی مائل بلندی کے مساوی ہے۔

(ii) دائروی پنکھڑی کا قوس BCD، مخروط کے قاعدہ کے محیط کی تحویلی شکل ہے۔

(iii) A-BCD، دائروی پنکھڑی کا رقبہ = مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ

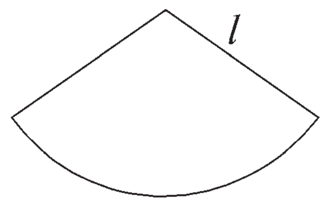
اس بناء پر مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے اس کی بناوٹ کا یعنی دائروی پنکھڑی کا رقبہ معلوم کرنا ہوگا۔ یہ رقبہ کس طرح معلوم کر سکتے ہیں؟ ذیل کے عملی کام سے سمجھ لیں

عملی کام :



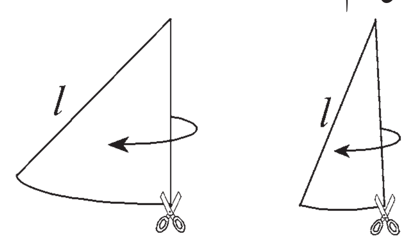
مخروط

شکل 9.6



خمدار سطح کی بناوٹ

شکل 9.7



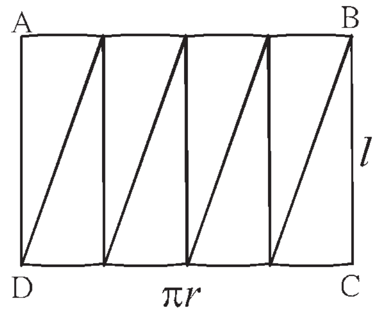
بناوٹ کے ٹکڑے

شکل 9.8

قاعدہ کا محیط = $2\pi r$

ایک خمدار سطح کی شکل 9.8 میں دکھائے ہوئے کے مطابق ہے۔ جہاں تک ممکن ہو اتنے چھوٹے ٹکڑے کیجیے۔ انھیں شکل 9.9 سے دکھائے ہوئے کے مطابق جوڑیے۔

مخروط کی خمدار سطح کے ٹکڑے اس طرح جوڑنے سے □ABCD تقریباً ایک مستطیل حاصل ہوا۔



شکل 9.9

AB اور CD کی کل لمبائی $2\pi r$ ہے۔

$\therefore$ □ABCD مستطیل کے ضلع AB کی لمبائی πr اور ضلع CD کی لمبائی πr ہے۔

l = مخروط کی مائل سطح کی اونچائی = مستطیل کے BC ضلع کی لمبائی

$\therefore$ مخروط کی خمدار سطح یعنی مستطیل کا رقبہ ہوگا۔

$\therefore$ مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ = مستطیل کا رقبہ $= AB \times BC = \pi r \times l = \pi r l$

اب، مخروط کی کل سطح کا رقبہ کا ضابطہ معلوم کریں گے۔

$$\text{مخروط کی کل سطح کا رقبہ} = \text{مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ} + \text{قاعدہ کا رقبہ}$$
$$= \pi r l + \pi r^2$$
$$= \pi r(l + r)$$

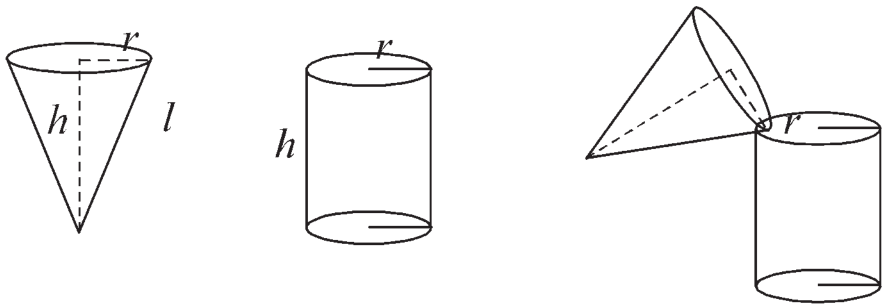
یہاں کیا آپ کے ذہن میں کوئی اہم بات آئی؟ مخروط بند نہیں ہو تو (جوکر کی ٹوپی / جنم دن کی ٹوپی وغیرہ) تب خمدار سطح ہی اس کی ایک سطح ہوتی ہے۔ یعنی ضابطہ سے اس کا کل رقبہ $\pi r l$ ضابطہ سے ملتا ہے۔

عملی کام :

