गणित भाग-I

नौवीं कक्षा

भारत का संविधान

भाग 4 क

मूल कर्तव्य

अनुच्छेद 51 क

मूल कर्तव्य– भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह –

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्र ध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे;

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करें;

(ग) भारत की प्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण रखें;

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे;

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो स्त्रियों के सम्मान के विरुद्‌ध है;

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे;

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे;

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करें;

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे;

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत प्रयास करे जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊँचाइयों को छू ले;

(ट) यदि माता-पिता या संरक्षक है, छह वर्ष से चौदह वर्ष तक की आयु वाले अपने, यथास्थिति, बालक या प्रतिपाल्य के लिए शिक्षा के अवसर प्रदान करे ।

शासन निर्णय क्रमांक : अभ्यास-२११६/(प्र.क्र.४३/१६) एसडी-४ दिनांक २५.४.२०१६ के अनुसार समन्वय समिति का गठन किया गया । दि. ३.३.२०१७ को हुई इस समिति की बैठक में यह पाठ्यपुस्तक निर्धारित करने हेतु मान्यता प्रदान की गई ।

गणित

भाग - I

नौवीं कक्षा

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे - ४११ ००४

C5JHUA

आपके स्मार्टफोन में 'DIKSHA App' द्वारा, पुस्तक के प्रथम पृष्ठ पर Q.R.Code के माध्यम से डिजिटल पाठ्यपुस्तक एवं प्रत्येक पाठ में अंतर्निहित Q.R.Code में अध्ययन अध्यापन के लिए पाठ से संबंधित उपयुक्त दृक-श्राव्य सामग्री उपलब्ध कराई जाएगी ।

प्रथमावृत्ति : 2017
पाँचवाँ पुनर्मुद्रण : 2022

गणित विषयतज्ञ समिति

डॉ. मंगला नारळीकर (अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे (सदस्य)
श्री रमाकांत सरोदे (सदस्य)
श्री दादासो सरडे (सदस्य)
श्री संदीप पंचभाई (सदस्य)
श्रीमती लता टिळेकर (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

गणित विषय - राज्य अभ्यासगट सदस्य

श्रीमती पूजा जाधव
श्री प्रमोद ठोंबरे
श्री राजेंद्र चौधरी
श्री आण्णापा परीट
श्री श्रीपाद देशपांडे
श्री बन्सी हावळे
श्री उमेश रेळे
श्री चंदन कुलकर्णी
श्रीमती अनिता जावे
श्रीमती बागेश्री चव्हाण
श्री कल्याण कडेकर
श्री संदेश सोनावणे
श्री सुजित शिंदे
डॉ. हनुमंत जगताप
श्री प्रताप काशिद
श्री काशिराम बाविसाने
श्री पप्पु गाडे
श्रीमती रोहिणी शिर्के
श्री राम व्हन्याळकर
श्री अन्सार शेख
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे
श्री गणेश कोलते
श्री सुरेश दाते
श्री प्रकाश झेंडे
श्री श्रीकांत रत्नपारखी
श्री सूर्यकांत शहाणे
श्री प्रकाश कापसे
श्री सलीम हाश्मी
श्रीमती आर्या भिडे
श्री मिलिंद भाकरे
श्री ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्री लक्ष्मण दावणकर
श्री सुधीर पाटील
श्री राजाराम बंडगर
श्री प्रदीप गोडसे
श्री रवींद्र खंदारे
श्री सागर सकुडे

श्रीमती प्राजक्ती गोखले (निमंत्रित सदस्य)
श्री वि. दि. गोडबोले (निमंत्रित सदस्य)
श्रीमती तरूबेन पोपट (निमंत्रित सदस्य)

प्रमुख संयोजक : **उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले**
प्र. विशेषाधिकारी गणित,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे
मुखपृष्ठ एवं सजावट : धनश्री मोकाशी, पुणे
संगणकीय आरेखन : संदीप कोळी, मुंबई
चित्रकार : धनश्री मोकाशी

भाषांतरकार : श्री लीलाराम बोपचे
श्रीमती संगीता संझगिरी
समीक्षक : श्री सुनील श्रीवास्तव
श्री धीरज शर्मा
विषयतज्ञ : श्री प्रेमवल्लभ ओझा
श्री अरविंदकुमार तिवारी
श्रीमती वृंदा कुलकर्णी
श्रीमती मंजुला त्रिपाठी मिश्रा
भाषांतर संयोजन : **डॉ अलका पोतदार**
विशेषाधिकारी, हिंदी
संयोजन सहायक : **सौ. संध्या विनय उपासनी**
विषय सहायक हिंदी

निर्मिति : **सचिन मेहता**
मुख्य निर्मिति अधिकारी
संजय कांबळे, निर्मिति अधिकारी
प्रशांत हरणे, निर्मिति सहायक
अक्षरांकन : गणित विभाग,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे
कागज : ७० जी.एस.एम.क्रीमवोव्ह
मुद्रणादेश :
मुद्रक :

प्रकाशक

विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक
पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडळ, प्रभादेवी, मुंबई २५

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक **संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य** बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म
और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन सब में

व्यक्ति की गरिमा और राष्ट्र की एकता
और अखंडता सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो हजार छह विक्रमी) **को एतद् द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं ।**

राष्ट्रगीत

जनगणमन – अधिनायक जय हे
भारत – भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत – भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

प्रतिज्ञा

भारत मेरा देश है । सभी भारतीय मेरे भाई–बहन हैं ।

मुझे अपने देश से प्यार है । अपने देश की समृद्ध तथा विविधताओं से विभूषित परंपराओं पर मुझे गर्व है ।

मैं हमेशा प्रयत्न करूँगा/करूँगी कि उन परंपराओं का सफल अनुयायी बनने की क्षमता मुझे प्राप्त हो ।

मैं अपने माता–पिता, गुरुजनों और बड़ों का सम्मान करूँगा/करूँगी और हर एक से सौजन्यपूर्ण व्यवहार करूँगा/करूँगी ।

मैं प्रतिज्ञा करता/करती हूँ कि मैं अपने देश और अपने देशवासियों के प्रति निष्ठा रखूँगा/रखूँगी । उनकी भलाई और समृद्धि में ही मेरा सुख निहित है ।

प्रस्तावना

विद्‌यार्थी मित्रो,

नौवीं कक्षा में आप सभी का स्वागत ।

प्राथमिक शिक्षण का अभ्यासक्रम पूर्ण कर आप माध्यमिक स्तर के अध्ययन का आरंभ कर रहे हैं ।

आठवीं कक्षा के अध्ययन तक एक ही पाठ्‌यपुस्तक थी, अब गणित भाग I तथा गणित भाग II ऐसी दो पाठ्‌यपुस्तकों का अध्ययन करना है ।

गणित भाग I इस पाठ्‌यपुस्तक में संख्याज्ञान, बीजगणित के अतिरिक्त व्यावहारिक गणित, आर्थिक नियोजन तथा जानकारी का व्यवस्थापन इन क्षेत्रों के घटकों से परिचित होंगे। यह भाग सभी विद्‌यार्थियों को विभिन्न क्षेत्रों मे उपयोगी होगा । बीजगणित तथा सांख्यिकी का संबंध उच्च शिक्षण के अध्ययन के लिए उपयोगी है ।

इस पाठ्‌यपुस्तक में संकल्पनाओं को स्पष्ट समझने के लिए विभिन्न कृतियाँ दी गई हैं । पुनरावर्तन तथा प्रश्नसंग्रह में भी कृतियाँ दी गई हैं । उन कृतियों को आपको करना है । यह भी देखना है कि इंटरनेट की सहायता से पुस्तक में दी गई संकल्पनाओं की अधिक जानकारी तथा उदाहरण मिलते हैं क्या ? कृति करते समय, उदाहरण हल करते समय तथा निष्कर्ष निकालते समय अपने मित्र-मैत्रिणियों से चर्चा करनी है । पाठ्‌यपुस्तक का गहन वाचन, कृतियुक्त अध्ययन तथा प्रश्नसंग्रह इन तीन सूत्रों से गणित की यात्रा आनंदपूर्वक तय होगी, इसमें कोई संदेह नहीं है ।

तो फिर चलिए ! अब शिक्षक, पालक, मित्र-मैत्रिण, इंटरनेट इन सभी को लेकर गणित का अध्ययन करें । इस अध्ययन के लिए आप सभी को शुभकामनाएँ ।

(डॉ. सुनिल मगर)
संचालक
महाराष्ट्र राज्य पाठ्‌यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे

पुणे
दिनांक : २८ एप्रिल २०१७
भारतीय सौर दिनांक : अक्षय तृतीया
८ वैशाख १९३९

कक्षा ९ वी गणित भाग I अभ्यासक्रम से निम्नलिखित क्षमताएँ विद्‌यार्थियों में विकसित होगी ।

क्षेत्र	घटक	क्षमता कथन
1. संख्याज्ञान	1.1 समुच्चय 1.2 वास्तविक संख्या तथा वर्गकरणी	• संख्या प्रणाली के समुच्चय तथा उप समुच्चय निश्चित कर सकना । • सीमित तथा अनंत समुच्चय पहचानना । • समुच्चय दर्शाने के लिए वेन आकृति का उपयोग कर सकना । • समुच्चय पर आधारित उदाहरण तैयार करना । • संख्या रेखा पर प्रत्येक बिंदु से संबंधित एक वास्तविक संख्या है, यह समझना । • वर्गकरणी की संख्या पहचान कर उसपर संक्रिया करना ।
2. बीजगणित	2.1 बहुपद 2.2 दो चरांकवाले रेखीय समीकरण	• बहुपद पहचानना तथा उनपर संक्रिया कर सकना । • दो चरांकों का उपयोग कर शाब्दिक उदाहरणों को हल कर सकना ।
3. **व्यावहारिक गणित**	3.1 अर्थ (आर्थिक नियोजन) 3.2 अनुपात, समानुपात	• विविध प्रकार के कर निर्धारण की विधि समझना तथा कर निर्धारित कर सकना । • वेतनभोगी कर्मचारियों के आयकर की गणना करना । • समानुपात के नियम का उपयोग कर सकना । • समानुपात तथा प्रतिलोम अनुपात पर आधारित शाब्दिक उदाहरण हल कर सकना ।
4. जानकारी (संख्याओं) का व्यवस्थापन (सांख्यिकी)	4.1 बारंबारता सारिणी 4.2 केंद्रीय प्रवृत्ति के परिमाण	• वर्गीकृत तथा अवर्गीकृत बारंबारता सारिणी तैयार कर सकना । • संचित बारंबारता सारिणी तैयार कर सकना । • दी गई जानकारी की केंद्रीय प्रवृत्ति पहचान कर उसके परिमाणों का उपयोग कर सकना ।

शिक्षकों के लिए सूचना

नौवीं कक्षा की भाग I इस पुस्तक में मूर्त से अमूर्त की ओर इस पद्धति द्वारा मूलभूत संकल्पनाएँ स्पष्ट एवं विकसित किए गए संबोध, अर्थशास्त्र की गणित से संबंधित संकल्पनाएँ, सांख्यिकी क्षेत्र के विकास का समावेश किया गया है । शिक्षकों ने ऐसे सभी घटकों का गहन अध्ययन करना आवश्यक है । कक्षा में अध्यापन अपेक्षित करते समय प्रात्यक्षिक, कृति, चर्चा, प्रश्नोत्तर, सामूहिक उपक्रम जैसी विविध पद्धतियों का उपयोग करना स्वाभाविक है । उपर्युक्त बातों हेतु शिक्षकों को पाठ्यपुस्तक का गहन वाचन करना तथा विभिन्न कृति विद्यार्थियों से कराना आवश्यक है । साथ-ही-साथ नवीन कृति तैयार करने का भी प्रयत्न करें ।

गणित में आँकड़ों की संक्रियाएँ करने की बजाय मूल संकल्पना समझना अधिक महत्त्वपूर्ण है । विद्यार्थियों की तर्कसंगत विचारशक्ति को गति देने वाले कई उदाहरणों का पाठ्यपुस्तक में समावेश किया गया है । इस प्रकार के कई उदाहरण शिक्षक तथा विद्यार्थी दोनों मिलकर तैयार करें । पाठ्यपुस्तक में आव्हानात्मक उदाहरणों को तारांकित किया गया है । यदि विद्यार्थी अलग विचार कर तर्कशुद्ध पद्धति से उदाहरण हल करते हैं तो शिक्षकों को उसे प्रोत्साहन देना चाहिए ।

मूल्यमापन करते समय शिक्षकों द्वारा मुक्त प्रश्न तथा कृति पत्रिका का भी उपयोग करना अपेक्षित है । शिक्षकों को ऐसी मूल्यमापन पद्धति विकसित करने के लिए प्रयत्न करना चाहिए ।

पाठ्यपुस्तक में उदाहरण के तौर पर जिन प्रात्यक्षिकों की सूची दी गई है, उसके अतिरिक्त विभिन्न प्रात्यक्षिक आप भी तैयार कर सकते हैं । पाठ्यपुस्तक में दिए गए प्रात्यक्षिकों में विभिन्न कृतियों को अंतर्भूत किया गया है । उन्हें भी विद्यार्थियों से करवाएँ । हमें विश्वास है कि अगली कक्षा की क्षमताओं में उन कृतियों पर आधारित मूल्यमापन पद्धति को विकसित करने के लिए उपयोगी होगा ।

नमूना प्रात्यक्षिकों की सूची

(1) अपनी कक्षा के सभी विद्यार्थियों के समुच्चय को विश्व समुच्चय मानकर खो-खो, कबड्डी जैसे कोई दो खेल खेलने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय वेन आकृति से दर्शाना ।

(2) संख्या रेखा पर $2+\sqrt{3}$, $5-\sqrt{2}$ जैसी संख्या दर्शाना ।

(3) विभिन्न पद्धति का उपयोग करके यह देखें कि तीन या चार घातवाले बहुपद को रेखीय बहुपद से भाग देने पर उत्तर एक ही आता है क्या, इसकी जाँच करना ।

(4) आयकर भरने वाले व्यक्ति का विवरण पत्र (वार्षिक आय, निवेश आदि घटक) दिए जाने पर उसे भरने पड़ने वाले आयकर की गणना करना ।

(5) दी गई संख्याओं की जानकारी के आधार पर बारंबारता बंटन सारिणी तैयार करना ।

(6) सहज उपलब्ध होने वाले दवाइयों के पैकेट पर दिए गए विभिन्न घटकों का प्रतिशत ज्ञात करना ।

(7) दो चरांकों का उपयोग करते हुए आह्वानात्मक शाब्दिक उदाहरण हल करना ।

अनुक्रमणिका

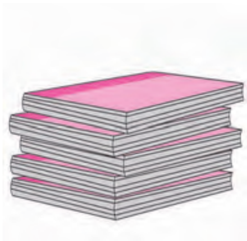
1 समुच्चय

आओ, सीखें

- समुच्चय : परिचय
- समुच्चय प्रकार
- वेन आकृति
- सम समुच्चय, उपसमुच्चय
- विश्वसमुच्चय, पूरक समुच्चय
- छेदन समुच्चय, संघ समुच्चय
- समुच्चयों के घटकों की संख्या

थोड़ा याद करें

नीचे कुछ चित्र दिए हैं । उसमें अपने परिचय के वस्तु समूह हैं ।

				1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...
फूलों का गुच्छा	चाबियों का गुच्छा	पक्षियों का समूह	कापियों का गट्ठा	संख्याओं का समूह

उपर्युक्त प्रत्येक वस्तु समूह के लिए हम विशिष्ट शब्द का उपयोग करते हैं । इन सभी उदाहरणों से संबंधित समूह के घटक हमें स्पष्ट रूप से बताना आता है । ऐसी वस्तुओं के समूह को 'समुच्चय' कहते हैं ।

समूह की ओर गौर कीजिए – 'गाँव के खुश बच्चे' 'कक्षा के होशियार विद्यार्थी' समूह के दो उदाहरणों में 'खुश' और 'होशियार' इन दोनों शब्दों के अर्थ सापेक्ष है अर्थात 'खुश' वृत्ति और 'होशियारी' इन दोनों शब्दों का अर्थ स्पष्टता से व्यक्त नहीं कर पाते हैं इसलिए ऐसे समूहों को 'समुच्चय' नहीं कहा जा सकता हैं ।

आगे कुछ उदाहरण दिए हैं । उनमें से कौन-से समूह को समुच्चय कहा जा सकता है, यह स्पष्ट कीजिए ।

(1) सप्ताह के सात दिन
(2) एक वर्ष के महीने
(3) कक्षा के पराक्रमी विद्यार्थी
(4) आरंभ की १० गणन संख्या
(5) महाराष्ट्र के मजबूत गढ़-किले
(6) हमारे सौरमंडल के ग्रह

आओ, जानें

समुच्चय (Sets)

जिस समूह के घटकों को अचूक और स्पष्टता से व्यक्त कर सकते हैं, उन समूहों को हम 'समुच्चय' कहते हैं ।

समुच्चय को नाम देने के लिए साधारणतः A, B, C,....., Z इनमें से अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों का उपयोग किया जाता है ।

समुच्चय के घटक दर्शाने के लिए a, b, c,.. इनमें अंग्रेजी के छोटे अक्षरों का उपयोग किया जाता है ।

a यह समुच्चय A का घटक है । '$a \in A$' ऐसे लिखा जाता है । a यह समुच्चय A का घटक नहीं है यह दर्शाने के लिए '$a \notin A$' ऐसे लिखा जाता है ।

अब हम संख्याओं के समुच्चय को देखते हैं ।

N = { 1, 2, 3,....} यह प्राकृत संख्याओं का समुच्चय (Set of natural numbers) है।

W = {0, 1, 2, 3,...} यह पूर्ण संख्याओं का समुच्चय (Set of whole numbers) है ।

I = {...,-3, -2, -1, 0, 1, 2,...} यह पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय (Set of integers) है ।

Q यह सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय (Set of rational numbers) है ।

R यह वास्तविक संख्याओं का समुच्चय (Set of real numbers) है ।

समुच्चय लिखने की पद्धति

समुच्चय लिखने की दो पद्धतियाँ हैं ।

(1) सूची पद्धति (Listing method or roster method)

इस पद्धति में समुच्चय के सभी घटकों को धनु कोष्ठक में लिखा जाता है और प्रत्येक घटक को अलग दर्शाने के लिए इससे संलग्न घटकों के बीच में अल्पविराम चिह्न लगाया जाता है । इसमें घटकों का क्रम महत्वपूर्ण नहीं होता है किंतु सारे घटकों को केवल एक बार दर्शाना आवश्यक होता है ।

उदा. 1 से 10 में विषम संख्याओं का समुच्चय सूची पद्धति में इस प्रकार लिखा जाता है ।

A = {3, 5, 7, 9} अथवा A = {7, 3, 5, 9}

जैसे remember इसके अक्षरों का समुच्चय {r, e, m, b} ऐसा लिखा जाता है यहाँ remember शब्द में अक्षर r, m, e ये अक्षर एक से अधिक बार आए हैं फिर भी समुच्चय में इन शब्दों को एक ही बार लिखा जाता है ।

(2) गुण-वर्णन पद्धति (Rule method or set builder form)

इस पद्धति में घटकों की सूची न बनाते हुए समुच्चय का सामान्य घटक चरांक से दर्शाया जाता है और उस के आगे खड़ी रेखा खींची जाती है । खड़ी रेख के आगे चरांक का गुणधर्म हैं ।

उदा. $A = \{x \mid x \in N, 1 < x < 10\}$ इसका वाचन समुच्चय A के घटक x ऐसे है कि x यह 1 और 10 के बीच प्राकृत संख्या है ऐसे किया जाता है ।

उदा. B = {x | x यह 1 से 10 के बीच की अभाज्य संख्या है} इसमें 1 से 10 संख्याओं में से सभी अभाज्य संख्याओं का समावेश होगा इसीलिए B इस समुच्चय को {2, 3, 5, 7} इस प्रकार भी सूची पद्धति से लिखा जाता है ।

Q यह परिमेय संख्या का समुच्चय गुणवर्णन पद्धति से इस प्रकार लिखा जा सकता है ।

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in I, q \neq 0 \right\}$$

इस का वाचन 'Q ऐसा समुच्चय है जिसमें $\frac{p}{q}$ इस गुणवर्णन की ऐसी संख्या है, जिसमें कि p कोई भी पूर्णांक संख्या और q शून्येतर पूर्णांक संख्या होगी ।'

उदा. निम्नलिखित उदाहरणों के प्रत्येक समुच्चय को इन दोनों पद्धतियों से लिखा है ।

गुणवर्णन पद्धति	सूची पद्धति
A = { x| x यह DIVISION शब्द के अक्षरों का समुच्चय है}	A = {D, I, V, S, O, N}
B = { y | y यह संख्या इस प्रकार है कि $y^2 = 9$}	B = { −3, 3}
C = {z | z यह संख्या 5 की गुणक है जो 30 से छोटी प्राकृतिक संख्या है}	C = { 5, 10, 15, 20, 25}

उदा. : निम्नलिखित सारिणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

सूची पद्धति	गुणवर्णन पद्धति
A = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}	A = {x|x यह संख्या 15 से छोटी सम प्राकृत संख्या है}
....	B = {x|x यह संख्या 1 से 20 के बीच की पूर्ण वर्ग संख्या है}
C = { a, e, i, o, u}	....
....	D = { y| y यह इंद्रधनुष के रंग हैं}
....	P = {x |x यह एक ऐसी पूर्णांक संख्या है कि $-3 < x < 3$}
M = {1, 8, 27, 64, 125.......}	M ={x |x यह धन पूर्णांक का घन है}

प्रश्नसंग्रह 1.1

(1) निम्नलिखित समुच्चय सूची पद्धति में लिखिए ।

(i) सम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय

(ii) 1 से 50 तक की संख्याओं में से अभाज्य संख्याओं का समुच्चय

(iii) सभी ऋण पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय (iv) संगीत के सात मूल स्वरों का समुच्चय

(2) निम्नलिखित चिह्न में दिए हुए कथन शब्दों में स्पष्ट कीजिए ।

(i) $\frac{4}{3} \in Q$ (ii) $-2 \notin N$ (iii) P = {p | p यह विषम संख्या है}

(3) किन्हीं दो समुच्चयों को सूची पद्धति तथा गुण-वर्णन पद्धति में लिखिए।

(4) निम्नलिखित समुच्चय सूची पद्धति में लिखिए।

(i) भारतीय सौर वर्ष के सभी महीनों का समुच्चय।

(ii) 'COMPLEMENT' शब्द के अक्षरों का समुच्चय।

(iii) मानव की ज्ञानेंद्रियों का समुच्चय।

(iv) 1 से 20 तक की अभाज्य संख्याओं का समुच्चय।

(v) पृथ्वी पर स्थित महाद्वीपों का समुच्चय।

(5) निम्नलिखित समुच्चयों को गुण-वर्णन पद्धति में लिखिए।

(i) A = { 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

(ii) B = { 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48}

(iii) C = {S, M, I, L, E}

(iv) D = {रविवार, सोमवार, मंगलवार, बुधवार, गुरुवार, शुक्रवार, शनिवार}

(v) X = {a, e, t}

आओ जानें

समुच्चयों के प्रकार (Types of sets)

समुच्चय का नाम	विशेषताएँ	उदाहरण
एकल समुच्चय (Singleton Set)	एक ही घटक समाविष्ट होने वाले समुच्चय को 'एकल समुच्चय' कहते हैं।	A = {2} A यह सम अभाज्य संख्या का समुच्चय है।
रिक्त समुच्चय (Null Set) (Empty Set)	जिस समुच्चय में दिए गए गुण-वर्णनों का एक भी घटक नहीं होता है, उसे 'रिक्त समुच्चय' कहते हैं। इस समुच्चय को { } अथवा ϕ (फाय) इस चिह्न से दर्शाया जाता है।	B = {x|x यह 2 और 3 संख्याओं के बीच की प्राकृत संख्या है।} $\therefore$ B = { } अथवा ϕ
सीमित समुच्चय (Finite Set)	जो समुच्चय रिक्त है अथवा जिस समुच्चयों के घटकों की संख्या मर्यादित होती है और जिनकी गिनती संभव होती है, उसे सीमित समुच्चय कहते हैं।	C = {p| p यह 1 से 22 संख्याओं में से 4 से विभाज्य संख्या है।} C = {4, 8, 12, 16, 20}
अनंत समुच्चय (Infinite Set)	जिस समुच्चय के घटकों की संख्या अनंत होती है तथा घटकों को गिना नहीं जा सकता उसे अनंत समुच्चय कहते हैं।	N = {1, 2, 3, ... }

उदा. निम्नलिखित समुच्चयों को सूची पद्धति में लिखकर उनको सीमित और अनंत समुच्चयों में विभाजित कीजिए ।

(i) $A = \{x \mid x \in N$ और x यह विषम संख्या है$\}$ (ii) $B = \{x \mid x \in N$ और $3x - 1 = 0\}$

(iii) $C = \{x \mid x \in N$ और x यह 7 से विभाजित होने वाली संख्या है$\}$

(iv) $D = \{(a, b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$ (v) $E = \{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$

(vi) $F = \{(a, b) \mid a, b \in Q, a + b = 11\}$

हल : (i) $A = \{x \mid x \in N$ और x विषम संख्या है$\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ अनंत समुच्चय है ।

(ii) $B = \{x \mid x \in N$ और $3x - 1 = 0\}$

$3x - 1 = 0 \qquad \therefore 3x = 1 \qquad x = \frac{1}{3}$

किंतु $\frac{1}{3} \notin N \qquad \therefore B = \{\quad\} \qquad \therefore$ B यह सीमित समुच्चय है ।

(iii) $C = \{x \mid x \in N$ और x यह 7 से विभाजित होने वाली संख्या है ।$\}$

$C = \{7, 14, 21, \ldots\}$ यह अनंत समुच्चय है ।

(iv) $D = \{(a, b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$

हम a और b की ऐसी जोड़ी खोजें जिसमें a, b पूर्ण संख्या हो और $a + b = 9$

पहले a तत्पश्चात b का मान इस क्रम में लेकर D समुच्चय सूची पद्धति में निम्नलिखित प्रकार से लिखा जाएगा ।

$D = \{(0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1), (9, 0)\}$,

इस समुच्चय के घटक अर्थात संख्याओं की जोड़ियाँ निश्चित हैं तथा गिनी जा सकती हैं ।

$\therefore$ D यह समुच्चय सीमित समुच्चय है ।

(v) $E = \{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$

$E = \{-10, 10\}$. $\qquad \therefore$ E यह सीमित समुच्चय है ।

(vi) $F = \{(a, b) \mid a, b \in Q, a + b = 11\}$

$F = \{(6, 5), (3, 8), (3.5, 7.5), (-15, 26), \ldots\}$ ऐसी असंख्य जोड़ियाँ मिलती हैं ।

$\therefore$ F यह अनंत समुच्चय है ।

इसे ध्यान में रखें

संख्यांओं के N, W, I, Q, R यह सारे समुच्चय अनंत समुच्चय हैं ।

आओ, जानें

सम समुच्चय (Equal sets)

समुच्चय A के प्रत्येक घटक समुच्चय B में और B समुच्चय के प्रत्येक घटक समुच्चय A में हों तो उन्हें सम समुच्चय कहते हैं ।

'A और B सम समुच्चय हैं' इसे चिह्न में A = B इस प्रकार लिखा जाता है ।

उदा. (1) A = $\{ x \,|\, x$ यह 'listen' शब्द का वर्णाक्षर है$\}$ $\quad \therefore$ A = $\{$ l, i, s, t, e, n$\}$

B = $\{ y \,|\, y$ यह 'silent' शब्द का वर्णाक्षर है$\}$ $\quad \therefore$ B = $\{$ s, i, l, e, n, t$\}$

A और B में घटकों का क्रम भिन्न है, पर घटक वही हैं, इसलिए A और B समुच्चय समान हैं ।

जैसे कि A = B

उदा. (2) $A = \{x \,|\, x = 2n, n \in N, 0 < x \leq 10\}$, $\quad A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

B = $\{ y \,|\, y$ यह सम संख्या है, $1 \leq y \leq 10\}$, $\quad B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$\therefore$ A और B सम समुच्चय हैं ।

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए ।

$C = \{1, 3, 5, 7\}$ $\quad D = \{2, 3, 5, 7\}$

C और D सम समुच्चय हैं, ऐसा कहा जा सकता है, अर्थात नहीं ।

क्योंकि $1 \in C, 1 \notin D, 2 \in D, 2 \notin C$

इसलिए C और D सम समुच्चय नहीं है अर्थात $C \neq D$

उदा. (3) अगर $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{1, 2, 3, 4\}$ तो $A \neq B$ इसकी जाँच करें ।

उदा. (4) A = $\{x \,|\, x$ यह अभाज्य संख्या और $10 < x < 20\}$ तथा $B = \{11, 13, 17, 19\}$

यहाँ A = B की जाँच कीजिए ।

प्रश्नसंग्रह 1.2

(1) निम्नलिखित समुच्चयों से कौन-से समुच्चय समान हैं और कौन-से समान नहीं हैं, यह कारणसहित स्पष्ट कीजिए ।

$A = \{ x \,|\, 3x - 1 = 2\}$

B = $\{ x \,|\, x$ प्राकृत संख्या है, किंतु x न तो अभाज्य संख्या और न ही संयुक्त (भाज्य) संख्या है$\}$

$C = \{x \,|\, x \in N, x < 2\}$

(2) A और B समान है ? यह कारणसहित स्पष्ट कीजिए ।

A = सम संख्या जो अभाज्य संख्या भी है । $\quad B = \{x \,|\, 7x - 1 = 13\}$

(3) निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन-से समुच्चय रिक्त समुच्चय हैं, यह कारणसहित स्पष्ट कीजिए ।

(i) A = $\{ a \,|\, a$ यह शून्य से भी छोटी प्राकृत संख्या है ।$\}$

(ii) $B = \{x \,|\, x^2 = 0\}$ (iii) $C = \{ x \,|\, 5x - 2 = 0, x \in N\}$

(4) निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन-से समुच्चय सीमित और कौन-से समुच्चय अनंत हैं, कारणसहित लिखिए।

(i) $A = \{ x \mid x < 10, x$ यह प्राकृत संख्या$\}$ (v) प्रयोगशाला के उपकरणों का समुच्चय

(ii) $B = \{y \mid y < -1, y$ यह पूर्णांक संख्या$\}$ (vi) पूर्ण संख्याओं का समुच्चय

(iii) C = आपकी पाठशाला के कक्षा 9 वीं में पढ़ने वाले सभी विद्‌यार्थियों का समुच्चय

(iv) आपके गाँव के निवासियों का समुच्चय (vii) परिमेय संख्याओं का समुच्चय

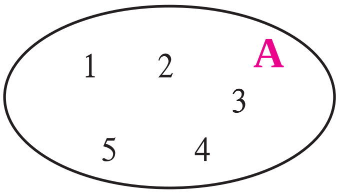
आओ, जानें

वेन आकृति (Venn diagrams)

समुच्चयों को प्रदर्शित करने के लिए सर्वप्रथम बंदिस्त आकृतियों का उपयोग ब्रिटिश तर्कशास्त्रज्ञ जॉन वेन ने किया। इसलिए इन आकृतियों को 'वेन आकृति' कहा जाता है। अलग-अलग समुच्चयों का संबंध समझने और समुच्चयों पर आधारित उदाहरण हल करने के लिए इन्हीं आकृतियों का उपयोग किया जाता है। वेन आकृतियों का समुच्चय किस प्रकार दर्शाया जाता है यह निम्नलिखित उदाहरणों से समझिए।

उदा. $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5\}$

वेन आकृति द्‌वारा समुच्चय A नीचे दर्शाया है।

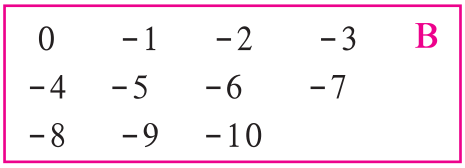


1834-1923

तर्कशास्त्र और संभाव्यता विषयों को गणितीय रूप देने का कार्य सर्वप्रथम जान वेन ने किया। **'लॉजिक ऑफ चान्स'** यह उनकी प्रसिद्‌ध पुस्तक है।

$B = \{x \mid -10 \le x \le 0, x$ पूर्णांक$\}$

संलग्न वेन आकृति B यह समुच्चय दर्शाती है।



उप समुच्चय (Subset)

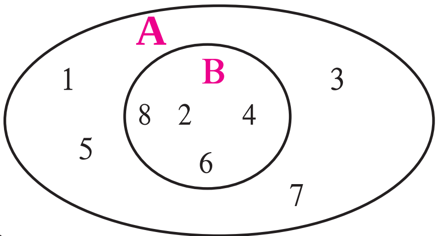
A और B दो समुच्चय है, समुच्चय B का प्रत्येक घटक समुच्चय A का भी घटक हो तो समुच्चय B को A का उप समुच्चय कहा जाता है और $B \subseteq A$ इस चिह्न से दर्शाया जाता है। इसका वाचन 'B उप समुच्चय A' या 'B यह A का उप समुच्चय है' ऐसे किया जाता है।

उदा. (1) $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

समुच्चय B का प्रत्येक घटक A का भी घटक है।

अर्थात $B \subseteq A$



यह जानकारी वेन आकृति द्‌वारा कैसे दर्शाई गई है इसे देखिए।

कृति : कक्षा के विद्यार्थियों का समुच्चय और उसी कक्षा के 'साइकिल चलाने वाले ऐसे विद्यार्थियों का समुच्चय' वेन आकृति से दर्शाया है । इसी प्रकार निम्नलिखित उप समुच्चयों के लिए वेन आकृतियाँ बनाइए।

(1) (i) कक्षा के विद्यार्थियों का समुच्चय

(ii) कक्षा के साइकिल चलाने वाले ऐसे विद्यार्थियों का समुच्चय

(2) नीचे कुछ फलों का एक समुच्चय दिया है

{अमरूद, संतरा, आम, कटहल, चीकू, जामुन, सीताफल, पपीता, करौंदा}

इस प्रकार उप समुच्चय दर्शाएँ : (i) एक बीजवाले फल (ii) एक से अधिक बीजवाले फल

अब और कुछ समुच्चयों का उदाहरण देखिए ।

उदा. (2) N = प्राकृत संख्या समुच्चय   I = पूर्णांक संख्या समुच्चय

यहाँ पर $N \subseteq I$. क्योंकि सभी प्राकृत संख्याएँ पूर्णांक संख्याएँ भी हैं, हमें इसकी जानकारी है ।

उदा. (3) P = { x | x यह 25 का वर्गमूल है} $S = \{ y \mid y \in I, -5 \le y \le 5\}$

सूची पद्धति से P यह समुच्चय लिखते हैं $P = \{-5, 5\}$

सूची पद्धति से S यह समुच्चय लिखते हैं $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

यहाँ पर P का प्रत्येक घटक S का घटक है ।

$\therefore P \subseteq S$

इसे ध्यान में रखें

(i) प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उप समुच्चय होता है अर्थात $A \subseteq A$

(ii) रिक्त समुच्चय प्रत्येक समुच्चय का उप समुच्चय होता है अर्थात $\phi \subseteq A$

(iii) यदि $A = B$ तो $A \subseteq B$ और $B \subseteq A$

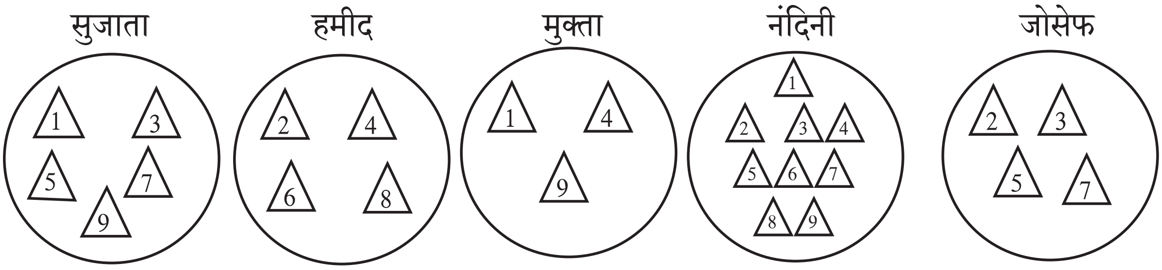
(iv) यदि $A \subseteq B$ और $B \subseteq A$ तो $A = B$

उदा. $A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$ समुच्चय के सभी उप समुच्चय लिखिए ।

जैसे $P = \{1, 3\}$, $T = \{4, 7, 8\}$, $V = \{1, 4, 8\}$, $S = \{1, 4, 7, 8\}$

ऐसे और भी समुच्चय बनाए जा सकते हैं । इनमें से कोई पाँच समुच्चय लिखिए ।

कृति : प्रत्येक विद्यार्थी को कागज के समान आकार के नौ त्रिभुज और एक थाली लेनी है । त्रिभुज पर 1 से 9 संख्याओं को लिखना है फिर प्रत्येक विद्यार्थी को अपनी अपनी थाली में संख्या लिखे हुए कुछ त्रिभुजाकार कागज़ रखने हैं । अब प्रत्येक विद्यार्थी के पास 1 से 9 इन संख्यांओं के समुच्चय का उप समुच्चय तैयार होगा ।



सुजाता, हमीद, मुक्ता, नंदिनी और जोसेफ की थालियों में कौन-कौन-सी संख्याएँ दिखाई देती हैं, निरीक्षण करें । प्रत्येक विद्यार्थी ने क्या सोचकर इन संख्याओं को चुना है यह पहचानें और इस आधार पर प्रत्येक समुच्चय को गुण वर्णन पद्धति में लिखिए ।

आओ, चर्चा करें

उदा. नीचे कुछ समुच्चय दिए हैं ।

$A = \{ \ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ $\qquad$ $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$C = \{\ldots, -12, -6, 0, 6, 12, 18\ldots\}$ $\qquad$ $D = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$

$I = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

इस आधार पर निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं इसपर चर्चा कीजिए ।

(i) A यह B, C, D इन प्रत्येक समुच्चय का उप समुच्चय है ।

(ii) B यह उपरोक्त सभी समुच्चयों का उप समुच्चय है ।

आओ, जानें

विश्व समुच्चय (Universal set)

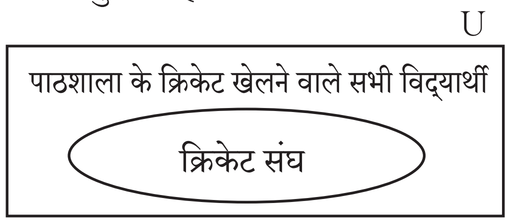
हम जिन समुच्चयों पर विचार करने वाले हैं उन सभी को समाविष्ट करने वाले एक बड़े समुच्चय को **विश्व समुच्चय** समझ सकते हैं । इसके बाहरी घटकों का विचार नहीं किया जाता । विचाराधीन प्रत्येक समुच्चय विश्व समुच्चय का उप समुच्चय होता है ।

उदा.(1) यदि हमारी पाठशाला के कक्षा 9 वीं के एक वर्ग के विद्यार्थियों की उपस्थिति का अध्ययन करना है तो 9 वीं कक्षा के विद्यार्थियों के समुच्चय का विचार करना होगा । यहाँ उस कक्षा के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय अथवा विद्यालय के सभी विद्यार्थियों के समुच्चय को विश्व समुच्चय माना जा सकता है ।

अब दूसरा उदाहरण देखते हैं ।

उदा. (2) हमें पाठशाला के क्रिकेट खेलने वाले विद्यार्थियों में से 15 विद्यार्थियों का संघ चुनना है तो पाठशाला के क्रिकेट खेलने वाले सभी खिलाड़ियों का समुच्चय विश्व समुच्चय होगा ।

उसमें से 15 खिलाड़ियों का संघ उस विश्व समुच्चय का उप समुच्चय होगा ।

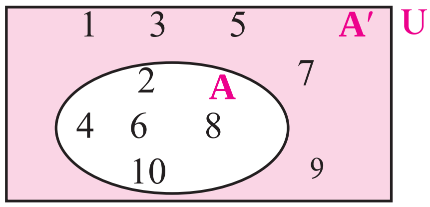


विश्व समुच्चय साधारणत: 'U' अक्षर से दर्शाते हैं । वेन आकृति में विश्व समुच्चय सामान्यत: आयत से दर्शाते हैं ।

पूरक समुच्चय (Complement of a set)

मान लीजिए U यह विश्व समुच्चय है । अगर $B \subseteq U$, तो समुच्चय B मे शामिल नहीं होने वाला परंतु विश्व समुच्चय U में समाविष्ट होने वाले घटकों के समुच्चय को समुच्चय B का पूरक समुच्चय कहते हैं । समुच्चय B का पूरक समुच्चय B' अथवा B^C से दर्शाया जाता है ।

$\therefore B' = \{x \,|\, x \in U,$ और $x \notin B\}$ ऐसे B' का वर्णन कर सकते हैं ।



उदा. (1) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

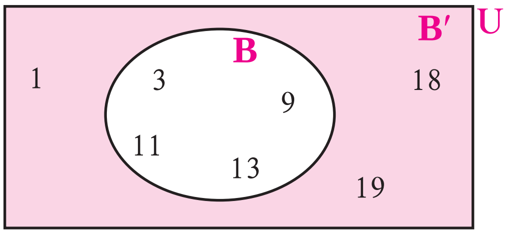
$\therefore A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

उदा. (2) मान लों $U = \{1, 3, 9, 11, 13, 18, 19\}$

$B = \{3, 9, 11, 13\}$

$\therefore B' = \{1, 18, 19\}$

अब $(B')'$ ज्ञात कीजिए । इससे क्या निष्कर्ष प्राप्त होता है ?



$(B')'$ यह समुच्चय अर्थात B' में समाविष्ट नहीं होने वाला परंतु U में समाविष्ट होने वाले घटकों का समुच्चय

$(B')' = B$ उत्तर मिला ?

उपर्युक्त जानकारी वेन आकृति से समझिए ।

पूरक समुच्चय का पूरक समुच्चय अर्थात दिया हुआ समुच्चय होता है ।

थोड़ा याद करें

पूरक समुच्चय के गुणधर्म (गुण प्रमाण)

(i) A और A' में सामान्य घटक नहीं होता है ।

(ii) $A \subseteq U$ और $A' \subseteq U$

(iii) विश्व समुच्चय पूरक समुच्चय यह रिक्त समुच्चय होता है । $U' = \phi$

(iv) रिक्त समुच्चय का पूरक समुच्चय विश्व समुच्चय होता है । $\phi' = U$

प्रश्नसंग्रह 1.3

(1) यदि A = $\{a, b, c, d, e\}$, B = $\{c, d, e, f\}$, C = $\{b, d\}$, D = $\{a, e\}$ तो निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं लिखिए ।

(i) $C \subseteq B$ (ii) $A \subseteq D$ (iii) $D \subseteq B$ (iv) $D \subseteq A$ (v) $B \subseteq A$ (vi) $C \subseteq A$

(2) 1 से 20 तक की प्राकृत संख्याओं का विश्व समुच्चय लेकर X और Y वेन आकृति मे दर्शाइए ।

(i) $X = \{x \mid x \in N$, और $7 < x < 15\}$

(ii) $Y = \{y \mid y \in N$, y यह 1 ते 20 के बीच की अभाज्य संख्या है ।$\}$

(3) $U = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$P = \{1, 3, 7, 10\}$

तो (i) U, P और P' वेन आकृति में दर्शाइए । (ii) $(P')' = P$ की जाँच कीजिए ।

(4) यदि $A = \{1, 3, 2, 7\}$ तो A समुच्चय के कोई भी तीन उप समुच्चय लिखिए ।

(5) (i) निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन-सा समुच्चय दूसरे कौन-से समुच्चय का उप समुच्चय है, लिखिए ।

P पुणे के निवासियों का समुच्चय है । M मध्य प्रदेश के निवासियों का समुच्चय है ।

I इंदौर के निवासियों का समुच्चय है । B भारत के निवासियों का समुच्चय है ।

H महाराष्ट्र के निवासियों का समुच्चय है ।

(ii) उपर्युक्त समुच्चयों में से कौन-सा समुच्चय विश्व समुच्चय कहा जाएगा ?