ایک کارڈ بورڈ لیجیے۔ اس کے ذریعے ایک مخروط اور ایک بند مدوّر استوانہ بنائیے۔ یعنی قاعدہ کا نصف قطر اور بلندی مساوی والا ایک مخروط اور ایک طرف سے بند مدوّر استوانہ بنائیے۔ یعنی مخروط کی بلندی (عمودی اونچائی) اور مدوّر استوانہ کی اونچائی مساوی ہوا یسا ایک مخروط اور مدوّر استوانہ بنائیے۔

مخروط کو باریک بالو سے پورا بھر لیجیے وہ بالو مدوّر استوانہ میں انڈیلیے۔ مدوّر استوانہ پورا بھرنے تک یہی عمل کیجیے۔

مدوّر استوانہ پورا بھرنے کے لئے کتنے مخروط بھر کر بالو ڈالا گیا؟ شمار کیجیے۔



شکل 9.10

مدوّر استوانہ بھرنے کے لئے بالو سے بھرے ہوئے تین مخروط لگے۔

آئیے سمجھ لیں

مخروط کا حجم (Volume of a Cone)

$$\text{مدوّر استوانے کا حجم} = \text{مخروط کا حجم} \times 3$$
$$\therefore\ 3 \times \text{مخروط کا حجم} = \pi r^2 h$$
$$\therefore\ \text{مخروط کا حجم} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$$

اسے دھیان میں رکھیں

(i) مخروط کے قاعدہ کا رقبہ $= \pi r^2$

(ii) مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ $= \pi r l$

(iii) مخروط کی کل سطح کا رقبہ $= \pi r(l + r)$

(iv) مخروط کا حجم $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) مخروط کے قاعدہ کا دیا ہوا نصف قطر (r) اور دی ہوئی بلندی (h) لے کر اس کی مائل بلندی (l) معلوم کیجیے۔

(i) $r = 6$ سم، $h = 8$ سم

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (6)^2 + (8)^2$

$\therefore l^2 = 36 + 64$

$\therefore l^2 = 100$

$\therefore l = 10$ سم

(ii) $r = 9$ سم، $h = 12$ سم

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (9)^2 + (12)^2$

$\therefore l^2 = 81 + 144$

$\therefore l^2 = 225$

$\therefore l = 15$ سم

مثال (2) ایک مخروط کا نصف قطر 12 سم اور بلندی 16 سم ہے۔ اس مخروط کی مائل بلندی، خمدار سطح کا رقبہ اور کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

(i) $r = 12$ سم، $h = 16$ سم

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (12)^2 + (16)^2$

$\therefore l^2 = 144 + 256$

$\therefore l^2 = 400$

$\therefore l = 20$ سم

(ii) مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ $= \pi r l$

$= 3.14 \times 12 \times 20$

$= 753.6$ مربع سم

(iii) مخروط کی کل سطح کا رقبہ $= \pi r(l + r)$

$= 3.14 \times 12(20+12)$

$= 3.14 \times 12 \times 32$

$= 1205.76$ مربع سم

مثال (3) ایک مخروط کی کل سطح کا رقبہ 704 مربع سم اور قاعدہ کا نصف قطر 7 سم ہو تو مخروط کی مائل بلندی معلوم کیجیے۔ $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

مخروط کی کل سطح کا رقبہ $= \pi r(l + r)$

$\therefore \quad 704 = \frac{22}{7} \times 7 \, (l + 7)$

$\therefore \quad \frac{704}{22} = l + 7$

$\therefore \quad 32 = l + 7$

$\therefore \quad 32 - 7 = l$

$\therefore \quad l = 25$ سم

مثال (4) : ایک مخروط کے قاعدہ کا رقبہ 1386 مربع سم ہے اور مخروط کی بلندی 28 سم ہو تو، مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

حل : مخروط کے قاعدہ کا رقبہ $= \pi r^2$

$\therefore \quad 1386 = \frac{22}{7} \times r^2$

$\therefore \quad \frac{1386 \times 7}{22} = r^2$

$\therefore \quad 63 \times 7 = r^2$

$\therefore \quad 441 = r^2$

$\therefore \quad r = 21$ سم

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (21)^2 + (28)^2$

$\therefore l^2 = 441 + 784$

$\therefore l^2 = 1225$

$\therefore l = 35$ سم

مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 21 \times 35$

$= 22 \times 21 \times 5$

$= 2310$ مربع سم

مشقی سیٹ 9.2

1. مخروط کی بلندی 12 سم اور مائل بلندی 13 سم ہے تب مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر کتنا؟

2. ایک مخروط کی کل سطح کا رقبہ 7128 مربع سم اور مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر 28 سم ہو تو مخروط کا حجم معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

3. ایک مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ مربع سم 251.2 اور قاعدہ کا نصف قطر 8 سم ہو تو مخروط کی مائل بلندی اور عمودی بلندی معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

4. 6 میٹر نصف قطر اور 8 میٹر مائل بلندی کے پترے کی بند مخروطی شکل بنانے کے لیے ₹10 فی مربع میٹر نرخ ہو تو ایسا مخروط بنانے کے لیے درکار خرچ معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

5. مخروط کا حجم 6280 مکعب سم ہے، قاعدہ کا نصف قطر 20 سم ہے تو مخروط کی بلندی معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

6. مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ 188.4 مربع سم اور مائل بلندی 10 سم ہے تو مخروط کی بلندی معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

7. ایک مخروط کا حجم 1232 مکعب سم ہے اور بلندی 24 سم ہے تو اس مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

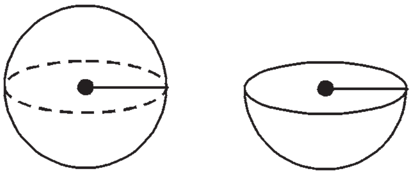
8. ایک مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ 2200 مربع سم ہے اور اس کی مائل بلندی 50 سم ہے تو اس مخروط کی کل سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

*9. ایک مخروطی خیمہ میں 25 افراد رہتے ہیں۔ ہر ایک کو زمین پر 4 مربع میٹر زمین درکار ہے۔ اگر خیمہ کی بلندی 18 میٹر ہو تو خیمہ کا حجم کتنا ہے؟

*10. ایک کھیت میں مویشیوں کے لیے سوکھا چارا مخروطی شکل میں ڈھیر بنا کر رکھا ہوا ہے۔ ڈھیر کی اونچائی 2.1 میٹر ہے اور قاعدہ کا قطر 7.2 میٹر ہے۔ تب چارے کے ڈھیر کا حجم معلوم کیجیے۔ بارش ہونے کا امکان نظر آنے پر ایسے موقع پر اس ڈھیر کو پلاسٹک سے ڈھانکنا ہو تو کسان کو کتنے مربع میٹر پلاسٹک کا کاغذ درکار ہوگا؟ ($\sqrt{17.37} = 4.17$ اور $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

آیئے سمجھ لیں

کرہ کی سطح کا رقبہ (Surface Area of Sphere)



شکل 9.11

کھوکھلے کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ $= 4\pi r^2$

$\therefore$ نصف کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ $= 2\pi r^2$

ٹھوس نصف کرہ کی کل سطح کا رقبہ = خمدار سطح کا رقبہ + دائرہ کا رقبہ

$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

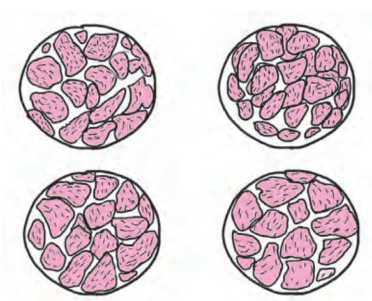
$= 3\pi r^2$

عملی کام :

ایک موسمبی لیجیے۔ اس کے دو نصف حصے کیجیے۔

ایک نصف کرّہ مسطح کاغذ پر اوندھا رکھ کر اس کے گرد پنسل سے دائرہ بنائیے۔ ایسے چار دائرے بنائیے۔ اب موسمبی کی چار مساوی پھانکیں بنائیے۔

ہر پھانک کے چھلکوں کے باریک باریک ٹکڑے کیجیے۔ ایک دائرہ ایک پھانک کے ٹکڑوں سے تقریباً بھر جائے گا۔ اس طرح اس بنا پر چاروں دائرے پورے بھر جائیں گے۔



کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ $= 4 \times$ دائرہ کا رقبہ

$= 4\pi r^2$

حل کردہ مثالیں :

(1) ایک کرہ کا نصف قطر 7 سم ہے، تب اس کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times (7)^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 88 \times 7$

$= 616$

کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ = 616 مربع سم

(2) ایک کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ 1256 مربع سم ہے تو اس کرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ $= 4\pi r^2$