(6) नीचे कुछ समुच्चय दिए गए हैं । इनका अध्ययन कीजिए तथा बताइए कौन-सा समुच्चय उस समुच्चय के लिए विश्व समुच्चय लिया जा सकता है ?

(i) A = 5 की गुणज संख्याओं का समुच्चय, B = 7 के पहाड़े की संख्याओं का समुच्चय C = 12 की गुणज संख्याओं का समुच्चय

(ii) P = 4 की गुणज पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय T= सभी समवर्ग संख्याओं का समुच्चय

(7) कक्षा के सभी विद्यार्थियों के समुच्चय को विश्व समुच्चय मानते हैं । गणित में 50% या उससे अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय A मान लिया जाए तो A का पूरक समुच्चय लिखिए ।

आओ, जानें

समुच्चयों पर संक्रियाएँ (Operation on sets)

दो समुच्चयों का प्रतिच्छेदन (Intersection of two sets)

यदि A और B ये दो समुच्चय हैं । A और B समुच्चयों के सामान्य घटक समुच्चय को A और B समुच्चयों का प्रतिच्छेदन समुच्चय कहा जाता है । इसे $A \cap B$ लिखा जाता है और 'A प्रतिच्छेदन B' पढ़ा जाता है ।

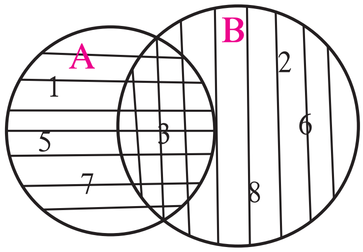
$\therefore \quad A \cap B = \{x \mid x \in A$ और $x \in B\}$

उदा. (1) $A = \{1, 3, 5, 7\}$ $B = \{2, 3, 6, 8\}$

वेन आकृति की रचना करते हैं ।

A और B दोनों समुच्चयों मे 3 सामान्य घटक है ।

$\therefore A \cap B = \{3\}$



उदा. (2) $A = \{1, 3, 9, 11, 13\}$ $B = \{1, 9, 11\}$

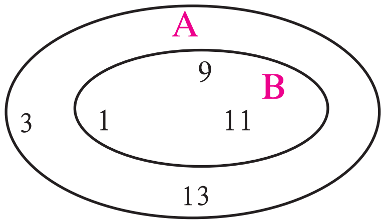
समुच्चय A और समुच्चय B में 1, 9, 11 ये सामान्य घटक हैं ।

$\therefore A \cap B = \{1, 9, 11\}$ परंतु $B = \{1, 9, 11\}$

$\therefore A \cap B = B$

यहाँ पर B यह A का उप समुच्चय है, इसे ध्यान में रखें ।

$\therefore$ यदि $B \subseteq A$ तो $A \cap B = B$. इसी प्रकार $B \cap A = B$, तो $B \subseteq A$



इसे ध्यान में रखें

प्रतिच्छेदन समुच्चयों के गुणधर्म

(1) $A \cap B = B \cap A$

(2) यदि $A \subseteq B$ तो $A \cap B = A$

(3) यदि $A \cap B = B$ तो $B \subseteq A$

(4) $A \cap B \subseteq A$ और $A \cap B \subseteq B$

(5) $A \cap A' = \phi$

(6) $A \cap A = A$

(7) $A \cap \phi = \phi$

कृति : भिन्न-भिन्न उदाहरणों द्वारा उपर्युक्त गुणधर्मों की जाँच कीजिए ।

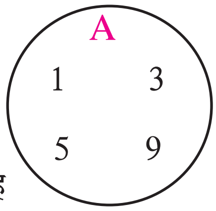
आओ, जानें

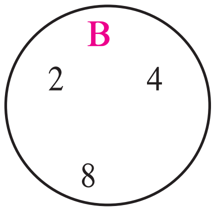
विसंघित समुच्चय (Disjoint sets)

यदि, $A = \{1, 3, 5, 9\}$

और $B = \{2, 4, 8\}$ ये दो समुच्चय दिए हैं ।

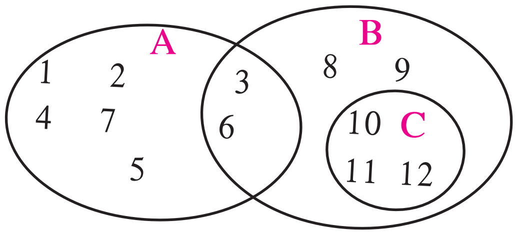
समुच्चय A और B में एक भी सामान्य घटक नहीं है । इसका मतलब यह समुच्चय पूर्णतः भिन्न अर्थात विभक्त है । इसीलिए उन्हें 'विभक्त' अथवा 'विसंघित' समुच्चय कहते हैं । इन समुच्चयों की वेन आकृति देखिए ।



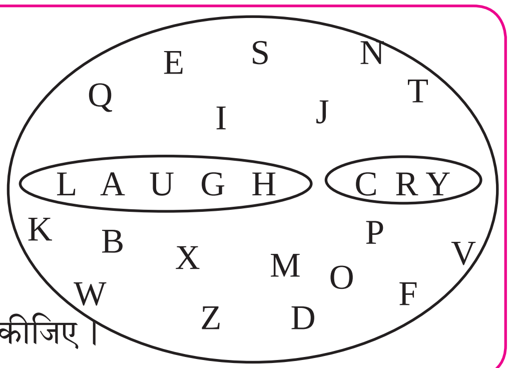


कृति I : यहाँ पर A, B, C यह समुच्चय वेन आकृतियों द्वारा दर्शाए गए हैं ।

इनमें से कौन-से दो समुच्चय विसंघित है लिखिए ।



कृति II : मान लें अंग्रेजी के अक्षरों का समुच्चय विश्व समुच्चय है ।
यहाँ पर समुच्चय के घटक अंग्रेजी अक्षर है ।
माना, LAUGH शब्द के अक्षर का एक समुच्चय है ।
और CRY शब्द के अक्षर दूसरा समुच्चय है ।
ये विसंघित समुच्चय हैं, ऐसा कह सकते हैं ।
इन दोनों समुच्चयों का प्रतिच्छेदन रिक्त है इसका अनुभव कीजिए ।

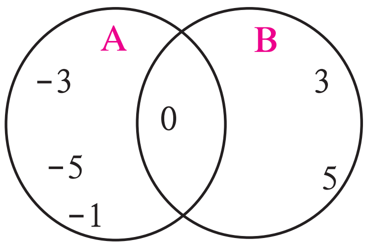


दो समुच्चयों का संघ (Union of two sets)

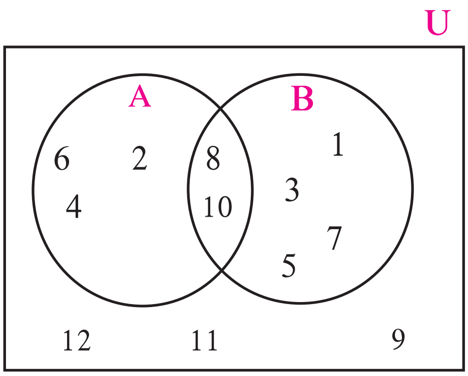
A और B यह दो समुच्चय हैं । इन दोनों समुच्चय के घटकों को मिलाकर बनने वाले समुच्चय को A और B का संघ समुच्चय कहते हैं । उसे $A \cup B$ इस प्रकार लिखा जाता है और 'A संघ B' इस प्रकार पढ़ा जाता है ।

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ अथवा $x \in B\}$

उदा. (1) $A = \{-1, -3, -5, 0\}$
$B = \{0, 3, 5\}$
$A \cup B = \{-3, -5, 0, -1, 3, 5\}$
ध्यान दें कि $A \cup B = B \cup A$



उदा. (2)



संलग्न वेन आकृति में दर्शाए हुए समुच्चय के आधार पर निम्नलिखित समुच्चय को सूची पद्धति में लिखिए ।

(i) U (ii) A (iii) B (iv) $A \cup B$ (v) $A \cap B$

(vi) A' (vii) B' (viii) $(A \cup B)'$ (ix) $(A \cap B)'$

हल : $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

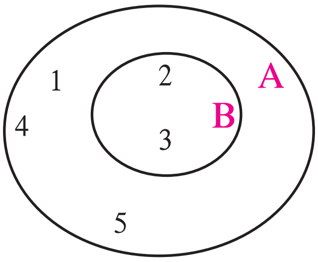
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ $A \cap B = \{8, 10\}$

$A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 12\}$ $B' = \{2, 4, 6, 9, 11, 12\}$

$(A \cup B)' = \{9, 11, 12\}$ $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$

उदा. (3)



$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 3\}$
इस उदाहरण की वेन आकृति देखिए ।
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
समुच्चय A और समुच्चय $A \cup B$ में वही घटक हैं ।
इससे, यदि $B \subseteq A$ तो $A \cup B = A$

थोड़ा याद करें

संघ समुच्चय के गुणधर्म

(1) $A \cup B = B \cup A$ (2) जर $A \subseteq B$ तर $A \cup B = B$

(3) $A \subseteq A \cup B,\ B \subseteq A \cup B$ (4) $A \cup A' = U$

(5) $A \cup A = A$ (6) $A \cup \phi = A$

आओ, जानें

समुच्चय घटकों की संख्या (Number of elements in a set)

यदि $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ यह समुच्चय है जिसमें 5 घटक हैं ।

समुच्चय A की घटक संख्या $n(A)$ ऐसे दर्शाई जाती है । $\therefore\ n(A) = 5$

यदि $B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$ $\therefore\ n(B) = 6$

संघ समुच्चय और प्रतिच्छेदन समुच्चयों के घटकों की संख्या

समुच्चय A और समुच्चय B पर ध्यान दीजिए,

$n(A) + n(B) = 5 + 6 = 11$ ----(1)

$A \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 36\}$ $\therefore\ n(A \cup B) = 9$--------(2)

$A \cap B$ ज्ञात कीजिए अर्थात, समुच्चय A और समुच्चय B में से सामान्य घटक ज्ञात कीजिए ।

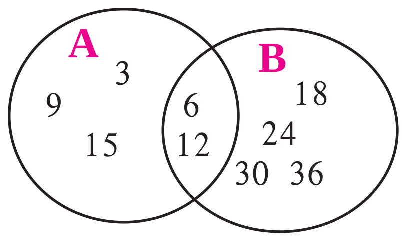
$A \cap B = \{6, 12\}$ $\therefore\ n(A \cap B) = 2$--------(3)

ध्यान दें, $n(A)$ और $n(B)$ की गिनती करते समय $A \cap B$ के घटक दो बार गिने गए हैं ।

$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 6 - 2 = 9$ इसी प्रकार $n(A \cup B) = 9$

समीकरण (1), (2) और (3) से यह निष्कर्ष पाया जाता है कि,

$\therefore\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



उपरोक्त नियमों की जाँच संलग्न वेन आकृति द्वारा कीजिए ।

$n(A) = \boxed{}$, $n(B) = \boxed{}$

$n(A \cup B) = \boxed{}$, $n(A \cap B) = \boxed{}$

$\therefore\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

इसे ध्यान में रखें

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

अर्थात $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$

अब $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ $B = \{1, 2, 4, 6, 8, 12, 13\}$

यह समुच्चय लेकर उपरोक्त नियम जाँच लीजिए ।

आओ, जानें

समुच्चय पर आधारित शाब्दिक उदाहरण

उदा. एक कक्षा में 70 विद्‌यार्थी है। उनमें से 45 विद्‌यार्थियों का मनपसंद खेल क्रिकेट है। 52 विद्‌यार्थियों को खो-खो पसंद है। ऐसा एक भी विद्‌यार्थी नहीं है जिसे इनमें से एक भी खेल पसंद नहीं। तो क्रिकेट और खो-खो ये दोनों खेल पसंद करने वाले विद्‌यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए। केवल क्रिकेट पसंद करने वाले विद्‌यार्थियों की संख्या कितनी हैं?

हल : इस उदाहरण को हम दो विधियों से हल करेंगे।

विधि I : कक्षा के कुल विद्‌यार्थी = 70

माना क्रिकेट पसंद करने वाले विद्‌यार्थियों का समुच्चय A है।

खो-खो पसंद करने वाले विद्‌यार्थियों का समुच्चय B है।

प्रत्येक विद्‌यार्थी को क्रिकेट अथवा खो-खो में से एक खेल तो पसंद है।

क्रिकेट अथवा खो-खो पसंद करने वाले विद्‌यार्थियों की संख्या अर्थात $n(A \cup B)$

$\therefore\ n(A \cup B) = 70$

क्रिकेट और खो-खो यह दोनों खेल पसंद करने वाले विद्‌यार्थियों की संख्या = $n(A \cap B)$

$n(A) = 45, \qquad n(B) = 52$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ यह हम जानते हैं।

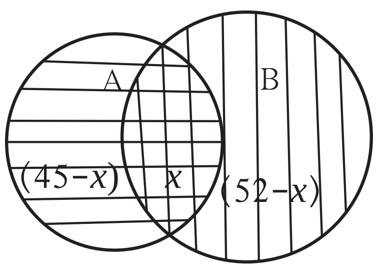
$$\therefore\ n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$
$$= 45 + 52 - 70 = 97 - 70 = 27$$

$\therefore$ दोनों खेल पसंद करने वाले विद्‌यार्थी 27, क्रिकेट पसंद करने वाले विद्‌यार्थी 45 है।

$\therefore$ केवल क्रिकेट पसंद करने वाले विद्‌यार्थी = 45 − 27 = 18

$A \cap B$ यह दोनों खेल पसंद करने वाले विद्‌यार्थियों का समुच्चय है। $\therefore\ n(A \cap B) = 27$

विधि II : उपरोक्त जानकारी वेन आकृति में दर्शाकर दोनों खेल पसंद करने वाले विद्‌यार्थियों की संख्या निम्नलिखित पद्‌धति से पा सकते हैं।



माना $n(A \cap B) = x$ हैं, $n(A) = 45$, $n(B) = 52$,

$n(A \cup B) = 70$ यह हम जानते हैं।

$$\therefore\ n(A \cap B) = x = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$
$$= 45 + 52 - 70 = 27$$

वेन आकृति द्‌वारा केवल क्रिकेट पसंद करने वाले विद्‌यार्थी

$$= 45 - 27 = 18$$

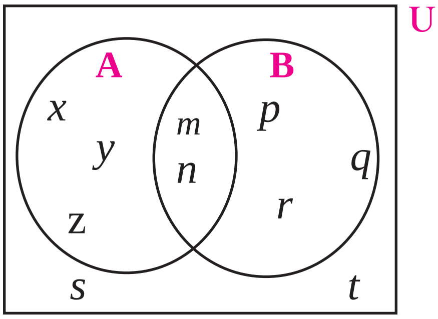
प्रश्नसंग्रह 1.4

(1) यदि $n(A) = 15$, $n(A \cup B) = 29$, $n(A \cap B) = 7$ तो $n(B)$ = कितने?

(2) एक छात्रवास में 125 विद्यार्थी है, उनमें से 80 विद्यार्थी चाय पीते हैं, 60 विद्यार्थी कॉफी पीते हैं और 20 विद्यार्थी चाय और कॉफी दोनों प्रकार के पेय पीते हैं । तो एक भी पेय न पीने वाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए ।

(3) एक विद्यार्थी प्रतियोगिता परीक्षा में 50 विद्यार्थी अंग्रेजी में उत्तीर्ण हुए । 60 विद्यार्थी गणित में उत्तीर्ण हुए । 40 विद्यार्थी दोनों विषयों में उत्तीर्ण हुए । एक भी विद्यार्थी दोनों विषयों में अनुत्तीर्ण नहीं हुआ । तो दोनों में से कम-से-कम एक विषय में कितने विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए ?

(4) एक विद्यालय में कक्षा 9 वीं के 220 विद्यार्थियों की रुचियों का सर्वेक्षण किया गया । इनमें से 130 विद्यार्थियों को पर्वतारोहण में रुचि है और 180 विद्यार्थियों को आकाशदर्शन में रुचि है । 110 विद्यार्थियों ने पर्वतारोहण और आकाशदर्शन दोनों में रुचि दर्शाई तो ऐसे कितने विद्यार्थी हैं, जिन्हें दोनों में से एक में भी रुचि नहीं है? कितने विद्यार्थियों को सिर्फ पर्वतारोहण में रुचि है? कितने विद्यार्थियों को सिर्फ आकाशदर्शन में रुचि है ?



(5) संलग्न आकृति के माध्यम से निम्नलिखित सभी समुच्चय लिखिए ।

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) U

(v) A' (vi) B' (vii) $(A \cup B)'$

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

(1) निम्नलिखित प्रश्नों के लिए सही विकल्प चुनकर लिखिए ।

(i) $M = \{1, 3, 5\}$, $N = \{2, 4, 6\}$, तो $M \cap N$ = ?

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (B) $\{1, 3, 5\}$ (C) ϕ (D) $\{2, 4, 6\}$

(ii) $P = \{x \mid x$ यह विषम प्राकृत संख्या, $1 < x \leq 5\}$ इस समुच्चय को सूची पद्धति में किस प्रकार लिखा जाएगा ?

(A) $\{1, 3, 5\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (C) $\{1, 3\}$ (D) $\{3, 5\}$

(iii) $P = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots 10\}$, यह किस प्रकार का समुच्चय है ?

(A) रिक्त समुच्चय (B) अनंत समुच्चय (C) सीमित समुच्चय (D) इनमें से एक भी नहीं

(iv) $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ और $M = \{1, 2, 4\}$ तो निम्नलिखित में से N यह समुच्चय कौन-सा है?

(A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\{3, 4, 5, 6\}$ (C) $\{2, 5, 6\}$ (D) $\{4, 5, 6\}$

(v) यदि $P \subseteq M$, तो $P \cap (P \cup M)$ यह निम्नलिखित में से कौन-सा समुच्चय है ?

(A) P (B) M (C) $P \cup M$ (D) $P' \cap M$

(vi) निम्नलिखित में से कौन-सा समुच्चय रिक्त समुच्चय है?

(A) समांतर रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिंदुओं का समुच्चय

(B) सम अभाज्य संख्याओं का समुच्चय

(C) 30 से कम दिन वाले अंग्रेजी महीनों का समुच्चय

(D) $P = \{x \mid x \in I, -1 < x < 1\}$

(2) निम्नलिखित उप प्रश्नों के लिए योग्य विकल्प चुनकर लिखिए ।

(i) निम्नलिखित में से कौन-सा विकल्प समुच्चय हैं?

(A) इंद्रधनुष के रंग (B) पाठशाला के प्रांगण के ऊँचे वृक्ष

(C) गाँव में रहने वाले अमीर लोग (D) किताब के आसान उदाहरण

(ii) $N \cap W$ समुच्चय निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन-सा?

(A) $\{1, 2, 3, ...\}$ (B) $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ (C) $\{0\}$ (D) $\{ \}$

(iii) $P = \{x \mid x$ यह indian इस शब्द के अक्षर है ।$\}$ तो P यह समुच्चय सूची पद्धतिनुसार निम्नलिखित में से कौन-सा होगा ?

(A) {i, n, d} (B) {i, n, d, a} (C) {i, n, d, i, a} (D) {n, d, a}

(iv) यदि $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ तथा $M = \{3, 4, 7, 8\}$ तो $T \cup M = $?

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ (B) $\{1, 2, 3, 7, 8\}$

(C) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$ (D) $\{3, 4\}$

(3) किसी समूह के100 सदस्यों में से 72 सदस्य अंग्रेजी भाषा बोलते हैं और 43 सदस्य फ्रेंच भाषा बोलते हैं । ये 100 सदस्य अंग्रेजी अथवा फ्रेंच इनमें से (कम से कम) एक भाषा बोलते हैं तो कितने सदस्य है जो सिर्फ अंग्रेजी बोलते हैं? कितने सदस्य सिर्फ फ्रेंच बोलते हैं और कितने सदस्य अंग्रेजी और फ्रेंच ये दोनों भाषाएँ बोलते हैं?

(4) पार्थ ने वृक्षसंवर्धन सप्ताह में 70 वृक्षों का वृक्षारोपण किया तो प्रज्ञा ने 90 वृक्षों का रोपण किया । उनमें से दोनों ने मिलकर 25 वृक्षों का रोपण किया, तो पार्थ अथवा प्रज्ञा ने कुल कितने वृक्षों का रोपण किया ?

(5) यदि $n(A) = 20$, $n(B) = 28$ तथा $n(A \cup B) = 36$ तो $n(A \cap B) = $?

(6) किसी एक कक्षा के 28 विद्‌यार्थियों में से 8 विद्‌यार्थियों के घर सिर्फ कुत्ता पाला है, 6 विद्‌यार्थियों के घर सिर्फ बिल्ली पाली है 10 विद्‌यार्थियों के घर में कुत्ता और बिल्ली दोनों को पाला है । तो कितने विद्‌यार्थियों के घर कुत्ता अथवा बिल्ली में से एक भी प्राणी को नहीं पाला है ?

(7) निम्नलिखित प्रत्येक उदाहरण में से समुच्चयों का प्रतिच्छेदन संच समुच्चय वेन आकृति के द्‌वारा दर्शाइए ।

(i) $A = \{3, 4, 5, 7\}$ $B = \{1, 4, 8\}$

(ii) $P = \{a, b, c, e, f\}$ $Q = \{l, m, n, e, b\}$

(iii) X = $\{x \mid x$ यह 80 और 100 बीच की अभाज्य संख्या है । $\}$

Y = $\{y \mid y$ ही 90 व 100 बीच की विषम संख्या है । $\}$

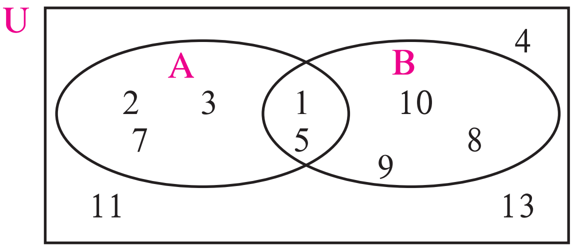
(8) निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन-सा समुच्चय किस समुच्चय का उप समुच्चय है यह स्पष्ट कीजिए ।

X = सभी चतुर्भुजों का समुच्चय Y = सभी सम चतुर्भुजों का समुच्चय

S = सभी वर्गों का समुच्चय T = सभी समांतर चतुर्भुजों का समुच्चय

V = सभी आयतों का समुच्चय

(9) यदि M कोई एक समुच्चय, तो $M \cup \phi$ और $M \cap \phi$ लिखिए ।

(10*) 

संलग्न आकृति के आधार पर U, A, B, $A \cup B$ और $A \cap B$ समुच्चय लिखिए ।

(11) यदि $n(A) = 7$, $n(B) = 13$, $n(A \cap B) = 4$, तो $n(A \cup B) = ?$

कृति I : रिक्त स्थान में समुच्चय घटक लिखिए ।

U = {1, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15}

A = {1, 11, 13} B = {8, 5, 10, 11, 15} $A' = \{........\}$ $B' = \{........\}$

$A \cap B = \{...........\}$ $A' \cap B' = \{...............\}$

$A \cup B = \{...........\}$ $A' \cup B' = \{...........\}$

$(A \cap B)' = \{...........\}$ $(A \cup B)' = \{...........\}$

जाँच कीजिए : $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

कृति II : आप के पास-पड़ोस में रहने वाले 20 परिवारों से निम्नलिखित जानकारी लीजिए ।

(i) मराठी समाचार पत्र लेने वाले परिवारों की संख्या

(ii) अंग्रेजी समाचार पत्र लेने वाले परिवारों की संख्या

(iii) अंग्रेजी और मराठी दोनों भाषाओं के समाचार पत्र लेने वाले परिवारों की संख्या

ली हुई जानकारी को वेन आकृति द्वारा स्पष्ट कीजिए ।

2 वास्तविक संख्याएँ

C639XK

आओ, सीखें

- परिमेय संख्याओं के गुणधर्म
- अपरिमेय संख्याओं के गुणधर्म
- करणी
- वर्गकरणी की तुलना
- वर्गकरणी पर क्रिया
- वर्गकरणी का परिमेयीकरण

थोड़ा याद करें

पिछली कक्षा में हमने प्राकृत संख्या, पूर्णांक संख्या और वास्तविक संख्याओं का अध्ययन किया है ।

N = प्राकृत संख्याओं का समुच्चय = $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

W = पूर्ण संख्याओं का समुच्चय = $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

I = पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय = $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$

Q = परिमेय संख्याओं का समुच्चय = $\{\frac{p}{q}, \mid p, q \in I, q \neq 0\}$

R = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय ।

$N \subseteq W \subseteq I \subseteq Q \subseteq R$

परिमेय संख्याओं में क्रमसंबंध : $\frac{p}{q}$ और $\frac{r}{s}$ परिमेय संख्याएँ हो तथा $q > 0, s > 0$

(i) यदि $p \times s = q \times r$ तो $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ (ii) यदि $p \times s > q \times r$ तो $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$

(iii) यदि $p \times s < q \times r$ तो $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$

आओ, जानें

परिमेय संख्यांओं के गुणधर्म (Properties of rational numbers)

यदि a, b, c परिमेय संख्या हो तो

गुणधर्म	योग	गुणन
1. क्रम निरपेक्ष	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
2. साहचर्य	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. सर्वसमिका (अधिकारक)	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
4. प्रतिलोम	$a + (-a) = 0$	$a \times \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$

थोड़ा याद करें

प्रत्येक परिमेय संख्याओं के दशमलव पूर्णांक स्वरूप सांत (खंडित) अथवा अनवसानी (अखंडित) आवर्ती ।

खंडित (सांत) रूप

(1) $\frac{2}{5} = 0.4$

(2) $-\frac{7}{64} = -0.109375$

(3) $\frac{101}{8} = 12.625$

अखंडित (अनवसानी) आवर्ती रूप

(1) $\frac{17}{36} = 0.472222... = 0.47\dot{2}$

(2) $\frac{33}{26} = 1.2692307692307... = 1.2\overline{692307}$

(3) $\frac{56}{37} = 1.513513513... = 1.\overline{513}$

आओ, जानें

अखंडित (अनवसानी) आवर्ती दशमलव रूप की परिमेय संख्या का $\frac{p}{q}$ के रूप में लेखन

उदा. (1) 0.777.... इस आवर्ती दशमलव अपूर्णांक को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए ।

हल : मानो $x = 0.777... = 0.\dot{7}$

$$\therefore 10x = 7.777... = 7.\dot{7}$$

$$\therefore 10x - x = 7.\dot{7} - 0.\dot{7}$$

$$\therefore 9x = 7$$

$$\therefore x = \frac{7}{9}$$

$$\therefore 0.777... = \frac{7}{9}$$

उदा. (2) 7.529529529... इस आवर्ती दशमलव अपूर्णांक $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए ।

हल : मानो, $x = 7.529529... = 7.\overline{529}$

$$\therefore 1000x = 7529.529529... = 7529.\overline{529}$$

$$\therefore 1000x - x = 7529.\overline{529} - 7.\overline{529}$$

$$\therefore 999x = 7522.0 \qquad \therefore x = \frac{7522}{999}$$

$$\therefore 7.\overline{529} = \frac{7522}{999}$$

आओ, सोचें

$2.4\dot{3}$ यह संख्या $\frac{p}{q}$ रूप में लिखने के लिए क्या करेंगे?

इसे ध्यान में रखें

(1) दी गई संख्या में दशमलव चिह्न के बाद कितने अंक आवर्ती है यह देखकर उसके अनुसार उस संख्या को 10, 100, 1000 में से उचित संख्या से गुणा करेंगे । उदा. $2.\dot{3}$ इस संख्या में 3 यह एक ही अंक आवर्ती है इसलिए $2.\dot{3}$ संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में लाने के लिए उसे 10 से गुणा करना पड़ेगा ।

$1.\overline{24}$ इस संख्या में 2, 4 यह दो अंक आवर्ती है । इसलिए $1.\overline{24}$ को 100 से गुणा करना पड़ेगा ।

$1.\overline{513}$ इस संख्या में 5, 1, 3 यह तीन अंक आवर्ती है इसलिए $1.\overline{513}$ को 1000 से गुणा करना पड़ेगा।

(2) परिमेय संख्याओं के हर के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कर जाँच करे की उसमें 2 और 5 के अतिरिक्त अभाज्य संख्या न हो तो उस परिमेय संख्या के दशमलव रूप सांत होते हैं । 2 तथा 5 के अतिरिक्त अभाज्य संख्या हर का गुणनखंड हो तो वह संख्या के दशमलव रूप अनवसानी (अखंडित) आवर्ती होते हैं ।

प्रश्नसंग्रह 2.1

1. निम्नलिखित में से कौन-सी परिमेय संख्यांओं के दशमल रूप सांत (खंडित) और कौन-सी संख्याओं के दशमलव रूप अनवसानी (अखंडित) आवर्ती है लिखिए ।

   (i) $\frac{13}{5}$ (ii) $\frac{2}{11}$ (iii) $\frac{29}{16}$ (iv) $\frac{17}{125}$ (v) $\frac{11}{6}$

2. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को दशमलव रूप में लिखिए ।

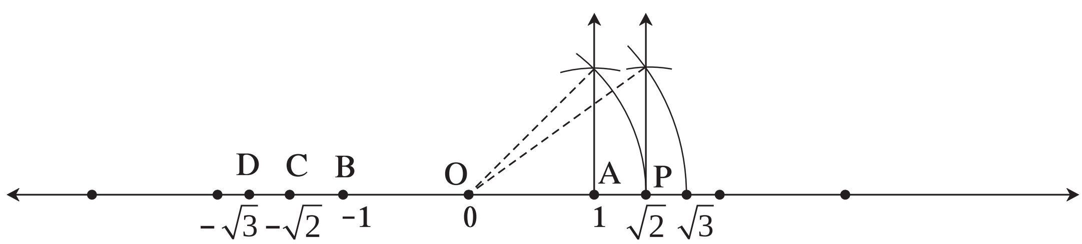
   (i) $\frac{127}{200}$ (ii) $\frac{25}{99}$ (iii) $\frac{23}{7}$ (iv) $\frac{4}{5}$ (v) $\frac{17}{8}$

3. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को संख्या $\frac{p}{q}$ रूप में लिखिए ।

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.\overline{37}$ (iii) $3.\overline{17}$ (iv) $15.\overline{89}$ (v) $2.\overline{514}$

थोड़ा याद करें

नीचे दी गई संख्या रेखा पर दर्शाई गई संख्या $\sqrt{2}$ तथा $\sqrt{3}$ परिमेय संख्या नहीं है अर्थात वे अपरिमेय संख्याएँ हैं ।



इस संख्या रेखा पर OA = 1 इकाई दूरी है । बिंदु O के बाईं ओर 1 इकाई दूरी पर बिंदु B है । बिंदु B का निर्देशांक -1 है । बिंदु P का निर्देशांक $\sqrt{2}$ है इसकी विपरित संख्या को बिंदु C से दर्शाया गया है । बिंदु C का निर्देशांक $-\sqrt{2}$ है। उसी प्रकार $\sqrt{3}$ की विपरित संख्या को दर्शाने वाले बिंदु D का निर्देशांक $-\sqrt{3}$ है ।

आओ, जानें

अपरिमेय और वास्तविक संख्या (Irrational and real numbers)

$\sqrt{2}$ यह अपरिमेय संख्या है । इसे अप्रत्यक्ष उपपत्ति से सिद्‌ध कर सकते हैं ।

मानो की $\sqrt{2}$ यह परिमेय संख्या है । उसे $\frac{p}{q}$ मानेंगे ।

माना $\frac{p}{q}$ उस परिमेय संख्या का संक्षिप्त रूप है अर्थात p तथा q में 1 के अलावा दूसरा कोई सामान्य विभाजक नहीं है । $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $\therefore$ $2 = \frac{P^2}{q^2}$ (दोनों पक्षों का वर्ग लेने पर)

$\therefore$ $2q^2 = p^2$

$\therefore$ p^2 यह सम संख्या है ।

$\therefore$ p भी सम संख्या है, अर्थात 2 यह p का विभाजक है । ....(I)

$\therefore$ $p = 2t$ $\therefore$ $p^2 = 4t^2$ $t \in I$

$\therefore$ $2q^2 = 4t^2$ ($\because$ $p^2 = 2q^2$) $\therefore$ $q^2 = 2t^2$ $\therefore$ q^2 यह सम संख्या है । $\therefore$ q यह सम संख्या हैं ।

$\therefore$ 2 यह q का भी विभाजक है । .... (II)

कथन(I) तथा (II) से 2 यह p और q का सामान्य विभाजक हैं ।

यह विसंगति है, क्योंकि $\frac{p}{q}$ में p और q का 1 के अतिरिक्त दूसरा कोई सामान्य विभाजक नहीं है ।

$\therefore$ $\sqrt{2}$ यह परिमेय संख्या है यह मानना गलत है ।

$\therefore$ $\sqrt{2}$ यह अपरिमेय संख्या है ।

इसी प्रकार $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ यह अपरिमेय संख्या है । यह सिद्‌ध कर सकते हैं । उसके लिए 3 अथवा 5 संख्या n के विभाजक हो तो n^2 के भी विभाजक होते हैं इस नियम का उपयोग कीजिए ।

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ऐसी संख्याएँ, संख्या रेखा पर दिखा सकते हैं ।

जिन संख्याओं को संख्या रेखा पर बिंदु रूप में दर्शाया जा सकता है उन्हें वास्तविक संख्या कहते हैं ।

अत: संख्या रेखा के प्रत्येक बिंदु का निर्देशांक ही वास्तविक संख्या है और प्रत्येक वास्तविक संख्या से संबंधित बिंदु संख्या रेखा पर होता है ।

हमें पता है कि प्रत्येक परिमेय संख्या यह वास्तविक संख्या होती है किंतु $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, π, $3+\sqrt{2}$ ऐसी वास्तविक संख्या परिमेय संख्या नहीं है अर्थात ध्यान दीजिए कि प्रत्येक वास्तविक संख्या यह परिमेय संख्या ही होती है ऐसा नहीं है ।

अपरिमेय संख्याओं का दशमलव रूप में लेखन

हम 2 तथा 3 इन संख्याओं का वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात करेंगे ।

2 का वर्गमूल

$1.41421\ldots$

1	$2.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ldots.$
+1	−1
24	100
+4	−96
281	400
+ 1	−281
2824	11900
+ 4	−11296
28282	60400
+ 2	− 56564
282841	0383600

$\therefore\ \sqrt{2} = 1.41421\ldots$

3 का वर्गमूल

$1.732\ldots.$

1	$3.\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ldots.$
+1	−1
27	200
+7	−189
343	1100
+ 3	−1029
3462	007100
+ 2	−6924
3464	0176

$\therefore\ \sqrt{3} = 1.732\ldots$

यहाँ भाग विधि में दशमलव चिह्नों के आगे की अंकों की संख्या कभी भी समाप्त नहीं होती है अर्थात अनंत अंकों का क्रम मिलता है । यह क्रम किन्हीं अंकों के समूह के आवर्तनों से तैयार नहीं होता । अतः यह संख्या का दशमलव स्वरूप अनवसानी अनावर्ती संख्या $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है अर्थात $1.4142\ldots$ और $1.732\ldots$ यह भी अपरिमेय संख्या है । **इस आधार पर ध्यान में रखिए अनावसानी (अखंडित) अनावर्ती दशमलव रूपवाली संख्या अपरिमेय संख्या होती है ।**

संख्या π

कृति I

किसी मोटे कार्डबोर्ड पर विभिन्न त्रिज्यावाले वृत्त खींचिए । तीन, चार वृत्ताकार आकृति काट लीजिए । प्रत्येक आकृति की कोर से धागा घुमाकर प्रत्येक वृत्ताकार आकृति का व्यास तथा परिधि नापिए । नीचे दी गई तालिका पूर्ण कीजिए ।

अ. क्र.	त्रिज्या	व्यास (d)	परिधि (c)	अनुपात = $\frac{c}{d}$
1	7 सेमी			
2	8 सेमी			
3	5.5 सेमी			

संलग्न तालिका में $\frac{c}{d}$ का अनुपात हर समय 3.1 के लगभग आता है । अर्थात अचल है ऐसा ध्यान में आता है । उस अनुपात को π इस चिह्न से दर्शाते हैं ।

कृति II

π का लगभग मान ज्ञात करने के लिए 11 सेमी, 22 सेमी तथा 33 सेमी लंबाईवाले तार के टुकड़े लीजिए । प्रत्येक टुकड़े से वृत्त तैयार कीजिए । इन वृत्तों के व्यास नापिए तथा निम्न तालिका पूर्ण कीजिए ।

वृत्त क्र.	परिधि	व्यास	परिधि और व्यास का अनुपात
1	11 सेमी		
2	22 सेमी		
3	33 सेमी		

परिधि तथा व्यास का अनुपात यह $\frac{22}{7}$ के आसपास आता है क्या ? जाँच कीजिए ।

वृत्त की परिधि तथा व्यास का अनुपात अचर संख्या है वह अपरिमेय होती है । उस संख्या को π इन चिह्न द्‌वारा दर्शाया जाता है । π लगभग मान $\frac{22}{7}$ अथवा 3.1428 लेते हैं ।

महान भारतीय गणिततज्ञ आर्यभट्ट ने इ. स. 499 में π का मान $\frac{62832}{20000} = 3.1416$ ज्ञात किया था ।

हमें पता है कि, $\sqrt{3}$ यह अपरिमेय संख्या है । अब $2+\sqrt{3}$ यह संख्या अपरिमेय है क्या देखेंगे ।

माना, $2+\sqrt{3}$ यह संख्या अपरिमेय नहीं है अर्थात वह परिमेय संख्या होनी चाहिए ।

यदि $2+\sqrt{3}$ परिमेय संख्या हो तो $2+\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ है ऐसा समझिए ।

$\therefore \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 2$ यह समीकरण प्राप्त होता है ।

यहाँ बायाँ पक्ष अपरिमेय संख्या और दायाँ पक्ष परिमेय संख्या ऐसी विसंगति मिलती है ।

अर्थात $2+\sqrt{3}$ यह परिमेय संख्या नहीं है बल्कि वह अपरिमेय संख्या है, यह सिद्‌ध होता है ।

उसी प्रकार हम सिद्‌ध कर सकते हैं कि $2\sqrt{3}$ यह अपरिमेय संख्या है ।

निम्नलिखित प्रकार से जाँच कर सकते हैं कि दो अपरिमेय संख्याओं का योगफल या गुणनफल परिमेय संख्या हो सकती है ।

जैसे, $2+\sqrt{3}+(-\sqrt{3}) = 2$, $\quad 4\sqrt{5} \div \sqrt{5} = 4$, $\quad (3+\sqrt{5}) - (\sqrt{5}) = 3$,

$2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$ $\quad \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$, $\quad 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$

इसे ध्यान में रखें

अपरिमेय संख्याओं के गुणधर्म

(1) परिमेय संख्या तथा अपरिमेय संख्या का योग अथवा व्यवकलन अपरिमेय संख्या होती है ।

(2) शून्येत्तर परिमेय संख्या तथा अपरिमेय संख्या का गुणनफल अथवा भागफल भी एक अपरिमेय संख्या होती है ।

(3) दो अपरिमेय संख्याओं का योगफल, व्यवकलन, गुणनफल तथा भागफल यह सिर्फ परिमेय अथवा अपरिमेय संख्या हो सकती है ।

आओ, जानें

वास्तविक संख्यांओं के क्रमसंबंध के गुणधर्म

1. यदि a और b दो वास्तविक संख्या हो तो उसमें $a = b$ अथवा $a < b$ अथवा $a > b$ इसमें से कोई एक ही संबंध होगा ।

2. यदि $a < b$ और $b < c$ तो $a < c$

3. यदि $a < b$ तो $a + c < b + c$

4. यदि $a < b$ और यदि $c > 0$ तो $ac < bc$ और यदि $c < 0$ तो $ac > bc$

   परिमेय तथा अपरिमेय संख्या लेकर उपर्युक्त नियम की जाँच कीजिए ।

ऋण संख्याओं के वर्गमूल

यदि $\sqrt{a} = b$ तो $b^2 = a$ यह हम जानते हैं ।

इस आधार पर $\sqrt{5} = x$ तो $x^2 = 5$ यह हम समझ सकते हैं ।

उसी प्रकार हम जानते हैं कि वास्तविक संख्या का वर्ग हमेशा ऋणेत्तर संख्या होती है अर्थात किसी भी वास्तविक संख्या का वर्ग ऋणात्मक नहीं होता परंतु $(\sqrt{-5})^2 = -5$ $\therefore \sqrt{-5}$ यह वास्तविक संख्या नहीं है ।

इसलिए ऋणात्मक वास्तविक संख्या का वर्गमूल वास्तविक संख्या नहीं होती है ।

प्रश्नसंग्रह 2.2

(1) सिद्ध कीजिए कि $4\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है ।

(2) सिद्ध कीजिए कि $3 + \sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या है ।

(3) $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ संख्याएँ संख्या रेखा पर दर्शाइए ।

(4) निम्नलिखित संख्याओं के मध्य स्थित कोई भी तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।

(i) 0.3 और −0.5   (ii) −2.3 और −2.33

(iii) 5.2 और 5.3   (iv) −4.5 और −4.6

आओ, जानें

धन परिमेय संख्या का मूल (Root of positive rational number)

यदि $x^2 = 2$ तो $x = \sqrt{2}$ अथवा $x = -\sqrt{2}$, होता है। $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्याएँ हैं। $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{8}$ जैसी संख्याएँ भी अपरिमेय है ।

यदि n धन पूर्णांक संख्या तथा $x^n = a$ हो तो x यह a का n वाँ मूल है ऐसा कहा जाता है । यह मूल परिमेय अथवा अपरिमेय संख्या होती है ।

उदा. $2^5 = 32$ $\therefore$ 2 यह 32 का 5 वाँ मूल परिमेय है किंतु $x^5 = 2$ तो $x = \sqrt[5]{2}$ यह अपरिमेय संख्या है ।

करणी (Surds)

हम जानते हैं कि 5 यह परिमेय संख्या है किंतु $\sqrt{5}$ यह परिमेय नहीं है। जिस प्रकार वास्तविक संख्या का वर्गमूल अथवा घनमूल परिमेय अथवा अपरिमेय संख्या हो सकती है। उसी प्रकार n वाँ मूल भी परिमेय अथवा अपरिमेय संख्या हो सकती है।

यदि n यह 1 से बड़ी पूर्णांक संख्या हो और a इस धन वास्तविक संख्या का n वाँ मूल x से दर्शाया गया हो तो $x^n = a$ अथवा $\sqrt[n]{a} = x$ ऐसा लिखते हैं।

यदि a यह धन **परिमेय संख्या हो और a का n वाँ मूल x यह अपरिमेय संख्या हो तो x यह करणी (अपरिमेय मूल) है ऐसा कहते हैं।**

$\sqrt[n]{a}$ यह करणी संख्या हो तो $\sqrt{\ }$ इस चिहन को **करणी चिहन** (radical sign) कहते हैं। संख्या n को उस **करणी का घात** (order of the surd) कहते हैं और a को करणीस्थ संख्या (radicand) कहते हैं।

(1) यदि $a = 7$, $n = 3$, तो $\sqrt[3]{7}$ यह करणी है क्योंकि $\sqrt[3]{7}$ यह अपरिमेय संख्या है।

(2) यदि $a = 27$ और $n = 3$ हो तो $\sqrt[3]{27} = 3$ यह अपरिमेय संख्या नहीं है इसलिए $\sqrt[3]{27}$ यह करणी नहीं है।

(3) क्या $\sqrt[3]{8}$ यह करणी है?