$\therefore 1256 = 4 \times 3.14 \times r^2$

$\therefore = \frac{1256}{4 \times 3.14} = r^2$

$\therefore = \frac{31400}{314} = r^2$

$\therefore 100 = r^2$

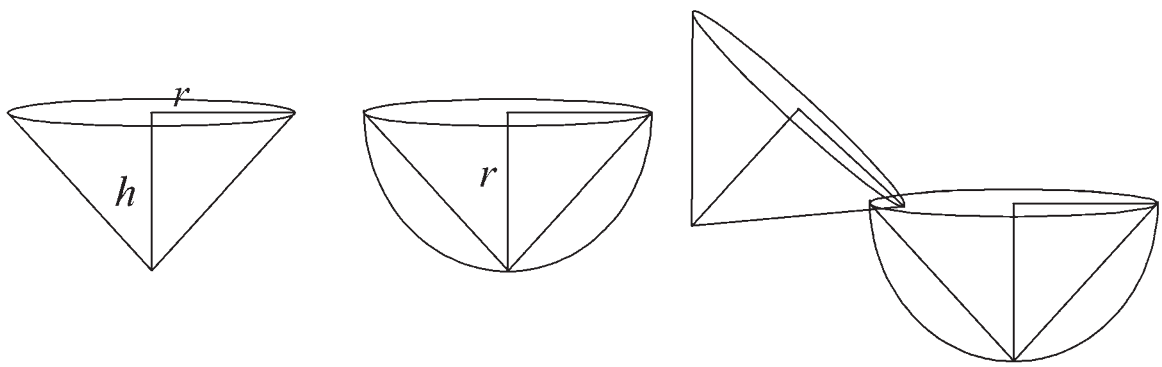
$\therefore 10 = r$

$\therefore r = 10$ سم

عملی کام :

ایک مخروط اور ایک نصف کرہ اس طرح لیجیے کہ، نصف کرہ کا نصف قطر اور مخروط کی بلندی مساوی ہے۔ اسی طرح مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر اور نصف کرہ کا نصف قطر مساوی ہے۔

مخروط بالو سے پورا بھریئے۔ پورا بھرا ہوا مخروط نصف کرہ میں انڈیلیے۔ نصف کرہ مکمل طور پر بھرنے کے لیے کتنے مخروط درکار ہوں گے۔ اسے دیکھیے۔



شکل 9.12

ایک نصف کرہ پورا بھرنے کے لیے دو مخروط بھر کر بالو لگے۔

$\therefore$ 2 × مخروط کا حجم = نصف کرہ کا حجم

$\therefore$ نصف کرہ کا حجم = 2 × مخروط کا حجم

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times r$

$= \frac{2}{3} \pi r^3$

$\therefore$ کرہ کا حجم = 2 × نصف کرہ کا حجم

$= \frac{4}{3} \pi r^3$

$\therefore$ کرہ کا حجم $= \frac{4}{3} \pi r^3$

اسے دھیان میں رکھیں

$$\text{کرہ کا حجم} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{نصف کرہ کا حجم} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\text{ٹھوس کرہ کی کل سطح کا رقبہ} = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$$

حل کردہ مثالیں :

مثال (1) ایک کرہ کا نصف قطر 21 سم ہے تو اس کرہ کا حجم معلوم کیجیے۔ $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

حل :

$$\text{کرہ کا حجم} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (21)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21$$

$$= 88 \times 441$$

$\therefore$ کرہ کا حجم = 38808 مکعب سم

$\therefore$ کرہ کا حجم 38808 مکعب سم ہے۔

مثال (2) 113040 مکعب سم والے کرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

حل :

$$\text{کرہ کا حجم} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$113040 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times r^3$$

$$\frac{113040 \times 3}{4 \times 3.14} = r^3$$

$$\frac{28260 \times 3}{3.14} = r^3$$

$$\therefore 9000 \times 3 = r^3$$

$$\therefore r^3 = 27000$$

$\therefore r = 30$ سم

کرہ کا نصف قطر 30 سم ہے۔

مثال (3) خمدار سطح کا رقبہ 314 مربع سم والے کرہ کا حجم کتنا؟ $(\pi = 3.14)$

$$\text{کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ} = 4\pi r^2$$

$$314 = 4 \times 3.14 \times r^2$$

$$\frac{314}{4 \times 3.14} = r^2$$

$$\frac{31400}{4 \times 314} = r^2$$

$$\therefore \frac{100}{4} = r^2$$

$$\therefore 25 = r^2$$

$\therefore r = 5$ سم

$$\text{کرہ کا حجم} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 5^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 125$$

$= 523.33$ مکعب سم

مشقی سیٹ 9.3

.1 ذیل میں دیے ہوئے عدد کروں کے نصف قطر کو ظاہر کرتے ہیں۔

(i) 4 سم (ii) 9 سم (iii) 3.5 سم

تو ان کروں کی خمدار سطحوں کا رقبہ اور حجم معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

.2 5 سم نصف قطر والے ٹھوس نصف کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ اور کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

.3 2826 مربع سم خمدار سطح کا رقبہ والے کرہ کا حجم معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