यदि $\sqrt[3]{8} = p$ $\quad p^3 = 8.$ $\quad$ कौन-सी संख्या का धन 8 है ?

हम जानते है कि, 2 इस संख्या का घन 8 है।

$\sqrt[3]{8}$ में $a = 8$ यह परिमेय संख्या है। यहाँ $n = 3$ यह धन पूर्णांक संख्या है किंतु $\sqrt[3]{8}$ यह संख्या अपरिमेय नहीं हैं क्योंकि 8 का घनमूल 2 है। $\therefore$ $\sqrt[3]{8}$ यह करणी नहीं है।

(4) अब $\sqrt[4]{8}$ का विचार करेंगे।

यहाँ $a = 8$, करणी का घात $n = 4$; किंतु 8 यह संख्या किसी भी परिमेय संख्य का चौथा घात नहीं है।

अर्थात $\sqrt[4]{8}$ यह अपरिमेय संख्या है। $\therefore$ $\sqrt[4]{8}$ यह करणी है।

हम सिर्फ 2 घातवाले अर्थात $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{42}$ आदि करणी का विचार करने वाले है।

2 घातवाले करणी को **वर्गीय करणी** कहते हैं।

करणी के संक्षिप्त स्वरूप

कभी-कभी करणी संख्या को संक्षिप्त रूप दे सकते हैं।

जैसे (i) $\sqrt{48} = \sqrt{16\times3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ $\qquad$ (ii) $\sqrt{98} = \sqrt{49\times2} = \sqrt{49}\times\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$....ऐसी कुछ करणी संक्षिप्त स्वरूप की करणी है। इन्हें और सरल रूप नहीं दिया जा सकता।

सजातीय करणी (Similar or like surds)

$\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $\frac{4}{5}\sqrt{2}$ यह कुछ सजातीय करणी है। ऐसा कहा जाता है कि यदि p और q परिमेय संख्याएँ हो तो $p\sqrt{a}$, $q\sqrt{a}$ सजातीय करणी है। **दो करणी समान होने के लिए उनका घात समान होना चाहिए उसी प्रकार करणीस्थ संख्या समान होनी चाहिए।**

$\sqrt{45}$ तथा $\sqrt{80}$ इन करणियों का घात (कोटि) 2 है अर्थात इनका घात समान है किंतु करणीस्थ संख्या समान नहीं है अर्थात यह करणी सजातीय करणी नहीं है, ऐसा दिखता है । इन करणियों को संक्षिप्त रूप देंगे ।

$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ और $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$3\sqrt{5}$ तथा $4\sqrt{5}$ करणी सजातीय है ।

अर्थात $\sqrt{45}$ तथा $\sqrt{80}$ इन करणी का संक्षिप्त स्वरूप सजातीय करणी है ।

इसे ध्यान में रखें

यदि सरल रूप के करणी का घात तथा करणीस्थ संख्या समान हों तो उसे सजातीय करणी कहते हैं ।

आओ, जानें

करणियों की तुलना (Comparison of surds)

माना a, b, k धन वास्तविक संख्याएँ हैं ।

यदि $a < b$ तो $ak < bk$. $\therefore a^2 < ab < b^2$

अर्थात $a < b$ तो $a^2 < b^2$

इसके विपरित $a^2 < b^2$ हो तो $a = b$, $a > b$ और $a < b$ इन संभावनाओं पर विचार कीजिए

$a = b$ से $a^2 = b^2$, $a > b$ से $a^2 > b^2$ प्राप्त होता हैं, परंतु यह हमेशा संभव नहीं है ।

$\therefore a < b$ प्राप्त होता है अर्थात $a^2 < b^2$ तो $a < b$ प्राप्त होता है ।

यहाँ a और b वास्तविक संख्या हो तो वे परिमेय संख्या अथवा करणी संख्या हो सकती है ।

इसका उपयोग करके करणियों की तुलना कीजिए ।

(i) $6\sqrt{2}$, $5\sqrt{5}$

$\sqrt{36} \times \sqrt{2}$ $\boxed{?}$ $\sqrt{25} \times \sqrt{5}$

$\sqrt{72}$ $\boxed{?}$ $\sqrt{125}$

किंतु 72 $\boxed{<}$ 125

$\therefore 6\sqrt{2}$ $\boxed{<}$ $5\sqrt{5}$

अथवा

$(6\sqrt{2})^2$ $\boxed{\phantom{<}}$ $(5\sqrt{5})^2$,

$72 < 125$

$\therefore 6\sqrt{2}$ $\boxed{<}$ $5\sqrt{5}$

(ii) $8\sqrt{3}$, $\sqrt{192}$

$\sqrt{64} \times \sqrt{3}$ $\boxed{?}$ $\sqrt{192}$

$\sqrt{192}$ $\boxed{?}$ $\sqrt{192}$

किंतु 192 $\boxed{=}$ 192

$\therefore \sqrt{192}$ $\boxed{=}$ $\sqrt{192}$

$\therefore 8\sqrt{3}$ $\boxed{=}$ $\sqrt{192}$

(iii) $7\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$

$\sqrt{49} \times \sqrt{2}$ $\boxed{?}$ $\sqrt{25} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{98}$ $\boxed{?}$ $\sqrt{75}$

किंतु 98 $\boxed{>}$ 75

$\therefore 7\sqrt{2}$ $\boxed{>}$ $5\sqrt{3}$

अथवा

$(7\sqrt{2})^2$ $\boxed{}$ $(5\sqrt{3})^2$,

$98 > 75$

$\therefore 7\sqrt{2}$ $\boxed{>}$ $5\sqrt{3}$

सजातीय करणियों पर संक्रियाएँ (Operations on like surds)

सजातीय करणी पर जोड़ घटाना, गुणा तथा भाग की संक्रियाएँ कर सकते हैं ।

उदा. (1) सरल रूप दीजिए : $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3}$

हल : $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3} = (7 + 29)\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

उदा. (2) सरल रूप दीजिए : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3}$

हल : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = (7 - 29)\sqrt{3} = -22\sqrt{3}$

थोड़ा सोचें

$\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9}+\sqrt{16}$

$\sqrt{100+36} \stackrel{?}{=} \sqrt{100}+\sqrt{36}$

उदा. (3) सरल रूप दीजिए : $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8}$

हल : $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8} = \left(13 + \frac{1}{2} - 5\right)\sqrt{8} = \left(\frac{26+1-10}{2}\right)\sqrt{8}$

$$= \frac{17}{2}\sqrt{8} = \frac{17}{2}\sqrt{4\times 2}$$

$$= \frac{17}{2} \times 2\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$$

उदा. (4) सरल रूप दीजिए : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125}$

हल : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125} = 8\sqrt{5} + \sqrt{4\times 5} - \sqrt{25\times 5}$

$$= 8\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$$

$$= (8 + 2 - 5)\sqrt{5}$$

$$= 5\sqrt{5}$$

उदा. (5) करणियों का गुणनफल ज्ञात कीजिए : $\sqrt{7} \times \sqrt{42}$

हल : $\sqrt{7} \times \sqrt{42} = \sqrt{7\times 42} = \sqrt{7\times 7\times 6} = 7\sqrt{6}$ ($7\sqrt{6}$ यह अपरिमेय संख्या है ।)

उदा. (6) करणियों का भागफल ज्ञात कीजिए : $\sqrt{125} \div \sqrt{5}$

हल : $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$ (5 यह परिमेय संख्या है ।)

उदा. (7) $\sqrt{50} \times \sqrt{18} = \sqrt{25\times 2} \times \sqrt{9\times 2} = 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \times 2 = 30$

उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट होता है कि दो करणियों का गुणनफल अथवा भागफल परिमेय संख्या हो सकती है ।

करणियों का परिमेयीकरण (Rationalization of surd)

जब दो करणियों का गुणनफल परिमेय संख्या होती है तब प्रत्येक करणी को दूसरी करणी का **परिमेयीकरण गुणांक** (Rationalizing Factor) कहते हैं ।

उदा. (1) $\sqrt{2}$ इस करणी को $\sqrt{2}$ से गुणा करने पर $\sqrt{2\times 2} = \sqrt{4}$ प्राप्त होता है । $\sqrt{4} = 2$ यह परिमेय संख्या है।

$\therefore$ $\sqrt{2}$ का परिमेयीकरण गुणांक $\sqrt{2}$ है ।

उदा. (2) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ यह परिमेय संख्या है ।

$\therefore$ $\sqrt{2}$ का परिमेयीकरण का गुणांक $\sqrt{8}$ है ।

उसी प्रकार $8\sqrt{2}$ यह करणी भी $\sqrt{2}$ इस करणी का परिमेयीकरण गुणांक है ।

क्योंकि $\sqrt{2} \times 8\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 8 \times 2 = 16$

$\sqrt{2}$ के परिमेयीकरण गुणांक $\sqrt{6}$, $\sqrt{16}$ $\sqrt{50}$ है क्या इसकी जाँच कीजिए ।

इसे ध्यान में रखें

दी गई करणी का परिमेयीकरण गुणांक केवल एक ही नहीं होता है । यदि कोई करणी दी गई किसी करणी का परिमेयीकरण गुणांक हो तो उसे शून्येतर परिमेय संख्या से गुणाकर प्राप्त करणी भी दी गई करणी का परिमेयीकरण गुणांक होती है ।

उदा. (3) $\sqrt{27}$ का परिमेयीकरण गुणांक ज्ञात कीजिए ।

हल : $\sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = 3\sqrt{3}$ $\therefore$ $3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \times 3 = 9$ यह परिमेय संख्या है ।

$\therefore$ $\sqrt{27}$ का परिमेयीकरण गुणांक $\sqrt{3}$ है ।

ध्यान दीजिए कि, $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ अर्थात $3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 9 \times 3 = 27$

अर्थात $\sqrt{27}$ यह दी गई करणी का $3\sqrt{3}$ यह भी परिमेयीकरण गुणक है । इसके अतिरिक्त $4\sqrt{3}$, $7\sqrt{3}$ ऐसे कई गुणांक प्राप्त होंगे । इसमें से $\sqrt{3}$ यह सबसे सरल लेखन का (रचना का) परिमेयीकरण गुणांक है ।

उदा. (4) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ के हर का परिमेयीकरण कीजिए ।

हल : $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ....अंश तथा हर को $\sqrt{5}$ से गुणा कीजिए ।

उदा. (5) $\frac{3}{2\sqrt{7}}$ के हर का परिमेयीकरण कीजिए ।

हल : $\frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{2\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{2\times 7} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$ (यहाँ $2\sqrt{7}$ को $\sqrt{7}$ गुणा करना पर्याप्त है ।)

इसे ध्यान में रखें

हर का परिमेयीकरण करने के लिए परिमेयीकरण गुणांक का उपयोग होता है ।
किसी भी संख्या का हर परिमेय संख्या होना सुविधाजनक होता है इसलिए हर का परिमेयीकरण करते हैं ।

प्रश्नसंग्रह 2.3

(1) निम्न करणियों के कोटि बताइए ।

(i) $\sqrt[3]{7}$ (ii) $5\sqrt{12}$ (iii) $\sqrt[4]{10}$ (iv) $\sqrt{39}$ (v) $\sqrt[3]{18}$

(2) निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या करणी है बताइए ।

(i) $\sqrt[3]{51}$ (ii) $\sqrt[4]{16}$ (iii) $\sqrt[5]{81}$ (iv) $\sqrt{256}$ (v) $\sqrt[3]{64}$ (vi) $\sqrt{\frac{22}{7}}$

(3) निम्नलिखित युग्मों में कौन-से करणी के युग्म सजातीय तथा कौन-सी विजातीय है । पहचानकर लिखिए ।

(i) $\sqrt{52}\,,\ 5\sqrt{13}$ (ii) $\sqrt{68}\,,\ 5\sqrt{3}$ (iii) $4\sqrt{18}\,,\ 7\sqrt{2}$

(iv) $19\sqrt{12}\,,\ 6\sqrt{3}$ (v) $5\sqrt{22}\,,\ 7\sqrt{33}$ (vi) $5\sqrt{5}\,,\ \sqrt{75}$

(4) निम्नलिखित करणियों को संक्षिप्त रूप लिखिए ।

(i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{250}$ (iv) $\sqrt{112}$ (v) $\sqrt{168}$

(5) निम्नलिखित संख्याओं में क्रमसंबंध ज्ञात कीजिए ।

(i) $7\sqrt{2}\,,\ 5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247}\,,\ \sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7}\,,\ \sqrt{28}$

(iv) $5\sqrt{5}\,,\ 7\sqrt{2}$ (v) $4\sqrt{42}\,,\ 9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3}\,,\ 9$ (vii) $7,\ 2\sqrt{5}$

(6) निम्नलिखित संख्या को सरल रूप में लिखिए ।

(i) $5\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$ (ii) $9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{125}$

(iii) $7\sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{7} - \frac{3}{5}\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$

(7) निम्नलिखित संख्याओं का गुणा करके उसे संक्षिप्त रूप में लिखिए ।

(i) $3\sqrt{12} \times \sqrt{18}$ (ii) $3\sqrt{12} \times 7\sqrt{15}$

(iii) $3\sqrt{8} \times \sqrt{5}$ (iv) $5\sqrt{8} \times 2\sqrt{8}$

(8) निम्नलिखित संख्याओं का भाग करके उसे संक्षिप्त रूप में लिखिए ।

(i) $\sqrt{98} \div \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{125} \div \sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{54} \div \sqrt{27}$ (iv) $\sqrt{310} \div \sqrt{5}$

(9) निम्नलिखित संख्याओं में हर का परिमेयीकरण कीजिए ।

(i) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{14}}$ (iii) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (iv) $\frac{6}{9\sqrt{3}}$ (v) $\frac{11}{\sqrt{3}}$

थोड़ा याद करें

हमें यह पता है कि

यदि $a > 0$, $b > 0$ तो $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; $\sqrt{a^2} = a$

गुणा कीजिए ।

उदा. (1) $\sqrt{2}(\sqrt{8} + \sqrt{18})$

$= \sqrt{2\times8} + \sqrt{2\times18}$

$= \sqrt{16} + \sqrt{36}$

$= 4 + 6$

$= 10$

उदा. (2) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$

$= \sqrt{3}\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)$

$= \sqrt{3}\times2\sqrt{3} - \sqrt{3}\times3\sqrt{2} - \sqrt{2}\times2\sqrt{3} + \sqrt{2}\times3\sqrt{2}$

$= 2\times3 - 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3\times2$

$= 6 - 5\sqrt{6} + 6$

$= 12 - 5\sqrt{6}$

आओ, जानें

वर्ग करणी का द्विपद रूप (Binomial quadratic surd)

- $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; $\frac{3}{4} + \sqrt{5}$ यह वर्ग करणी के द्विपद रूप है; उसी प्रकार $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; $\frac{3}{4} - \sqrt{5}$ यह भी करणी का द्विपद रूप है ।
- निम्नलिखित गुणा का अध्ययन कीजिए ।
- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$
- $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$
- $(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2 = 3 - 7 = -4$
- $(\frac{3}{2} + \sqrt{5})(\frac{3}{2} - \sqrt{5}) = (\frac{3}{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = \frac{9}{4} - 5 = \frac{9-20}{4} = -\frac{11}{4}$

$(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ और $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ इन द्विपद करणियों के युग्म का गुणनफल परिमेय संख्या है । ऐसे द्विपद करणी के युग्मों को **अनुबद्‌ध युग्म** कहते हैं ।

द्विपद करणी और उसका अनुबद्‌ध युग्म यह दोनों संख्या परस्पर एक-दूसरे के परिमेयीकरण गुणांक होते हैं ।

$\sqrt{5} - \sqrt{3}$ अथवा $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ इनमें से प्रत्येक द्विपद करणी यह $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ इस द्विपद करणी की अनुबद्‌ध युग्म है ।

उसी प्रकार $7 + \sqrt{3}$ का अनुबद्‌ध युग्म $7 - \sqrt{3}$ है ।

इसे ध्यान में रखें

दि्वपद करणी के अनुबद्ध युग्म के पदो का गुणनफल हमेशा परिमेय संख्या होती है ।

आओ, जानें

हरों का परिमेयीकरण (Rationalization of the denominator)

अनुबद्ध युग्म तथा दि्वपद करणी का गुणनफल परिमेय संख्या होती है । इस गुणधर्म की सहायता से हर, दि्वपद करणी हो ऐसी संख्याओं के हर का परिमयेकरण कर सकते हैं ।

उदा.(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ इस संख्या के हर का परिमेयीकरण कीजिए ।

हल : $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ इस दि्वपद करणी का अनुबद्ध युग्म $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ है

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

उदा. (2) $\dfrac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ इस संख्या के हर का परिमेयीकरण कीजिए ।

हल : $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$ इस दि्वपद करणी का अनुबद्ध युग्म $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$ है ।

$$\therefore \frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{8\left(3\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$= \frac{8\times 3\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{9\times 2 - 5} = \frac{24\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{18 - 5} = \frac{24\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{13}$$

प्रश्नसंग्रह 2.4

(1) निम्नलिखित संख्याओं का गुणा कीजिए ।

(i) $\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$ (ii) $(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{2}$ (iii) $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(4\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(2) निम्नलिखित संख्याओं के हरों का परिमेयीकरण कीजिए ।

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ (ii) $\dfrac{3}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ (iii) $\dfrac{4}{7+4\sqrt{3}}$ (iv) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

आओ, जानें

निरपेक्ष मान (Absolute value)

x यह वास्तविक संख्या हो तो x का निरपेक्ष मान (Absolute Value) अथवा संख्या रेखा के शून्य से उस संख्या तक की दूरी $|x|$ ऐसे लिखते हैं । $|x|$ का वाचन x का निरपेक्ष मान ऐसा करते हैं ।

निरपेक्ष मान की परिभाषा निम्न प्रकार से करते हैं ।

यदि $x > 0$ तो $|x| = x$ यदि x यह धन हो तो x का निरपेक्ष मान x होगा ।

यदि $x = 0$ तो $|x| = 0$ यदि x शून्य हो तो x का निरपेक्ष मान शून्य ही होगा ।

यदि $x < 0$ तो $|x| = -x$ यदि x ऋण हो तो x का निरपेक्ष मान x के विपरित संख्या के बराबर होगा ।

उदा. (1) $|3| = 3$ $|-3| = -(-3) = 3$ $|0| = 0$

किसी भी वास्तविक संख्या का निरपेक्ष मान ऋण नहीं होता है ।

उदा. (2) निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए ।

(i) $|9-5| = |4| = 4$ (ii) $|8-13| = |-5| = 5$

(iii) $|8|-|-3| = 5$ (iv) $|8| \times |4| = 8 \times 4 = 32$

उदा. (3) हल कीजिए । $|x-5| = 2$

हल : $|x-5| = 2$ $\therefore x - 5 = +2$ अथवा $x - 5 = -2$

$\therefore x = 2 + 5$ अथवा $x = -2+5$

$\therefore x = 7$ अथवा $x = 3$

प्रश्नसंग्रह 2.5

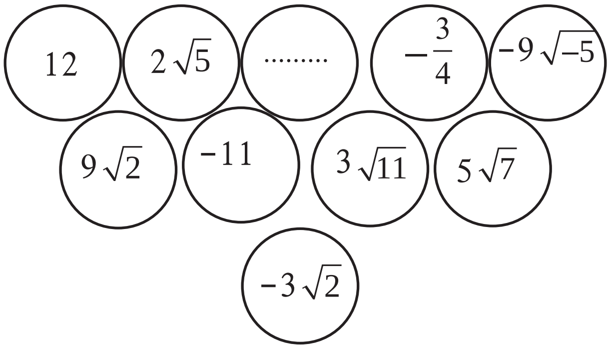
(1) निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए ।

(i) $|15 - 2|$ (ii) $|4 - 9|$ (iii) $|7| \times |-4|$

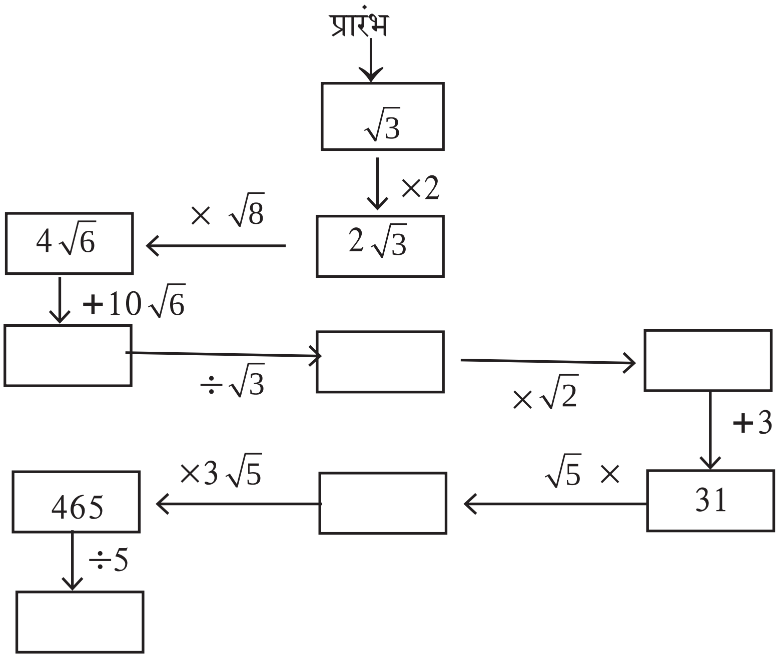
(2) हल कीजिए ।

(i) $|3x-5| = 1$ (ii) $|7-2x| = 5$ (iii) $\left|\frac{8-x}{2}\right| = 5$ (iv) $\left|5+\frac{x}{4}\right| = 5$

कृति (I) : संलग्न आकृति में कार्ड पर कुछ वास्तविक संख्याएँ लिखी गई है । इन संख्याओं की सहायता से योग, व्यवकलन (घटाना), गुणा तथा भाग के दो-दो उदाहरण तैयार करके उन्हें हल कीजिए ।



कृति (II) :



प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

(1) निम्नलिखित प्रश्नों में बहु वैकल्पिक उत्तर में से सही विकल्प चुनकर लिखिए ।

(i) निम्नलिखित में से अपरिमेय संख्या कौन-सी ?

(A) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\frac{3}{9}$ (D) $\sqrt{196}$

(ii) निम्नलिखित में से अपरिमेय संख्या कौन-सी ?

(A) 0.17 (B) $1.\overline{513}$ (C) $0.27\overline{46}$ (D) 0.101001000.....

(iii) निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या के दशमलव स्वरूप अनवसानी आवर्ती है ?

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{3}{11}$ (D) $\frac{137}{25}$

(iv) संख्या रेखा पर स्थित प्रत्येक बिंदु क्या दर्शाता है ?

(A) प्राकृत संख्या (B) अपरिमेय संख्या (C) परिमेय संख्या (D) वास्तविक संख्या

(v) $0.\dot{4}$ इस संख्या का परिमेय रूप कौन-सा ?

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{40}{9}$ (C) $\frac{3.6}{9}$ (D) $\frac{36}{9}$

(vi) यदि n यह पूर्ण वर्ग संख्या न हो तो $\sqrt{n}$ यह निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या होगी ?

(A) प्राकृत संख्या (B) परिमेय संख्या

(C) अपरिमेय संख्या (D) A, B, C यह तीनों विकल्प हो सकते हैं ।

(vii) निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या करणी नहीं है?

(A) $\sqrt{7}$ (B) $\sqrt[3]{17}$ (C) $\sqrt[3]{64}$ (D) $\sqrt{193}$

(viii) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ इस करणी का घात (कोटी) कितना ?

(A) 3 (B) 2 (C) 6 (D) 5

(ix) $2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ इस द्विपद करणी का अनुबद्ध युग्म कौन-सा ?

(A) $-2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

(x) $\left|12-(13+7)\times 4\right|$ का मान कितना?

(A) -68 (B) 68 (C) -32 (D) 32

(2) निम्नलिखित संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखिए ।

(i) 0.555 (ii) $29.\overline{568}$ (iii) 9.315 315 ..... (iv) 357.417417..... (v) $30.\overline{219}$

(3) निम्नलिखित संख्याओं को दशमलव रूप में लिखिए ।

(i) $\frac{-5}{7}$ (ii) $\frac{9}{11}$ (iii) $\sqrt{5}$ (iv) $\frac{121}{13}$ (v) $\frac{29}{8}$

(4) $5+\sqrt{7}$ यह संख्या अपरिमेय है यह सिद्ध कीजिए ।

(5) निम्नलिखित करणी का संक्षिप्त रूप में लिखिए ।

(i) $\frac{3}{4}\sqrt{8}$ (ii) $-\frac{5}{9}\sqrt{45}$

(6) निम्नलिखित करणीं को संक्षिप्त परिमेयीकरण गुणांक में लिखिए ।

(i) $\sqrt{32}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{27}$ (iv) $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ (v) $3\sqrt{72}$ (vi) $4\sqrt{11}$

(7) निम्नलिखित करणी को सरल रूप में लिखिए ।

(i) $\frac{4}{7}\sqrt{147}+\frac{3}{8}\sqrt{192}-\frac{1}{5}\sqrt{75}$ (ii) $5\sqrt{3}+2\sqrt{27}+\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\sqrt{216}-5\sqrt{6}+\sqrt{294}-\frac{3}{\sqrt{6}}$

(iv) $4\sqrt{12}-\sqrt{75}-7\sqrt{48}$ (v*) $2\sqrt{48}-\sqrt{75}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(8) निम्नलिखित हरों का परिमेयीकरण कीजिए ।

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{3\sqrt{7}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$ (v) $\frac{12}{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

3 बहुपद

C6C5Z8

आओ, सीखें

- बहुपद का परिचय
- बहुपदों पर संक्रिया
- बहुपद का घात
- संश्लेषात्मक भाग विधि
- बहुपद का मान
- शेषफल प्रमेय

आओ, चर्चा करें

$p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$; $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$; 6 ये सभी बैजिक व्यंजक हैं ।

अध्यापक : विद्यार्थियों, $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$, 6 इन बैजिक व्यंजकों में से प्रत्येक व्यंजक का एक-एक पद लेकर, उनके चरांकों का घात बताइए ।

माधुरी : $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$ इस व्यंजक के पदों के चरांकों के घात क्रमश: 3, 2, 1 है ।

विवेक : सर, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$ इस व्यंजक के पदों के चरांकों के घात क्रमश: 2, 3, 5 है ।

रोहित : सर, 6 इस व्यंजक में चरांक नहीं है । इसे $6 = 6 \times 1 = 6 \times x^0$ इस प्रकार लिख सकते हैं, अतः 6 इस व्यंजक के चरांक का घात 0 है ।

अध्यापक : इसलिए उपर्युक्त सभी व्यंजकों में चरांक के घात धन पूर्णांक या शून्य अर्थात पूर्ण संख्या है । जिन बैजिक व्यंजक में चरांक के घात पूर्ण संख्या हो, उन व्यंजकों को **बहुपद** (polynomial) कहते हैं । 6 यह भी बहुपद है । 6, -7, $\frac{1}{2}$, 0, $\sqrt{3}$ आदि अचर संख्याओं को **अचर बहुपद** (Constant polynomial) कहते हैं ।

$\sqrt{y} + 5$ तथा $\frac{1}{y} - 3$ क्या यह बहुपद है ?

सारा : सर, $\sqrt{y} + 5$ यह बहुपद नहीं है क्योंकि $\sqrt{y} + 5 = y^{\frac{1}{2}} + 5$, इसमें y का घात $\frac{1}{2}$ है जो कि पूर्ण संख्या नहीं है ।

जॉन : सर, $\frac{1}{y} - 3$ यह भी बहुपद नहीं है क्योंकि $\frac{1}{y} - 3 = y^{-1} - 3$, इसमें y का घात -1 है जो कि पूर्ण संख्या नहीं है ।

अध्यापक : ऐसे पाँच बैजिक व्यंजक लिखिए जो बहुपद नहीं है । स्पष्टीकरण दीजिए । निम्न प्रश्नों के उत्तर भिन्न-भिन्न उदाहरण लेकर वे व्यंजक बहुपद क्यों नहीं है इसपर चर्चा कर जाँच कीजिए ।

- क्या प्रत्येक बैजिक व्यंजक बहुपद होते हैं ?
- क्या प्रत्येक बहुपद बैजिक व्यंजक होते हैं?

बहुपद का प्रकार (पदों की संख्यानुसार)

$2x$, 5	$x^4 + x$, $m^2 - 3m$	$\frac{1}{2}y^2 - 2y + 5$, $x^3 - \sqrt{3}\ x^2 + 5x$
प्रत्येक बहुपद में एक पद	प्रत्येक बहुपद में दो पद	प्रत्येक बहुपद में तीन पद
एकपदी	द्विपद	त्रिपद

किसी एक चरांक के बहुपद को उसके चरांकानुसार $p(x)$, $q(m)$, $r(y)$ ऐसे दर्शाया जाता है ।

उदाहरण $p(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ $\quad q(m) = m^2 + \frac{1}{2}m - 7$ $\quad r(y) = y^2 + 5$

आओ, जानें

एक चरांकवाले बहुपदों का घात (Degree of a polynomial in one variable)

अध्यापक : $2x^7 - 5x + 9$ इस बहुपद के चरांक का सबसे बड़ा घात कौन-सा है ?

जिजा : सर, सबसे बड़ा घात 7 है ।

अध्यापक : एक चरांकवाले बहुपद में चरांक के महत्तम घातांक को उस **बहुपद का घात** कहते हैं । उपर्युक्त बहुपद का घात क्या है ?

अशोक : सर, $2x^7 - 5x + 9$ इस बहुपद का घात 7 है ।

अध्यापक : 10 इस बहुपद का घात कितना है ?

राधा : $10 = 10 \times 1 = 10 \times x^0$ इसलिए 10 इस बहुपद का घात 0 है ।

अध्यापक : 10 की तरह ही किसी भी **शून्येतर अचर बहुपद का घात 0 होता है ।**

शून्य बहुपद का घात निश्चित नहीं किया जा सकता ।

एक से अधिक चरांकोंवाले बहुपद का घात

एक से अधिक चरांकवाले किसी बहुपद में प्रत्येक पद के सभी चरांकों के घातों का योग करने पर जो अधिकतम हो उसे उस **बहुपद का घात** कहते हैं ।

उदा. $3m^3n^6 + 7m^2n^3 - mn$ यह दो चरांकवाला बहुपद है । इस बहुपद का घात 9 है ।
(यहाँ घातों का योगफल $3 + 6 = 9$, $2 + 3 = 5$, $1 + 1 = 2$)

कृति I : चरांक x तथा घात 5 वाले एकपदी, द्विपद तथा त्रिपद है प्रत्येक का एक उदाहरण लिखिए ।

एकपदी $\boxed{}$ द्विपद $\boxed{}$ त्रिपद $\boxed{}$

कृति II : दो चरांकवाले तथा 5 घातवाले एक द्विपद का उदाहरण लिखिए । $\boxed{}$

बहुपद का प्रकार (घात के अनुसार)

एक चरांकवाले बहुपद

$3x - 1,\ 7y$	$2y^2 + y + 1,\ - 3x^2$	$x^3 + x^2 + 2x + \sqrt{3}\ ,\ m - m^3$
घात 1	घात 2	घात 3
रेखीय बहुपद	वर्गीय बहुपद	घन बहुपद
सामान्य रूप $ax + b$ यहाँ a तथा b गुणांक तथा $a \neq 0$	सामान्य रूप $ax^2 + bx + c$ यहाँ $a,\ b,\ c$ गुणांक तथा $a \neq 0$	सामान्य रूप $ax^3 + bx^2 + cx + d$ यहाँ $a,\ b,\ c,\ d$ गुणांक तथा $a \neq 0$

बहुपद : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ **यह x चरांक में घात n वाला बहुपद है ।**

इसमें $a_n,\ a_{n-1},\ \dots,\ a_2,\ a_1,\ a_0$ यह गुणांक है तथा $a_n \neq 0$

बहुपद का मानक रूप, गुणांक रूप तथा घातांक रूप
(Standard form, co-efficient form and index form of a polynomial)

$p(x) = x - 3x^2 + 5 + x^4$ इस बहुपद में x के घातांकों को अवरोही क्रम में $x^4 - 3x^2 + x + 5$ इस प्रकार लिखते हैं। यह मानक रुप है । इस बहुपद में x का तीसरा घात का पद नहीं है अर्थात वह $0x^3$ है ऐसा समझा जाता हैं । इस पद को $p(x)$ बहुपद $x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5$ ऐसा लिखा जाता है । इस प्रकार घातांक के अवरोही क्रम में लिखे गए एवं घातांक के सभी पद निर्देशित बहुपद को घातांक रूप कहते हैं ।

कई बार घातांक रूप में बहुपद के चरांको को न लिखकर उसके केवल गुणांक क्रम से लिखते हैं । इस रूप को बहुपद का गुणांक रूप कहते हैं । उदाहरणार्थ $x^3 - 3x^2 + 0x - 8$ यह बहुपद (1, -3, 0, -8) ऐसे लिखते हैं । इसे बहुपद का सहगुणांक रूप कहते हैं ।

(4, 0, -5, 0, 1) इस बहुपद में y इस चरांक का उपयोग करके घातांक रूप में $4y^4 + 0y^3 - 5y^2 + 0y + 1$ को $4y^4 - 5y^2 + 1$ लिखा जाएगा ।

उदा. $p(m) = 3m^5 - 7m + 5m^3 + 2$

बहुपद को घातांकों के अवरोही क्रम में लिखिए ।	$3m^5 + 5m^3 - 7m + 2$
बहुपद में न होने वाले पद के लिए शून्य गुणांक लेकर समाविष्ट कीजिए और उसे घातांक रूप में लिखिए।	$3m^5 + 0m^4 + 5m^3 + 0m^2 - 7m + 2$
दिए गए बहुपद का मानक रूप लिखिए ।	(3, 0, 5, 0, − 7, 2)
बहुपद का घात लिखिए ।	5

उदा. (1) $x^3 + 3x - 5$ इस बहुपद को गुणांक रूप में लिखिए ।

हल : $x^3 + 3x - 5 = x^3 + 0x^2 + 3x - 5$

$\therefore$ दिए गए बहुपद का गुणांक रूप (1, 0, 3, − 5)

उदा. (2) (2, − 1, 0, 5, 6) इसके गुणांक रूपवाले बहुपद को घातांक रूप में लिखिए ।

हल : बहुपद का गुणांक रूप (2, − 1, 0, 5, 6)

$\therefore$ घातांक रूप में बहुपद $= 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 5x + 6$

अर्थात $2x^4 - x^3 + 5x + 6$

प्रश्नसंग्रह 3.1

1. निम्नलिखित व्यंजक बहुपद हैं क्या, लिखिए । स्पष्टीकरण दीजिए ।

   (i) $y + \frac{1}{y}$ (ii) $2 - 5\sqrt{x}$ (iii) $x^2 + 7x + 9$

   (iv) $2m^{-2} + 7m - 5$ (v) 10

2. निम्नलिखित प्रत्येक बहुपद में m^3 का गुणांक लिखिए ।

   (i) m^3 (ii) $\frac{-3}{2} + m - \sqrt{3}m^3$ (iii) $\frac{-2}{3}m^3 - 5m^2 + 7m - 1$

3. निम्नलिखित जानकारी के आधार पर चरांक x का उपयोग कर प्रत्येक का एक बहुपद लिखिए ।

   (i) एकपद जिसका 7 घात हो ।(ii) द्विपद जिसका घात 35 हो ।(iii) त्रिपद जिसका घात 8 हो ।

4. निम्नलिखित प्रत्येक बहुपद का घात लिखिए ।

(i) $\sqrt{5}$ (ii) x° (iii) x^2 (iv) $\sqrt{2}\,m^{10} - 7$ (v) $2p - \sqrt{7}$

(vi) $7y - y^3 + y^5$ (vii) $xyz + xy - z$ (viii) $m^3n^7 - 3m^5n + mn$

5. निम्नलिखित बहुपदों का रैखिक, वर्ग तथा घन बहुपदों में वर्गीकरण कीजिए ।

(i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $5p$ (iii) $\sqrt{2}\,y - \frac{1}{2}$

(iv) $m^3 + 7m^2 + \frac{5}{2}m - \sqrt{7}$ (v) a^2 (vi) $3r^3$

6. निम्नलिखित बहुपदों को मानक रूप में लिखिए ।

(i) $m^3 + 3 + 5m$ (ii) $-7y + y^5 + 3y^3 - \frac{1}{2} + 2y^4 - y^2$

7. निम्नलिखित बहुपदों को गुणांक रूप में लिखिए ।

(i) $x^3 - 2$ (ii) $5y$ (iii) $2m^4 - 3m^2 + 7$ (iv) $-\frac{2}{3}$

8. निम्नलिखित गुणांक रूपवाले बहुपदों को x चरांक का उपयोग कर मानक रूप में लिखिए ।

(i) (1, 2, 3) (ii) (5, 0, 0, 0, − 1) (iii) (− 2, 2, − 2, 2)

9. नीचे कुछ बहुपद दिए गए हैं । उन बहुपदों को चौखट में उचित स्थान पर लिखिए ।

$x + 7$, x^2, $x^3 + x^2 + x + 5$, $2x^2 + 5x + 10$, $x^3 + 9$, $3x^2 + 5x$

वर्ग बहुपद	द्विपद
....	....

घन बहुपद	त्रिपद
....	....

रैखिक बहुपद	एकपदी
....	....

थोड़ा याद करें

(1) दो सजातीय बैजिक व्यजंकों के पदों का जोड़ते या घटाते कर समय उनके गुणांकों को जोड़ते या घटाते हैं ।

जैसे, $5m^3 - 7m^3 = (5 - 7)m^3 = -2m^3$

(2) दो बैजिक व्यंजनों के पदों का गुणा अथवा भाग करते समय उनके गुणांकों का गुणा या भाग होता है वैसे ही घातांकों के नियम का भी उपयोग होता है ।

जैसे, $-4y^3 \times 2y^2z = -8y^5z$; $12a^2b \div 3ab^2 = \frac{4a}{b}$

आओ, जानें

बहुपदों पर संक्रियाएँ

बहुपदों का जोड़, घटाना, गुणा तथा भाग देना की संक्रियाएँ बैजिक व्यंजकों की संक्रियानुसार ही करते हैं।

उदा. (1) $7a^2 + 5a + 6$ मे से $5a^2 - 2a$ घटाइए ।

हल : $(7a^2 + 5a + 6) - (5a^2 - 2a)$

$$= \underline{7a^2 + 5a} + 6 \underline{- 5a^2 + 2a}$$

$$= 7a^2 - 5a^2 + 5a + 2a + 6$$

$$= 2a^2 + 7a + 6$$

उदा. (2) $-2a \times 5a^2 = -10a^3$

उदा. (3) $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) = ?$

हल : $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2)$

$= m^2 (m^3 + 2m - 2) - 5 (m^3 + 2m - 2)$ } (प्रथम बहुपद के प्रत्येक पद से दूसरे बहुपद को गुणा करने पर)

$= m^5 + 2m^3 - 2m^2 - 5m^3 - 10m + 10$

$= m^5 + 2m^3 - 5m^3 - 2m^2 - 10m + 10$ (सजातीय पदों को एकत्र कर के लिखने पर)

$= m^5 - 3m^3 - 2m^2 - 10m + 10$

गुणनफल का घात 5 है इसे ध्यान में रखिए ।

उदा. (4) $3m^2n + 5mn^2 - 7mn$ और $2m^2n - mn^2 + mn$ को जोड़िए ।

हल : $(3m^2n + 5mn^2 - 7mn) + (2m^2n - mn^2 + mn)$

$= \underline{3m^2n + 5mn^2} - \underline{7mn + 2m^2n} - \underline{mn^2 + mn}$

$= 3m^2n + 2m^2n + 5mn^2 - mn^2 - 7mn + mn$ (सजातीय पदों को एकत्र कर लिखा)

$= 5m^2n + 4mn^2 - 6mn$ (सजातीय पदों को जोड़ा)

थोड़ा सोचें

एक बहुपद का घात 3 तथा दूसरे बहुपद का घात 5 हो तो उन बहुपदों के गुणनफल का घात कितना होगा?

गुण्य तथा गुणांक बहुपद का घात और उनके गुणनफल का घात इनमें कौन-सा संबंध होता है ?