.4 38808 مکعب سم حجم والے کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

.5 ایک نصف کرہ کا حجم 18000π مکعب سم ہے۔اس کرہ کا قطر معلوم کیجیے۔

مجموعہ سوالات 9

.1 0.9 میٹر قطر اور 1.4 میٹر لمبائی والے روڈ رولر (محرک دھمس) کی 500 گردشوں سے کتنی زمین دبائی جائے گی؟ $(\pi = \frac{22}{7})$

.2 ایک مستطیلی منشور کی شکل کا گھریلو مچھلی گھر (ماہی خانہ) (aquarium) بنانے کے لیے 2 ملی میٹر موٹی کانچ کا استعمال کیا گیا۔ماہی خانہ (کی دیوار کی) باہر سے لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب سینٹی میٹر میں $40.2 \times 40.4 \times 60.4$ ہے۔تو اس ماہی خانہ میں زیادہ سے زیادہ کتنا پانی سمائے گا؟

.3 ایک مخروط کے قاعدے کا نصف قطر اور بلندی کی نسبت $5 : 12$ ہے۔مخروط کا حجم 314 مکعب میٹر ہے۔اس کی بلندی اور مائل بلندی معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

.4 ایک کرہ کا حجم 904.32 مکعب سم ہے تو اس کرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

.5 ایک مکعب کی کل سطح کا رقبہ 864 مربع سم ہے تو اس کا حجم معلوم کیجیے۔

.6 جس کرہ کی سطح کا رقبہ 154 مربع سم ہے۔اس کرہ کا حجم معلوم کیجیے۔

.7 ایک مخروط کی کل سطح کا رقبہ 616 مربع سم ہے۔اس کی مائل بلندی، قاعدہ کے نصف قطر کے تین گنا ہو تو مائل بلندی معلوم کیجیے۔

.8 دائروی کنویں کا اندرونی قطر 4.20 میٹر اور کنویں کی گہرائی 10 میٹر ہے تو اس کی اندرونی خمدار سطح کا رقبہ کتنا ہے؟ کنویں کی اندرونی خمدار سطح پر استر کاری (پلاسٹر) کرنے کے لیے فی مربع میٹر ₹52 کے نرخ سے کتنا خرچ ہوگا؟

.9 ایک محرک دھمس (روڈ رولر) کی لمبائی 2.1 میٹر اور اس کا قطر 1.4 میٹر ہے۔ایک میدان کی ہموار کاری کے دوران رولر نے 500 گردشیں مکمل کرتا ہے تو رولر نے کتنے مربع میٹر میدان ہموار کیا ہوگا؟ ہموار کاری کا نرخ ₹7 فی مربع میٹر ہو تو کتنا خرچ ہوا ہوگا؟

جوابات کی فہرست

1. علم ہندسہ کے بنیادی تصورات

مشقی سیٹ 1.1

1. (i) 3 (ii) 3 (iii) 7 (iv) 1
(v) 3 (vi) 5 (vii) 2 (viii) 7

2. (i) 6 (ii) 8 (iii) 10 (iv) 1 (v) 3 (vi) 12

3. (i) P–R–Q (ii) ہم خطی نہیں ہیں (iii) A–C–B (iv) ہم خطی نہیں ہیں
(v) X–Y–Z (vi) ہم خطی نہیں ہیں

4. 2 اور 18 5. 9 اور 25 **6.** (i) 4.5 (ii) 6.2 (iii) $2\sqrt{7}$ 7. مثلث

مشقی سیٹ 1.2

1. (i) نہیں (ii) نہیں (iii) ہاں 2. 4 3. 5 **4.** BP < AP < AB

5. (i) شعاع RS یا شعاع RT (ii) شعاع PQ (iii) قطعہ QR
(iv) شعاع QR اور شعاع RQ وغیرہ (v) شعاع RQ اور شعاع RT وغیرہ (vi) شعاع SR , شعاع ST وغیرہ
(vii) نقطہ S

6. (i) نقطہ A اور نقطہ C، نقطہ D اور نقطہ P (ii) نقطہ L اور نقطہ U، نقطہ P اور نقطہ R
(iii) $d(U,V) = 10$,$d(P,C) = 6$, $d(V,B) = 3$, $d(U,L) = 2$

مشقی سیٹ 1.3

.1 (i) اگر کوئی ذواربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہو تب اس ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
(ii) اگر کوئی ذواربعۃ الاضلاع مستطیل ہو تب اس ذواربعۃ الاضلاع کے وتر متماثل ہوتے ہیں۔
(iii) اگر کوئی مثلث متساوی الساقین مثلث ہو تو اس مثلث کے راس اور قاعدہ کے وسطی نقطہ کو جوڑنے والا قطعہ قاعدہ پر عمود ہوتا ہے۔

.2 (i) اگر دو خطوط اور ان کا تقاطع دیا ہوا اور بننے والے متبادلہ زاویے متماثل ہوں تب وہ دونوں خطوط متوازی ہوتے ہیں۔
(ii) دو متوازی خطوط کو تقاطع قطع کرتا ہو تو بننے والے داخلہ زاویوں کی جوڑی متمم ہوتی ہے۔
(iii) اگر کوئی ذواربعۃ الاضلاع کے وتر متماثل ہوں تب وہ ذواربعۃ الاضلاع مستطیل ہوتا ہے۔

مجموعہ سوالات - 1

1. (i) A (ii) C (iii) C (iv) C (v) B

2. (i) غلط (ii) غلط (iii) صحیح (iv) غلط

3. (i) 3 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 2 (v) 6 (vi) 22 (vii) 165 4. 1 اور –15

5. (i) 10.5 (ii) 9.1 (6) 6. 8 اور –6

2. متوازی خطوط

مشقی سیٹ 2.1

1. (i) 95° (ii) 95° (iii) 85° (iv) 85°
2. $\angle a = 70°$, $\angle b = 70°$, $\angle c = 115°$, $\angle d = 65°$
3. $\angle a = 135°$, $\angle b = 135°$, $\angle c = 135°$
5. (i) 75° (ii) 75° (iii) 105° (iv) 75°

مشقی سیٹ 2.2

1. نہیں 4. $\angle ABC = 130°$

مجموعہ سوالات - 2

1. (i) C (ii) C (iii) A (iv) B (v) C 4. $x = 130°$ $y = 50°$

5. $x = 126°$ 6. $f = 100°$ 7. $g = 80°$

3. مثلث

مشقی سیٹ 3.1

1. 110° 2. 45° 3. 80°, 60°, 40° 4. 30°, 60°, 90°
5. 60°, 80°, 40° 6. $\angle DRE = 70°$, $\angle ARE = 110°$
7. $\angle AOB = 125°$ 9. 30°, 70°, 80°

مشقی سیٹ 3.2

1. (i) ضل ضل ضل (ii) ضل زا ضل (iii) زا ضل زا (iv) وتر ضلع
2. (i) زا ضل زا, $\angle BAC \cong \angle QPR$, قطعہ AB ≅ قطعہ PQ, قطعہ AC ≅ قطعہ PR
   (ii) ضل زا ضل $\angle TPQ \cong \angle TSR$, $\angle TQP \cong \angle TRS$, قطعہ PQ ≅ قطعہ SR
3. وتر ضلع, $\angle ACB \cong \angle QRP$, $\angle ABC \cong \angle QPR$, قطعہ AC ≅ قطعہ QR
4. ضل ضل ضل, $\angle MLN \cong \angle MPN$, $\angle LMN \cong \angle MNP$, $\angle LNM \cong \angle PMN$

مشقی سیٹ 3.3

1. $x = 50°$, $y = 60°$, $m\angle ABD = 110°$, $m\angle ACD = 110°$
2. 7.5 اکائی 3. 6.5 اکائی 4. $l(PG) = 5$ سم, $l(PT) = 7.5$ سم

مشقی سیٹ 3.4

1. 2 سم 2. 28° 3. $\angle QPR$, $\angle PQR$ 4. ضلع NA, ضلع FN

مشقی سیٹ 3.5

1. $\frac{XY}{LM} = \frac{YZ}{MN} = \frac{XZ}{LN}$, $\angle X \cong \angle L$, $\angle Y \cong \angle M$, $\angle Z \cong \angle N$
2. $l(QR) = 12$ سم, $l(PR) = 10$ سم

مجموعہ سوالات - 3

1. (i) D (ii) B (iii) B

5. ذواربعۃ الاضلاع

مشقی سیٹ 5.1

1. $m\angle XWZ = 135°$, $m\angle YZW = 45°$, l (WY) = 10 سم
2. $x = 40°$, $\angle C = 132°$, $\angle D = 48°$
3. 25 سم, 50 سم, 25 سم, 50 سم
4. 60°, 120°, 60°, 120°
6. $\angle A = 70°$, $\angle B = 110°$, $\angle C = 70°$, $\angle R = 110°$

مشقی سیٹ 5.3

1. BO = 4 سم, $\angle ACB = 35°$
2. QR = 7.5 سم, $\angle PQR = 105°$, $\angle SRQ = 75°$
3. $\angle IMJ = 90°$, $\angle JIK = 45°$, $\angle LJK = 45°$
4. ضلع = 14.5 سم, احاطہ = 58 سم
5. (i) غلط (ii) غلط (iii) صحیح (iv) صحیح (v) صحیح (vi) غلط