उदा. (5) $(2 + 2x^2) \div (x + 2)$ को भाग दीजिए ।

और प्राप्त उत्तर को भाज्य = भाजक $\times$ भागफल + शेषफल रूप में लिखिए ।

हल : प्रथम $p(x) = 2 + 2x^2$ इस भाज्य बहुपद को मानक रूप में लिखिए ।

$\therefore \; 2 + 2x^2 = 2x^2 + 0x + 2$

विधि I :

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x - 4 \\ \hline x + 2 & \quad 2x^2 + 0x + 2 \\ & -\; 2x^2 + 4x \\ & \quad\; - \quad - \\ \hline & \qquad -4x + 2 \\ & -\; -4x - 8 \\ & \qquad + \quad + \\ \hline & \qquad\qquad 10 \end{array}$$

भाज्य = भाजक $\times$ भागफल + शेषफल

$2 + 2x^2 = (x + 2) \times (2x - 4) + 10$

$q(x)$, भाजक $= (x + 2)$

$s(x)$, भागफल $= 2x - 4$ तथा $r(x)$, शेषफल $= 10$

$\therefore \; p(x) = q(x) \times s(x) + r(x)$

विधि II : भाग की रेखीय पद्धति

$(2x^2 + 2) \div (x + 2)$ के भाग दीजिए ।

$2x^2$ यह पद मिलने के लिए $(x + 2)$ को $2x$ से गुणा कर $4x$ से घटाना

$2x(x+2) - 4x = 2x^2$

$\therefore$ भाज्य $= 2x^2 + 2 = 2x(x+2) - 4x + 2 \quad \ldots(\mathrm{I})$

अब $-4x$ यह पद पाने के लिए $(x+2)$ को -4 से गुणा कर 8 से जोड़ना

$-4\,(x+2) + 8 = -4x$

$\therefore \; (2x^2 + 2) = 2x(x+2) - 4(x+2) + 8 + 2$ ...(I) से

$\therefore \; (2x^2 + 2) = (x + 2)\,(2x - 4) + 10$

भाज्य = भाजक $\times$ भागफल + शेषफल

इसे ध्यान में रखें

युक्लिड के भाग का सिद्धांत

यदि $s(x)$ और $p(x)$ ये दोनों बहुपद हैं और $s(x)$ का घात $p(x)$ के घात समान हैं अथवा उससे अधिक हो और $s(x)$ को $p(x)$ से भाग देने पर प्राप्त भागफल $q(x)$ हो, तो $s(x) = p(x)\, q(x) + r(x)$ यहाँ $r(x) = 0$ अथवा $r(x)$ का घात $p(x)$ के घात से कम होता है ।

प्रश्नसंग्रह 3.2

(1) दिए गए अक्षरों का उपयोग कर उत्तर लिखिए ।

(i) लाटगाँव में वृक्षों की संख्या a हैं । इन वृक्षों की संख्या प्रतिवर्ष b से बढ़ती है तो x वर्ष पश्चात लाटगाँव में कितने वृक्ष होंगे?

(ii) कसरत के लिए एक कतार में y लड़कों की ऐसी x कतारें बनाई गई तो कसरत के लिए कुल कितने लड़के उपस्थित थे ?

(iii) किसी दो अंकोवाली संख्या में इकाई तथा दहाई स्थान के अंक क्रमश: m तथा n है तो वह दो अंकोंवाली संख्या दर्शाने वाला बहुपद कौन-सा है ?

(2) निम्नलिखित बहुपदों को जोड़िए ।

(i) $x^3 - 2x^2 - 9$; $5x^3 + 2x + 9$

(ii) $-7m^4 + 5m^3 + \sqrt{2}$; $5m^4 - 3m^3 + 2m^2 + 3m - 6$

(iii) $2y^2 + 7y + 5$; $3y + 9$; $3y^2 - 4y - 3$

(3) निम्नलिखित पहले बहुपद में से दूसरे बहुपद को घटाइए ।

(i) $x^2 - 9x + \sqrt{3}$; $-19x + \sqrt{3} + 7x^2$

(ii) $2ab^2 + 3a^2b - 4ab$; $3ab - 8ab^2 + 2a^2b$

(4) निम्नलिखित बहुपदों का गुणा कीजिए ।

(i) $2x$; $x^2 - 2x - 1$ (ii) $x^5 - 1$; $x^3 + 2x^2 + 2$ (iii) $2y + 1$; $y^2 - 2y^3 + 3y$

(5) पहले बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग दीजिए तथा उत्तर को 'भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल' के रूप में लिखिए ।

(i) $x^3 - 64$; $x - 4$ (ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2$; $x^2 - x$

(6*) निम्नलिखित जानकारी को पदावली रूप में लिखकर सरल रूप दीजिए ।

किसी किसान के आयताकार खेत की लंबाई$(2a^2 + 3b^2)$ मीटर तथा चौड़ाई $(a^2 + b^2)$ मीटर है । किसान ने खेत में $(a^2 - b^2)$ मीटर की वर्गाकार जगह पर घर का निर्माण किया तो शेष खेत की जगह का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

कृति : निम्नलिखित परिच्छेद पढ़िए और चौखट में सही रकम लिखकर चर्चा कीजिए ।

शिरगम गाँव में गोविंद की 5 एकड़ की असिचिंत खेती है । उसके परिवार में पत्नी, 2 लड़के तथा उसकी वृद्ध माता है । उसने 10 प्र.श.प्र.व. की दर से खेती के लिए बैंके से सव्वा लाख रुपये का कर्ज लिया । उसने खेत में x एकड़ में सोयाबीन, y एकड़ भूमि में कपास तथा तुअर के फसल की पैदावार ली । खेती के लिए आया खर्च निम्नलिखित प्रकार है ।

बीज के लिए उसने 10,000 रु. दिए । सोयाबीन के लिए 2000 x रुपये और मजदूरी तथा परिश्रम (कृषिसंबंधी कार्य) के लिए 4000 x^2 रुपये खर्च हुए । कपास तथा तुअर की फसल के लिए खाद और कीटनाशक के लिए 8000 y रुपये एवं मजदूरी तथा परिश्रम के लिए 9000 y^2 रुपये खर्च किए ।

खेती के लिए कुल कितना खर्च हुआ इसे x और y उपयोग कर लिखिए ।

$\boxed{} + \boxed{2000\,x} + \boxed{4000\,x^2} + \boxed{8000\,y} + \boxed{}$ रुपये

उसके खेत में सोयाबीन का उत्पादन 5 x^2 क्विंटल हुआ । इसे 2800 रु. प्रति क्विंटल की दर से बेचा गया । कपास का उत्पादन $\frac{5}{3}y^2$ क्विंटल हुआ तथा इसे 5000 रु. प्रति क्विंटल की दर से बेचा गया ।

तुअर का उत्पादन $4y$ क्विंटल हुआ तथा उसे 4000 रु. प्रति क्विंटल की दर से बेचा गया ।

सभी कृषि उपज को बेचने के पश्चात कुल कितने रुपये की आय हुई। इसे x और y के रूप में लिखिए ।

$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$ रुपये

आओ, जानें

संश्लेषात्मक भाग विधि (Synthetic Division)

किसी बहुपद कों दूसरे बहुपद से कैसे भाग देना है, हम जानते हैं । भाजक $x + a$ अथवा $x - a$ बहुपद हो तो हम भाग की एक सरल विधि समझेंगे ।

उदा. (1) $(3x^3 + 2x^2 - 1)$ इस बहुपद को $(x + 2)$ से भाग दीजिए ।

हल : प्रथम भाज्य बहुपद को मानक स्वरूप में लिखने के पश्चात उसे गुणांक स्वरूप में लिखेंगे

भाज्य बहुपद : $3x^3 + 2x^2 - 1 = 3x^3 + 2x^2 + 0\,x - 1$

$\therefore$ भाज्य बहुपद का गुणांक स्वरूप $= (3, 2, 0, -1)$

भाजक बहुपद $= x + 2$

संश्लेषात्मक भाग की विधि निम्नलिखित प्रकार से की जाती है ।

....	पहली पंक्ति
....	दूसरी पंक्ति
....	तीसरी पंक्ति

(1) आगे दर्शाए गए अनुसार, एक खड़ी और एक आड़ी रेखा खींचिए ।

(2) भाजक $x + 2$ हैं तथा 2 की विपरीत संख्या -2 है । $\therefore$ प्रथम पंक्ति में खड़ी रेखा के बाईं ओर -2 लिखिए । आड़ी रेखा के ऊपर पहली पंक्ति में भाज्य बहुपद को गुणांक स्वरूप में लिखिए ।

- 2	3	2	0	- 1	पहली पंक्ति
	3				तीसरी पंक्ति

(3) आड़ी रेखा के नीचे अर्थात तीसरी पंक्ति में भाज्य में पहले गुणांक को जैसे है वैसा ही लिखिए ।

- 2	3	2	0	- 1	
		-6	8	-16	
	3	- 4	8	$\boxed{-17}$	शेष

(4) तीसरी पंक्ति में 3 तथा भाजक के -2 का गुणनफल -6 इसे पहली पंक्ति के दूसरे गुणांक 2 के नीचे दूसरे पंक्ति में लिखिए और इन गुणांकों का योग करके प्राप्त योगफल -4 इसे तीसरी पंक्ति के दूसरे स्थान पर लिखिए ।

इस प्रकार गुणा तथा जोड़कर के अंतिम जोड़ से प्राप्त संख़्या यह भागफल का शेषफल $- 17$ है ।

$(3, -4, 8)$ यह भागफल का गुणांक स्वरूप है ।

$\therefore$ भागफल $= 3x^2 - 4x + 8$ और शेषफल $= - 17$

$\therefore\ 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$

इस विधि को **संश्लेषात्मक भाग विधि** कहते हैं ।

इस भाग को रेखीय विधि से निम्नप्रकार से कर सकते हैं ।

$$\begin{aligned}
3x^3 + 2x^2 - 1 &= 3x^2 (x + 2) - 6x^2 + 2x^2 - 1 \\
&= 3x^2 (x + 2) - 4x^2 - 1 \\
&= 3x^2 (x + 2) - 4x^2 - 8x + 8x - 1 \\
&= 3x^2 (x + 2) - 4x (x + 2) + 8x - 1 \\
&= 3x^2 (x + 2) - 4x (x + 2) + 8x + 16 - 16 - 1 \\
&= 3x^2 (x + 2) - 4x (x + 2) + 8 (x + 2) - 17
\end{aligned}$$

$\therefore\quad 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$

उदा. (2) $(2y^4 - 3y^3 + 5y - 4) \div (y - 1)$ इसे भाग दीजिए ।

हल : संश्लेषात्मक भाग विधि : भाज्य $= 2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^4 - 3y^3 + 0y^2 + 5y - 4$

भाजक $= y - 1$, -1 की विपरीत संख्या 1 है ।

1	2	- 3	0	5	- 4	
		2	- 1	- 1	4	
	2	- 1	- 1	4	$\boxed{0}$	शेषफल

भागफल का गुणांक रूप $(2, -1, -1, 4)$ है ।

$\therefore$ भागफल $= 2y^3 - y^2 - y + 4$ और शेषफल $= 0$

रेखीय पद्धति : $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^3(y - 1) + 2y^3 - 3y^3 + 5y - 4$

$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y^2 + 5y - 4$

$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4y - 4$

$= (2y^3 - y^2 - y + 4)(y - 1)$

इसे ध्यान में रखें

संश्लेषात्मक भाग विधि से भाग करते समय सिर्फ $x + a$ अथवा $x - a$ रूपवाले बहुपद जिनका घात 1 है ऐसे ही भाजक लिए गए हैं ।

प्रश्नसंग्रह 3.3

1. निम्नलिखित भाग संश्लेषात्मक भाग विधि से और रेखीय पद्धति से कीजिए। भागफल तथा शेषफल लिखिए।

(i) $(2m^2 - 3m + 10) \div (m - 5)$ (ii) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x + 2)$

(iii) $(y^3 - 216) \div (y - 6)$ (iv) $(2x^4 + 3x^3 + 4x - 2x^2) \div (x + 3)$

(v) $(x^4 - 3x^2 - 8) \div (x + 4)$ (vi) $(y^3 - 3y^2 + 5y - 1) \div (y - 1)$

आओ, जानें

बहुपद का मान(Value of polynomial)

बहुपद के चरांकों का मान देने पर उस बहुपद का एक मान प्राप्त होता है । उदाहरण, $x + 7$ इस बहुपद में x का मान 2 दिया है तो उस बहुपद का मान 9 मिलता है ।

$p(x)$ बहुपद में x का मान a रखने पर बहुपद के मान को $p(a)$ से दर्शाते हैं ।

उदा. (1) यदि $x = 2$ हो तो बहुपद $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ का मान ज्ञात कीजिए ।

बहुपद $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$

बहुपद में $x = 2$ रखने पर

$$\therefore p(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5$$
$$= 2 \times 4 - 6 + 5$$
$$= 8 - 6 + 5$$
$$\therefore p(2) = 7$$

उदा. (2) यदि $y = -2$ हो तो बहुपद $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$

$$\therefore p(-2) = 2 \times (-2)^3 - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= 2 \times (-8) - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= -16 + 4 + \sqrt{7}$$
$$= -12 + \sqrt{7}$$

$\therefore$ $y = -2$ रखने पर बहुपद का मान $-12 + \sqrt{7}$ है ।

उदा. (3) $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$ इस बहुपद के लिए $p(0)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$

$$\therefore p(0) = 2 \times 0^2 - 0^3 + 0 + 2$$
$$= 2 \times 0 - 0 + 0 + 2$$
$$= 2$$

उदा. (4) यदि बहुपद $m^2 - am + 7$ में $m = -1$ से भाग देने पर शेषफल 10 आता है तो a का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : $p(m) = m^2 - am + 7$

$$\therefore p(-1) = (-1)^2 - a \times (-1) + 7$$
$$= 1 + a + 7$$
$$= 8 + a$$

किंतु $p(-1) = 10$ (दिया है ।)

$$\therefore 8 + a = 10$$
$$\therefore a = 10 - 8$$
$$\therefore a = 2$$

प्रश्नसंग्रह 3.4

(1) $x = 0$ के लिए बहुपद $x^2 - 5x + 5$ का मान ज्ञात कीजिए ।

(2) यदि $p(y) = y^2 - 3\sqrt{2}y + 1$ हो तो $p(3\sqrt{2})$ का मान ज्ञात कीजिए ।

(3) यदि $p(m) = m^3 + 2m^2 - m + 10$ हो तो $p(a) + p(-a) = ?$

(4) यदि $p(y) = 2y^3 - 6y^2 - 5y + 7$ हो तो $p(2)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

इसे ध्यान में रखें

चरांक के किसी मान के लिए बहुपद का मान ज्ञात करने के लिए प्रत्येक पद में x के स्थान पर दिया गया मान रखकर उस व्यंजक का मान ज्ञात कर सकते हैं ।

आओ, जानें

शेषफल प्रमेय(Remainder Theorem)

बहुपद $p(x)$ में $(x + a)$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल और बहुपद में $x = -a$ रखने पर प्राप्त बहुपद का मान इनमें परस्पर संबंध होता है । यह संबंध जानने के लिए निम्नलिखित उदाहरण का अध्ययन करें ।

उदा. $p(x) = (4x^2 - x + 2)$ को $(x + 1)$ से भाग दीजिए ।

[यहाँ $(x + a)$ अर्थात $(x + 1)$ है इसपर ध्यान दीजिए ।]

हल : भाज्य बहुपद $= 4x^2 - x + 2$

भाजक बहुपद $= x + 1$

$$\begin{array}{rl} \text{भागफल} & 4x - 5 \\ \text{भाजक } x + 1 \, \big) & 4x^2 - x + 2 \quad \text{भाज्य} \\ - & 4x^2 + 4x \\ & \underline{\;\;-\quad\; -\;\;} \\ & -5x + 2 \\ - & -5x - 5 \\ & \underline{\;\;+\quad\; +\;\;} \\ & 7 \quad \text{शेषफल} \end{array}$$

भागफल $= 4x - 5$ तथा शेषफल $= 7$ .... (I)

इसी उदाहरण को संश्लेषात्मक भाग विधि से करेंगे ।

$p(x)$ का गुणांक रूप $= (4, -1, 2)$

भाजक बहुपद $= x + 1$

1 की विपरीत संख्या -1

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 4 & -1 & 2 \\ & & -4 & 5 \\ \hline & 4 & -5 & \boxed{7} \end{array} \quad \text{शेषफल}$$

भागफल $= 4x - 5$ शेषफल $= 7$

अब हम शेषफल और भाज्य बहुपद का मान इन में संबंध देखेंगे ।

भाज्य बहुपद अर्थात $4x^2 - x + 2$ इस बहुपद में $x = -1$ रखकर मान ज्ञात करेंगे ।

$p(x) = 4x^2 - x + 2$

$\therefore\ p(-1) = 4 \times (-1)^2 - (-1) + 2$

$= 4 \times 1 + 1 + 2$

$= 4 + 1 + 2$

$= 7$

$\therefore\ x = -1$ होने पर बहुपद $p(x)$ का मान 7 है । ...... (II)

अर्थात कथन(I) तथा (II) से, $p(x) = 4x^2 - x + 2$ इस बहुपद को $(x + a)$ अर्थात $x + 1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल और $x = -1$ होने पर $p(x)$ इस बहुपद का मान अर्थात $p(-1)$ समान है ।

इसके आधार पर निम्नलिखित गुणधर्म का आकलन होता है ।

$p(x)$ इस बहुपद को $(x + a)$ से भाग देने पर प्राप्त **शेषफल** $p(-a)$ के समान

अर्थात $p(x)$ में $x = -a$ रखने पर प्राप्त बहुपद का मान समान होता है । इस गुणधर्म को **शेषफल प्रमेय** कहते हैं । ('शेष' शब्द का अर्थ 'शेषफल' है ।)

इस गुणधर्म को सिद्ध करने के लिए युक्लिड के भाग के नियम का उपयोग करेंगे ।

$p(x)$ को $(x + a)$ से भाग देने पर

$p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ [$q(x)$ = भागफल, $r(x)$ = शेषफल]

जब, $r(x) \neq 0$, तब नियमानुसार $r(x)$ का घात 1 से कम अर्थात 0 है । अतः $r(x)$ यह वास्तविक संख्या है ।

$\therefore\ r(-a)$ यह भी वास्तविक संख्या है ।

अब, $p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ ....(1)

इसमें $x = -a$ रखने पर

$p(-a) = q(-a) \times (a - a) + r(-a)$

$= q(-a) \times 0 + r(-a)$.........(2)

$\therefore\ p(-a) = r(-a)$ ....(1) और (2) से

कृति : निम्नलिखित उदाहरणों की जाँच कीजिए ।

(1) $p(x) = 3x^2 + x + 7$ इस बहुपद को बहुपद $x + 2$ से भाग देकर शेषफल ज्ञात कीजिए ।

(2) $x = -2$ रखने पर बहुपद $p(x) = 3x^2 + x + 7$ का मान ज्ञात कीजिए ।

(3) अब भाग देने के पश्चात प्राप्त शेषफल ही $p(-2)$ का मान है क्या?

एक और उदाहरण लेकर उपर्युक्त पद्धति से जाँच कीजिए ।

उदा. (1) $x^4 - 5x^2 - 4x$ इस बहुपद को $x + 3$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए ।

हल : **शेषफल प्रमेय से**

भाज्य बहुपद $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

भाजक $= x + 3$

$\therefore$ $x = -3$ लेने पर

$\therefore$ $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

$p(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 - 4(-3)$

$= 81 - 45 + 12$

$p(-3) = 48$

संश्लेषात्मक भाग विधि से

मानक स्वरूप $x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 4x + 0$

गुणांक स्वरूप $= (1, 0, -5, -4, 0)$

-3	1	0	-5	-4	0	
		-3	9	-12	48	
	1	-3	4	-16	$\boxed{48}$	शेषफल

शेषफल $= 48$

उदा. (2) शेषफल प्रमेय का उपयोग कर के बहुपद $x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ में बहुपद $x - 1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए ।

हल : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

भाजक $= x - 1$ $\therefore$ $x = 1$ रखने पर

$\therefore$ शेषफल प्रमेय से शेषफल $= p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1$

$= 1 - 2 \times 1 - 4 - 1$

$p(1) = 1 - 2 - 4 - 1 = -6$

$\therefore$ शेषफल प्रमेयानुसार शेषफल $= -6$

उदा. (3) यदि बहुपद $t^3 - 3t^2 + kt + 50$ को $(t-3)$ से भाग देने पर शेषफल 62 आता हो तो k का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : दिए गए बहुपद को $(t-3)$ से भाग देने पर शेषफल 62 आता है । अतः दिए गए भाज्य का मान $t = 3$ रखकर ज्ञात करेंगे ।

$p(t) = t^3 - 3t^2 + kt + 50$

$\therefore$ शेषफल प्रमेयानुसार

शेषफल $= p(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + k \times 3 + 50$

$= 27 - 3 \times 9 + 3k + 50$

$= 27 - 27 + 3k + 50$

$= 3k + 50$

किंतु शेषफल 62 दिया गया है ।

$\therefore 3k + 50 = 62$

$\therefore 3k = 62 - 50$

$\therefore 3k = 12$

$\therefore k = \frac{12}{3}$

$\therefore k = 4$

इसे ध्यान में रखें

शेषफल प्रमेय : यदि $p(x)$ कोई बहुपद तथा a वास्तविक संख्या हो और यदि बहुपद $p(x)$ को $(x + a)$ से भाग दिया तो प्राप्त शेषफल $p(-a)$ के बराबर होता है ।

$p(x) = s(x)\,(x - a) + r(x)$ $\qquad$ $r(x)$ का घात < 1 अथवा $r(x) = 0$

इस समीकरण में $x = a$ रखने पर $p(a) = 0 + r\,(a) = r\,(a)$ मिलता है ।

$\therefore$ $r(a)$ का घात $= 0$ अथवा $r(a) = 0$ अर्थात $(x - a)$ यह $p(x)$ का गुणनखंड है ऐसा ध्यान में आता है ।

आओ, जानें

गुणनखंड प्रमेय (Factor Theorem)

यदि 21 को 7 से भाग देने पर शेषफल 0 आता है तो हम कहते हैं कि 7 यह 21 का गुणनखंड है ।

इसी प्रकार दिए गए बहुपद को भाजक बहुपद से भाग देने पर शेषफल 0 आता है तो उस बहुपद को बहुपद का गुणनखंड कहते हैं ।

उदा. (1) यदि $p(x) = (x^3 + 4x - 5)$ हो तो बहुपद में $(x - 1)$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए ।

$(x - 1)$ यह $p(x)$ का गुणनखंड है क्या ? निश्चित कीजिए ।

हल : $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$\therefore p(1) = (1)^3 + 4(1) - 5$

$= 1 + 4 - 5$

$= 0$

यहाँ, शेषफल प्रमेय के अनुसार शेषफल $= 0$

$\therefore$ $(x - 1)$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड है ।

उदा. (2) यदि $p(x) = x^3 + 4x - 5$ हो तो बहुपद में $x + 2$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए। $(x + 2)$ यह $p(x)$ का गुणनखंड है क्या निश्चित कीजिए ।

हल : $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$\therefore p(-2) = (-2)^3 + 4(-2) - 5$

$p(-2) = -8 - 8 - 5$

$= -21$

शेषफल प्रमेय के नुसार शेषफल $= -21$

यहाँ शेषफल $\neq 0$

$\therefore$ $(x + 2)$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड नहीं है ।

कृति : $(x - 1)$ यह बहुपद $x^3 + 4x - 5$ का गुणनखंड है क्या ? जाँच कीजिए ।

इसे ध्यान में रखें

माना $p(x)$ यह बहुपद तथा a कोई भी वास्तविक संख्या है और यदि $p(a) = 0$ हो तो $(x - a)$ यह बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड है ।

इसके विपरीत $(x - a)$ यह बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड हो तो $p(a) = 0$ होता है ।

उदा. (1) गुणनखंड प्रमेय का उपयोग कर बताइए $x - 2$ बहुपद $x^3 - x^2 - 4$ का गुणनखंड है क्या ?

हल : $p(x) = x^3 - x^2 - 4$ भाजक $= x - 2$

$\therefore\ p(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

$\therefore$ गुणनखंड प्रमेय से, $(x - 2)$ बहुपद $(x^3 - x^2 - 4)$ का गुणनखंड है ।

उदा. (2) यदि $(x - 1)$ बहुपद $(x^3 - 2x^2 + mx - 4)$ का गुणनखंड हो तो m का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : $(x - 1)$ यह बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड है । $\therefore\ p(1) = 0$

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$$

$$\therefore\ p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + m \times 1 - 4 = 0$$

$$\therefore\ 1 - 2 \times 1 + m - 4 = 0$$

$$\therefore\ 1 - 2 + m - 4 = 0 \qquad \therefore\ m - 5 = 0 \qquad \therefore\ m = 5$$

कृति : हमने असिंचित खेती करने वाले गोविंद की खेती के संदर्भ में बहुपदों के रूप में खेती का खर्च तथा उत्पादन इन घटकों को देखा था । उसने बैंक से सवा लाख रु. कर्ज लिया और वह 10% की दर से वापस किया था । बीज के लिए 10,000 रुपये, सोयाबीन की फसल के खाद व कीटनाशक के लिए $2000x$ रुपये तथा उसकी परिश्रम के लिए $4000x^2$ रुपये खर्च आया था । कपास तथा तुअर की फसल के खाद व कीटनाशक के लिए $8000y$ रुपये तथा परिश्रम (कृषि कार्य) के लिए $9000y^2$ रुपये खर्च किया था ।

कुल आय $14000x^2 + \frac{25000}{3}y^2 + 16000y$ हुई ।

$x = 2,\ y = 3$ लेकर गोविंद की खेती का जमा खर्च लिखकर ज्ञात कीजिए ।

हल :

जमा		**खर्च**	
1,25,000 रुपये	बैंक का कर्ज	1,37,000 रुपये	बैंक का ब्याजसहित वापसी
₹ ☐	सोयाबीन का उत्पादन	₹ ☐	बीज के लिए
₹ ☐	कपास का उत्पादन	₹ ☐	सोयाबीन : खाद तथा कीटनाशक
₹ ☐	तुअर का उत्पादन	₹ ☐	सोयाबीन : मजदूरी तथा परिश्रम
₹ ☐	कुल जमा	₹ ☐	कपास तथा तुअर : खाद तथा कीटनाशक
		₹ ☐	कपास तथा तुअर : मजदूरी तथा परिश्रम
		₹ ☐	कुल खर्च

प्रश्नसंग्रह 3.5

(1) निम्नलिखित मान लेकर बहुपद $2x - 2x^3 + 7$ का मान ज्ञात कीजिए ।

(i) $x = 3$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 0$

(2) निम्नलिखित प्रत्येक बहुपद के लिए $p(1)$, $p(0)$ और $p(-2)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

(i) $p(x) = x^3$ (ii) $p(y) = y^2 - 2y + 5$ (iii) $p(x) = x^4 - 2x^2 - x$

(3) यदि बहुपद $m^3 + 2m + a$ का मान $m = 2$ रखने पर12 है, तो a का मान ज्ञात कीजिए ।

(4) यदि बहुपद $mx^2 - 2x + 3$ के लिए $p(-1) = 7$ हो तो m का मान ज्ञात कीजिए ।

(5) निम्नलिखित प्रश्नों में पहले बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग देने पर प्राप्त शेषफल प्रमेय का उपयोग करके ज्ञात कीजिए ।

(i) $(x^2 - 7x + 9)$; $(x + 1)$

(ii) $(2x^3 - 2x^2 + ax - a)$; $(x - a)$

(iii) $(54m^3 + 18m^2 - 27m + 5)$; $(m - 3)$

(6) बहुपद $y^3 - 5y^2 + 7y + m$ को $y + 2$ से भाग देने पर शेषफल 50 आता है, तो m का मान ज्ञात कीजिए ।

(7) गुणनखंड प्रमेय का उपयोग करके, $x + 3$ बहुपद $x^2 + 2x - 3$ का गुणनखंड है क्या निश्चित कीजिए ।

(8) यदि $x - 2$ बहुपद $x^3 - mx^2 + 10x - 20$ का गुणनखंड हो तो m का मान ज्ञात कीजिए ।

(9) निम्नलिखित उदाहरणों में गुणनखंड प्रमेय से निश्चित कीजिए कि $q(x)$ यह $p(x)$ का गुणनखंड है ।

(i) $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $q(x) = x - 1$

(ii) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 45$, $q(x) = x - 3$

(10) $(x^{31} + 31)$ में $(x + 1)$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए ।

(11) दर्शाओ कि $m - 1$ यह बहुपद $m^{21} - 1$ तथा $m^{22} - 1$ का गुणनखंड है ।

(12*) यदि $x - 2$ और $x - \frac{1}{2}$ ये दोनों बहुपद $nx^2 - 5x + m$ का गुणनखंड है तो दर्शाइए कि $m = n = 2$

(13) (i) यदि $p(x) = 2 + 5x$ हो तो $p(2) + p(-2) - p(1)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

(ii) यदि $p(x) = 2x^2 - 5\sqrt{3}x + 5$ हो तो $p(5\sqrt{3})$ का मान ज्ञात कीजिए ।

थोड़ा सोचें

पिछली कक्षा में हमने अध्ययन किया है कि बहुपद का गुणखंड कैसे ज्ञान करते हैं । इसपर आधारित कुछ उदाहरण देखेंगे ।

गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

उदा. (1) $4x^2 - 25$

$= (2x)^2 - (5)^2$

$= (2x + 5)(2x - 5)$

उदा. (2) $3x^2 + 7x + 2$

$= \underline{3x^2 + 6x} + \underline{x + 2}$

$= 3x(x + 2) + 1(x + 2)$

$= (x + 2)(3x + 1)$

उदा. (3) $63x^2 + 5x - 2$

$= 63x^2 + 14x - 9x - 2$

$= 7x(9x + 2) - 1(9x + 2)$

$= (9x + 2)(7x - 1)$

उदा. (4) $6x^2 - 5x - 6$

$= 6x^2 - 9x + 4x - 6$

$= 3x(2x - 3) + 2(2x - 3)$

$= (2x - 3)(3x + 2)$

आओ, जानें

बहुपदों के गुणनखंड (Factors of polynomials)

कई बार दिए गए बहुपदों का रूपांतरण $ax^2 + bx + c$ के रूप में किया जाता है ताकि उनके गुणनखंड सरलता से ज्ञात हो सकें ।

उदा. (1) $(y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

हल : दिए गए बहुपद में $(y^2-3y) = x$ (माना)

$\therefore (y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50 = x^2 - 5x - 50$

$= x^2 - 10x + 5x - 50$

$= x(x - 10) + 5(x - 10)$

$= (x - 10)(x + 5)$

$= (y^2-3y - 10)(y^2-3y + 5)$

$= [y^2-5y + 2y - 10](y^2-3y + 5)$

$= [y(y - 5) + 2(y - 5)](y^2-3y + 5)$

$= (y - 5)(y + 2)(y^2-3y + 5)$

उदा. (2) गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

$(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

हल : $(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

$= (x + 2)(x - 7)(x - 3)(x - 2) + 64$

$= (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 6) + 64$

$= (m - 14)(m + 6) + 64$ . . . . (माना $x^2 - 5x = m$)

$= m^2 - 14m + 6m - 84 + 64$

$= m^2 - 8m - 20$

$= (m - 10)(m + 2)$

$= (x^2 - 5x - 10)(x^2 - 5x + 2)$ .... m की जगह $x^2 - 5x$ लिखिए ।

प्रश्नसंग्रह 3.6

(1) निम्नलिखित बहुपदों के गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

(i) $2x^2 + x - 1$ (ii) $2m^2 + 5m - 3$ (iii) $12x^2 + 61x + 77$

(iv) $3y^2 - 2y - 1$ (v) $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}$ (vi) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

(2) निम्नलिखित बहुपदों के गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

(i) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$ (ii) $(x - 5)^2 - (5x - 25) - 24$

(iii) $(x^2 - 6x)^2 - 8(x^2 - 6x + 8) - 64$ (iv) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 5) - 35$

(v) $(y + 2)(y - 3)(y + 8)(y + 3) + 56$

(vi) $(y^2 + 5y)(y^2 + 5y - 2) - 24$

(vii) $(x - 3)(x - 4)^2(x - 5) - 6$

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

(1) निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न के विकल्पों में से उचित विकल्प चुनकर लिखिए ।

(i) निम्नलिखित में से कौन-सा बहुपद है ?

(A) $\frac{x}{y}$ (B) $x^{\sqrt{2}} - 3x$ (C) $x^{-2} + 7$ (D) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}$

(ii) $\sqrt{7}$ इस बहुपद का घात बातइए ।

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 5 (C) 2 (D) 0

(iii) 0 बहुपद का घात कितना होता है ?

(A) 0 (B) 1 (C) निश्चित नहीं किया जा सकता । (D) कोई भी वास्तविक संख्या

(iv) $2x^2 + 5x^3 + 7$ इस बहुपद का घात कितना होगा ?

(A) 3 (B) 2 (C) 5 (D) 7

(v) $x^3 - 1$ इस बहुपद का गुणांक स्वरूप कौन-सा है ?

(A) (1, − 1) (B) (3, − 1) (C) (1, 0, 0, − 1) (D) (1, 3, − 1)

(vi) $p(x) = x^2 - 7\sqrt{7}x + 3$ तो $p(7\sqrt{7}) = $?

(A) 3 (B) $7\sqrt{7}$ (C) $42\sqrt{7} + 3$ (D) $49\sqrt{7}$

(vii) बहुपद $2x^3 + 2x$ में यदि $x = -1$ हो तो बहुपद का मान कितना होगा ?

(A) 4 (B) 2 (C) − 2 (D) − 4

(viii) बहुपद $3x^2 + mx$ का $x - 1$ एक गुणनखंड हो तो m का मान कितना होगा ?

(A) 2 (B) − 2 (C) − 3 (D) 3

(ix) $(x^2 - 3)(2x - 7x^3 + 4)$ के गुणनफल से प्राप्त बहुपद का घात कितना होगा ?

(A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 0

(x) निम्नलिखित में से रेखीय बहुपद कौन-सा है ?

(A) $x + 5$ (B) $x^2 + 5$ (C) $x^3 + 5$ (D) $x^4 + 5$

(2) निम्नलिखित में से प्रत्येक बहुपद का घात लिखिए ।

(i) $5 + 3x^4$ (ii) 7 (iii) $ax^7 + bx^9$ {a, b यह अचर संख्या है ।}

(3) निम्नलिखित बहुपदों को मानक रूप में लिखिए ।

(i) $4x^2+7x^4-x^3-x+9$ (ii) $p+2p^3+10p^2+5p^4-8$

(4) निम्नलिखित बहुपदों को गुणांक रूप में लिखिए ।

(i) x^4+16 (ii) $m^5+2m^2+3m+15$

(5) निम्नलिखित गुणांक रूप को घातांक रूप में लिखिए । (चरांक x का उपयोग कीजिए ।)

(i) (3, −2, 0, 7, 18) (ii) (6, 1, 0, 7) (iii) (4, 5, −3, 0)

(6) निम्नलिखित बहुपदों को जोड़िए ।

(i) $7x^4-2x^3+x+10$; $3x^4+15x^3+9x^2-8x+2$ (ii) $3p^3q+2p^2q+7$; $2p^2q+4pq-2p^3q$

(7) निम्नलिखित बहुपदों को घटाइए ।

(i) $5x^2-2y+9$; $3x^2+5y-7$ (ii) $2x^2+3x+5$; x^2-2x+3

(8) निम्नलिखित बहुपदों का गुणा कीजिए ।

(i) $(m^3-2m+3)(m^4-2m^2+3m+2)$ (ii) $(5m^3-2)(m^2-m+3)$

(9) संश्लेषात्मक भाग विधि से बहुपद $3x^3-8x^2+x+7$ को $x-3$ से भाग देकर शेषफल ज्ञात कीजिए ।

(10) m के किस मान के लिए $x+3$ यह बहुपद $x^3-2mx+21$ का गुणनखंड होगा?

(11) वर्ष 2016 के अंत में कोवाड, वरूड तथा चिखली इन तीनों गाँवों की जनसंख्या क्रमश: $5x^2-3y^2$, $7y^2+2xy$ और $9x^2+4xy$ थी । वर्ष 2017 के आरंभ में तीनों गाँव से शिक्षा और रोजगार के लिए क्रमश: x^2+xy-y^2, $5xy$ तथा $3x^2+xy$ लोगों का स्थलांतर दूसरे गाँव में हुआ तो वर्ष 2017 के आरंभ में उन गाँवों की कुल जनसंख्या कितनी थी ?

(12) बहुपद $bx^2 + x + 5$ और bx^3-2x+5 को $x-3$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल क्रमश: m तथा n हो और यदि $m - n = 0$ हो तो b का मान ज्ञात कीजिए ।

(13) सरल रूप दीजिए $(8m^2+ 3m - 6) - (9m - 7) + (3m^2 - 2m + 4)$

(14) बहुपद $x^2 + 13x + 7$ में से कौन-सा बहुपद घटाने पर बहुपद $3x^2 + 5x - 4$ प्राप्त होगा?

(15) बहुपद $4m + 2n + 3$ में कौन-सा बहुपद मिलाने पर बहुपद $6m + 3n + 10$ प्राप्त होगा?

4 अनुपात और समानुपात

C6L21V

आओ, सीखें

- अनुपात
- तुल्य अनुपातों पर क्रियाएँ
- सतत समानुपात
- अनुपात के गुणधर्म
- समान अनुपातों का प्रमेय
- अनुपात में k पद्धति

थोड़ा सोचें

पिछली कक्षाओं में हमने अनुपात और समानुपात का अध्ययन किया है । उनपर आधारित प्रश्न भी हल किए हैं ।

उदा. विमल द्वारा बनाए गए सूजी के लड्डू स्वादिष्ट होते हैं । वह 1 कटोरी घी 3 कटोरियाँ सूजी और 2 कटोरियाँ शक्कर मिलाकर लड्डू बनाती है ।

यहाँ सूजी और शक्कर का अनुपात 3:2 अथवा $\frac{3}{2}$ है ।

यदि लड्डू के लिए 12 कटोरियाँ सूजी लेते हैं तो शक्कर कितनी लगेगी ?

माना शक्कर x कटोरियाँ लगेगी । अतः $\frac{3}{2} = \frac{12}{x}$ $\therefore\ 3x = 24$ $\therefore\ x = 8$

अर्थात 12 कटोरियाँ सूजी लेकर लड्डू बनाने हेतु 8 कटोरियाँ शक्कर लगेगी ।

इस उदाहरण को निम्नलिखित प्रकार से भी हल कर सकते हैं ।

सूजी $3k$ कटोरियाँ हों तो शक्कर $2k$ कटोरियाँ लगेगी क्योंकि $\frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}$

$3k = 12$ हो तो $k = 4$ $\therefore\ 2k = 8$ कटोरियाँ शक्कर लगेगी

आओ, जानें

अनुपात तथा समानुपात (Ratio and proportion)

दो संख्यांओं के अनुपात की संकल्पना तीन या अधिक संख्यांओं के लिए विस्तारित कर सकते हैं ।

जैसे लड्डू के उदाहरण में घी, सूजी और शक्कर का अनुपात 1 : 3 : 2 है ।

यहाँ घी तथा सूजी का अनुपात 1 : 3 और सूजी तथा शक्कर का अनुपात 3 : 2 है । यह जानकारी समान इकाई में दी गई है ।

यदि घी 1k = k कटोरियाँ, सूजी 3k कटोरियाँ और शक्कर 2k कटोरियाँ माने तो 12 कटोरियाँ सूजी लेने पर, लड्डू बनाने के लिए कितनी कटोरियाँ घी और शक्कर लगेगी यह ज्ञात कर सकते हैं ।

क्योंकि 3k = 12 $\therefore$ k = 4 और 2k = 8 अर्थात 4 कटोरियाँ घी और 8 कटोरियाँ शक्कर लगेगी ।

इस संकल्पना का चार अथवा अधिकांश घटकों के लिए भी उपयोग कर सकते हैं ।

यदि a, b, c, d इन चार संख्याओं का अनुपात $2 : 3 : 7 : 4$ हो तो इन संख्याओं का $2m$, $3m$, $7m$, $4m$ मानकर दी गई जानकारी के आधार पर m का मान ज्ञात कर सकते हैं ।

उदाहरणार्थ, इन चारों संख्याओं का योग 48 हो तो वे चार संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।

$2m + 3m + 7m + 4m = 16\,m = 48$

$\therefore \quad m = 3$

$\therefore \quad 2m = 6,\ 3m = 9,\ 7m = 21,\ 4m = 12$ ऐसी संख्याएँ प्राप्त होती है ।

$\therefore$ अभिष्ट संख्याएँ = 6, 9, 21, 12

उदा. (1) 18 : 18 : 10 इस प्रकार के खाद में नाइट्रोजन के यौगिक 18%, फास्फोरस के यौगिक18% और पोटैशियम के यौगिक 10% होते हैं । शेष भाग अन्य पदार्थ के हैं तो 20 किलोग्राम खाद में प्रत्येक प्रकार के यौगिक का द्रव्यमान कितना होगा ?

हल : माना 20 किग्रा खाद में नाइट्रोजन के यौगिक का द्रव्यमान x किग्रा

$$\therefore \quad \frac{18}{100} = \frac{x}{20} \qquad \therefore \quad x = \frac{18 \times 20}{100} = 3.6$$

$\therefore$ नाइट्रोजन का यौगिक 3.6 किग्रा है ।

फास्फोरस का यौगिक का भी 18 प्रतिशत है । $\therefore$ फास्फोरस का यौगिक भी 3.6 किग्रा है ।

मान लीजिए 20 किग्रा खाद में पोटैशियम का यौगिक का द्रव्यमान y किग्रा

$\frac{10}{100} = \frac{y}{20} \qquad \therefore y = 2 \qquad$ $\therefore$ पोटैशियम के यौगिक 2 किग्रा है ।

प्रत्यक्ष समानुपात

एक मोटरकार 1 लीटर पेट्रोल में 10 किमी दूरी तय करती है ।

तो 20 लीटर पेट्रोल में वह कार $20 \times 10 = 200$ किमी की दूरी तय करेगी ।

और 40 लीटर पेट्रोल में वह कार $40 \times 10 = 400$ किमी दूरी तय करेगी ।

उपरोक्त जानकारी तालिका के रूप में लिखिए ।

पेट्रोल : x लीटर	1	20	40	
दूरी : y किमी	10	200	400	
$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$	$\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$	$\frac{x}{y} = k$

कार द्वारा उपयोग किया गया पेट्रोल (लीटर में) तथा उतने ही पेट्रोल में तय की गई दूरी (किलोमीटर में) का अनुपात अचर है । ऐसी स्थिति में हम कह सकते हैं कि उन दो संख्याओं में प्रत्यक्ष समानुपात है ।

प्रतिलोमानुपात

एक मोटरकार 50 किमी प्रति घंटा की वेग से 100 किमी की दूरी 2 घंटों में तय करती है । एक बैलगाड़ी 5 किमी प्रति घंटा की वेग से उतना ही अंतर 20 घंटे में तय करती है ।

$\therefore$ वेग $\times$ समय = दूरी ये ध्यान में रखकर उपरोक्त जानकारी सारिणी रूप में लिखते हैं ।

	वेग/घंटा x	समय y	$x \times y$	$x \times y = \mathrm{k}$
कार	50	2	100	
बैलगाड़ी	5	20	100	

अर्थात वाहन की वेग तथा दूरी तय करने में लगने वाले समय का गुणनफल अचर है । ऐसे समय दो राशियाँ परस्पर प्रतिलोमानुपाती हैं अर्थात वे दो राशियाँ प्रतिलोम (व्युत्क्रमानुपाती) या अप्रत्यक्ष समानुपात में बदलती हैं ऐसा भी कहते हैं ।

थोड़ा सोचें

अनुपात के गुणधर्म

(1) a और b इन दो संख्याओं का अनुपात $a : b$ अथवा $\frac{a}{b}$ लिखते हैं । यहाँ a को पूर्वपद (पहला पद) तथा b को उत्तर पद (द्वितीय पद) कहते हैं ।

(2) दो संख्यांओं के अनुपात में उत्तर पद 100 हो तो उस अनुपात को प्रतिशत कहते हैं ।

(3) अनुपात की सभी संख्याओं को एकही शून्येतर संख्या से गुणा अथवा भाग करें तो अनुपात अपरिवर्तित होता है ।

उदा. 3:4 = 6:8 = 9:12 उसी प्रकार 2:3:5 = 8:12:20 अथवा k यह शून्येतर संख्या हो तो

$a : b = ak : bk$ $\qquad$ $a : b : c = ak : bk : ck$

(4) अनुपात की दो राशियाँ एक ही प्रकार की होनी चाहिए तथा उनके मापन की इकाई भी समान होनी चाहिए।

(5) अनुपात की इकाई नहीं होती ।

जैसे, 2 किलोग्राम तथा 300 ग्राम का अनुपात 2:300 नहीं होता परंतु 2 किलोग्राम = 2000 ग्राम लेकर अनुपात 2000 : 300 अर्थात 20:3 है ।

उदा. (1) सीमा और राजश्री की आयु का अनुपात 3 : 1 है । राजश्री और अतुल के आयु का अनुपात 2 : 3 है, तो सीमा, राजश्री और अतुल के आयु का अनुपात ज्ञात कीजिए ।

हल : सीमा की आयु : राजश्री की आयु = 3 : 1 $\qquad$ राजश्री की आयु : अतुल की आयु = 2 : 3

पहले अनुपात का उत्तर पद यह दूसरे अनुपात का पूर्व पद होना चाहिए ।

अतः सतत अनुपात प्राप्त करने के लिए पहले अनुपात के पदों को 2 से गुणा करेंगे तब 3:1 = 6:2 प्राप्त होगा

$\frac{\text{सीमा की आयु}}{\text{राजश्री की आयु}} = \frac{6}{2}$, $\frac{\text{राजश्री की आयु}}{\text{अतुल की आयु}} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ सीमा की आयु : राजश्री की आयु : अतुल की आयु यह अनुपात 6 : 2 : 3 ऐसा है ।

उदा. (2) एक आयताकार खेत की लंबाई 1.2 किमी तथा चौड़ाई 400 मी हो तो लंबाई का चौड़ाई से अनुपात ज्ञात कीजिए ।

हल : यहाँ लंबाई किलोमीटर में एवं चौड़ाई मीटर में है । अनुपात के लिए दोनों की इकाई समान होनी चाहिए इसलिए किलोमीटर को मीटर में रूपांतर कीजिए ।

1.2 किमी = 1.2×1000 = 1200 मीटर $\therefore$ 1200 मीटर का 400 मीटर से अनुपात ज्ञात करें ।

अपेक्षित अनुपात = $\frac{1200}{400} = \frac{3}{1}$, अर्थात 3:1 है ।

उदा. (3) महेश का प्रतिमाह खर्च और आय का अनुपात 3:5 है, तो उनका खर्च उनकी आय के कितने प्रतिशत है ?

हल : खर्च का आय से अनुपात 3:5 है । प्रतिशत में रूपांतर करने के लिए दूवितीय पद 100 करना होगा ।

$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 20}{5 \times 20} = \frac{60}{100}$ अर्थात $\frac{\text{खर्च}}{\text{आय}} = \frac{60}{100} = 60\%$

$\therefore$ महेश का खर्च उनकी आय का 60% है ।

उदा. (4) एक बगीचे में आम और चीकू के वृक्षों का अनुपात 2:3 है । यदि उस बगीचे में प्रत्येक प्रकार के 5 वृक्ष अधिक लगाएँ तो अनुपात 5 : 7 होगा । उस बगीचे में वर्तमान में आम और चीकू के कितने वृक्ष हैं?

हल : वर्तमान में आम और चीकू के वृक्षों का अनुपात 2 : 3 है ।

माना कि आम के वृक्षों की संख्या $2x$ तथा चीकू के वृक्षों की संख्या = $3x$ है ।

दी गई शर्त के अनुसार, $\frac{2x+5}{3x+5} = \frac{5}{7}$

$$14x + 35 = 15x + 25$$

$$\therefore x = 10$$

$\therefore$ आम के वृक्षों की संख्या = $2x = 2 \times 10 = 20$

$\therefore$ चीकू के वृक्षों की संख्या = $3x = 3 \times 10 = 30$

उदा. (5) दो संख्याओं का अनुपात 5 : 7 है । यदि प्रत्येक संख्या में 40 जोड़ने पर प्राप्त संख्याओं का अनुपात 25 : 31 हो तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।

हल : माना पहली संख्या = $5x$ तथा दूसरी संख्या = $7x$

दी गई शर्त के अनुसार,

$$\frac{5x+40}{7x+40} = \frac{25}{31}$$

$$31(5x+40) = 25(7x+40)$$

$$155x+1240 = 175x+1000$$

$$1240-1000 = 175x-155x$$

$$240 = 20x$$

$$x = 12$$

$\therefore$ पहली संख्या = $5 \times 12 = 60$

दूसरी संख्या = $7 \times 12 = 84$

$\therefore$ दी गई संख्या 60 तथा 84 है ।

प्रश्नसंग्रह 4.1

(1) निम्नलिखित उपप्रश्नों में पहली संख्या का दूसरी संख्या से अनुपात अतिसंक्षिप्त रूप में लिखिए ।

(i) 72, 60 (ii) 38,57 (iii) 52,78

(2) निम्नलिखित प्रश्नों में पहली राशि का दूसरी राशि से अनुपात अतिसंक्षिप्त रूप में लिखिए ।

(i) 700 रुपये, 308 रुपये (ii) 14 रुपये, 12 रुपये 40 पैसे

(iii) 5 लीटर, 2500 मिलिलीटर (iv) 3 वर्ष 4 माह, 5 वर्ष 8 माह

(v) 3.8 किलोग्राम, 1900 ग्राम (vi) 7 मिनट 20 सेकंड, 5 मिनट 6 सेकंड

(3) निम्नलिखित प्रतिशतों को अतिसंक्षिप्त अनुपात के रूप में लिखिए ।

(i) 75 : 100 (ii) 44 : 100 (iii) 6.25% (iv) 52 : 100 (v) 0.64%

(4) एक छोटा मकान 3 व्यक्ति 8 दिन में बना सकते हैं तो वही मकान 6 दिन में बनाने के लिए कितने व्यक्तियों की आवश्यकता होगी ?

(5) निम्नलिखित अनुपातों का प्रतिशत में रूपांतरण कीजिए ।

(i) 15 : 25 (ii) 47 : 50 (iii) $\frac{7}{10}$ (iv) $\frac{546}{600}$ (v) $\frac{7}{16}$

(6) आभा और उसकी माता की वर्तमान आयु का अनुपात 2:5 है । आभा के जन्म के समय उसकी माता की आयु 27 वर्ष थी । तो आभा और उसकी माता की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए ।

(7) वत्सला और सारा की वर्तमान आयु क्रमश: 14 वर्ष तथा 10 वर्ष है । कितने वर्षों बाद उनकी आयु का अनुपात 5:4 होगा ?

(8) रेहाना और उसकी माता की वर्तमान आयु का अनुपात 2 : 7 है । दो वर्षों बाद उनकी आयु का अनुपात 1 : 3 होगा । तो रेहाना की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए ।

आओ, जानें

अनुपातों की तुलना

यदि $b > 0, d > 0$ तो $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ इन अनुपातों की तुलना निम्नलिखित नियमानुसार कर सकते हैं ।

(i) यदि $ad > bc$ तो $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (ii) यदि $ad < bc$ तो $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (iii) यदि $ad = bc$ तो $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

निम्नलिखित अनुपातों में क्रमसंबंध निश्चित कीजिए ।

उदा. (1) $\frac{4}{9}, \frac{7}{8}$

हल : $4 \times 8 \ \boxed{?} \ 7 \times 9$

$32 < 63$

$\therefore \quad \frac{4}{9} < \frac{7}{8}$

उदा. (2) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{13} \times \sqrt{5}, \quad \boxed{?} \quad \sqrt{8} \times \sqrt{7}$

$\sqrt{65} \quad \boxed{?} \quad \sqrt{56}$

$\sqrt{65} \quad > \quad \sqrt{56}$

$\therefore \quad \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} > \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

उदा. (3) यदि a तथा b पूर्णांक संख्याएँ हों तथा $a < b, b > 1$ तो अनुपात $\frac{a-1}{b-1}, \frac{a+1}{b+1}$ में क्रमसंबंध निश्चित कीजिए ।

हल : $a < b$

$\therefore a - 1 < b - 1$ अब $\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1}$ इस व्यवकलन पर विचार कीजिए ।

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{(a-1)(b+1)-(a+1)(b-1)}{(b-1)(b+1)}$$

$$= \frac{(ab-b+a-1)-(ab+b-a-1)}{b^2-1}$$

$$= \frac{ab-b+a-1-ab-b+a+1}{b^2-1}$$

$$= \frac{2a-2b}{b^2-1}$$

$$= \frac{2(a-b)}{b^2-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

अब $a < b$ $\quad \therefore a - b < 0$

उसी प्रकार $b^2-1 > 0$ क्योंकि $b > 1$

$$\frac{2(a-b)}{b^2-1} < 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} < 0$ .....(1) तथा (2) से

$$\frac{a-1}{b-1} < \frac{a+1}{b+1}$$

उदा. (4) यदि $a : b = 2 : 1$ और $b : c = 4 : 1$ हो तो $\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3$ इस राशि का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$ $\quad \therefore a = 2b$ $\quad \frac{b}{c} = \frac{4}{1}$ $\quad \therefore b = 4c$

$a = 2b = 2 \times 4c = 8c \quad \therefore a = 8c$

अब $a = 8c, b = 4c$ लेने पर

$$\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = \left(\frac{(8c)^4}{32 \times 4^2 \times c^2 \times c^2}\right)^3$$

$$= \left[\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times c^4}{32 \times 16 \times c^2 \times c^2}\right]^3$$

$$= (8)^3$$

$$\therefore \quad \left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = 512$$

प्रश्नसंग्रह 4.2

(1) $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ इस गुणधर्म का उपयोग करके रिक्त स्थानों मे उचित संख्या लिखिए ।

(i) $\frac{5}{7} = \frac{....}{28} = \frac{35}{....} = \frac{....}{3.5}$ (ii) $\frac{9}{14} = \frac{4.5}{....} = \frac{....}{42} = \frac{....}{3.5}$

(2) निम्नलिखित अनुपात ज्ञात कीजिए ।

(i) वृत्त की त्रिज्या का उसकी परिधि से अनुपात ।

(ii) r त्रिज्यावाले वृत्त की परिधि का उसके क्षेत्रफल से अनुपात ।

(iii) 7 सेमी भुजावाले वर्ग के विकर्ण का उसकी भुजा से अनुपात ।

(iv) लंबाई 5 सेमी तथा चौड़ाई 3.5 सेमी हो तो ऐसे आयत की परिमिति का उसके क्षेत्रफल से अनुपात ।

(3) निम्नलिखित अनुपात में क्रमसंबंध निश्चित कीजिए ।

(i) $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18}, \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1}, \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) समांतर चतुर्भुज □ABCD के ∠A तथा ∠B के मापों का अनुपात 5 : 4 हो तो ∠B का माप ज्ञात कीजिए ।

(ii) अल्बर्ट और सलीम की वर्तमान आयु का अनुपात 5 : 9 है । पाँच वर्षों बाद उनकी तत्कालीन आयु का अनुपात 3 : 5 होगा, तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए ।

(iii) किसी आयत की लंबाई और चौड़ाई का अनुपात 3 : 1 है । यदि आयत की परिमिति 36 सेमी हो, तो आयत की लंबाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए ।

(iv) दो संख्याओं का अनुपात 31 : 23 है और उनका योगफल 216 हो तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।

(v) दो संख्याओं का गुणनफल 360 हैं तथा उनका अनुपात 10 : 9 हो तो वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।

(5*) यदि $a : b = 3 : 1$ तथा $b : c = 5 : 1$ तो (i) $\left(\frac{a^3}{15b^2c}\right)^3$ (ii) $\frac{a^2}{7bc}$ के मान ज्ञात कीजिए ।

(6*) $\sqrt{0.04\times0.4\times a} = 0.4\times0.04\times\sqrt{b}$ हो तो $\frac{a}{b}$ ज्ञात कीजिए ।

(7) $(x + 3) : (x + 11) = (x - 2) : (x + 1)$ तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

आओ, जानें

तुल्य अनुपातों पर संक्रियाएँ

समानता के गुणधर्मों का उपयोग करके दो तुल्य अनुपातों पर क्रियाएँ की जा सकती हैं । उन क्रियाओं का अध्ययन करेंगे ।

यदि a , b, c, d धनात्मक संख्याएँ हों तो निम्नलिखित गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे ।

(I) विपर्यस्थानुपात (Invertendo) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad a\times d = b\times c$$

$$\therefore \quad b\times c = a\times d$$

$$\therefore \quad \frac{b\times c}{a\times c} = \frac{a\times d}{a\times c}$$ (दोनों पक्षों में $a \times c$ से भाग देने पर)

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$\therefore$ यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ **इस गुणधर्म को 'विपर्यस्थानुपात' कहते हैं ।**

(II) एकांतरानुपात (Alternando) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad a\times d = b\times c$$

$$\frac{a\times d}{c\times d} = \frac{b\times c}{c\times d}$$ (दोनों पक्षों में $c \times d$ से भाग देने पर)

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ **इस गुणधर्म को 'एकांतरानुपात' कहते हैं ।**

(III) योगानुपात (Componendo) यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तो $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \quad \text{(दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर)}$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तो $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ **इस गुणधर्म को 'योगानुपात' कहते हैं।**

(IV) अंतरानुपात (Dividendo) यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तो $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \quad \text{(दोनों पक्षों में से 1 घटाने पर)}$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तो $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ **इस गुणधर्म को 'अंतरानुपात' कहते हैं।**

(V) योगांतरानुपात (Componendo-dividendo) यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तो $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, $a \neq b, c \neq d$

यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad \text{(योगानुपात द्वारा) ....(1)}$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad \text{(अंतरानुपात द्वारा) ....(2)}$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \quad \text{(1) को (2) से भाग देने पर}$$

यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तो $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ **इस गुणधर्म को 'योगांतरानुपात' कहते हैं।**

योगानुपात और अंतरानुपात का सामान्य स्वरूप

यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तो $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (एक बार योगानुपात)

$\frac{a+2b}{b}=\frac{c+2d}{d}$ (दो बार योगानुपात क्रिया)

सामान्यतः $\frac{a+mb}{b}=\frac{c+md}{d}$ (m बार योगानुपात क्रिया) ...(1)

उसी प्रकार यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तो $\frac{a-mb}{b}=\frac{c-md}{d}$ (m बार अंतरानुपात क्रिया) ...(2)

और यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तो $\frac{a+mb}{a-mb}=\frac{c+md}{c-md}$ (m बार योगांतरानुपात क्रिया)...[(1) तथा (2) से, भाग द्वारा]

इसे ध्यान में रखें

यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तो $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (विपर्ययस्थानुपात)

यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तो $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (एकांतरानुपात)

यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तो $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (योगानुपात)

यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तो $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (अंतरानुपात)

यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तो $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (योगांतरानुपात)

हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) यदि $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ तो $\frac{a+7b}{7b}$ ज्ञात कीजिए ।

विधि I

हल : यदि $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ तो

$\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=k$, (एकांतरानुपात द्वारा)

$\therefore\ a = 5k,\ b = 3k$

$\therefore\ \frac{a+7b}{7b}=\frac{5k+7\times 3k}{7\times 3k}$

$=\frac{5k+21k}{21k}$

$=\frac{26k}{21k}\quad=\frac{26}{21}$

विधि II

$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$

$\therefore\ \frac{a}{7b} = \frac{5}{21}$

$\therefore\ \frac{a+7b}{7b} = \frac{5+21}{21}$ (योगानुपात द्वारा)

$\therefore\ \frac{a+7b}{7b} = \frac{26}{21}$

उदा. (2) यदि $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$ तो $\frac{5a-b}{b}$ ज्ञात कीजिए ।

विधि I

हल : $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$

$\therefore\ \frac{a}{7}=\frac{b}{4}$ (एकांतरानुपात द्वारा)

$\therefore\ \frac{a}{7}=\frac{b}{4}=m$ मान लो

$\therefore\ a = 7m,\quad b = 4m$

$\therefore\ \frac{5a-b}{b} = \frac{5(7m)-4m}{4m}$

$= \frac{35m-4m}{4m}$

$= \frac{31}{4}$

विधि II

$\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$

$\frac{5a}{b}=\frac{5\times 7}{4}$

$=\frac{35}{4}$

$\frac{5a-b}{b}=\frac{35-4}{4}$ (अंतरानुपात द्वारा)

$\frac{5a-b}{b} = \frac{31}{4}$

उदा. (3) यदि $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ तो $\frac{a+2b}{a-2b}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : विधि I : माना $a = 7m, b = 3m$

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7m+2\times 3m}{7m-2\times 3m}$$

$$= \frac{7m+6m}{7m-6m}$$

$$= \frac{13m}{m} = \frac{13}{1}$$

विधि II : $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$

$\therefore \frac{a}{2b} = \frac{7}{6}$ ..(दोनों पक्षों में $\frac{1}{2}$ से गुणा करने पर)

$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7+6}{7-6}$ (योगांतरानुपात द्‌वारा)

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{13}{1}$$

उदा. (4) यदि $\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$ तो $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : विधि I

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ .... (एकांतरानुपात द्‌वारा)

अब $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ के प्रत्येक पद को b से भाग देने पर

$$\frac{\frac{5a}{b}+\frac{3b}{b}}{\frac{7a}{b}-\frac{2b}{b}} = \frac{5\left(\frac{a}{b}\right)+3}{7\left(\frac{a}{b}\right)-2}$$

$$= \frac{5\left(\frac{3}{2}\right)+3}{7\left(\frac{3}{2}\right)-2}$$

$$= \frac{\frac{15}{2}+3}{\frac{21}{2}-2}$$

$$= \frac{15+6}{21-4}$$

$$= \frac{21}{17}$$

विधि II

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$$

मान लो $\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = t$

$\therefore$ $a = 3t$ तथा $b = 2t$

$$\frac{5a+3b}{7a-2b} = \frac{5(3t)+3(2t)}{7(3t)-2(2t)} \quad (t \neq 0)$$

$$= \frac{15t+6t}{21t-4t}$$

$$= \frac{21t}{17t}$$

$$= \frac{21}{17}$$

उदा. (5) यदि $\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$ तो $\frac{4x-y}{4x+y}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4x}{y} = \frac{16}{5} \qquad \text{...(दोनों पक्षों में 4 से गुणा करने पर)}$$

$$\therefore \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{16+5}{16-5} \qquad \text{...(योगांतरानुपात द्वारा)}$$

$$\therefore \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{21}{11}$$

$$\therefore \frac{4x-y}{4x+y} = \frac{11}{21} \qquad \text{...(विपर्यस्थानुपात द्वारा)}$$

$\therefore$

उदा. (6) यदि $5x = 4y$ तो $\frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \frac{x^2}{y^2} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \frac{3x^2}{y^2} = \frac{48}{25} \qquad \text{...(दोनों पक्षों में 3 से गुणा करने पर)}$$

$$\therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{48+25}{48-25} \qquad \text{...(योगांतरानुपात द्वारा)}$$

$$\therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{73}{23}$$

आओ, जानें

तुल्यानुपात के गुणधर्मों का उपयोग (Use of equal ratios)

कुछ समीकरण हल करने के लिए अन्य पद्धतियों का उपयोग करने की अपेक्षा तुल्यानुपात के गुणधर्म का उपयोग करना अधिक सुविधाजनक होता है ।

उदा. (1) समीकरण हल कीजिए । $\frac{3x^2+5x+7}{10x+14}=\frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$

हल : $$\frac{3x^2+5x+7}{10x+14}=\frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$$

$$\frac{\left(6x^2+10x+14\right)}{10x+14}=\frac{\left(6x^2+8x+6\right)}{8x+6} \qquad \text{(दोनों पक्षों में 2 से गुणा करने पर)}$$

$$\frac{(6x^2+10x+14)-(10x+14)}{10x+14}=\frac{(6x^2+8x+6)-(8x+6)}{8x+6} \quad \text{(अंतरानुपात द्‌वारा)}$$

$$\therefore \quad \frac{6x^2}{10x+14}=\frac{6x^2}{8x+6}$$

यह समीकरण $x=0$ मान के लिए सत्य है । $\therefore$ $x=0$ यह एक हल है ।

यदि $x \neq 0$ तो $x^2 \neq 0$, $\therefore$ $6x^2$ से दोनों पक्षों में भाग देने पर,

$$\frac{1}{10x+14}=\frac{1}{8x+6}$$

$$\therefore \quad 8x+6=10x+14$$

$$\therefore \quad 6-14=10x-8x$$

$$\therefore \quad -8=2x$$

$$\therefore \quad x=-4$$

$\therefore$ $x=-4$ अथवा $x=0$ यह दिए गए समीकरण के हल हैं ।

उदा. (2) हल कीजिए $\dfrac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}}=\dfrac{5}{1}$

$$\frac{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}=\frac{5+1}{5-1} \quad \text{(योगांतरानुपात द्‌वारा)}$$

$$\therefore \quad \frac{2\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x-2}}=\frac{6}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{x+7}{x-2}=\frac{9}{4} \quad \text{(दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)}$$

$$\therefore \quad 4x+28=9x-18$$

$$\therefore \quad 28+18=9x-4x$$

$$\therefore \quad 46=5x$$

$$\therefore \quad \frac{46}{5}=x$$

$\therefore$ $x=\dfrac{46}{5}$ समीकरण का हल है ।

कृति

मोटे कागज के पाँच टुकड़े लीजिए । प्रत्येक पर निम्नलिखित में से एक विधान लिखिए ।

(i) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (ii) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (iii) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bd}$ (iv) $\frac{c}{d} = \frac{c-a}{d-b}$ (v) $\frac{a}{b} = \frac{rc}{rd}$

a, b, c, d धनात्मक संख्या हो और $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो उपरोक्त प्रत्येक विधान के लिए सत्य या असत्य कार्ड के पीछे लिखिए । विधान असत्य हो तो उसका कारण भी स्पष्ट कीजिए ।

प्रश्नसंग्रह 4.3

(1) यदि $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ तो निम्नलिखित अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए ।

(i) $\frac{5a+3b}{5a-3b}$ (ii) $\frac{2a^2+3b^2}{2a^2-3b^2}$ (iii) $\frac{a^3-b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7a+9b}{7a-9b}$

(2) यदि $\frac{15a^2+4b^2}{15a^2-4b^2} = \frac{47}{7}$ तो निम्नलिखित अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए ।

(i) $\frac{a}{b}$ (ii) $\frac{7a-3b}{7a+3b}$ (iii) $\frac{b^2-2a^2}{b^2+2a^2}$ (iv) $\frac{b^3-2a^3}{b^3+2a^3}$

(3) यदि $\frac{3a+7b}{3a-7b} = \frac{4}{3}$ तो $\frac{3a^2-7b^2}{3a^2+7b^2}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

(4) निम्नलिखित समीकरण हल कीजिए ।

(i) $\frac{x^2+12x-20}{3x-5} = \frac{x^2+8x+12}{2x+3}$ (ii) $\frac{10x^2+15x+63}{5x^2-25x+12} = \frac{2x+3}{x-5}$

(iii) $\frac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x+1)^2-(2x-1)^2} = \frac{17}{8}$ (iv*) $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}} = \frac{4}{1}$

(v) $\frac{(4x+1)^2+(2x+3)^2}{4x^2+12x+9} = \frac{61}{36}$ (vi) $\frac{(3x-4)^3-(x+1)^3}{(3x-4)^3+(x+1)^3} = \frac{61}{189}$

कृति : निम्नलिखित चौखटों में से बीच के चौखट में a तथा b के मान परिवर्तन कर अर्थात $a : b$ अनुपात में परिवर्तन कर विविध उदाहरण बनाए जा सकते हैं । इनमें परिवर्तन कर शिक्षक अधिकाधिक स्वाध्याय दें ।

$\boxed{\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2} = -----}$ $\boxed{\frac{3a}{4b} = -----}$ $\boxed{\frac{2a-b}{2a+b} = -----}$

$\boxed{\frac{a^2+b^2}{b^2} = ---}$ $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{3}{4}}$ $\boxed{\frac{a}{2b} = -----}$

आओ, जानें

तुल्य अनुपातों का प्रमेय (Theorem on equal ratios)

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ इस गुणधर्म को तुल्य अनुपात का प्रमेय कहते हैं ।

उपपत्ति : माना $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ $\quad \therefore \quad a = bk$ तथा $c = dk$

$$\therefore \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

हमें ज्ञात है कि, $\frac{a}{b} = \frac{al}{bl}$

$\therefore$ यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, तो $\frac{al}{bl} = \frac{cm}{dm} = \frac{al+cm}{bl+dm} = k$

इस प्रकार यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots\ldots$ और यदि l, m, n ये शून्येतर संख्याएँ हों ।

तो प्रत्येक अनुपात = $\frac{al+cm+en+\ldots}{bl+dm+fn+\ldots}$ तुल्य अनुपात के प्रमेय का सामान्य रूप प्राप्त होता है ।

थोड़ा, सोचें

किसी व्यायामशाला के बाल समूह में 35 लड़कियाँ तथा 42 लड़के किशोर समूह में 30 लड़कियाँ तथा 36 लड़के और युवा समूह में20 लड़कियाँ तथा 24 लड़के हों तो प्रत्येक समूह के लड़कियों की संख्या और लड़कों की संख्या का अनुपात कितना है ?

सामूहिक व्यायाम के लिए तीनों समूह प्रांगण में एकत्रित करने पर कुल लड़कियों की और लड़कों की संख्या का अनुपात कितना है ?

उपरोक्त प्रश्न के उत्तर से आपको तुल्यानुपात के प्रमेय की अनुभूति हुई क्या ?

उदा. (1) निम्नलिखित कथनों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

(i) $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{4a+9b}{\ldots\ldots\ldots}$ $\qquad$ (ii) $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = \frac{5x-3y+4z}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

हल : (i) $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{4a+9b}{4\times3+9\times7} = \frac{4a+9b}{12+63} = \frac{4a+9b}{75}$

(ii) $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = \frac{5\times x}{5\times3} = \frac{-3\times y}{-3\times5} = \frac{4\times z}{4\times4}$

$$\therefore \quad = \frac{5x}{15} = \frac{-3y}{-15} = \frac{4z}{16}$$

$$= \frac{5x-3y+4z}{15-15+16} \quad \text{----(तुल्यानुपात प्रमेय द्वारा)}$$

$$= \frac{5x-3y+4z}{16}$$

उदा. (2) यदि $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}$ तथा $x+y+z\neq 0$ तो सिद्ध् कीजिए कि

प्रत्येक अनुपात = $\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$

हल : माना $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}=k$

$\therefore$ तुल्य अनुपात के प्रमेय द्वारा

$$k=\frac{a+b+c}{(x-2y+3z)+(y-2z+3x)+(z-2x+3y)}$$
$$=\frac{a+b+c}{2x+2y+2z}$$
$$=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$
$$\therefore\ \frac{a}{x-2y+3z}=\frac{b}{y-2z+3x}=\frac{c}{z-2x+3y}=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

उदा. (3) यदि $\frac{y}{b+c-a}=\frac{z}{c+a-b}=\frac{x}{a+b-c}$ तो सिद्ध् कीजिए कि $\frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$

हल : दिए गए अनुपात में विपर्यस्थानुपात द्वारा

$$\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}$$

माना $\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}=k$

$\therefore$ तुल्य अनुपात प्रमेय द्वारा

$$k=\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{z+x}$$
$$=\frac{2a}{z+x}\qquad .....(I)$$

$$k=\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{x+y}$$
$$=\frac{2b}{x+y}\qquad ....(II)$$

$$k=\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{y+z}$$
$$=\frac{2c}{y+z}\qquad ......(III)$$

$$\therefore\ \frac{2a}{z+x}=\frac{2b}{x+y}=\frac{2c}{y+z}$$
$$\therefore\ \frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$$

उदा. (4) हल कीजिए : $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{7x-3}{5x+2}$

हल : उदाहरण के निरीक्षण से ध्यान में आता है कि दाहिने पक्ष के अनुपात के दोनों पदों को $2x$ से गुणा करने पर बाएँ पक्ष के अनुपात के पहले दो पद प्राप्त होते हैं। अतः दाहिने पक्ष के अनुपात के दोनों पदों का $2x$ से गुणा कीजिए परंतु प्रथमतः $x\neq 0$ यह निश्चित कीजिए।

यदि $x = 0$ हो तो $\dfrac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \dfrac{8}{7}$ तथा $\dfrac{7x-3}{5x+2} = \dfrac{-3}{2}$

$\therefore\ \dfrac{8}{7} = \dfrac{-3}{2}$ यह असंगत कथन प्राप्त होता है ।

$\therefore\ x \neq 0$

$\therefore$ दाहिने पक्ष के अनुपात के दोनों पदों में $2x$ से गुणा करने पर

माना $\dfrac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \dfrac{2x(7x-3)}{2x(5x+2)} = k$

$$\therefore\ \frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{14x^2-6x}{10x^2+4x} = k$$

$$\therefore\ \frac{14x^2-6x+8-14x^2+6x}{10x^2+4x+7-10x^2-4x} = \frac{8}{7} = k$$

$$\therefore\ k = \frac{8}{7}$$

$$\therefore\ \frac{7x-3}{5x+2} = \frac{8}{7}$$

$$\therefore\ 49x-21 = 40x+16$$

$$\therefore\ 49x-40x = 16+21$$

$$\therefore\ 9x = 37 \qquad \therefore\ x = \frac{37}{9}$$

प्रश्नसंग्रह 4.4

(1) निम्नलिखित कथनों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

(i) $\dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{3x+5y}{\ldots\ldots\ldots} = \dfrac{7x-9y}{\ldots\ldots}$ (ii) $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{c}{7} = \dfrac{a-2b+3c}{\ldots\ldots} = \dfrac{\ldots\ldots}{6-8+14}$

(2) यदि $5m - n = 3m + 4n$ तो निम्नलिखित अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए ।

(i) $\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ (ii) $\dfrac{3m+4n}{3m-4n}$

(3) (i) यदि $a(y+z)=b(z+x) = c(x+y)$ तथा a, b, c में से कोई दो संख्या समान नहीं है ।

तो सिद्‌ध कीजिए कि $\dfrac{y-z}{a(b-c)} = \dfrac{z-x}{b(c-a)} = \dfrac{x-y}{c(a-b)}$

(ii) यदि $\dfrac{x}{3x-y-z} = \dfrac{y}{3y-z-x} = \dfrac{z}{3z-x-y}$ तथा $x+y+z \neq 0$ सिद्‌ध कीजिए कि प्रत्येक अनुपात का मान 1 होता है ।

(iii) यदि $\dfrac{ax+by}{x+y} = \dfrac{bx+az}{x+z} = \dfrac{ay+bz}{y+z}$ तथा $x+y+z \neq 0$ तो सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अनुपात $\dfrac{a+b}{2}$ है ।

(iv) यदि $\dfrac{y+z}{a} = \dfrac{z+x}{b} = \dfrac{x+y}{c}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{x}{b+c-a} = \dfrac{y}{c+a-b} = \dfrac{z}{a+b-c}$

(v) यदि $\dfrac{3x-5y}{5z+3y} = \dfrac{x+5z}{y-5x} = \dfrac{y-z}{x-z}$ तो सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अनुपात $\dfrac{x}{y}$ है ।

(4) हल कीजिए । (i) $\dfrac{16x^2-20x+9}{8x^2+12x+21} = \dfrac{4x-5}{2x+3}$ (ii) $\dfrac{5y^2+40y-12}{5y+10y^2-4} = \dfrac{y+8}{1+2y}$

आओ, जानें

सतत समानुपात (Continued Proportion)

निम्नलिखित अनुपातों पर विचार कीजिए । 4:12 तथा 12:36 अनुपात समान हैं । साथ ही मध्यपद भी समान है । अतः 4, 12, 36 सतत समानुपात में है ऐसा कहते हैं ।

यदि $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$ हो तब a, b, c संख्याएँ सतत समानुपात में है ऐसा कहा जाता है ।

यदि $ac = b^2$, तो दोनों पक्षों में bc से भाग देनेपर $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$ ये समीकरण प्राप्त होता है ।

$\therefore$ $ac = b^2$ हो, तो a, b, c सतत समानुपात में होते हैं ।

यदि a, b, c सतत समानुपात मे हो तो b को a तथा c का '**ज्यामितीय माध्य**' (Geometric mean) अथवा '**मध्यम समानुपात पद**' (Mean proportional) कहते हैं ।

उपरोक्त आधार पर निम्नलिखित समस्त कथनों का अर्थ एक-सा है ।

$\therefore$ (1) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$ (2) $b^2 = ac$ (3) a, b, c सतत समानुपात में हैं ।

(4) b यह a तथा c का ज्यामितीय माध्य है । (5) b यह a तथा c का माध्य समानुपाती है ।

सतत समानुपात की संकल्पना को निम्नलिखित प्रकार से विस्तारित कर सकते हैं ।

यदि $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{d}{e} = \dfrac{e}{f}$ तो a, b, c, d, e तथा f सतत समानुपात में हैं ऐसा कहा जाता है ।

उदा. (1) x संख्या 25 तथा 4 का ज्यामितीय माध्य है तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : x यह 25 तथा 4 का ज्यामितीय माध्य है ।

$$\therefore x^2 = 25 \times 4$$
$$\therefore x^2 = 100$$
$$\therefore x = 10$$

उदा. (2) यदि $4a^2b$, $8ab^2$, p सतत समानुपात में हों तो p का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : प्रश्नानुसार $4a^2b$, $8ab^2$, p सतत समानुपात में हैं ।

$$\therefore \quad \frac{4a^2b}{8ab^2} = \frac{8ab^2}{p}$$

$$p = \frac{8ab^2 \times 8ab^2}{4a^2b} = 16b^3$$

उदा. (3) 7, 12 तथा 18 इन प्रत्येक संख्याओं में से कौन-सी संख्या घटाने पर प्राप्त संख्याएँ सतत समानुपात में होगी ?

हल : माना 7, 12 तथा 18 इन प्रत्येक संख्या में से x घटाने पर प्राप्त संख्याएँ सतत समानुपात में होगी ।

$(7-x)$, $(12-x)$, $(18-x)$ सतत समानुपात में है ।

$$\therefore \quad (12-x)^2 = (7-x)(18-x)$$

$$\therefore \quad 144-24x+x^2 = 126-25x+x^2$$

$$\therefore \quad -24x+25x = 126-144$$

$$\therefore \quad x = -18$$

जाँच

$(7-x) = 7-(-18) = 25$

$(12-x) = 12-(-18) = 30$

$(18-x) = 18-(-18) = 36$

$(30)^2 = 900$ और $25 \times 36 = 900$

संख्याएँ 25, 30, 36 सतत समानुपात में है ।

$\therefore$ 7, 12, 18 में प्रत्येक संख्या से -18 घटाने पर प्राप्त संख्याएँ सतत समानुपात में होंगी ।

k – पद्धति (k –method)

समान अनुपात के कुछ प्रश्न हल करने की यह एक सरल विधि है । इस पद्धति में हम दिए गए प्रत्येक अनुपात का मान k लेते हैं ।

उदा. (1) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$

हल : माना $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \quad \therefore a = bk,\ c = dk$

a तथा c के मान दोनों पक्षों में रखने पर

बायाँ पक्ष = $\frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{5(bk)-3(dk)}{5b-3d} = \frac{k(5b-3d)}{(5b-3d)} = k$

दायाँ पक्ष = $\frac{7a-2c}{7b-2d} = \frac{7(bk)-2(dk)}{7b-2d} = \frac{k(7b-2d)}{7b-2d} = k$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

$$\therefore \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$$

उदा. (2) यदि a, b, c सतत समानुपात में हों तो सिद्ध कीजिए $\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$

हल : a, b, c सतत समानुपात में हैं। माना $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

$\therefore b = ck,$ $a = bk$

$= ck \times k$

$= ck^2$

a तथा b का मान रखने पर

बायाँ पक्ष $= \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(ck^2+ck)^2}{(ck^2)(ck)} = \frac{c^2k^2(k+1)^2}{c^2k^3} = \frac{(k+1)^2}{k}$

दायाँ पक्ष $= \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{(ck+c)^2}{(ck)c} = \frac{c^2(k+1)^2}{c^2k} = \frac{(k+1)^2}{k}$

$$\therefore \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष.

उदा. (3) यदि a, b, c सतत समानुपात में हों,

तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a}{c} = \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

हल : a, b, c सतत समानुपात हैं। $\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

माना, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \mathrm{k}$ $\therefore b = ck$ तथा $a = ck^2$

बायाँ पक्ष $= \frac{a}{c} = \frac{ck^2}{c} = k^2$

दायाँ पक्ष $= \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

$= \frac{(k^2c)^2+k^2c(ck)+(ck)^2}{(ck)^2+(ck)(c)+c^2}$

$= \frac{k^4c^2+k^3c^2+c^2k^2}{c^2k^2+c^2k+c^2}$

$= \frac{c^2k^2(k^2+k+1)}{c^2(k^2+k+1)}$

$= k^2$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

$$\therefore \frac{a}{c} = \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$$

उदा. (4) पाँच संख्याएँ सतत समानुपात में हों और प्रथम पद 5 तथा अंतिम पद 80 हो तो वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना, a, ak, ak^2, ak^3, ak^4

यहाँ $a = 5$ और $ak^4 = 80$

$\therefore 5 \times k^4 = 80$

$\therefore k^4 = 16$

$\therefore k = 2 \quad (\because 2^4 = 16)$

$ak = 5 \times 2 = 10$ $\quad ak^2 = 5 \times 4 = 20$

$ak^3 = 5 \times 8 = 40$ $\quad ak^4 = 5 \times 16 = 80$

$\therefore$ वे संख्याएँ 5, 10, 20, 40, 80 हैं।

प्रश्नसंग्रह 4.5

(1) 12, 16 तथा 21 इन प्रत्येक संख्या में कौन-सी संख्या जोड़ने पर प्राप्त संख्याएँ सतत समानुपात में होंगी?

(2) $(23-x)$ तथा $(19-x)$ का ज्यामितीय माध्य $(28-x)^2$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

(3) तीन संख्याएँ सतत समानुपात में हैं और उनका ज्यामितीय माध्य 12 तथा अन्य दो संख्याओं का योगफल 26 हो तो वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।

(4) यदि $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$ तो सिद्ध कीजिए की संख्याएँ a, b तथा c सतत समानुपात में हैं ।

(5) यदि $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ तथा $a, b, c > 0$ तो सिद्ध कीजिए,

(i) $(a + b + c)(b - c) = ab - c^2$

(ii) $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$

(iii) $\frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a+c}{b}$

(6) $\frac{x+y}{x-y}, \frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$ का ज्यामितीय माध्य ज्ञात कीजिए ।

कृति : भूगोल की पुस्तक में भारत का राजकीय मानचित्र देखिए । वहाँ दी गई दूरी का पैमाना समझिए । इस आधार पर सरल रेखा में स्थित विभिन्न शहरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

जैसे - उदा. (i) नई दिल्ली से बेंगलूरू (ii) मुंबई से कोलकाता (iii) जयपुर से भुवनेश्वर

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

(1) निम्नलिखित प्रश्नो के लिए बहुपर्यायी उत्तरों में से योग्य विकल्प चुनकर लिखिए ।

(i) यदि 6 : 5 = y : 20 तो y का मान निम्नलिखित में से कौन-सा है?

(A) 15 (B) 24 (C) 18 (D) 22.5

(ii) 1 मिलिमीटर का 1 सेंटीमीटर से अनुपात निम्नलिखित में से कौन-सा है?

(A) 1 : 100 (B) 10 : 1 (C) 1 : 10 (D) 100 : 1

(iii*) जतीन, नितीन तथा मोहसिन की आयु क्रमश: 16, 24 तथा 36 वर्ष है, तो नितीन की आयु का मोहसिन की आयु से अनुपात बताइए ।

(A) 3 : 2 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

(iv) शुभम और अनिल को 24 केले 3 : 5 के अनुपात में वितरित किए गए तो शुभम को कितने केले मिलेंगे?

(A) 8 (B) 15 (C) 12 (D) 9

(v) 4 तथा 25 का ज्यामितीय माध्य निम्नलिखित में से कौन-सा है?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

(2) निम्नलिखित संख्यायुग्म में पहली संख्या का दूसरी संख्या से अनुपात अतिसंक्षिप्त रूप में लिखिए।

(i) 21, 48 (ii) 36, 90 (iii) 65, 117 (iv) 138, 161 (v) 114, 133

(3) निम्नलिखित अनुपातों को अतिसंक्षिप्त रूप में लिखिए।

(i) वृत्त की त्रिज्या और व्यास का अनुपात।

(ii) आयत की लंबाई 4 सेमी तथा चौड़ाई 3 सेमी हो तो आयत के विकर्ण का आयत की लंबाई से अनुपात।

(iii) वर्ग की भुजा 4 सेमी हो तो उस वर्ग की परिमिति का उसके क्षेत्रफल से अनुपात।

(4) निम्नलिखित संख्याएँ सतत समानुपात में है क्या ? निश्चित कीजिए।

(i) 2, 4, 8 (ii) 1, 2, 3 (iii) 9, 12, 16 (iv) 3, 5, 8

(5) तीन संख्याएँ a, b, c सतत समानुपात में हों और यदि $a = 3$ और $c = 27$ हो तो $b =$ कितना ?

(6) निम्नलिखित अनुपातों का प्रतिशत में रूपांतर कीजिए।

(i) 37 : 500 (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{22}{30}$ (iv) $\frac{5}{16}$ (v) $\frac{144}{1200}$

(7) निम्नलिखित में से प्रथम पद का द्‌वितीय पद से अनुपात अतिसंक्षिप्त रूप में लिखिए।

(i) 1024 MB, 1.2 GB [(1024 MB = 1 GB)]

(ii) 17 रुपये, 25 रुपये 60 पैसे (iii) 5 दर्जन, 120 नग

(iv) 4 वर्ग मी, 800 वर्ग सेमी (v) 1.5 किग्रा, 2500 ग्राम

(8) यदि $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ तो निम्नलिखित अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{4a+3b}{3b}$ (ii) $\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}$

(iii) $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7b-4a}{7b+4a}$

(9) a, b, c, d समानुपात में हों तो सिद्‌ध कीजिए।

(i) $\frac{11a^2+9ac}{11b^2+9bd} = \frac{a^2+3ac}{b^2+3bd}$

(ii*) $\sqrt{\frac{a^2+5c^2}{b^2+5d^2}} = \frac{a}{b}$

(iii) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

(10) a, b, c सतत समानुपात में हों तो सिद्ध कीजिए कि,

(i) $\frac{a}{a+2b} = \frac{a-2b}{a-4c}$ (ii) $\frac{b}{b+c} = \frac{a-b}{a-c}$

(11) हल कीजिए : $\frac{12x^2+18x+42}{18x^2+12x+58} = \frac{2x+3}{3x+2}$

(12) यदि $\frac{2x-3y}{3z+y} = \frac{z-y}{z-x} = \frac{x+3z}{2y-3x}$ तो सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अनुपात $\frac{x}{y}$ है ।

(13*) यदि $\frac{by+cz}{b^2+c^2} = \frac{cz+ax}{c^2+a^2} = \frac{ax+by}{a^2+b^2}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

5 दो चरांकोंवाले रेखीय समीकरण

C6UX3I

आओ, सीखें

- दो चरांकोंवाले रेखीय समीकरण
- युगपत समीकरण
- युगपत समीकरण हल करना
- युगपत समीकरण पर आधारित शाब्दिक उदाहरण

थोड़ा सोचें

उदा. निम्नलिखित समीकरण हल कीजिए।

(1) $m+3=5$ $\qquad m = \square$

(2) $3y+8=22$ $\qquad y = \square$

(3) $\frac{x}{3}=2$ $\qquad x = \square$

(4) $2p = p+\frac{4}{9}$ $\qquad p = \square$

(5) किस संख्या में 5 जोड़ने पर संख्या 14 प्राप्त होता है ?