مشقی سیٹ 5.4

1. $\angle J = 127°$, $\angle L = 72°$
2. $\angle B = 108°$, $\angle D = 72°$

مشقی سیٹ 5.5

1. XY = 4.5 سم, YZ = 2.5 سم, XZ = 5.5 سم

مجموعہ سوالات - 5

1. (i) D (ii) C (iii) D
2. 25 سم
3. $6.5\sqrt{2}$ سم
4. 24 سم, 32 سم, 24 سم, 32 سم
5. PQ = 26 سم
6. $\angle MPS = 65°$

6. دائرہ

مشقی سیٹ 6.1

1. 20 سم
2. 5 سم
3. 32 اکائی
4. 9 اکائی

مشقی سیٹ 6.2

1. 12 سم
2. 24 سم

مجموعہ سوالات - 6

1. (i) A (ii) C (iii) A (iv) B (v) D (vi) C (vii) D یا B
2. 2:1
4. 24 اکائی

7. محددی علم ہندسہ

مشقی سیٹ 7.1

1. نقطہ A : ربع II, نقطہ B : ربع III, نقطہ K : ربع I, نقطہ D : ربع I

نقطہ E : ربع I, نقطہ F : ربع IV, نقطہ G : ربع IV, نقطہ H : محور-Y

نقطہ M : محور-X, نقطہ N : محور-Y, نقطہ P : محور-Y, نقطہ O : ربع III

2. (i) ربع I (ii) ربع III (iii) ربع IV (iv) ربع II

مشقی سیٹ 7.2

1. مربع 2. $x = -7$ 3. $y = -5$ 4. $x = -3$ 5. 4 اکائی

6. (i) محور-Y (ii) محور-X (iii) محور-Y (iv) محور-X **7.** (5, 0) محور پر-X, (0, 5) محور پر-Y

8. (−4,1), (−1.5, 1), (−1.5,5), (−4,5)

مجموعہ سوالات - 7

1. (i) C (ii) A (iii) B (iv) C (v) C (vi) B

2. (i) Q (−2, 2), R(4,−1) (ii) T(0, −1), M(3, 0), (iii) S نقطہ (iv) O نقطہ

3. (i) IV ربع (ii) III ربع (iii) II ربع (iv) II ربع (v) محور-Y (vi) محور-X

5. (i) 3 (ii) P(3,2), Q(3,−1), R (3,0) (iii) 0 6. دوخط $y = 5$, $y = -5$ 7. $|a|$

8. علم مثلث

مشقی سیٹ 8.1

1. (i) $\frac{QR}{PQ}$ (ii) $\frac{QR}{PQ}$ (iii) $\frac{QR}{PR}$ (iv) $\frac{PR}{QR}$

2. (i) $\frac{a}{c}$ (ii) $\frac{b}{a}$ (iii) $\frac{b}{c}$ (iv) $\frac{a}{b}$

3. (i) $\frac{MN}{LN}$ (ii) $\frac{LM}{LN}$ (iii) $\frac{LM}{MN}$ (iv) $\frac{MN}{LN}$

4. (i) $\frac{PQ}{PR}, \frac{RQ}{PR}, \frac{PQ}{RQ}$ (ii) $\frac{QS}{PS}, \frac{PQ}{PS}, \frac{QS}{PQ}$

مشقی سیٹ 8.2

1. $\sin\theta : \frac{12}{37}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{21}{29}, \frac{8}{17}, \frac{1}{3}$; $\cos\theta : \frac{60}{61}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{20}{29}, \frac{15}{17}, \frac{4}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta : \frac{12}{35}, \frac{11}{60}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}, \frac{3}{4}$

2. (i) $\frac{11}{2}$ (ii) $\frac{93}{20}$ (iii) 5 (iv) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ (v) $\frac{3}{4}$ (vi) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{3}{5}$ 4. $\frac{8}{17}$

مجموعہ سوالات - 8

1. (i) A (ii) D (iii) C (iv) D
2. $\sin T = \frac{12}{13}$, $\cos T = \frac{5}{13}$, $\tan T = \frac{12}{5}$, $\sin U = \frac{5}{13}$, $\cos U = \frac{12}{13}$, $\tan U = \frac{5}{12}$
3. $\sin Y = \frac{8}{17}$, $\cos Y = \frac{15}{17}$, $\tan Y = \frac{8}{15}$, $\sin Z = \frac{15}{17}$, $\cos Z = \frac{8}{17}$, $\tan Z = \frac{15}{8}$
4. $\sin \theta = \frac{7}{25}$, $\tan \theta = \frac{7}{24}$, $\sin^2 \theta = \frac{49}{625}$, $\cos^2 \theta = \frac{576}{625}$
5. (i) 70 (ii) 60 (iii) 50