$\square + 5 = 14$

$x + 5 = 14$

$x = \square$

(6) 8 में से कौन-सी संख्या घटाने पर संख्या 2 प्राप्त होती है ?

$8 - \square = 2$

$8 - y = 2$

$y = \square$

उपर्युक्त प्रत्येक समीकरण में चरांक का घात 1 है। इस समीकरण को एक चरांकवाले रेखीय समीकरण कहते हैं।

आओ, जानें

दो चरांकवाले रेखीय समीकरण (Linear equations in two variables)

जिन दो संख्याओं का योगफल 14 हो ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

संख्याओं के लिए चरांक x तथा y का उपयोग कर इस उदाहरण को समीकरण के स्वरूप में $x + y = 14$ ऐसा लिखते हैं।

यह दो चरांकवाला रेखीय समीकरण है। यहाँ x तथा y चरांकों के कई मान ज्ञात कर सकते हैं।

जैसे, $9 + 5 = 14$ $\qquad 7 + 7 = 14$ $\qquad 8 + 6 = 14$ $\qquad 4 + 10 = 14$

$(-1) + 15 = 14$ $\qquad 15 + (-1) = 14$ $\qquad 2.6 + 11.4 = 14$ $\qquad 0 + 14 = 14$

$100 + (-86) = 14$ $\qquad (-100) + (114) = 14$ $\qquad \square + \square = 14$ $\qquad \square + \square = 14$

अर्थात उपर्युक्त समीकरण के $(x = 9, y = 5)$ $(x = 7, y = 7)$ $(x = 8, y = 6)$ आदि कई हल प्राप्त होते हैं।

$x = 9, y = 5$ इस हल को (9, 5) इस क्रम से कोष्ठक में लिखा जाता है । इस युग्म में पहली संख्या x का मान तथा दूसरी संख्या y का मान है । समीकरण $x + y = 14$ की सत्यता निश्चित करने के लिए (9,5), (7,7), (8,6), (4,10), (10,4), (−1,15), (2.6, 11.4), ... ऐसे असंख्य क्रमिक युग्म अर्थात असंख्य हल है ।

अब दूसरा उदाहरण देखेंगे ।

ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनमें 2 का अंतर है ।

बड़ी संख्या को x तथा छोटी संख्या को y मानने पर $x-y = 2$ समीकरण प्राप्त होता है ।

x तथा y के मान के लिए नीचे दिए गए असंख्य समीकरण प्राप्त होंगे ।

$10 - 8 = 2 \quad 9 - 7 = 2 \quad 8 - 6 = 2 \quad (-3) - (-5) = 2 \quad 5.3 - 3.3 = 2$

$15 - 13 = 2 \quad 100 - 98 = 2 \quad \square - \square = 2 \quad \square - \square = 2$

यहाँ $x = 10$ और $y = 8$ यह मान लेने पर (10,8) यह क्रमिक युग्म इस समीकरण का समाधान करते हैं अर्थात यह युग्म दिए गए समीकरण के हल हैं । (10, 8) इस युग्म को (8, 10) ऐसा नहीं लिख सकते हैं । कारण (8, 10) का अर्थ $x = 8, y = 10$ होता है । इस आधार पर युग्मों की संख्याओं का क्रम महत्त्वपूर्ण होता है यह अच्छी तरह से ध्यान में रखिए । (इस मान के लिए समीकरण $x-y = 2$ की संतुष्टि नहीं होती ।)

अब समीकरण $x-y = 2$ के हल को क्रमिक युग्म के स्वरूप में लिखेंगे ।

(7, 5), (−2, −4), (0, −2), (5.2, 3.2), (8, 6) आदि असंख्य हल हैं ।

समीकरण $4m - 3n = 2$ के हल ज्ञात कीजिए ।

आप भी ऐसे तीन विभिन्न समीकरण तैयार कीजिए तथा उनके हल खोजिए ।

अब पहले दो समीकरण देखिए ।

$x + y = 14$ I

$x - y = 2$ II

समीकरण I के हल (9, 5), (7, 7), (8, 6)...

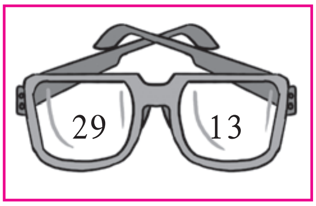
समीकरण II के हल (7, 5), (−2, −4), (0, −2), (5.2, 3.2), (8, 6)...

युग्म (8, 6) यह हल के दोनों समूह में सामान्य है । इस युग्म द्वारा दोनों समीकरण का समाधान होता है अर्थात ये दोनों समीकरणों का सामान्य हल है ।

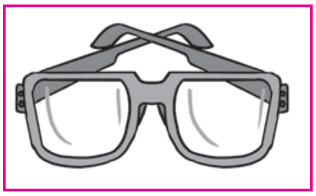
इसे ध्यान में रखें

जब दो चरांकवाले दो रेखीय समीकरणों का एक ही साथ विचार करते हैं, तब उन समीकरणों को **युगपत समीकरण** (Simultaneous equations) कहते हैं ।

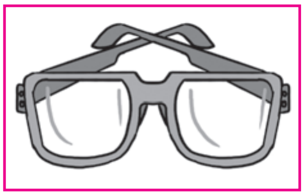
कृति : नीचे दी गई ऐनक के काँच पर ऐसी संख्या लिखिए कि



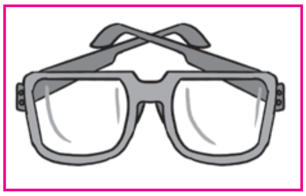
(i) जिनका योगफल 42 और अंतर 16 है ।



(ii) जिनका योगफल 37 और अंतर 11 है ।



(iii) जिनका योगफल 54 और अंतर 20 है ।



(iv) जिनका योगफल .. है और अंतर.. है ।

थोड़ा सोचें

समीकरण $x+y = 5$ और $2x + 2y = 10$ दो चरांकवाले दो समीकरण हैं ।

समीकरण $x+y = 5$ के विभिन्न पाँच हल खोजिए । उसी हल से समीकरण $2x + 2y = 10$ की संतुष्टि होती है या नहीं जाँच कीजिए ।

इन दोनों समीकरणों का अवलोकन कीजिए ।

दो चरांकवाले दो समीकरणों के हल समान होने के लिए कौन-सी शर्त आवश्यक है जाँच लीजिए ।

आओ, जानें

युगपत समीकरण हल करने की चरांकों की निरसन पद्धति (Elimination method)

युगपत समीकरण $x + y = 14$ और $x - y = 2$ में चरांकों का मान रखकर हमने हल किया है किंतु हर समय यह विधि सुविधाजनक हो ऐसा नहीं है । उदाहरणार्थ समीकरण $2x + 3y = -4$ और $x - 5y = 11$ में x तथा y के भिन्न मान रखकर हल करने की कोशिश करके देखें । इस विधि से हल प्राप्त करना आसान नहीं है यह आपके ध्यान में आएगा ।

अर्थात युगपत समीकरण हल करने के लिए विभिन्न पद्धतियों का उपयोग करते हैं । इस पद्धति में दो में से एक चरांक का निरसन करके एक चरांकवाला रेखीय समीकरण प्राप्त करते हैं । इस आधार पर उस चरांक का मान ज्ञात करते हैं । यह मान दिए गए किसी भी समीकरण में रखने पर दूसरे चरांक का मान प्राप्त होता है ।

यह पद्धति समझने के लिए आगे के उदाहरणों का अध्ययन कीजिए ।

उदा. (1) हल कीजिए : $x + y = 14$ और $x - y = 2$.

हल : दोनों समीकरणों का योग करके एक चरांकवाला समीकरण प्राप्त करेंगे ।

$$\begin{array}{rrcll} & x + y & = & 14 & \ldots\ldots\ldots \text{I} \\ + & x - y & = & 2 & \ldots\ldots\ldots \text{II} \\ \hline & 2x + 0 & = & 16 & \\ & 2x & = & 16 & \\ & x & = & 8 & \end{array}$$

समीकरण (I) में $x = 8$ यह मान रखने पर

$$x + y = 14$$

$$\therefore\ 8 + y = 14$$

$$\therefore\ y = 6$$

यहाँ (8, 6) यह पहले समीकरण का हल है । यही हल दूसरे समीकरण का भी हल है इसकी जाँच करेंगे ।

$x - y = 8 - 6 = 2$ यह सत्य है ।

(8,6) यह दिए गए समीकरण का सामान्य हल है ।

अर्थात $x + y = 14$ और $x - y = 2$ इन युगपत समीकरणों का हल (8, 6) है ।

उदा. (2) माता तथा पुत्र की आयु का योगफल 45 है । माता की आयु के दुगुने में से पुत्र की आयु घटाने पर उत्तर 54 आता है । तो उन दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए ।

हल : माना माता की वर्तमान आयु x वर्ष तथा पुत्र की वर्तमान आयु y वर्ष है ।

पहली शर्त के अनुसार $x + y = 45$ ………I

दूसरी शर्त के अनुसार $2x - y = 54$ ………II

समीकरण (I) तथा (II) जोड़ने पर

$$\begin{aligned} 3x + 0 &= 99 \\ 3x &= 99 \\ x &= 33 \end{aligned}$$

समीकरण (I) में $x = 33$ रखने पर

$$\begin{aligned} 33 + y &= 45 \\ y &= 45 - 33 \\ y &= 12 \end{aligned}$$

$x = 33$ और $y = 12$ यह हल दूसरे समीकरण की संतुष्टि करता है । इसकी जाँच कीजिए ।

$\therefore$ माता की वर्तमान आयु 33 वर्ष पुत्र की वर्तमान आयु 12 वर्ष है ।

दो चरांकोंवाले रेखीय समीकरण का सामान्य रूप

समीकरण $ax + by + c = 0$ में a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और a तथा b एकसाथ शून्य न हो $(a, b \neq 0)$ तो यह समीकरण दो चरांकवाले रेखीय समीकरण का सामान्य रूप है ।

इस समीकरण में दोनों चरांकों का घात 1 है इसलिए यह रेखीय समीकरण है ।

उदा. (1) निम्नलिखित युगपत समीकरण हल कीजिए ।

$$3x + y = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

$$2x + 3y = 1 \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

हल : यहाँ एक चरांक का निरसन करने के लिए दोनों समीकरण में एक भी चरांक का गुणांक समान अथवा विपरित संख्या नहीं है उन्हें समान करेंगे ।

समीकरण I के दोनों पक्षों में 3 से गुणा करने पर

$$\therefore \quad 3x \times 3 + 3 \times y = 5 \times 3$$

$$\therefore \quad 9x + 3y = 15 \quad \ldots\ldots\text{(III)}$$

$$2x + 3y = 1 \quad \ldots\ldots\text{(II)}$$

अब समीकरण (III) में से समीकरण (II) घटाने पर

$$\begin{array}{rcl} 9x + 3y & = & 15 \\ \underset{-}{+} 2x \underset{-}{+} 3y & \underset{-}{=} & 1 \\ \hline 7x & = & 14 \\ x & = & 2 \end{array}$$

$x = 2$ यह मान समीकरण (II) में रखने पर

$$2x + 3y = 1$$

$$\therefore \quad 2 \times 2 + 3y = 1$$

$$\therefore \quad 4 + 3y = 1$$

$$\therefore \quad 3y = -3$$

$$\therefore \quad y = -1$$

यहाँ $(2, -1)$ यह हल दूसरा समीकरण के लिए भी सत्य है, इसकी जाँच कीजिए ।

उदा. (2) निम्न युगपत समीकरण हल कीजिए ।

$$3x - 4y - 15 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

$$y + x + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

हल : दोनों समीकरणों के अचरांक दाएँ पक्ष में लेकर लिखिए ।

$$3x - 4y = 15 \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

$$x + y = -2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

चरांक y का निरसन करने के लिए समीकरण (II) को 4 से गुणा करके समीकरण (I) में जोड़िए ।

$$\begin{array}{rrcl} & 3x - 4y & = & 15 \\ + & 4x + 4y & = & -8 \\ \hline & 7x & = & 7 \\ & x & = & 1 \end{array}$$

समीकरण (II) में $x = 1$ यह मान रखने पर

$$x + y = -2$$

$$\therefore 1 + y = -2$$

$$\therefore y = -2 - 1$$

$$\therefore y = -3$$

यहाँ $(1, -3)$ यह हल समीकरण I के लिए भी सत्य है, इसकी जाँच कीजिए ।

थोड़ा, सोचें

$3x - 4y - 15 = 0$ और $y + x + 2 = 0$ यह समीकरण चरांक x का निरसन करके हल कर सकते है क्या ? उनका हल वही आएगा क्या ?

आओ, जानें

एक चरांक का मान दूसरे चरांक के रूप में रखकर चरांक का निरसन करना (Substitution method)

चरांक का निरसन करने के लिए एक और पद्‌धति है । एक समीकरण के एक चरांक का मान दूसरे चरांक के रूप में ज्ञात कर दूसरे समीकरण में रखकर चरांक का निरसन कर सकते हैं । यह पद्‌धति आगे दिए गए उदाहरण द्‌वारा समझेंगे ।

उदा. (1) हल कीजिए ।

$8x + 3y = 11 \;;\; 3x - y = 2$

हल : $8x + 3y = 11$ .... (I)

$3x - y = 2$ ....(II)

समीकरण (II) में y का मान x के रूप में रखना आसान होगा ।

$3x - y = 2$

$3x - 2 = y$

अब $y = 3x - 2$ यह मान समीकरण (I) में रखने पर

$8x + 3y = 11$

$\therefore\ 8x + 3(3x-2) = 11$

$\therefore\ 8x + 9x - 6 = 11$

$\therefore\ 17x - 6 = 11$

$\therefore\ 17x = 11 + 6 = 17$

$\therefore\ x = 1$

x का मान $y = 3x - 2$ में रखने पर

$\therefore\ y = 3 \times 1 - 2$

$\therefore\ y = 1$

$\therefore$ (1, 1) यह इस समीकरण का हल है ।

उदा. (2) हल कीजिए ।

$3x - 4y = 16 \;;\; 2x - 3y = 10$

हल : $3x - 4y = 16$..........(I)

$2x - 3y = 10$.............(II)

समी. I में x का मान y के स्वरूप में लिखेंगे

$3x - 4y = 16$

$3x = 16 + 4y$

$$x = \frac{16+4y}{3}$$

x का मान समीकरण (II) में रखने पर

$2x - 3y = 10$

$$2\left(\frac{16+4y}{3}\right) - 3y = 10$$

$$\frac{32+8y}{3} - 3y = 10$$

$$\frac{32+8y-9y}{3} = 10$$

$32 + 8y - 9y = 30$

$32 - y = 30 \qquad \therefore\ y = 2$

अब $y = 2$ यह मान समीकरण (I) में रखने पर

$3x - 4y = 16$

$\therefore\ 3x - 4\times 2 = 16$

$\therefore\ 3x - 8 = 16$

$\therefore\ 3x = 16 + 8$

$\therefore\ 3x = 24$

$\therefore\ x = 8$

$\therefore\ x = 8$ तथा $y = 2$

$\therefore$ (8, 2) यह इस समीकरण का हल है ।

प्रश्नसंग्रह 5.1

(1) x तथा y चरांकों का उपयोग करके दो चरांकोंवाले पाँच रेखीय समीकरण लिखिए ।

(2) $x + y = 7$ इस समीकरण के पाँच हल लिखिए ।

(3) निम्नलिखित युगपत समीकरण हल कीजिए ।

(i) $x + y = 4$; $2x - 5y = 1$ (ii) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$

(iii) $3x - 5y = 16$; $x - 3y = 8$ (iv) $2y - x = 0$; $10x + 15y = 105$

(v) $2x + 3y + 4 = 0$; $x - 5y = 11$ (vi) $2x - 7y = 7$; $3x + y = 22$

आओ, जानें

युगपत समीकरण पर आधारित शाब्दिक उदाहरण

शाब्दिक उदाहरण हल करते समय दी गई जानकारी द्‌वारा समीकरण बनाना यह बहुत ही महत्त्वपूर्ण सोपान है । समीकरण का हल निकालने की विधि आगे दिए गए सोपानों के माध्यम से दर्शाए गए हैं ।

सोपान	उदाहरण
शाब्दिक उदाहरण ध्यान से पढ़कर समझिए ।	दो संख्याओं का योगफल 36 है पहली संख्या के आठ गुना में से 9 घटाने पर दूसरी संख्या प्राप्त होती है ।
उदाहरण में दी गई जानकारी के आधार पर व्यंजक के लिए चरांक का उपयोग कीजिए ।	माना छोटी संख्या = x तथा बड़ी संख्या = y
चरांक का उपयोग कर कथन को गणितीय भाषा में लिखिए ।	दोनों संख्याओं का योगफल 36 है $\therefore x + y = 36$ छोटी संख्या का 8 गुना = $8x$ छोटी संख्या के 8 गुना से 9 कम = $8x - 9$ $\therefore$ बड़ी संख्या = $y = 8x - 9$
उचित पद्‌धति का उपयोग करके समीकरण हल कीजिए ।	$x + y = 36$ $\therefore 8x - y = 9$ $\therefore 9x = 36 + 9$ $\therefore 9x = 45 \therefore x = 5$ $\therefore 5 + y = 36$ $\therefore y = 36 - 5$ $\therefore y = 31$
हल प्राप्त कीजिए ।	$x = 5,\ y = 31$
प्राप्त उत्तर को समीकरण में रखकर जाँच कीजिए ।	$31 + 5 = 36$ ....(I) $31 = 8 \times 5 - 9$ ....(II)
उत्तर लिखिए ।	$\therefore$ वे संख्याएँ 5 तथा 31 हैं ।

शाब्दिक उदाहरण

अब हम विविध प्रकार के शाब्दिक उदाहरण पर सोचेंगे ।

(1) आयु से संबंधित उदाहरण

(2) अंकों से संबंधित उदाहरण

(3) अपूर्णांकों पर आधारित उदाहरण

(4) आर्थिक व्यवहारों पर आधारित उदाहरण

(5) भूमितीय आकृतियों के गुणधर्म पर आधारित उदाहरण

(6) वेग दूरी और समय पर आधारित उदाहरण

उदा. (1) दो संख्याओं का योगफल 103 है । यदि बड़ी संख्या को छोटी संख्या से भाग देने पर भागफल 2 तथा शेषफल 19 प्राप्त होता है तो वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।

हल : सोपान 1 : शाब्दिक उदाहरण को समझिए ।

सोपान 2 : अज्ञात संख्या के लिए अक्षरों को मानना ।

इसी प्रकार भाज्य = भाजक $\times$ भागफल + शेषफल इस नियम को ध्यान में रखना

बड़ी संख्या को x तथा छोटी संख्या y मानना ।

सोपान 3 : दी गई जानकारी : संख्याओं का योगफल = 103

इसलिए $x + y = 103$ यह समीकरण प्राप्त होता है ।

बड़ी संख्या को छोटी संख्या से भाग देने पर भागफल 2 तथा शेषफल 19 प्राप्त होता है ।

अर्थात $x = 2 \times y + 19$ ...(भाज्य = भाजक $\times$ भागफल + शेषफल)

अर्थात $x - 2y = 19$ यह दूसरा समीकरण प्राप्त होता है ।

सोपान 4 : अब प्राप्त समीकरणों के हल ज्ञात कीजिए ।

$$x + y = 103 \quad ....(I)$$
$$x - 2y = 19 \quad ....(II)$$

समीकरण (I) में से समीकरण (II) घटाने पर

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 103 \\ x - 2y & = & 19 \\ - \quad + & & - \\ \hline 0 + 3y & = & 84 \end{array}$$
$$\therefore \quad y = 28$$

सोपान 5 : समीकरण $x + y = 103$ में y का मान रखने पर

$\therefore \quad x + 28 = 103$

$\therefore \quad x = 103 - 28$

$\therefore \quad x = 75$

सोपान 6 : दी गई संख्याएँ 75 और 28 हैं ।

उदा. (2) सलिल की वर्तमान आयु संग्राम की वर्तमान आयु के आधे से 23 वर्ष अधिक है । पाँच वर्ष पूर्व उनकी आयु का योगफल 55 वर्ष था तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए ।

हल : माना सलिल की वर्तमान आयु x तथा संग्राम की वर्तमान आयु y है ।

सलिल की आयु संग्राम की आयु के आधे से 23 वर्ष अधिक है, अर्थात $x = \frac{y}{2} + \square$

पाँच वर्ष पूर्व सलिल की आयु = $x - 5$. पाँच वर्ष पूर्व संग्राम की आयु = $y - 5$

पाँच वर्ष पूर्व उनकी आयु का योगफल = 55

$\square + \square = 55$

समीकरण को हल करके उत्तर ज्ञात करेंगे ।

$2x = y + 46$ $\qquad$ $2x - y = 46$ ....(I)

$(x - 5) + (y - 5) = 55$

$x + y = 65$ ....(II)

समीकरण (I) तथा समीकरण (II) जोड़ने पर

$$\begin{aligned} 2x - y &= 46 \\ + \quad x + y &= 65 \\ \hline \therefore \quad 3x &= 111 \\ \therefore \quad x &= 37 \end{aligned}$$

$x = 37$ यह मान समीकरण (II) में रखने पर

$$\begin{aligned} \therefore \quad x + y &= 65 \\ \therefore \quad 37 + y &= 65 \\ \therefore \quad y &= 65 - 37 \\ \therefore \quad y &= 28 \end{aligned}$$

सलिल की वर्तमान आयु 37 वर्ष तथा संग्राम की वर्तमान आयु 28 वर्ष है ।

उदा. (3) कोई दो अंकोंवाली संख्या उसके अंकों के योगफल की चौगुनी है । उसके अंकों के स्थान परिवर्तन से प्राप्त संख्या मूल संख्या के दुगुने से 9 कम है तो वह संख्या ज्ञात कीजिए ।

हल : माना दी गई दो अंकोंवाली संख्या के इकाई स्थान का अंक x और दहाई स्थान का अंक y है ।

	दहाई स्थान का अंक	इकाई स्थान का अंक	संख्या	अंकों का योगफल
मूल संख्या के लिए	y	x	$10y + x$	$y + x$
अंकों के स्थान परिवर्तन से प्राप्त संख्या के लिए	x	y	$10x + y$	$x + y$

पहली शर्त के अनुसार $\quad 10y + x = 4(y + x)$

$\therefore 10y + x = 4y + 4x$

$\therefore x - 4x + 10y - 4y = 0$

$\therefore -3x + 6y = 0 \qquad \therefore -3x = -6y \qquad \therefore x = 2y$ .....(I)

दूसरी शर्त के अनुसार $10x + y = 2(10y+x)-9$

$$10x+y = 20y + 2x-9$$

$$10x-2x+y-20y = -9$$

$$8x - 19y = -9 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

समीकरण (II) में $x = 2y$ यह मान रखने पर

$$16y - 19y = -9 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$\therefore\ -3y = -9$$

$$\therefore\ y = 3$$

समीकरण (I) में $y = 3$ यह मान रखने पर $x = 2y$

$$x = 2 \times 3$$

$$\therefore x = 6$$

वह दो अंकोंवाली मूल संख्या $10y + x = 10 \times 3 + 6$

$$= 36$$

उदा. (4) किसी गाँव की जनसंख्या 50,000 थी। एक वर्ष में पुरुषों की संख्या 5% और महिलाओं की संख्या 3% बढ़ती है। जिससे उस गाँव की इस वर्ष की जनसंख्या 52,020 हो गई। पिछले वर्ष की उस गाँव के पुरुषों और महिलाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना पिछले वर्ष गाँव के पुरुषों की संख्या x तथा महिलाओं की संख्या y थी।

पहली शर्त के अनुसार, $\square + \square = 50000$ ....(I)

पुरुषों की संख्या 5% बढ़ने पर पुरुषों की संख्या $\frac{\square}{\square}x$ हो गई

महिलाओं की संख्या 3% बढ़ने पर महिलाओं की संख्या $\frac{\square}{\square}y$ हो गई

दूसरी शर्त के अनुसार $\frac{\square}{\square}x + \frac{\square}{\square}y = 52020$

$$\square x + \square y = 5202000 \quad \ldots\ldots.(II)$$

समीकरण (I) को 103 से गुणा करने पर

$$\square x + \square y = 5150000 \quad \ldots\ldots.(III)$$

समीकरण (II) में से समीकरण (III) घटाने पर

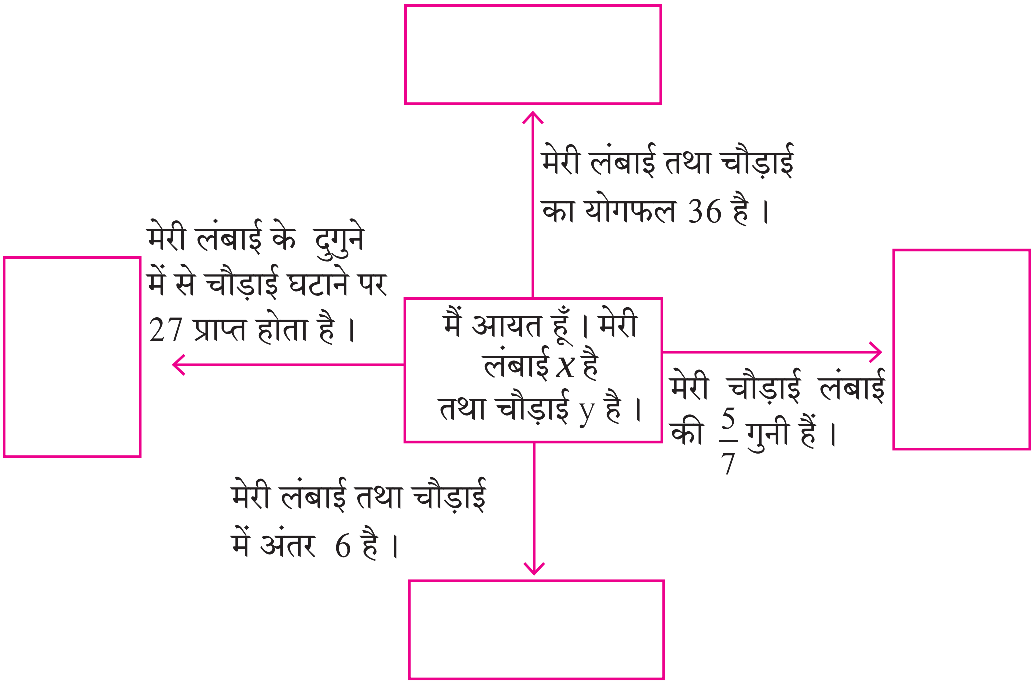
$$2x = 5202000 - 5150000$$

$$2x = 52000$$

$\therefore$ पुरुषों की संख्या $= x = \square$ $\therefore$ महिलाओं की संख्या $= y = \square$

कृति I : आगे दी गई आकृति में तीर के पास कुछ सूचनाएँ लिखी गई हैं । इस आधार पर प्राप्त समीकरण को तीर के सम्मुख चौखट में लिखिए । चौखट के कोई भी दो समीकरण लेकर उसके हल ज्ञात कीजिए । हल की जाँच कीजिए ।

इसमें से किसी भी दो समीकरणों का एक युग्म, ऐसे कुल कितने युग्म प्राप्त होगे ? उनके हल पर चर्चा कीजिए ।



प्रश्नसंग्रह संच 5.2

(1) किसी लिफाफे में कुछ 5 रुपये के और कुछ 10 रुपये के नोट हैं । नोटों का कुल मूल्य 350 रु. है । 5 रुपये के नोटों की संख्या, 10 रुपये के नोटों की संख्या के दुगुने से 10 कम है तो लिफाफे में 5 रुपये तथा 10 रुपये के नोटों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए ।

(2) किसी भिन्न का हर उसके अंश के दुगुने से 1 अधिक है । अंश तथा हर दोनों में 1 जोड़ने पर उनका अनुपात 1 : 2 हो जाता है तो वह भिन्न ज्ञात कीजिए ।

(3) प्रियंका और दीपिका की आयु का योगफल 34 वर्ष है । प्रियंका, दीपिका से 6 वर्ष बड़ी है तो उन दोनों की आयु ज्ञात कीजिए ।

(4) किसी चिड़ियाघर में शेर और मोर की कुल संख्या 50 है । उनके पैरों की कुल संख्या 140 है तो चिड़ियाघर में शेर तथा मोरों की संख्या ज्ञात कीजिए ।

(5) संजय को नौकरी करने पर प्रतिमाह कुछ वेतन मिलता है । प्रतिवर्ष उसके वेतन में निश्चित रकम की बढ़ोत्तरी होती है । यदि चार वर्ष बाद उसका वेतन प्रतिमाह 4,500 रुपये हो तथा 10 साल बाद उसका वेतन प्रतिमाह 5,400 रुपये हुआ हो तो उसका प्रारंभिक वेतन तथा वार्षिक बढ़ोत्तरी की रकम ज्ञात कीजिए ।

(6) 3 कुर्सियों तथा 2 मेजों का मूल्य 4500 रुपये हैं । 5 कुर्सियों तथा 3 मेजों का मूल्य 7000 रुपये है तो 2 कुर्सियों तथा 2 मेजों का कूल मूल्य ज्ञात कीजिए ।

(7) किसी दो अंकोंवाली संख्या के अंकों का योगफल 9 है । अंकों के स्थान परिवर्तन से प्राप्त संख्या मूल संख्या से 27 अधिक है तो वह दो अंकोंवाली संख्या ज्ञात कीजिए ।

(8*) Δ ABC में $\angle$ A का माप $\angle$ B तथा $\angle$ C के मापो के योगफल के बराबर है । इसी प्रकार $\angle$ B तथा $\angle$ C के मापों का अनुपात 4:5 है तो त्रिभुज के प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए ।

(9*) 560 सेमी लंबाईवाले किसी रस्सी के दो हिस्से इस प्रकार करना है कि छोटे हिस्से की लंबाई का दुगुना बड़े हिस्से की लंबाई का $\frac{1}{3}$ गुना हो तो बड़े हिस्से की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

(10) किसी स्पर्धा परीक्षा में कुल 60 प्रश्न हैं । सही उत्तर के लिए दो अंक और गलत उत्तर के लिए ऋण एक अंक दिया जाता था। यशवंत ने सभी 60 प्रश्न हल किए तब उसे परीक्षा में 90 अंक प्राप्त हुए तो उसके कितने प्रश्नों के उत्तर गलत हुए ?

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

(1) निम्नलिखित में से सही विकल्प चुनकर लिखिए ।

(i) $3x + 5y = 9$ और $5x + 3y = 7$ तो $x + y$ का मान निम्नलिखित में से कौन-सा है ?

(A) 2 (B) 16 (C) 9 (D) 7

(ii) किसी आयत की लंबाई तथा चौड़ाई में से 5 घटाने पर परिमिति 26 प्राप्त होती है । इस जानकारी का गणितीय रूपांतर निम्नलिखित में से कौन-सा हैं ?

(A) $x - y = 8$ (B) $x + y = 8$ (C) $x + y = 23$ (D) $2x + y = 21$

(iii) अजय, विजय से 5 वर्ष छोटा है । उन दोनों की आयु का योगफल 25 है तो अजय की आयु कितनी ?

(A) 20 (B) 15 (C) 10 (D) 5

(2) निम्नलिखित युगपत समीकरण हल कीजिए ।

(i) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$

(ii) $x - 2y = -1$; $2x - y = 7$

(iii) $x + y = 11$; $2x - 3y = 7$

(iv) $2x + y = -2$; $3x - y = 7$

(v) $2x - y = 5$; $3x + 2y = 11$

(vi) $x - 2y = -2$; $x + 2y = 10$

(3) चरांकों के गुणांक समान कर निम्नलिखित समीकरण हल कीजिए ।

(i) $3x-4y=7$; $5x+2y=3$

(ii) $5x + 7y=17$; $3x-2y=4$

(iii) $x-2y= -10$; $3x-5y= -12$

(iv) $4x + y=34$; $x+4y= 16$

(4) निम्नलिखित युगपत समीकरण हल कीजिए ।

(i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=4$; $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$

(ii) $\frac{x}{3}+5y=13$; $2x+\frac{y}{2}=19$

(iii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$; $\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$

(5*) दो अंकोंवाली कोई संख्या उसके अंकों के योगफल के चौगुने से 3 अधिक है । उस संख्या में 18 जोड़ने पर प्राप्त योगफल मूल संख्या के अंकों के स्थान परिवर्तन से प्राप्त संख्या के बराबर होती है तो वह संख्या ज्ञात कीजिए ।

(6) 8 पुस्तकों तथा 5 पेन का कुल मूल्य 420 रुपये हैं 5 पुस्तकों तथा 8 पेन का कुल मूल्य 32 रुपये हैं, तो एक पुस्तक तथा दो पेन का कुल मूल्य ज्ञात कीजिए ।

(7*) किन्हीं दो व्यक्तियों की आय का अनुपात 9:7 है तथा उनके खर्चों का अनुपात 4:3 है । यदि प्रत्येक की बचत 200 रुपये हो तो प्रत्येक की आय ज्ञात कीजिए ।

(8*) किसी आयत की लंबाई 5 इकाई कम करने तथा चौड़ाई 3 इकाई बढ़ाने पर उसका क्षेत्रफल 9 वर्ग इकाई कम होता है । यदि लंबाई 3 इकाई कम करने तथा चौड़ाई 2 इकाई बढ़ाने पर उसका क्षेत्रफल 67 वर्ग इकाई बढ़ता हो तो आयत की लंबाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए ।

(9*) किसी रास्ते पर स्थित A तथा B इन दो स्थानों के बीच की दूरी 70 किमी है । एक कार A स्थान से तथा दूसरी कार B स्थान से निकलती है । यदि वे एक ही दिशा में निकलती है तो वे 7 घंटे पश्चात एक दूसरे से मिलती हैं और यदि विपरित दिशा में निकलती हैं 1 घंटे बाद मिलती हैं तो कार का वेग ज्ञात कीजिए ।

(10*) किसी दो अंकोंवाली संख्या तथा उस संख्या के अंकों के स्थान परिवर्तन से प्राप्त संख्या का योगफल 99 है तो वह संख्या ज्ञात कीजिए ।

कृति : भिन्न ज्ञात कीजिए ।

$$\frac{\boxed{\text{अंश } x}}{\boxed{\text{हर } y}}$$

भिन्न के अंश में 3 से गुणा कर तथा हर में से 3 घटाने पर प्राप्त भिन्न $\frac{18}{11}$ है ।	भिन्न के अंश में 8 मिलाने में तथा हर को दुगुना करने पर प्राप्त भिन्न $\frac{1}{2}$ है ।
↓ समीकरण I	↓ समीकरण II
$11x - 6y + 18 = 0$	$x - y + 8 = 0$

$\therefore$ दिया गया भिन्न $= \frac{\square}{\square}$

प्राप्त उत्तर की जाँच कीजिए ।

6 आर्थिक नियोजन

आओ, सीखें

- आर्थिक नियोजन का परिचय
- बचत और निवेश
- कर संरचना
- आयकर–गणन

आओ, चर्चा करें

अनघा : हम संगणक खरीदें क्या ?

माँ : हाँ, खरीदना है पर अगले वर्ष ।

अनघा : लेकिन इस वर्ष क्यों नहीं ?

माँ : उसका मूल्य कुछ कम नहीं होता ?

अनघा : मतलब, पैसे बचाने पड़ेंगे, ऐसा ही ना ?

माँ : हाँ ।

हमारे आसपास इस प्रकार की अनेक बातचीत कानों में सुनाई देती है ।

हर व्यक्ति को अपनी विविध जरूरतों को पूरा करने के लिए पैसों की आवश्यकता होती है । इसलिए वर्तमान की अत्यावश्यक जरूरतों को पूरा करके अन्य आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए प्रत्येक व्यक्ति पैसा बचाने की कोशिश करता है । इसी को हम 'बचत' करना ऐसा कहते हैं । बचत सुरक्षित रहे तथा इसमें वृद्‌धि हो इसलिए उसे हम 'जमा' करते हैं अथवा जमीन, मकान आदि अचल (स्थिर) पूँजी खरीदते हैं । इसी को 'निवेश करना' भी कहा जाता है ।

हर एक निवेशक आवश्यकतानुसार रकम खर्च करता है और शेष रकम की बचत करता है । वैसे ही बचत की हुई रकम (राशि) पूर्णतः सोच समझकर उसका निवेश करता है । इसे '**आर्थिक नियोजन**' कहते हैं । संपत्ति (आय) वृद्‌धि और सुरक्षितता आर्थिक नियोजन के मुख्य प्रयोजन है ।

प्रत्येक के जीवन में आने वाली **अपेक्षित** और **अनपेक्षित** घटनाओं के लिए प्रावधान स्वरूप **आर्थिक नियोजन** का उपयोग होता है । नीचे कुछ उदाहरण दिए गए है ।

अपेक्षित घटना	अनपेक्षित घटना
(1) बच्चों की शिक्षा और उससे संबंधित अन्य खर्च	(1) प्राकृतिक विपदा
(2) व्यवसाय के लिए पूँजी	(2) परिवार के किसी सदस्य की बीमारी
(3) वाहन खरीदने के लिए	(3) दुर्घटना से हुई हानि
(4) मकान बनाना अथवा खरीदना	(4) आकस्मिक मृत्यु
(5) वृद्‌धावस्था की आवश्यकताएँ	

आर्थिक नियोजन जरूरी क्यों है, इसका जवाब उपरोक्त घटनाओं या अन्य कारणों से मिलता है । आर्थिक नियोजन करते समय कुछ घटक ध्यान में रखना जरूरी है ।

आओ, जानें

बचत (Savings)

(1) बचत सुरक्षित रखना तथा उसमें वृद्‌धि होना हितकर होता है । आपकी बचत की हुई राशि बैंक या डाकघर में सुरक्षित रहती है । बैंक के बचत खाते में जमा हुई राशि का नकद रहित (cashless) व्यवहार करना आसान होता है । ऐसे व्यवहारों के कारण अपने पास अधिक नकद राशि नहीं जमा करनी पड़ती और वह राशि गुम या चोरी होने का भी डर नहीं रहता ।

(2) हमारे पास बचत राशि नकद रूप में होगी और उसका निवेश न करते हुए अगर उसे अपने पास ऐसे ही जमा रखें तो उसका मूल्य कालानुसार कम हो जाता है अर्थात वस्तु खरीदने की उस राशि की क्षमता (Purchasing power) कम हो जाती है । (उदा. आज अगर 10 रुपये में 2 पेंसिल मिलती है तो कुछ सालों बाद उसी मूल्य में एक ही पेंसिल मिलेगी ।) इसलिए बचत का योग्य स्थान पर निवेश कर उसमें वृद्‌धि होना आवश्यक है ।

(3) बचत की हुई राशि का व्यवसाय में वृद्‌धि, नए उद्‌योग आरंभ करने जैसे कामों के लिए उपयोग किया जाए तो राष्ट्रीय आय में वृद्‌धि होती है ।

(4) कुल आय में से बचत का कुछ हिस्सा समाज कार्य के लिए खर्च करें तो सभी को उसका दूरगामी लाभ प्राप्त होगा ।

(5) आवश्यकतानुसार खर्च करने के पश्चात एवं अपने सुख-साधनों पर होने वाला खर्च कम करके शिक्षा और वैद्‌यकीय उपचार आदि के लिए बचत करना हितकारी होता है ।

आओ, चर्चा करें

उपरोक्त चित्र का निरीक्षण कीजिए । निवेश के कुछ तरीके सुझाए गए हैं इनपर चर्चा कीजिए । इसके अलावा और कौन-से तरीके हो सकते हैं इसकी जानकारी लीजिए और चित्र के रिक्त स्थानों में लिखिए ।

आओ, जानें

निवेश(Investments)

निवेश के अनेक प्रकार हैं । निवेशक बैंक, डाकघर जैसी आर्थिक व्यवहार करने वाली संस्थाओं में निवेश करना पसंद करते हैं क्योंकि वहाँ राशि अधिक सुरक्षित होती है । शेअर्स, म्युच्युअल फंड आदि में निवेश करने में थोड़ा जोखिम होता है क्योंकि जिस उद्‌योग के लिए राशि का निवेश किया जाता है उस उद्‌योग में हानि होने पर निवेश की गई राशि में कमी होती है । इसके विपरित लाभ होने पर राशि सुरक्षित रहती है और लाभांश मिलता है ।

निवेशक को निवेश करते समय दो प्रमुख मुद्‌दों पर विचार करना जरूरी है । एक तो जोखिम और दूसरा लाभ । अधिक जोखिम उठाकर निवेशक अधिक लाभ प्राप्त कर सकता है किंतु अधिक जोखिम होने के कारण हानि भी हो सकती है, इसे ध्यान में रखना होगा ।

निम्नलिखित आय और निवेश पर आधारित हल किए हुए उदाहरणों का अध्ययन कीजिए ।

उदा.(1) श्यामराव का 2015-16 के सभी प्रकार के करों का भुगतान करने के पश्चात वार्षिक आय 6,40,000 रुपये है । वे हर महिने 2,000 रुपये बीमा की किश्त जमा करते हैं । वार्षिक आय का 20% हिस्सा वे भविष्य-निर्वाह निधि में जमा करते हैं । आपातकालीन खर्चा करने के लिए प्रति माह 500 रुपये अलग से रखते हैं तो वर्षभर उनके पास खर्चा करने के लिए कितनी राशि शेष रहती है ?

हल : (i) श्यामराव जी की वार्षिक आय = 6,40,000 रुपये

(ii) बीमा के लिए नियोजन = $2000 \times 12 = 24,000$ रुपये

(iii) भविष्य निर्वाह निधि में जमा की हुई रकम = $6,40,000 \times \dfrac{20}{100} = 1,28,000$ रुपये

(iv) आपातकालीन खर्च करने के लिए जमा राशि = $500 \times 12 = 6000$ रुपये

$\therefore$ कुल नियोजित राशि = $24,000 + 1,28,000 + 6,000 = 1,58,000$ रुपये

$\therefore$ वार्षिक खर्च करने के लिए शेष राशि = $6,40,000 - 1,58,000 = 4,82,000$ रुपये

उदा.(2) श्री शहा ने 3,20,000 रुपये बैंक में 10% चक्रवृद्‌धि ब्याज की दर से 2 वर्ष के लिए जमा किए । उसी प्रकार उन्होंने 2,40,000 रुपये कर मुक्त म्युच्युअल फंड में भी निवेश किए । बाजार मूल्यानुसार 2 वर्ष बाद उन्हें 3,05,000 रुपये मिले तो उन्हें कितना लाभ हुआ ? और कौन-सा निवेश अधिक लाभदायी हुआ ?

हल : (i) चक्रवृद्‌धि ब्याज से जमा की हुई राशि का ब्याज सर्वप्रथम निकालते हैं ।

चक्रवृद्‌धि ब्याज = मिश्रधन - मूलधन

अर्थात $I = A - P$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - P$$

$$= P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right]$$

$$= 3,20,000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 - 1\right]$$

$$= 3{,}20{,}000\left[(1.1)^2 - 1\right]$$
$$= 3{,}20{,}000\,[1.21 - 1]$$
$$= 3{,}20{,}000 \times 0.21$$
$$= 67{,}200 \text{ रुपये}$$

शहा जी ने 3,20,000 रुपये बैंक में निवेश किया जिससे पश्चात उन्हें 67,200 रुपये ब्याज मिला ।
प्राप्त ब्याज जमा राशि के कितने प्रतिशत होता है, यह हल कीजिए ।

ब्याज के प्रतिशत $= \dfrac{100 \times 67200}{3,20,000} = 21$ $\therefore$ बैंक में निवेश करने के कारण 21% लाभ प्राप्त हुआ ।

(ii) म्युच्युअल फंड से 2 वर्ष बाद प्राप्त हुई रकम = 3,05,000 रुपये

$\therefore$ म्युच्युअल फंड से प्राप्त लाभांश = 3,05,000 − 2,40,000 = 65,000 रुपये

$\therefore$ लाभांश प्रतिशत $= \dfrac{65000 \times 100}{2,40,000} = 27.08$

म्युच्युअल फंड में निवेश करने के कारण उन्हें 27.08% लाभ प्राप्त हुआ ।
इससे यह जानकारी प्राप्त होती है कि श्री शहा जी का म्युच्युअल फंड में निवेश अधिक लाभदायक था ।

उदा. (3) करीमभाई ने काँच उद्योग में 4,00,000 रुपयों का निवेश किया । 2 वर्ष बाद उन्हें उस उद्योग से 5,20,000 रुपये प्राप्त हुए । निवेश की राशि छोड़कर प्राप्त लाभांश उन्होंने 3 : 2 अनुपात में क्रमश: संचयी जमा और शेअर्स में निवेश किया उन्होंने प्रत्येक मद में कितनी राशि निवेश की ?

हल : करीमभाई को 2 वर्ष बाद प्राप्त लाभांश = 5,20,000 − 4,00,000 = 1,20,000 रुपये

सावधी में निवेश की राशि $= \dfrac{3}{5} \times 1{,}20{,}000$
$= 3 \times 24{,}000$
$= 72{,}000$ रुपये

शेअर्स में निवेश की हुई राशि $= \dfrac{2}{5} \times 1{,}20{,}000$
$= 2 \times 24{,}000$
$= 48{,}000$ रुपये

करीमभाई ने सावधी जमा राशि और शेअर्स दोनों में क्रमश: 72,000 और 48,000 रुपयों का निवेश किया ।

उदा.(4) अनिल की मासिक आय और खर्च का अनुपात 5:4 है । अमन का वही अनुपात 3:2 है । इसी प्रकार अमन की मासिक आय का 4% अनिल के मासिक आय के 7% जितनी है । अगर अनिल की मासिक आय 9600 रुपये हो,

(i) अमन की मासिक आय ज्ञात कीजिए । (ii) अनिल और अमन की बचत ज्ञात कीजिए ।

हल: हम जानते हैं कि बचत = आय − व्यय

अनिल की आय और व्यय का अनुपात 5 : 4

माना अनिल की आय $5x$ ।

तथा अनिल का व्यय $4x$ है ।

अमन की आय और व्यय का अनुपात 3 : 2

माना, अमन कीआय $3y$ ।

तथा अमन का व्यय $2y$ ।

अनिल की मासिक आय 9600 रुपये अर्थात $5x = 9600$ आधार पर x निकाले

$$\therefore\ 5x = 9600$$

$$x = 1920$$

मासिक व्यय = $4x = 4 \times 1920 = 7680$ रुपये

अनिल का मासिक व्यय 7680 रुपये $\therefore$ अनिल की बचत 1920 रुपये

अमन की आय का 4% = अनिल की आय का 7% है ।

$$\therefore\ \frac{4}{100} \times 3y = 9600 \times \frac{7}{100}$$

$$\therefore\ 12y = 9600 \times 7$$

$$\therefore\ y = \frac{9600 \times 7}{12} = 5600$$

अमन की आय = $3y = 3 \times 5600 = 16{,}800$ रुपये

अमन का व्यय = $2y = 2 \times 5600 = 11{,}200$ रुपये

$\therefore$ अमन की बचत $16{,}800 - 11{,}200 = 5{,}600$ रुपये

अमन की मासिक आय 16,800 रुपये अमन की बचत 5,600 रुपये

अनिल की मासिक बचत 1,920 रुपये

कृति I : अमिता ने 35000 रुपयों में से कुछ राशि 4% और शेष राशि 5% ब्याज की दर से एक वर्ष के लिए निवेश की । उसे कुल ब्याज 1530 रु. मिला तो उसके द्‌वारा भिन्न-भिन्न ब्याज दर से जमा की राशि बताइए । उसे शब्दों में लिखिए ।

4% दर से x रु. जमा किए | 5% दर से y रु. जमा किए

$$\boxed{\square + \square = 35000} \quad \text{..... (I)}$$

ब्याज ↓

$$\boxed{\frac{4}{100}x + \frac{5}{100}y = 1530} \quad \text{..... (II)}$$

$x = \square$ $y = \square$

उपक्रम : (1) पालकों की सहायता से आपके घर का साप्ताहिक जमाखर्च लिखिए । उसके लिए खर्च के प्रकार का स्तंभ तैयार कीजिए । अनाज, शिक्षा, वैद्यकीय खर्चा, यात्रा, कपड़े, जूते और अन्य खर्च आदि चीजों का विचार करके सारे खर्च लिखिए । जमा रकम में, घर खर्चे के लिए मिली हुई रकम, शेष राशि और कुछ नई प्राप्ति रकम दर्ज कीजिए ।

(2) अवकाश के दौरान पूरे महिने का जमाखर्च लिखिए ।

पृष्ठ 52 का गोविंद के जमाखर्च का अध्ययन कीजिए ।

कृति II : असिंचित भूमि धारी किसान की आय बढ़ाने के लिए कुछ उपाय किए जा सकते हैं क्या ? इसपर चर्चा करे । कुछ विद्यार्थियों की राय नीचे दी गई है ।

सोहेल : किसानों को कृषि उपज बिक्री के पश्चात ही पैसे मिलते हैं । उसके मुनाफे का उपयोग साल भर हो इसलिए अर्थनिवेश अत्यंत आवश्यक है ।

प्रकाश : कृषि उपज को योग्य मूल्य मिलेगा तब आय बढ़ेगी ।

नर्गिस : अर्थशास्त्र के नियमानुसार अगर किसी वस्तु की आपूर्ति माँग से अधिक हो तो उस वस्तु का मूल्य कम हो जाता है और एक बार मूल्य कम हो गया तो लाभ कम ही होगा ।

रीटा : यदि उत्पन्न अधिक हुआ और दर कम होने की संभावना हो तो कुछ उपज को संचित कर रख दे और सही समय पर बाजार दर में वृद्धि होने के पश्चात बिक्री के लिए निकालें ।

आझम : उसके लिए गोदाम सुसज्ज होने चाहिए ।

रेश्मा : किसानों को आसानी से कम ब्याज दर पर कर्ज मिलना चाहिए ।

वत्सला : दुध और कुक्कुटपालन (मुर्गीपालन)जैसे कृषिपूरक व्यवसाय करें तो कुछ अधिक आय मिल सकती है, इसके अलावा जानवरों के मलमूत्र से अच्छी सेंद्रिय खाद भी मिलेगी ।

कुणाल : कृषि उपज पर प्रक्रिया करने वाले कारखाने खोलें और शरबत, जॅम, आचार, दूध, सब्जियाँ, फलों का गूदा आदि ऐसी वस्तुओं को व्यवस्थित पॅकींग कर रखा जाए तो वर्ष भर बेचा जा सकता है । निर्यात योग्य वस्तुओं का अधिक उत्पादन लेना चाहिए ।

प्रश्नसंग्रह 6.1

1. अलका प्रतिमाह भेजी जाने वाली राशि में से 90% राशि खर्च करती है और प्रतिमाह 120 रुपयों की बचत करती है तो उसे भेजी जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए ।
2. सुमित ने 50,000 रुपये पूँजी लगाकर खाद्य व्यंजनों का व्यवसाय शुरू किया । उसमें से उसे पहले साल 20% हानि हुई । शेष पूँजी में से दूसरे साल उसने मिठाई का व्यवसाय शुरू किया उसमें उसे 5% लाभ हुआ तो मूल पूँजी पर उसे कितने प्रतिशत हानि या लाभ हुआ ?
3. निखिल ने अपने मासिक आय में से 5% बच्चों की शिक्षा के लिए खर्च किए, 14% हिस्सा शेअर्स में निवेश किया, 3% हिस्सा बैंक में जमा किया और 40% हिस्सा दैनिक खर्चा करने हेतु इस्तेमाल किया । निवेश और व्यय घटाने पर उसके पास 19,000 रुपये शेष रह गए तो उसकी मासिक आय ज्ञात कीजिए ।
4. सय्यदभाई ने अपनी कुल आय में से 40,000 रुपये 8% चक्रवृद्धि व्याज दर से 2 सालों के लिए बैंक में निवेश किए । श्री फर्नांडीस ने 1,20,000 रुपये म्युच्युअल फंड में 2 सालों के लिए निवेश किए । 2 सालों बाद श्री फर्नांडीस को 1,92,000 रुपये प्राप्त हुए तो सय्यदभाई तथा श्री फर्नांडीस इनमें से किसका निवेश अधिक लाभदायी होगा ?
5. समीरा ने अपनी कुल आय राशि में से 3% आय सामाजिक कार्य के लिए दिए और 90% आय खर्च किए । उसके पास 1750 रुपये शेष रह गए तो उसकी मासिक आय ज्ञात कीजिए ।

'कर' की संकल्पना स्पष्ट करते हुए उसके प्रकार संबंधी जानकारी नीचे दी गई वेबसाईट पर प्राप्त करें ।

ICT Tools or Links — www.incometaxindia.gov.in, www.mahavat.gov.in

कर निर्धारण

आओ, जानें

राष्ट्र निर्माण के लिए सरकार योजनाएँ बनाती है । इन योजनाओं की कार्यवाही के लिए सरकार को भारी राशि की आवश्यकता होती है । अनेक प्रकार के टैक्स का निर्धारण करके यह राशि इकट्‌ठा की जाती है ।

कर की उपयुक्तता (Utility of taxes)

- मूलभूत सुविधाओं की पूर्ति करना ।
- विविध हितकारी योजनाओं पर अमल करना ।
- विभिन्न क्षेत्रों में विकास कार्य और संशोधन संबंधित योजनाओं को क्रियान्वित करना ।
- कानून और व्यवस्था का पालन करना ।
- प्राकृतिक विपदा से ग्रस्त लोगों की सहायता करना ।
- राष्ट्र और नागरिकों की सुरक्षा करना आदि ।

करों के प्रकार (Types of taxes)

प्रत्यक्ष कर (Direct taxes)	अप्रत्यक्ष कर (Indirect taxes)
जिस कर का भार प्रत्यक्ष रूप में करदाता पर आता है उस कर को प्रत्यक्ष कर कहते हैं ।	जिस कर का भार प्रत्यक्ष रूप में करदाता पर नहीं आता है उस कर को अप्रत्यक्ष कर कहते हैं ।
उदा. आयकर, संपत्ति-कर, व्यवसाय कर आदि ।	उदा. केंद्रीय विक्री कर, मूल्यवर्धित कर, आबकारी कर, सीमा शुल्क, सेवाशुल्क आदि ।

2017 साल में जिस प्रकार से कर निर्धारित किया गया है उसके अनुसार वे प्रकार उपरोक्त दर्शाए हैं ।

उपक्रम : विविध प्रकार के कर अदा करने वाले नौकरीपेशा अथवा व्यापारियों द्‌वारा विभिन्न कर की जानकारी लें।

आओ, जानें

आयकर (Income tax)

व्यक्ति, संस्था अथवा अन्य सरकारमान्य उद्‌योग द्‌वारा भारत में प्राप्त आय, आयकर अधिनियम द्‌वारा निर्धारित सीमा से अधिक होगा तो उसपर आयकर का निर्धारण किया जाता है ।

इस प्रकरण में हम प्रत्यक्ष करों में से सिर्फ व्यक्तियों द्‌वारा दिए जाने वाले आयकर का ही विचार करेंगे । आयकर का निर्धारण केंद्र सरकार द्‌वारा होता है ।

भारत में आयकर निर्धारण दो अधिनियमों द्‌वारा किया जाता है ।

(1) आयकर कानून 1961 दिनांक 01.04.1962 से लागू हुआ है ।

(2) प्रति वर्ष संसद द्‌वारा पारित आर्थिक प्रावधान करने वाला कानून ।

साधारणतः प्रतिवर्ष फरवरी महीने में वित्तमंत्री द्‌वारा आगामी आर्थिक वर्ष के लिए आर्थिक प्रावधान कराने हेतु बजट प्रस्तुत किया जाता है । इसमें आयकर की दर सूचित की जाती है । संसद द्‌वारा बजट मंजूर करने पर यह दर आगामी वर्ष के लिए लागू हो जाती है ।

आयकर दर प्रति वर्ष के अर्थसंकल्प (बजट) में निर्धारित किए जाते हैं ।

आयकर से संबंधित महत्वपूर्ण बातें :

- **करदाता** (An assessee) : आयकर नियमावली में समाविष्ट नियमानुसार जिस व्यक्ति को आयकर अदा करना अपेक्षित है उस व्यक्ति को 'करदाता' कहते हैं ।
- **वित्तीय वर्ष** (Financial year) : जिस एक वर्ष की कालावधि में आय प्राप्त होती है, उस वर्ष को 'वित्तीय वर्ष' कहा जाता है । हमारे देश में 1 अप्रैल से 31 मार्च यह वित्तीय वर्ष निर्धारित किया गया है ।
- **कर निर्धारण वर्ष** (Assessment year) : वित्तीय वर्ष के संलग्न आगामी वित्तीय वर्ष को 'कर निर्धारण वर्ष' कहते हैं । चालू वर्ष में पिछले वित्तीय वर्ष के लिए कर निर्धारण निश्चित किया जाता है ।

'आर्थिक वर्ष' और 'संबंधित कर निर्धारण वर्ष' नीचे दर्शाए गए हैं ।

आर्थिक वर्ष (Financial Year)	संबंधित कर निर्धारण वर्ष (Assessment Year)
2016-17 अर्थात 01-04-2016 से 31-03-17	2017-18
2017-18 अर्थात 01-04-2017 से 31-03-18	2018-19

- **स्थायी खाता क्रमांक** (PAN) : प्रत्येक व्यक्ति द्‌वारा आवेदन करने पर आयकर विभाग से एक विशेष रूप से दस अंकाक्षर का क्रमांक दिया जाता है । इसे '**स्थायी खाता क्रमांक**' अर्थात 'Permanent Account Number (PAN)' कहते हैं । अनेक महत्त्वपूर्ण दस्तावेजों और आर्थिक व्यवहारों में यह क्रमांक दर्ज करना आवश्यक होता है ।

पैनकार्ड का उपयोग : आयकर विभाग में कर अदा करने के लिए चलन, कर विवरण पत्र (रिटर्न फार्म) आदि पत्र व्यवहारों पर पैन क्रमांक लिखना बंधनकारक है । बड़े वित्तीय व्यवहार करने के लिए पैन दर्ज करना आवश्यक है । कई बार पैनकार्ड का उपयोग परिचय प्रमाण (Identity proof) के रूप में भी किया जाता है ।

आओ, जानें

आयकर का निर्धारण

आयकर का निर्धारण आय पर होने के कारण आय के विविध स्रोत समझना आवश्यक है ।

आय के मुख्यतः पाँच स्रोत हैं :

(1) वेतन द्‌वारा प्राप्त होने वाली आय

(2) घर संपत्ति से प्राप्त होने वाली आय

(3) धंधा और व्यवसाय से मिलने वाली आय

(4) पूँजी लाभ से (Capital gain) प्राप्त आय

(5) अन्य स्रोत से प्राप्त होने वाली आय

वेतन भोगी व्यक्ति के आयकर की गणना के लिए महत्त्वपूर्ण बातें :

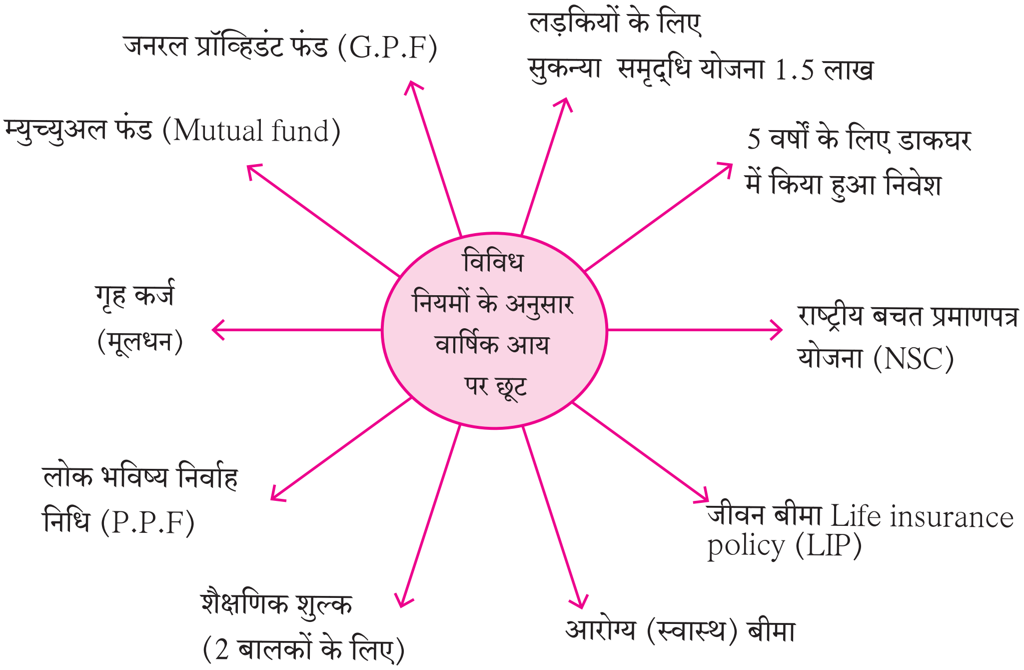
आयकर गणना के लिए कुल वार्षिक आय पर विचार करते हैं । आयकर अधिनियम 80C, 80D, 80G आदि के अनुसार कुल वार्षिक आय में कुछ छूट मिलती है । इस छूट के पश्चात जो आय शेष बचती है उसे **'कर योग्य आय'** कहा जाता है । आयकर का निर्धारण इस आय पर ही होता है ।

कर निर्धारण नियम कभी-कभी बदले जाते हैं इसलिए प्रत्यक्ष कर निर्धारण करते समय अद्‌यावत नियमों की जानकारी आवश्यक होती है ।

कर योग्य आय में से कुछ मर्यादित राशि पर कर निर्धारण नहीं किया जाता । इस रकम को कर योग्य आय की **मूल छूट रकम** कहा जाता है ।

- किसानों को कृषि उपज की आय पर आयकर छूट मिलती है ।
- आयकर धारा 80 G द्‌वारा प्रधानमंत्री सहायता कोष, मुख्यमंत्री सहायता कोष अथवा मान्यता प्राप्त संस्थाओं को दान देने पर आयकर में 100% छूट मिलती है ।
- 80 D कलम द्‌वारा निर्धारित स्वास्थ्य बीमा की किश्त पर छूट मिलती है ।
- सामान्य रूप से निवेश पर धारा 80C द्‌वारा विविध प्रकार के निवेशों में से अधिक-से-अधिक 1,50,000 रुपये तक की छूट मिलती है ।

2017-18 के बजट के अनुसार जिनके वार्षिक उत्पन्न में छूट दर्शाई जाती है, ऐसे महत्त्वपूर्ण निवेश निम्नलिखित आकृति द्‌वारा दर्शाए गए हैं ।



करदाता की आयु के अनुसार आयकर प्रति वर्ष अर्थ संकल्प (बजट) में निर्धारित की जाती है ।
आय के आधार पर आयकर दर्शाने वाली तालिका नीचे दी गई है ।

सारिणी I

60 वर्ष आयु तक के व्यक्ति			
कर योग्य आय के पायदान (रुपयों में)	प्राप्ति कर (आयकर)	शिक्षा उपकर	माध्यमिक एवं उच्च शिक्षा उपकर
2,50,000 तक	कर मुक्त	कर मुक्त	कर मुक्त
2,50,001 से 5,00,000	5 प्रतिशत (कर योग्य आय में से ढाई लाख की राशि घटाने के पश्चात बची हुई राशि पर)	आयकर का 2 प्रतिशत	आयकर का 1 प्रतिशत
5,00,001 से 10,00,000	₹ 12,500 + 20 प्रतिशत (कर योग्य आय में से पाच लाख की राशि घटाने के पश्चात बची हुई राशि पर)	आयकर का 2 प्रतिशत	आयकर का 1 प्रतिशत
10,00,000 से अधिक	₹ 1,12,500 + 30 प्रतिशत (कर योग्य आय में से दस लाख की राशि घटाने के पश्चात बची हुई राशि पर)	आयकर का 2 प्रतिशत	आयकर का1 प्रतिशत
(वार्षिक उत्पन्न 50 लाख रुपयों से एक करोड़ रुपयों के बीच होने वाले को आयकर का 10 प्रतिशत सरचार्ज और वार्षिक उत्पन्न एक करोड़ रुपयों से अधिक होने वाले को आयकर का 15 प्रतिशत सरचार्ज)			

कृति : उपरोक्त सारिणी (I) का निरीक्षण कीजिए और निम्नलिखित उदाहरणों के चौखट में योग्य संख्या लिखिए ।

उदा. • मेहता की वार्षिक आय साडेचार लाख रुपये है । उन्होंने अपने आय में से छुट मिलने वाली कोई भी बचत नहीं की हो तो उनकी कर योग्य आय किस पायदान में समाविष्ट होगी ? ☐

• उन्हें कितनी राशि पर कितने प्रतिशत दर से कर देना पड़ेगा ? ₹ ☐ पर ☐ दर से

• उपकर कितनी रकम पर निर्धारित किया जाएगा ? ☐

सारिणी II

ज्येष्ठ नागरिक (आयु वर्ष साठ से अस्सी वर्ष)			
कर योग्य आय के पायदान (रुपयों में)	प्राप्ति कर (आयकर)	शिक्षा उपकर	माध्यमिक एवं उच्च शिक्षा उपकर
3,00,000 तक	कर मुक्त	कर मुक्त	कर मुक्त
3,00,001 से 5,00,000	5 प्रतिशत (कर योग्य आय में से तीन लाख की राशि घटाने के पश्चात बची हुई राशि पर)	आयकर का 2 प्रतिशत	आयकर का 1 प्रतिशत
5,00,001 से 10,00,000	₹ 10,000 + 20 प्रतिशत (कर योग्य आय में से पाँच लाख की राशि घटाने के पश्चात बची हुई राशि पर)	आयकर का 2 प्रतिशत	आयकर का 1 प्रतिशत
10,00,000 से अधिक	₹ 1,10,000 + 30 प्रतिशत (कर योग्य आय में से दस लाख की राशि घटाने के पश्चात बची हुई राशि पर)	आयकर का 2 प्रतिशत	आयकर का 1 प्रतिशत
(वार्षिक आय 50 लाख रुपयों से एक करोड़ रुपयों के बीच होने वाले को आयकर का 10 प्रतिशत सरचार्ज और वार्षिक उत्पन्न एक करोड़ रुपयों से अधिक होने वाले को आयकर का 15 प्रतिशत सरचार्ज)			

कृति : सारिणी II की सहायता से निम्नलिखित कृति पूर्ण कीजिए ।

उदा. पंडित की आयु 67 वर्ष की है । पिछले साल उनकी वार्षिक आय 13,25,000 रुपये थी तो उनकी कर योग्य आय कितनी होगी ? उन्हें कितना आयकर भरना पड़ेगा ?

$13,25,000 - 10,00,000 = 3,25,000$

उन्हें सारिणी के अनुसार 1,10,000 रुपये कर देना पड़ेगा । इसके अलावा 3,25,000 रुपयों पर 30% अर्थात

$3,25,000 \times \frac{30}{100} = \boxed{\quad\quad}$ रु. आयकर भरना पड़ेगा

अर्थात् आयकर की राशि $\boxed{\quad\quad} + \boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$

आयकर का 2% शिक्षा उपकर अर्थात $\boxed{\quad\quad} \times \frac{2}{100} = \boxed{\quad\quad}$.

आयकर का 1% माध्यमिक एवं उच्च शिक्षा कर भरना पड़ेगा अर्थात $\boxed{\quad\quad} \times \frac{1}{100} = \boxed{\quad\quad}$

$\therefore$ कुल आयकर = आयकर + शिक्षा उपकर + माध्यमिक एवं उच्च शिक्षा कर

$= \boxed{\quad\quad} + \boxed{\quad\quad} + \boxed{\quad\quad}$

$= \boxed{₹\ 2,13,725}$

सारिणी III

वरिष्ठ नागरिक (आयु वर्ष 80 वर्ष से अधिक)			
उत्पन्न के पायदान (रुपयों में)	प्राप्ति कर (आयकर)	शिक्षा उपकर	माध्यमिक एवं उच्च शिक्षा उपकर
5,00,000 तक	कर मुक्त	कर मुक्त	कर मुक्त
5,00,001 से 10,00,000	20 प्रतिशत (कर योग्य आय में से पाँच लाख की राशि घटाने के पश्चात बची हुई राशि पर)	आयकर का 2 प्रतिशत	आयकर का 1 प्रतिशत
10,00,000 से अधिक	₹ 1,00,000 + 30 प्रतिशत (कर योग्य आय में से दस लाख की राशि घटाने के पश्चात बची हुई राशि पर))	आयकर का 2 प्रतिशत	आयकर का 1 प्रतिशत
(वार्षिक उत्पन्न 50 लाख रुपयों से एक करोड़ रुपयों के बीच होने वाले को आयकर का 10 प्रतिशत सरचार्ज और वार्षिक उत्पन्न एक करोड़ रुपयों से अधिक होने वाले को आयकर का 15 प्रतिशत सरचार्ज)			

उपक्रम : 80C, 80G, 80D इन अधिनियमों की जानकारी लें ।
पैनकार्ड देखें और उसपर लिखित जानकारी को लेकर टिप्पणी लिखिए ।
नकद रहित (Cashless) व्यवहार के लिए उपयोग में आने वाले साधनों की जानकारी लीजिए ।

उपरोक्त सारिणियों और व्यक्तियों को प्राप्त विविध प्रकार की छूटों का उपयोग कर के आयकर की गणना किस प्रकार की जाती है, यह निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा समझेंगे ।

उदा. (1) श्री म्हात्रे जी की आयु 50 वर्ष है । उनकी कुल वार्षिक आय 12,00,000 रुपये हैं । उन्होंने निम्नलिखित निवेश किया ।

(i) बीमा की किश्त : ₹ 90,000 (ii) भविष्य निर्वाह निधि निवेश : ₹ 25,000

(iii) सार्वजनिक भविष्य निर्वाह निधि : ₹ 15,000 (iv) राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्र योजना : ₹ 20,000

इससे आयकर के लिए मान्य होने वाली कटौती, कर योग्य आय और आयकर ज्ञात कीजिए ।

हल : (1) कुल वार्षिक आय = 12,00,000 रुपये है ।

(2) 80C के अनुसार कुल निवेश

निवेश	रकम (रुपये)
(i) बीमा किश्त	90,000
(ii) भविष्य निर्वाह निधि	25,000
(iii) सार्वजनिक भविष्य निर्वाह निधि	15,000
(iv) राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्र योजना	20,000
कुल	1,50,000

नियम 80C के अनुसार आयकर के लिए अधिक-से-अधिक 1,50,000 रुपयों की कटौती मान्य होती है ।

(3) $\therefore$ कर योग्य आय = [1] की रकम − [2] की रकम

= 12,00,000 − 1,50,000 = 10,50,000

(4) श्री म्हात्रे द्वारा भरी जाने वाली आयकर की गणना सारिणी (I) की सहायता से करते हैं ।

श्री म्हात्रे की कर योग्य आय = ₹10,50,000 अर्थात दस लाख से अधिक है ।

$\therefore$ सारिणी (I) के अनुसार आयकर = ₹ 1,12,500 + 30% (कुल आय से दस लाख रुपये घटाने के बाद आय पर 30%)

$\therefore$ 10,50,000 − 10,00,000 = 50,000

$\therefore$ आयकर $= 1,12,500 + 50,000 \times \frac{30}{100}$

$= 1,12,500 + 15,000$

$= 1,27,500$

इसके अतिरिक्त 2% शिक्षा उपकर और 1% माध्यमिक एवं उच्चशिक्षा उपकर इनका भी समावेश करना पड़ेगा।

शिक्षा उपकर $= 1,27,500 \times \frac{2}{100} = 2550$ रुपये

माध्यमिक एवं उच्च शिक्षा उपकर $= 1,27,500 \times \frac{1}{100} = 1275$ रुपये

$\therefore$ कुल आयकर = 1,27,500 + 2550 + 1275 = 1,31,325 रुपये

श्री म्हात्रे द्वारा दिया जाने वाला कुल आयकर = 1,31,325 रुपये

उदा. (2) अहमदभाई एक ज्येष्ठ नागरिक हैं, जिनकी आयु 62 वर्ष है । वे एक कंपनी में नौकरी करते हैं । उनकी कुल वार्षिक आय 6,20,000 रुपये है । उन्होंने सार्वजनिक भविष्य निर्वाह निधि में 1,00,000 रुपयों का निवेश किया है । इसी प्रकार बीमा की वार्षिक किश्त 80,000 रुपयों का निवेश किया और मुख्यमंत्री सहायता कोष में 10,000 रुपये दिया तो अहमदभाई ने कितना आयकर अदा किया ?

हल : (1) कुल वार्षिक आय = 6,20,000 रुपये

(2) कुल कटौती (नियम 80C तहत)

(i) सार्वजनिक भविष्य निर्वाह निधि = 1,00,000 रुपये

(ii) बीमा = 80,000 रुपये

1,80,000 रुपये

(iii) 80C के अनुसार अधिक-से-अधिक 1,50,000 रुपये कटौती मान्य ।

(3) मुख्यमंत्री सहायता कोष को दी गई राशि (80 G के अनुसार कटौती) = 10000 रुपये ।

(4) कर योग्य आय = (1) – [(2) + (3)]

= 6,20,000 – [1,50,000 + 10000]

= 4,60,000 रुपये

सारिणी (II) के अनुसार कर योग्य आय तीन लाख से पाँच लाख रुपये तक मर्यादित है ।

$\therefore$ आयकर = (कर योग्य आय – 3,00,000)$\times \frac{5}{100}$

$= (4,60,000 - 3,00,000)\times \frac{5}{100}$

$= 1,60,000 \times \frac{5}{100}$

= 8000 रुपये

शिक्षा उपकर यह आयकर पर अदा किया जाता है, इसलिए

शिक्षा उपकर : $8,000 \times \frac{2}{100} = 160$ माध्यमिक एवं उच्च शिक्षा उपकर : $8,000\times \frac{1}{100} = 80$

$\therefore$ कुल आयकर = 8000 + 160 + 80 = ₹ 8,240

$\therefore$ अहमदभाई ने कुल 8240 रुपये आयकर अदा किया ।

उदा. (3) श्रीमती हिंदुजा की आयु 50 वर्ष है । उनकी कर योग्य आय 16,30,000 रुपये है तो उन्हें कुल कितना आयकर अदा करना पड़ेगा ?

हल : श्रीमती हिंदुजा की कर योग्य आय दस लाख से अधिक वाले पायदान में है ।

अब हम सारिणी I की सहायता से उनके आयकर राशि की गणना करते हैं ।

सारिणी I के अनुसार, दस लाख से अधिक आय के लिए

आयकर = रु. 1,12,500 + (कुल आय में दस लाख घटाने के बाद की राशि पर 30%)

श्रीमती हिंदुजा की आय – दस लाख $= 16,30,000 - 10,00,000$

$= 6,30,000$ रुपये

सारिणी I से

आयकर $= 1,12,500 + 6,30,000 \times \frac{30}{100}$

$= 1,12,500 + 30 \times 6,300$

$= 1,12,500 + 1,89,000$

$= 3,01,500$ रुपये

उसपर 1% माध्यमिक एवं उच्च शिक्षा उपकर $= \frac{1}{100} \times 3,01,500 =$ ₹ 3015

2% शिक्षा उपकर $= \frac{2}{100} \times 3,01,500 =$ ₹ 6030

$\therefore$ कुल आयकर $= 3,01,500 + 3015 + 6030$

$= 3,10,545$

$\therefore$ श्रीमती हिंदुजा को लगने वाला कुल आयकर 3,10,545 रुपये

प्रश्नसंग्रह 6.2

(1) नीचे दी हुई सारिणी का निरीक्षण कीजिए । सारिणी में दिए हुए व्यक्तियों की कर योग्य आय पर आयकर अदा करना पड़ेगा या नहीं, बताइए ।

अ.क्र.	व्यक्ति	आयु	कर योग्य आय (₹)	आयकर अदा करना पड़ेगा अथवा नहीं
(i)	कु. निकिता	27	₹ 2,34,000	
(ii)	श्री कुलकर्णी	36	₹ 3,27,000	
(iii)	श्रीमती मेहता	44	₹ 5,82,000	
(iv)	श्री बजाज	64	₹ 8,40,000	
(v)	श्री डिसिल्व्हा	81	₹ 4,50,000	

(2) श्री करतारसिंह (आयु 48 वर्ष) प्राइवेट कंपनी में नौकरी करते हैं । यात्रा भत्ता (प्रवास भत्ता) छोड़कर उनका मासिक वेतन 42,000 रुपये है । वे भविष्य निर्वाह निधि खाते में प्रतिमाह 3000 रुपये जमा करते हैं । उन्होंने 15,000 रुपयों का राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्र लिया है और उन्होंने 12000 रुपये का दान प्रधानमंत्री सहायता कोष को दिया है उनके आयकर की गणना कीजिए ।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

(1) निम्नलिखित में से योग्य विकल्प चुनकर लिखिए ।

(i) विभिन्न प्रकार के निवेशों के लिए 80 C नियमों के अनुसार आयकर की गणना के लिए अधिक-से-अधिक कितने रुपयों की छूट मिलती है ।

(A) डेढ़ लाख रुपये (B) ढ़ाई लाख रुपये (C) एक लाख रुपये (D) दो लाख रुपये

(ii) एक व्यक्ति का सन 2017-18 में प्राप्त आय का कर निर्धारण वर्ष निम्नलिखित में से कौन-सा है ?

(A) 2016-17 (B) 2018-19 (C) 2017-18 (D) 2015-16

(2) श्री शेखर अपनी आय का 60% खर्च करते हैं । शेष आय में से 300 रुपये अनाथालय को दान देते हैं । उसके पश्चात इनके पास 3,200 रुपये शेष रहते हैं तो उनकी आय ज्ञात कीजिए ।

(3) श्री हीरालाल ने 2,15,000 रुपयों का निवेश म्युच्युअल फंड में किया । उसके 2 वर्ष बाद उन्हें 3,05,000 रुपये प्राप्त हुए । श्री रमणिकलाल ने 1,40,000 रुपये 8% की चक्रवृद्धि ब्याज कि दर से 2 वर्षों के लिए बैंक में निवेश किया तो प्रत्येक को कितने प्रतिशत लाभ हुआ ? किसका निवेश अधिक लाभदायक था ?

(4) एक बचत खाते में वर्ष के आरंभ में 24,000 रुपये थे । उसमें 56,000 रुपये और जमा करके कुल रकम 7.5% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से बैंक में निवेश किए । 3 वर्ष बाद कुल कितनी राशि प्राप्त होगी ?

(5) श्री मनोहर ने अपनी आय का 20% हिस्सा अपने बड़े बेटे को और 30% हिस्सा अपने छोटे बेटे को दिया । शेष राशि का 10% रकम एक विद्‌यालय को दान दिया । उनके पास 1,80,000 रुपये शेष रह गए तो श्री मनोहर की आय ज्ञात कीजिए ।

(6*) कैलाश की आय का 85% खर्चा होता था । उनकी आय 36% बढ़ी तो उनका खर्च पहले के खर्च से 40% बढ़ गया । अब उसकी बचत का प्रतिशत ज्ञात कीजिए ।

(7*) रमेश, सुरेश और प्रीति इन तीनों की वार्षिक आय 8,07,000 रुपये है । वे तीनों अपनी आय का क्रमशः 75%, 80% और 90% हिस्सा खर्च करते हैं । यदि उनकी बचत का अनुपात 16 : 17 : 12 हो तो प्रत्येक व्यक्ति की वार्षिक बचत ज्ञात कीजिए ।

(8) निम्नलिखित व्यक्तियों द्‌वारा देय आयकर की गणना कीजिए ।

(i) श्री कदम की आयु 35 वर्ष है और उनकी कर योग्य आय 13,35,000 रुपये है ।

(ii) श्री खान की आयु 65 वर्ष है और उनकी कर योग्य आय 4,50,000 रुपये है ।

(iii) कु. वर्षा (आयु 26 वर्ष) इनका कर योग्य आय 2,30,000 रुपये है ।

ICT Tools or Links

भारत सरकार के www.incometaxindia.gov.in इस वेबसाइट पर जाकर उस साइट पर incometax calculator इस मेन्यू पर क्लिक कीजिए । उसपर आए फार्म में काल्पनिक आय और छूट की रकम लिखकर आयकर राशि निकालने का प्रयास कीजिए ।

7 सांख्यिकी

C7DP8T

आओ, सीखें

- संयुक्त स्तंभालेख
- विभाजित स्तंभालेख
- प्रतिशत स्तंभालेख
- प्राथमिक और द्‌वितीयक सामग्री
- अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत बारंबारता बटन सारिणी
- संचयी बारंबारता सारिणी
- माध्य, माध्यिका और बहुलक (अवर्गीकृत सामग्री के लिए)

थोड़ा याद करें

पिछली कक्षाओं में हमने देखा है कि साधारण स्तंभालेख और संयुक्त स्तंभालेख कैसे खींचते हैं । इसी प्रकार समाचार पत्र, पत्रिकाएँ, दूरदर्शन आदि के माध्यम से विभिन्न आलेखों को देखकर उनकी जानकारी प्राप्त की है ।

दी गई जानकारी के आधार पर उचित प्रस्तुतीकरण करने वाला आलेख बनाना महत्वपूर्ण होता है ।

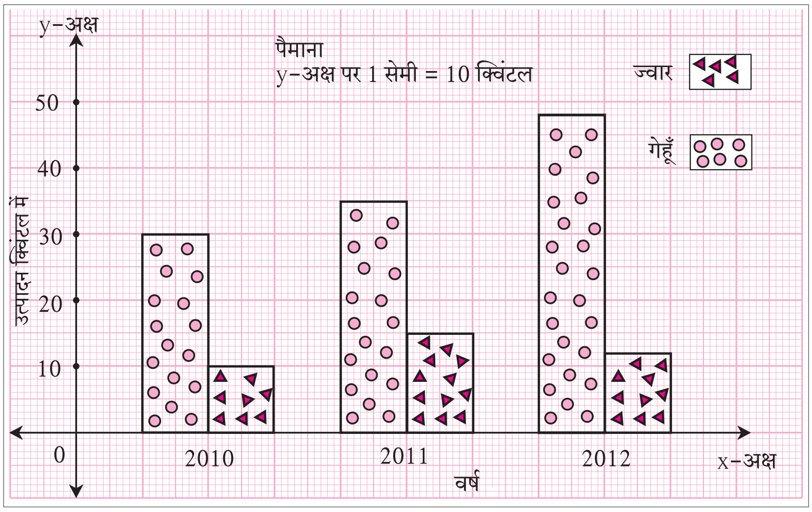
उदा. किसी किसान की खेती में गेहूँ तथा ज्वार की फसलों का तीन वर्षों में प्राप्त उत्पादन प्रदर्शित करने वाला संयुक्त स्तंभालेख नीचे दर्शाया गया है । इसके आधार पर दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(i) तीन वर्षों में किस अनाज के उत्पादन में सतत वृद्‌धि हुई है ।

(ii) वर्ष 2011 की अपेक्षा वर्ष 2012 में ज्वार के उत्पादन में कितनी कमी आई हैं?

(iii) वर्ष 2010 में तथा वर्ष 2012 में गेहूँ के उत्पादन में कितना अंतर है?