9. سطح کا رقبہ اور حجم

1. 640 مربع سم, 1120 مربع سم 2. 20 اکائی 3. 81 مربع سم, 121.50 مربع سم 4. 3600 مربع سم

5. 20 میٹر 6. 421.88 مکعب سم 7. 1632.80 مربع سم, 4144.80 مربع سم 8. 21 سم

مشقی سیٹ 9.2

1. 5 سم 2. 36960 مکعب سم 3. 10 سم, 6 سم 4. ₹2640 5. 15 سم 6. 8 سم

7. 550 مربع سم 8. 2816 مربع سم, 9856 مکعب سم 9. 600 مکعب سم

10. 28.51 مکعب میٹر, 47.18 مربع میٹر

مشقی سیٹ 9.3

1. (i) 200.96 مربع سم, 267.95 مکعب سم (ii) 1017.36 مربع سم, 3052.08 مکعب سم

(iii) 153.86 مربع سم, 179.50 مکعب سم

2. 157 مربع سم, 235.5 مربع سم 3. 14130 مکعب سم 4. 5544 مربع سم 5. 60 سم

مجموعہ سوالات - 9

1. 1980 مربع میٹر 2. 96801.6 مکعب سم 3. 12 میٹر, 13 میٹر 4. 6 سم 5. 1728 مکعب سم

6. 179.67 مکعب سم 7. 21 سم 8. 132 مربع سم, ₹6864 9. 4620 مربع سم, ₹32340

عملی کام کی بیاض نویں جماعت

ریاضی (حصہ I اور حصہ II)

اُردو
ذریعۂ تعلیم

قیمت
۵۵ روپے

- حکومت سے منظور شدہ نصاب اور درسی کتاب پر مبنی۔
- قدر پیمائی کے طریقے کے مطابق تمام اسباق پر مبنی عملی کاموں کی شمولیت۔
- مختلف سرگرمیوں، تصویروں، شکلوں وغیرہ سے مزین۔
- معروضی اور کثیر متبادل سوالوں کے ساتھ۔
- زبانی امتحان کے لیے کارآمد سوالوں کی شمولیت۔
- مشق کے لیے مزید سوالوں کے جواب لکھنے کے لیے زیادہ سے زیادہ جگہ دستیاب۔

پاٹھیہ پستک منڈل کے تمام علاقائی ڈپو میں عملی بیاض برائے فروخت دستیاب ہیں۔

(1) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Senapati Bapat Marg, Pune 411004 ☎ 25659465 (2) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, P-41, Industrial Estate, Mumbai - Bengaluru Highway, Opposite Sakal Office, Kolhapur 416122 ☎ 2468576 (3) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, 10, Udyognagar, S. V. Road, Goregaon (West), Mumbai 400062 ☎ 28771842 (4) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, CIDCO, Plot no. 14, W-Sector 12, Wavanja Road, New Panvel, Dist. Rajgad, Panvel 410206 ☎ 274626465 (5) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Near Lekhanagar, Plot no. 24, 'MAGH' Sector, CIDCO, New Mumbai-Agra Road, Nashik 422009 ☎ 2391511 (6) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, M.I.D.C. Shed no. 2 and 3, Near Railway Station, Aurangabad 431001 ☎ 2332171 (7) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Opposite Rabindranath Tagore Science College, Maharaj Baug Road, Nagpur 440001 ☎ 2547716/2523078 (8) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Plot no. F-91, M.I.D.C., Latur 413531 ☎ 220930 (9) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Shakuntal Colony, Behind V.M.V. College, Amravati 444604 ☎ 2530965

پاٹھیہ پستک منڈل، بال بھارتی کے توسط سے دسویں جماعت کے لیے
ای-لرننگ (Audio-Visual) مواد دستیاب

- بازو میں دیا ہوا Q.R. کوڈ اسکین کر کے ای-لرننگ مواد حاصل کرنے کے لیے اندراج کریں۔
- Google Play Store سے ebalbharati ایپ ڈاؤن لوڈ کر کے ای-لرننگ مواد کے لیے مطالبہ درج کریں۔

ebalbharati

www.ebalbharati.in | www.balbharati.in

सा विद्या या विमुक्तये
महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ - ۴۱۱۰۰۴

उर्दू गणित इ. ९वी भाग-२

₹ 61.00