(iv) इस आलेख में दी गई जानकारी के आधार पर निम्न सारिणी पूर्ण कीजिए ।



उत्पादन (क्विंटल) / वर्ष	गेहूँ	ज्वार	कुल
2010			
2011			
2012	48	12	60

आओ, जानें

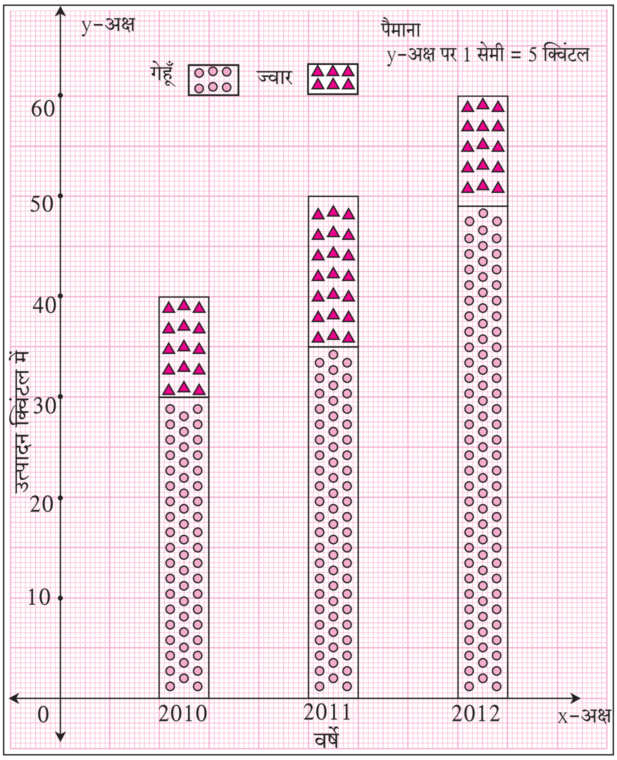
विभाजित स्तंभालेख (Sub-divided bar diagram)

दी गई सामग्री के जानकारी की तुलना प्रदर्शित करने वाला स्तंभालेख भिन्न पद्धति से भी खींचा जा सकता है । उसे विभाजित स्तंभालेख कहते हैं । इनमें सामग्री के एक ही प्रकार के दो घटकों को जोड़ते हैं तथा प्राप्त योगफल को उचित पैमाना लेकर स्तंभालेख में दर्शाया जाता है । स्तंभ के प्रत्येक घटक को दर्शाने वाला भाग उचित प्रमाण में लेते हैं । पिछले उदाहरण में जानकारियों को दर्शाने वाले विभाजित स्तंभालेख कैसे बनाएँ, यह हम देखेंगे ।

(i) कुल उत्पादन के बराबर प्रत्येक स्तंभ की ऊँचाई को उचित पैमाने से दर्शाइए ।

(ii) इसमें गेहूँ का उत्पादन यह कुल उत्पादन के स्तंभ का एक भाग होगा, उसे कुछ चिह्नों द्वारा दर्शाइए ।

(iii) स्तंभ का शेष भाग स्वाभाविक ही ज्वार का उत्पादन दर्शाएगा । इसे अलग चिह्नों द्वारा दर्शाइए ।



इस विधि से बनाई गई संलग्न विभाजित स्तंभालेख की आकृति देखिए ।

दो घटकों के प्रतिशतानुसार की गई तुलना कभी-कभी अधिक उपयोगी होती है, इसका हमने अध्ययन किया है । उदाहरण 2000 रुपयों में 600 रुपये का लाभ और 1500 रुपयों पर 510 रुपये का लाभ जिसमें 600 रुपयों का लाभ अधिक दिखता है किंतु दोनों लाभ का प्रतिशत क्रमशः 30% और 34% को ध्यान में रखा जाए तो 1500 रुपयों पर 510 रुपये का लाभ व्यवहार में अधिक फायदेमंद है ।

प्रतिशत स्तंभालेख (Percentage bar diagram)

दी गई जानकारी की तुलना अलग तरीके से समझने के लिए दी गई जानकारियों को प्रतिशत में रूपांतरित करके जो विभाजित स्तंभालेख बनाया जाता है, उसे प्रतिशत स्तंभालेख कहते हैं । पिछले उदाहरण की जानकारी को प्रतिशत के रूप में सारिणी मे दर्शाई गई है ।

वर्ष	गेहूँ का उत्पादन (क्विं.)	ज्वार का उत्पादन (क्विं.)	कुल उत्पादन की तुलना मे गेहूँ के उत्पादन का प्रतिशत
2010	30	10	$\frac{30}{40} \times 100 = 75\%$
2011	35	15	$\frac{35}{50} \times 100 = 70\%$
2012	48	12	$\frac{48}{60} \times 100 = 80\%$

इस जानकारी का दर्शाने वाला स्तंभालेख निम्नलिखित सोपानों के अनुसार बनाया गया है ।

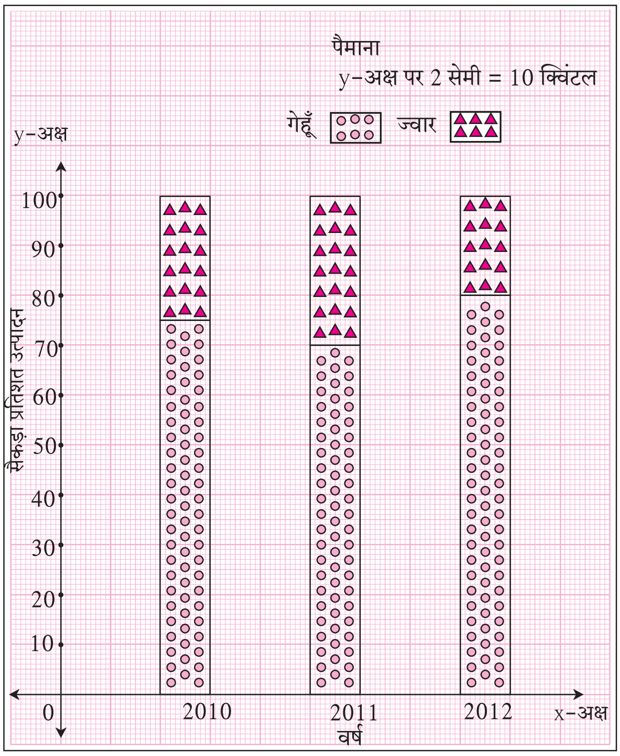
(i) प्रत्येक वर्ष में गेहूँ तथा ज्वार के कुल उत्पादन में से गेहूँ के उत्पादन तथा ज्वार के उत्पादन का प्रतिशत ज्ञात किया ।

(ii) प्रत्येक स्तंभ की Y-अक्ष पर पैमानानुसार ऊँचाई 100 ली गई है ।

(iii) कुल उत्पादन में गेहूँ के उत्पादन का प्रतिशत लिए गए पैमाने के अनुसार स्तंभ के भाग को चिह्न द्वारा दर्शाया गया है ।

(iv) स्तंभ का शेष भाग कुल उत्पादन में से ज्वार के उत्पादन का प्रतिशत दर्शाता है ।

दो से अधिक घटकों की जानकारी को विभाजित या प्रतिशत स्तंभालेख से दर्शाया जाता है ।



हल किए गए उदाहरण

उदा. (1) संलग्न प्रतिशत स्तंभालेख में दो परिवारों के विभिन्न घटकों पर खर्च की जानकारी दी गई है । निम्नलिखित के उत्तर लिखिए ।

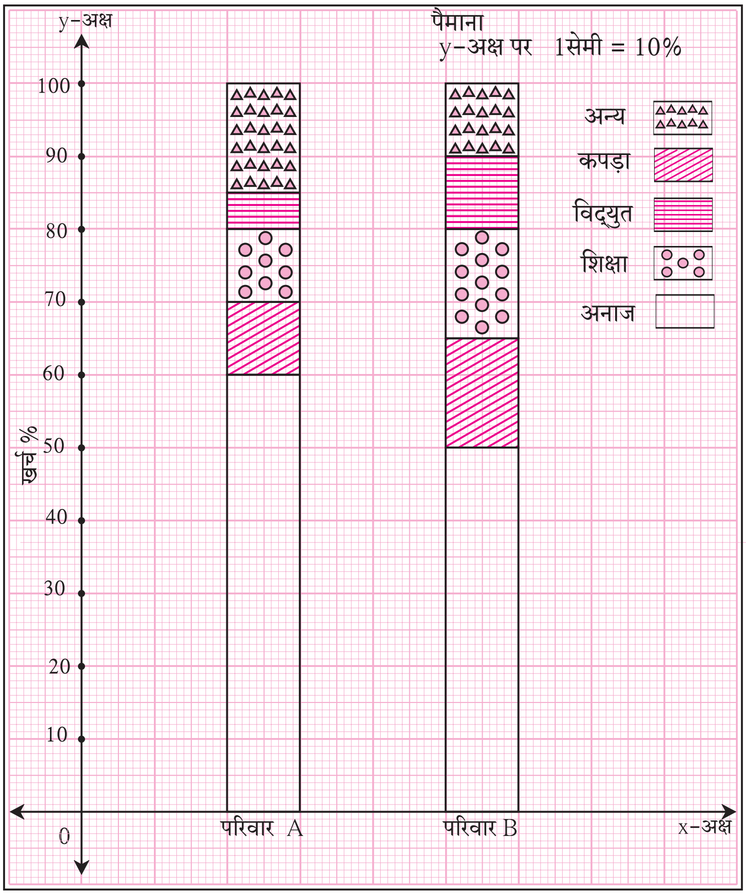
(i) प्रत्येक परिवार के विभिन्न घटकों पर खर्च का प्रतिशत लिखिए ।

(ii) किस परिवार के अनाज का खर्च उसके कुल खर्च की तुलना में अधिक है ? कितने प्रतिशत अधिक है ?

(iii) दोनों परिवारों के अन्य खर्च का प्रतिशत कितना है ?

(iv) किस परिवार का विद्युत खर्च का प्रतिशत अधिक है ?

(v) किस परिवार के शिक्षा के खर्च का प्रतिशत अधिक है ।



हल : (i)

खर्च / परिवार	अनाज	कपड़ा	शिक्षा	विद्युत	अन्य
A	60%	10%	10%	5%	15%
B	50%	15%	15%	10%	10%

(ii) परिवार A का अनाज का खर्च, कुल खर्च की तुलना में परिवार B के खर्च की अपेक्षा 10% अधिक है ।

(iii) परिवार A का अन्य खर्च 15% तथा परिवार B का अन्य खर्च 10% है ।

(iv) परिवार B का विद्युत खर्च का प्रतिशत अधिक है । (v) परिवार B का शिक्षा खर्च का प्रतिशत अधिक है ।

प्रश्नसंग्रह 7.1

(1) निम्नलिखित सारिणी में भारत में ट्रक एवं बसों की संख्या (लगभग लाखों में) नीचे दी गई है, इसके आधार पर प्रतिशत स्तंभालेख बनाइए । (प्रतिशत निकटतम पूर्णांक तक लें ।)

वर्ष	ट्रक की संख्या	बस की संख्या
2006-2007	47	9
2007-2008	56	13
2008-2009	60	16
2009-2010	63	18

(2) निम्नसारिणी में भारत में पक्की सड़क तथा कच्ची सड़क की जानकारी दी गई है इसके आधार पर विभाजित एवं प्रतिशत स्तंभालेख बनाएँ । (प्रतिशत निकटतम पूर्णांक तक लें ।)

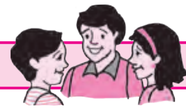
वर्ष	पक्की सड़क (लाख किमी)	कच्ची सड़क (लाख किमी)
2000-2001	14	10
2001-2002	15	11
2002-2003	17	13
2003-2004	20	19

कृति : निम्नलिखित सारिणी में विविध राज्यों में प्रति 1000 लड़कों की तुलना में लड़कियों की संख्या दी गई है इस आधार पर दी गई सारिणी में रिक्त चौखट पूरी कीजिए ।

राज्य	लड़कों की संख्या	लड़कियों की संख्या	कुल	लड़कों का प्रतिशत (निकटतम पूर्णांक तक)	लड़कियों का प्रतिशत (निकटतम पूर्णांक तक)
असम	1000	960	1960	$\frac{1000}{1960} \times \frac{100}{1} = = 51\%$	100 - 51 = 49%
बिहार	1000	840	1840		
पंजाब	1000	900			
केरल	1000	1080			
महाराष्ट्र	1000	900			

सारिणी से प्राप्त जानकारी का प्रतिशत स्तंभालेख बनाइए तथा उससे निष्कर्ष निकाल कर चर्चा कीजिए ।

थोड़ा सोचें पृष्ठ क्रमांक 111 में दी गई कृति के लिए सारिणी में पाँच राज्यों में प्रतिहजार लड़कों की तुलना में लड़कियों की संख्या दी गई है । इन्हीं राज्यों का साक्षरता प्रतिशत नीचे दिया गया है ।
असम (73%), बिहार (64%), पंजाब (77%), केरल (94%) व महाराष्ट्र (83%) सारिणी में दी गई लड़कियों की संख्या और उन राज्यों में साक्षरता के प्रतिशत का विचार कीजिए । क्या इससे कुछ निष्कर्ष मिलता है ?



आओ, चर्चा करें

दी गई जानकारी दर्शाने के लिए किस प्रकार का स्तंभालेख बनाना उचित होगा ?

(1) चार गाँवों मे साक्षरता का प्रतिशत ।
(2) एक परिवार के विभिन्न घटकों पर होने वाला खर्च ।
(3) पाँच वर्गों मे से प्रत्येक वर्ग के लड़के और लड़कियों की संख्या ।
(4) तीन दिन तक चलने वाले विज्ञान प्रदर्शनी में देखने आने वाले लोगों की संख्या ।
(5) जनवरी से जून तक प्रत्येक महिनों में आपके गाँव का न्यूनतम और उच्चतम तापमान ।
(6) दुपहिया वाहन चलाते समय हेल्मेट का उपयोग करने वाले तथा न करने वाले 100 परिवार के व्यक्तियों की संख्या ।

आओ, जानें

सांख्यिकी (Statistics)

किसी बड़े समूह का अध्ययन करने के लिए उसमें से कुछ घटक का चुनाव यादृच्छिक विधि से किया जाता है । यह बड़े समूह का प्रतिनिधि समूह होता है । इन प्रतिनिधि समूह की अध्ययन के संदर्भ में जानकारी एकत्र करते हैं । यह जानकारी अधिकांश समय संख्या के स्वरूप में होती है जिसका विश्लेषण कर कुछ निष्कर्ष निकालते हैं । इस प्रकार के अध्ययन को सांख्यिकी (statistics) कहते हैं ।

Statistics यह शब्द status इस लैटिन शब्द से बना है । इसका अर्थ राज्य की स्थिति ऐसा होता है । इससे पहले सांख्यिकी शास्त्र राज्य के प्रशासकीय व्यवहार से संबंधित होता था, ऐसा ध्यान में आता है । किंतु वर्तमान में इस शास्त्र का उपयोग सभी क्षेत्र में किया जाता है । **सर रोनाल्ड ऐल्मर फिशर (Sir Ronald Aylmer Fisher)** (17 फरवरी 1890 – 29 जुलाई 1962) को संख्याशास्त्र का जनक माना जाता है ।

सांख्यिकी आँकड़ों का संकलन (Data collection)

शिक्षिका : किसी गाँव में प्रत्येक परिवार के पास कितनी खेती है इसकी संख्यात्मक जानकारी एकत्र करनी है तो क्या करेंगे ?

रॉबर्ट : सर, गाँव के प्रत्येक घर जाकर प्रत्येक परिवार के पास कितनी खेती है उसे दर्ज करेंगे ।

शिक्षिका : बिलकुल सही, विद्‌यार्थियों, किसी विशेष समूह के विषय से हम जो जानकारी संकलित करते हैं वह मुख्य रूप से संख्या के स्वरूप में होती है इसे ही सामग्री कहते हैं । सामग्री एकत्र करने के पूर्व उस जानकारी का उपयोग कहाँ करना है, यह जानना आवश्यक है । इसकी जानकारी होनी चाहिए । किसी व्यक्ति द्‌वारा जानकारी प्राप्त करने हेतु विशिष्ट स्थान पर जाकर प्रश्न पूछना, गणना करना आदि तरीके से संकलित सामग्री को प्राथमिक सामग्री कहते हैं ।

आफरीन : अर्थात रॉबर्ट के बताए अनुसार प्रत्येक घर जाकर खेती की एकत्र की गई जानकारी प्राथमिक सामग्री होगी ।

शिक्षिका : शाबास आफरीन !

रमेश : किंतु सर, उपरोक्त जानकारी कम समय में एकत्र करनी हो तो ?

शिक्षिका : रमेश का कहना सही है, ऐसे समय जानकारी एकत्र करने का दूसरा उपाय क्या होगा ? इसपर चर्चा कीजिए ।

केतकी : सर, हम पटवारी कार्यालय जाकर उनके पास उपलब्ध खेती संबंधी दर्ज जानकारी एकत्र कर सकते हैं ।

शिक्षिका : सही है, कुछ परिस्थितियों में समय की उपलब्धता और साधनों का अभाव जैसे कारणों से व्यक्तिगत रूप में आँकड़ों का संकलन संभव नहीं हो पाता । ऐसी स्थिति में दूसरों द्‌वारा संकलित किए गए आँकड़ों या अहवाल कार्यालय में जारी की गई सामग्री या शोध निबंध, शासकीय विभागो में उपलब्ध जानकारी आदि स्वरूप में रखी गई सामग्री (आँकड़े) का उपयोग करते हैं, ऐसी उपलब्ध जानकारी को द्‌वितीयक सामग्री कहते हैं अर्थात केतकी के सुझाए अनुसार पटवारी के कार्यालय में जाकर खेती संबंधी संकलित की गई जानकारी द्‌वितीयक सामग्री हैं ।

निम्नलिखित उदाहरण देखिए ।

(i) समाचार पत्र में दी गई जानकारी का उपयोग कर बनी सारिणी ही द्‌वितीयक सामग्री होगी ।

(ii) उपहारगृह में पदार्थों का स्तर समझने के लिए ग्राहकों द्‌वारा पूछी गई जानकारी प्राथमिक सामग्री होगी ।

(iii) कक्षा के विद्‌यार्थियों की प्रत्यक्ष ऊँचाई नापकर दर्ज की गई जानकारी प्राथमिक सामग्री होगी ।

प्राथमिक सामग्री (आँकडे)	द्‌वितीयक सामग्री (आँकड़े)
1. एकत्र करने में अधिक समय लगता है । 2. अद्‌यावत तथा विवरणानुसार होती है । 3. सटीक तथा विश्वसनीय होती है ।	1. तुरंत उपलब्ध हो सकता है । 2. इसमें पूर्व संकलित जानकारी लेने के कारण वह जानकारी अद्‌यावत होगी हो ऐसा नहीं है जानकारी के विवरण में कुछ कमियाँ रहती है । 3. यह कमी विश्वसनीय हो सकती है ।

कृति : आप अनेक बार विविध कारणों के लिए जानकारी एकत्र करते हैं । ऐसे 3 से 4 उदाहरण लेकर एकत्र की गई सामग्री प्राथमिक होगी कि द्‌वितीयक इसपर चर्चा कीजिए ।

प्रश्नसंग्रह 7.2

(1) निम्नलिखित प्रकार से एकत्रित की गई सामग्री का प्राथमिक अथवा द्‌वितीयक सामग्री में वर्गीकरण कीजिए ।

(i) कक्षा में प्रत्यक्ष जाकर विद्‌यालय के प्रत्येक कक्षा के विद्‌यार्थियों की उपस्थिति की जानकारी एकत्रित की गई ।

(ii) प्रत्येक विद्‌यार्थी की ऊँचाई की जानकारी वरिष्ठ कार्यालय में तुरंत भेजने के कारण विद्‌यालय के शारीरिक शिक्षा विभाग में दर्ज की गई जानकारी एकत्रित की गई ।

(iii) नांदपुर के प्रत्येक परिवार के शालाबाह्‌य विद्‌यार्थी की प्रत्यक्ष जानकारी घर-घर जाकर एकत्रित की गई ।

(iv) विज्ञान प्रकल्प के लिए वन में प्रत्यक्ष जाकर वृक्षों का निरीक्षण करके जानकारी एकत्रित की गई ।

थोड़ा याद करें

सामग्री का वर्गीकरण (Classification of data)

उदा. (1) किसी विद्यालय के कक्षा 9 वीं के 50 विद्यार्थियों ने प्रथम घटक जाँच परीक्षा में बीजगणित के 20 अंकों में से प्राप्त अंकों का विवरण निम्नलिखित है ।

20, 6, 14, 10, 13, 15, 12, 14, 17, 17, 18, 11, 19, 9, 16, 18, 14, 7, 17, 20,
8, 15, 16, 10, 15, 12, 18, 17, 12, 11, 11, 10, 16, 14, 16, 18, 10, 7, 17, 14,
20, 17, 13, 15, 18, 20, 12, 12, 15, 10

एकत्रित की गई इस संख्यात्मक जानकारी को क्या कहते हैं ?...... कच्चे आँकड़े (सामग्री)

इसमें प्रत्येक संख्या को क्या कहते हैं ?....... प्राप्तांक

उपरोक्त जानकारी के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर प्राप्त कीजिए ।

(i) 15 अंक प्राप्त करने वाले कुल कितने विद्यार्थी हैं ?

(ii) 15 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले कुल कितने विद्यार्थी हैं ?

(iii) 16 से कम अंक प्राप्त करने वाले कुल कितने विद्यार्थी हैं ?

(iv) न्यूनतम अंक कितने हैं ?

(v) अधिकतम अंक कितने हैं ?

आओ, चर्चा करें

(1) आपको उपरोक्त प्रश्नों के उत्तर सहजता से प्राप्त हो गए या हर बार अंकों का निरीक्षण करना पड़ा ?

(2) उपरोक्त कार्य आसान होने के लिए क्या कर सकते हैं ?

शमीम : उपरोक्त प्रश्नों के उत्तर हर बार निरीक्षण करने के कारण यह कार्य कठिन और नीरस हुआ है किंतु यदि दी गई कच्ची सामग्री आरोही अथवा अवरोही क्रम में लिखी गई हो तो इस कार्य मे आसानी होगी ।

शमीम के कथनानुसार सामग्री के अंक आरोही क्रम में लिखिए ।

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13,
14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17,
18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

जानकारी को आरोही क्रम से लिखने के बाद उदाहरण के सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर आसानी से मिलते हैं क्या ? इसकी जाँच कीजिए ।

जाँच से यह स्पष्ट होगा कि सामग्री को यदि हम आरोही क्रम से लिखें तो सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर हमें आसानी से मिलते हैं ।

थोड़ा याद करें

मार्टीन : पिछली कक्षा में हमने अध्ययन किया है कि सामग्री (आँकड़ों) को सारिणी के रूप में रखने पर उपर्युक्त कार्य को अधिक सरलता से किया जा सकता है । इस सारिणी को बारंबारता सारिणी कहते हैं ।

शिक्षिका : मार्टीन, बिलकुल सही ! हम यह सारिणी उपर्युक्त उदाहरण 1 के आधार पर बनाएँ ।

उदाहरण (1) में सबसे कम अंक 6 है और सबसे अधिक अंक 20 है इसलिए तालिका में प्राप्तांकों के स्तंभ में 6 से 20 प्राप्तांक लिखिए । दूसरे स्तंभ में गणन चिह्न तथा अंतिम स्तंभ में चिह्न गिनकर बारंबारता लिखें ।

बारंबारता बंटन सारिणी

प्राप्तांक (गुण)	गणन चिह्न	बारंबारता
6	|	1
7	||	2
8		
9		
10	$\cancel{||||}$	5
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17	$\cancel{||||}$ |	6
18		
19		
20	||||	4
		कुल N = 50

N यह सभी बारंबारताओं का योगफल है ।

आओ, चर्चा करें

वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी (Grouped Frequency Distribution Table)

उपर्युक्त बारंबारता बंटन सारिणी में,

(1) यह सारिणी बहुत बड़ी हो गई है । ऐसा लगता है क्या ?

(2) जब सामग्री में प्राप्तांकों की संख्या अधिक हो तो सारिणी बनाना कठिन होगा क्या ?

शिक्षिका : उपरोक्त चर्चा के आधार पर यह ध्यान में आता है कि जब सामग्री में प्राप्तांकों की संख्या अधिक हो तो बारंबारता बंटन सारिणी का विस्तार अधिक हो जाता है । यह सारिणी बनाने में अधिक समय लगता है । सारिणी का विस्तार और समय कम करने के लिए कुछ उपाय कर सकते हैं क्या ?

रोहित : सर, ऐसे समय सामग्री के समूह बनाने चाहिए ।

शिक्षिका : शाबास ! रोहित सामग्री का समूह बनाना अर्थात वर्ग बनाया तो वह सामग्री सुविधाजनक होगी तथा समय भी कम लगेगा । ऐसी ही सारिणी वर्गीकृत को बारंबारता बंटन सारिणी कहते हैं ।

ऐसी सारिणी की दो पद्धतियाँ हैं (1) समावेशी पद्धति (2) असमावेशी पद्धति

(1) समावेशी पद्धति (खंडित वर्ग) (Inclusive method)

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

उपरोक्त सामग्री में सबसे छोटा प्राप्तांक $\boxed{}$ तथा सबसे बड़ा प्राप्तांक $\boxed{}$ है । सबसे बड़े तथा सबसे छोटे प्राप्तांकों का अंतर 20 – 6 = 14 है । इस अंतर को ही **सामग्री का विस्तार** कहते हैं । इस विस्तार को ध्यान मे रखकर सामग्री के सुविधाजनक कौन से वर्ग बनाए जा सकते हैं ?

(i) 6 से 8, 9 से 11, 12 से 14, 15 से 17, 18 से 20 या

(ii) 6 से 10, 11 से15, 16 से 20 ऐसे वर्ग बनाए जाएँगे ।

6 से 10, 11 से 15, 16 से 20 इन वर्गों को खंडित वर्ग कहते हैं ।

6 से 10, 11 से 15 और 16 से 20 वर्ग लेकर उपरोक्त सामग्री की बारंबारता बंटन सारिणी बनाएँ ।

वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी (समावेशी पद्धति)

वर्ग	गणन चिह्न	बारंबारता
6 ते 10	𝍸 𝍸	**10**
11 ते 15	.....	.....
16 ते 20	.....	20
		N = 50

यह सारिणी बनाते समय 6, 10 तथा उसके मध्य के सभी प्राप्तांकों का समावेश 6 से 10 वाले वर्ग में होता है इसलिए सारिणी बनाने की इस पद्धति को समावेशी पद्धति कहते हैं ।

आओ, जानें

सांख्यिकी के कुछ मूलभूत पद(Basic terms in statistics)

(1) **वर्ग (Class) :** प्राप्तांकों के सुविधाजनक आकार के समूह को वर्ग कहते हैं ।

6 से 10, 11 से 15 इन वर्गों को 6–10, 11–15 ऐसा भी लिखते हैं ।

(2) **वर्ग सीमा (Class limits) :** वर्ग दर्शाने वाली संख्याओं को वर्ग सीमा कहते हैं ।

6 से 10 इस वर्ग में 6 यह निम्न वर्ग सीमा तथा 10 यह उच्च वर्ग सीमा हैं ।

(3) **बारंबारता (Frequency) :** प्रत्येक वर्ग में जितने प्राप्तांक आते हैं, उन प्राप्तांकों की कुल संख्या को उस वर्ग की बारंबारता कहते हैं ।

उपरोक्त सारिणी में 11 से 15 वर्ग में 20 प्राप्तांक आते हैं इसलिए 11 से 15 इस वर्ग की बारंबारता 20 है । ऐसा कहा जाता है ।

4. **वर्गांतर (Class width) :** दिए गए अखंडित वर्ग के क्रमागंत दो वर्ग की निम्न वर्ग सीमा या (उच्च वर्ग सीमा) के अंतर को वर्गांतर कहते हैं ।

उदा. 5 - 10, 10 - 15, 15 - 20, ... ऐसे वर्ग हों तो 5-10 का वर्गांतर = 10 - 5 = 5 है ।

5. **वर्ग मध्य (Class mark) :** वर्ग की उच्च वर्ग सीमा तथा निम्म वर्ग सीमा के माध्य या औसत को वर्ग मध्य कहते हैं ।

$$\text{वर्ग मध्य} = \frac{\text{निम्न वर्ग सीमा} + \text{उच्च वर्ग सीमा}}{2}$$

$$\text{उदा. 11 से 15 का वर्ग मध्य} = \frac{\boxed{} + \boxed{}}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

(2) असमावेशी पद्धति (अखंडित वर्ग) (Exclusive method)

उदा. 6, 10, 10.3, 11, 15.7, 19, 20, 12, 13 प्राप्तांक दिए गए हैं ।

6-10, 11-15, 16-20 इस प्रकार वर्ग लेकर इसकी वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी बनाइए ।

हल :

वर्ग (प्राप्तांक)	गणन चिह्न	बारंबारता (f)
6-10	||	**2**
11-15	|||	**3**
16-20	||	**2**

उपरोक्त सारिणी में दिए गए प्राप्तांक में 10.3 तथा 15.7 इन दोनों प्राप्तांक को समाविष्ट नहीं किया जा सका।

क्योंकि संख्याएँ 10.3 तथा 15.7, 6-10, 11-15, 16-20 में से किसी भी वर्ग मे समाविष्ट नहीं होती इसके लिए वर्ग रचना बदलना होगा । इसलिए यह वर्ग 5-10, 10-15, 15-20, ... इस प्रकार क्रम में लिखने पर उपरोक्त प्रश्न निर्माण नहीं होगा किंतु 10 इस प्राप्तांक को 5-10, 10-15 में से किस वर्ग में दर्ज करना है यह प्रश्न उठता है । इस प्रकार की कठिनाइयों को दूर करने के लिए प्राप्तांक 10 को 5-10 इस वर्ग में न लेकर 10-15 इस वर्ग में समाविष्ट करें ऐसा संकेत है, इसलिए 10 को 10-15 इस वर्ग में दर्ज करेंगे । इस पद्धति को असमावेशी पद्धति कहते हैं । इस प्रकार वर्ग लेने पर 10.3 तथा 15.7 इस संख्याओं का सारिणी में समावेश किया गया ।

अब इस प्रकार वर्ग लेकर और संकेत के अनुसार बनाई गई सारिणी देखिए ।

वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी **(असमावेशी पद्धति)**

वर्ग (अखंड़ित वर्ग)	गणन चिह्न	बारंबारता (f) (विद्‌यार्थी संख्या)
5-10	|	1
10-15	~~||||~~	5
15-20	||	2
20-25	|	1

इसे ध्यान में रखें

बारंबारता बंटन सारिणी

अवर्गीकृत

नौवीं कक्षा के विद्यार्थियों की आयु	विद्यार्थियों की संख्या
14	12
15	23
16	10

वर्गीकृत

समावेशी पद्धति (खंडित वर्ग)

जूते का क्रमांक	विद्यार्थियों की संख्या
2-4	12
5-7	29
8-10	7

असमावेशी पद्धति (अखंडित वर्ग)

ऊँचाई(सेमी)	विद्यार्थियों की संख्या
145-150	18
150-155	27
155-160	3

प्रश्नसंग्रह 7.3

(1) 20 से 25 इस वर्ग की निम्न वर्ग सीमा तथा उच्च वर्ग सीमा लिखिए ।

(2) 35 से 40 इस वर्ग का वर्ग मध्य ज्ञात कीजिए ।

(3) किसी वर्ग का वर्गमध्य 10 तथा वर्ग अंतराल 6 हो तो वह वर्ग लिखिए ।

(4) नीचे दी गई सारिणी पूर्ण कीजिए ।

वर्ग (आयु वर्ष)	गणन चिह्न	बारंबारता (f) (विद्यार्थी संख्या)
12-13	$\cancel{||||}$	$\square$
13-14	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ $||||$	$\square$
14-15		$\square$
15-16	$||||$	$\square$
		$N=\sum f = 35$

(5) किसी विद्यालय के हरित सेना के 45 विद्यार्थियों में से प्रत्येक द्वारा किए गए वृक्षारोपण की संख्या नीचे दी गई है ।

3, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 3, 5, 4, 7, 5 , 3, 6, 6, 5, 3, 4, 5, 7, 3, 5, 6, 4, 4, 3, 5, 6, 6, 4, 3, 5, 7, 3, 4, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 4, 7.

इसके आधार पर अवर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी बनाइए ।

(6) π का 50 दशमलव स्थान तक का मान निम्नलिखित है ।

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

इसका दशमलव चिह्न के पश्चात के अंकों की अवर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी बनाइए ।

(7*) दी गई सारिणी में जानकारी के आधार पर वर्गांतर ज्ञात कीजिए तथा अखंडित वर्ग और खंडित वर्ग वाली बारंबारता बंटन सारिणी बनाएँ ।

(i)

वर्गमध्य	बारंबारता
5	3
15	9
25	15
35	13

(ii)

वर्गमध्य	बारंबारता
22	6
24	7
26	13
28	4

(8) एक विद्यालय के 9 वीं कक्षा के 46 विद्यार्थियों को कंपास में पेंसिल की लंबाई मापन करने को कहा गया । लंबाइयाँ सेमी में निम्न प्रकार से हैं ।

16, 15, 7, 4.5, 8.5, 5.5, 5, 6.5, 6, 10, 12,
13, 4.5, 4.9, 16, 11, 9.2, 7.3, 11.4, 12.7, 13.9, 16,
5.5, 9.9, 8.4, 11.4, 13.1, 15, 4.8, 10, 7.5, 8.5, 6.5,
7.2, 4.5, 5.7, 16, 5.7, 6.9, 8.9, 9.2, 10.2, 12.3, 13.7,
14.5, 10

0-5, 5-10, 10-15, ... इस प्रकार वर्ग लेकर असमावेशी पद्धति से वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी बनाए ।

(9) एक गाँव में सहकारी दूध संकलन केंद्र पर 50 लोगों में प्रत्येक ने कितना लीटर दूध जमा किया इसकी जानकारी नीचे दी गई है ।

27, 75, 5, 99, 70, 12, 15, 20, 30, 35, 45, 80,
77, 90, 92, 72, 4, 33, 22, 15, 20, 28, 29, 14,
16, 20, 72, 81, 85, 10, 16, 9, 25, 23, 26, 46,
55, 56, 66, 67, 51, 57, 44, 43, 6, 65, 42, 36,
7, 35

उचित वर्ग लेकर वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी बनाइए ।

(10) किसी गाँव में एक संस्था ने 38 लोगो से 'दिव्यांग विकास निधि' एकत्र किया प्रत्येक व्यक्ति द्वारा दी गई राशि निम्न प्रकार से है ।

101, 500, 401, 201, 301, 160, 210, 125, 175, 190, 450, 151,
101, 351, 251, 451, 151, 260, 360, 410, 150, 125, 161, 195,
351, 170, 225, 260, 290, 310, 360, 425, 420, 100, 105, 170,
250, 100

(i) 100-149, 150-199, 200-249, ... ऐसे वर्ग लेकर वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी बनाइए ।

(ii) सारिणी के अनुसार 350 रु. या राशि इससे अधिक देने वाले दानदाताओं की संख्या कितनी होगी ?

आओ, जानें

उच्च वर्ग सीमा से कम संचयी बारंबारता (Less than cumulative frequency)

उदा. एक विद्यालय के नौवीं कक्षा के 50 विद्यार्थियों के प्रथम घटक परीक्षा में गणित में 40 में से प्राप्त अंकों की बारंबारता बंटन सारिणी दी गई है ।

वर्ग	बारंबारता (विद्यार्थियों की संख्या)
0-10	02
10-20	12
20-30	20
30-40	16
	कुल N = 50

(1) सारिणी के अनुसार रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

(i) 10 से 20 वर्ग में निम्न वर्ग सीमा $\boxed{}$ तथा उच्च वर्ग सीमा $\boxed{}$ है ।

(ii) 10 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी कितने हैं ? $\boxed{2}$

(iii) 20 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी कितने हैं ? $2 + \boxed{} = 14$

(iv) 30 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी कितने हैं ? $\boxed{} + \boxed{} = 34$

(v) 40 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी कितने हैं ? $\boxed{} + \boxed{} = 50$

इसे ध्यान में रखें

किसी विशिष्ट वर्ग की बारंबारता और उस वर्ग के पहले वाले सभी वर्गों की बारंबारता के योगफल को उस वर्ग की 'उच्च वर्ग सीमा' से कम संचयी बारंबारता (less than cummulativve frequency) कहते हैं संक्षेप में उसे 'से कम संचयी बारंबारता' भी कहते हैं ।

उच्च वर्ग सीमा से कम संचयी बारंबारता सारिणी का अर्थ :

वर्ग (अंक)	बारंबारता	से कम संचयी बारंबारता
0-10	2	2
10-20	12	$2 + 12 = \boxed{}$
20-30	20	$\boxed{} + 20 = 34$
30-40	16	$34 + \boxed{} = 50$
कुल 50		

वर्ग	संचयी बारंबारता	उच्च वर्ग सीमा से कम का अर्थ
0-10	2	2 विद्यार्थियों को 10 से कम अंक
10-20	14	14 विद्यार्थियों को 20 से कम अंक
20-30	34	34 विद्यार्थियों को 30 से कम अंक
30-40	50	50 विद्यार्थियों को 40 से कम अंक
कुल 50		

(2) निम्न वर्ग सीमा के समान या उससे अधिक संचयी बारंबारता सारणी

वर्ग	बारंबारता	संचयी बारंबारता
0-10	2	50
10-20	12	50 - 2 = 48
20-30	20	48 - 12 = 36
30-40	16	36 - 20 = 16
कुल 50		

वर्ग	संचयी बारंबारता	निम्न वर्ग सीमा या निम्न वर्ग सीमा से अधिक का अर्थ
0-10	50	50 विद्यार्थियों को 0 या 0 से अधिक अंक प्राप्त हुए ।
10-20	48	48 विद्यार्थियों को 10 या 10 से अधिक अंक प्राप्त हुए ।
20-30	36	36 विद्यार्थियों को 20 या 20 से अधिक अंक प्राप्त हुए ।
30-40	16	16 विद्यार्थियों को 30 या 30 से अधिक अंक प्राप्त हुए ।

उदा. एक स्पोर्ट्स क्लब के टेबल टेनिस के स्पर्धा के लिए आए खिलाड़ियों की आयु का वर्गीकरण नीचे तालिका में दिया गया है । इस सारिणी में 'से अधिक' संचयी बारंबारता सारिणी पूरी कीजिए ।

हल : निम्न वर्ग सीमा से अधिक संचित बारंबारता सारिणी

आयु (वर्ष)	गणन चिह्न	बारंबारता (विद्यार्थी संख्या)	निम्न वर्ग सीमा या उससे अधिक संचयी बारंबारता
10-12	𝍸 ||||	09	50
12 – 14	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	☐	☐ - 9 = 41
14-16	𝍸 𝍸 |||	☐	41 - 23 = ☐
16 – 18	𝍸	05	☐ - 13 = ☐
		कुल N = 50	

प्रश्नसंग्रह 7.4

(1) निम्नलिखित संचयी बारंबारता सारिणी पूरी कीजिए ।

वर्ग (ऊँचाई – सेमी में)	बारंबारता (विद्यार्थी संख्या)	से कम संचयी बारंबारता
150-153	05	05
153-156	07	05+ ☐ = ☐
156-159	15	☐ + 15 = ☐
159-162	10	☐ + ☐ = 37
162-165	05	37+5=42
165-168	03	☐ + ☐ = 45
	कुल N = 45	

(2) नीचे दी गई बारंबारता सारिणी पूर्ण कीजिए ।

वर्ग (मासिक आय रुपयों में)	बारंबारता (व्यक्तियों की संख्या)	निम्न वर्ग सीमा के बराबर या उससे अधिक संचयी बारंबारता
1000–5000	45	....
5000–10000	19	....
10000–15000	16	....
15000–20000	02	....
20000–25000	05	....
	कुल N = 87	

(3) एक कक्षा में 62 विद्यार्थियों ने गणित विषय में 100 में से प्राप्त अंक नीचे दिए हैं ।

0–10, 10–20 ..... वर्ग लेकर बारंबारता सारिणी और संचयी बारंबारता (से अधिक) बनाइए ।

55, 60, 81, 90, 45, 65, 45, 52, 30, 85, 20, 10,
75, 95, 09, 20, 25, 39, 45, 50, 78, 70, 46, 64,
42, 58, 31, 82, 27, 11, 78, 97, 07, 22, 27, 36,
35, 40, 75, 80, 47, 69, 48, 59, 32, 83, 23, 17,
77, 45, 05, 23, 37, 38, 35, 25, 46, 57, 68, 45,
47, 49

बनाई गई सारिणी के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(i) 40 या 40 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?
(ii) 90 या 90 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?
(iii) 60 या 60 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?
(iv) 0–10 इस वर्ग की निम्न वर्ग सीमा के बराबर या उससे अधिक संचयी बारंबारता कितनी है ?

(4) उपरोक्त उदाहरण (3) के लिए 'से कम' संचयी बारंबारता सारिणी बनाएँ तथा सारिणी के अनुसार निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(i) 40 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?
(ii) 10 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?
(iii) 60 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?
(iv) 50–60 वर्ग की 'से कम' संचयी बारंबारता कितनी होगी ?

आओ, जानें

केंद्रीय प्रवृत्तियों का मापन : (Measures of central tendancy)

केंद्रीय प्रवृत्ति : सर्वेक्षण में प्राप्त सांख्यिकीय सामग्री से सामान्यतः एक गुणधर्म मिलता है । सामग्री में किसी संख्या के आसपास अन्य संख्याएँ एकत्रिकरण दिखता हैं, समूह के इस गुणधर्म को केंद्रीय प्रवृत्ति कहते हैं ।

समूह में जिस संख्या के आसपास अन्य संख्या एकत्रित होती हैं वह संख्या उस समूह का प्रतिनिधित्व करती है ऐसी संख्याओं को केंद्रीय प्रवृत्ति का मापन कहते हैं ।

सांख्यिकी में केंद्रीय प्रवृत्ति के निम्नलिखित माप (परिमाण) प्रमुखता से उपयोग में लाए जाते हैं ।

(1) माध्य (Mean) : कच्ची सामग्री में दिए गए आँकड़ों की औसत को उस समग्री का माध्य कहा जाता है ।

$$\text{सामग्री का 'माध्य'} = \frac{\text{सामग्री के सभी प्राप्तांकों का योगफल}}{\text{सामग्री के प्राप्तांकों की कुल संख्या}}$$

उदा. (1) 25, 30, 27, 23 तथा 25 इन प्राप्तांकों का माध्य ज्ञात करें ।

हल : माध्य $= \frac{25+30+27+23+25}{5} = \frac{130}{5} = 26$

उदा. (2) नौवीं कक्षा के 35 विद्यार्थियों को प्रथम सत्रांत परीक्षा में बीजगणित में 40 में से प्राप्त अंक निम्नलिखित हैं । इस आधार पर अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए ।

40, 35, 30, 25, 23, 20, 14, 15, 16, 20, 17, 37,
37, 20, 36, 16, 30, 25, 25, 36, 37, 39, 39, 40,
15, 16, 17, 30, 16, 39, 40, 35, 37, 23, 16

हल : यहाँ प्राप्तांकों की संख्या अधिक होने के कारण योग तो कर सकते है किंतु यह कार्य कठिन होगा । यहाँ 3 विद्‌यार्थियों के प्राप्तांक प्रत्येकी 30 हैं । उनके अंकों का योगफल 30 **+** 30 **+** 30 = 90 करने की अपेक्षा 30 × 3 = 90 करना सुविधाजनक होगा । इसके लिए बारंबारता सारिणी उपयोगी होगी ।

संख्याशास्त्र में $\sum_{i=1}^{n}$ इस चिह्न का प्रयोग करना सुविधाजनक होता है ।

$\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$ इसका अर्थ समझ लेते हैं ।

i यह धन पूर्णांक है ।

माने, f_i प्रत्येक विद्‌यार्थी को x_i अंक प्राप्त हुए हैं । Σ (सिग्मा) यह चिह्न योग के लिए उपयोग किया जाता है। $\sum_{i=1}^{n}$ यह चिह्न i का 1 से n का मान के लिए n पदों का योगफल निश्चित करता है।

गुण	विद्‌यार्थियों की संख्या	$f_i \times x_i$
14	1	14 × 1 = 14
15	2	15 × 2 = ...
16	5	16 × .... = ...
17	2	17 × 2 = 34
20	3	.... × 3 = ...
23	2	23 × 2 = ...
25	3	25 × 3 = ...
30	3	.... × .... = ...
35	2	35 × 2 = 70
36	2	.... × .... = ...
37	4	..... × .... = ...
39	3	39 × 3 = 117
40	3	.... × .... = 120
	N= $\boxed{}$	$\sum f_i x_i = 956$

$$\text{मध्य } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{956}{35}$$
$$= 27.31 \text{ (लगभग)}$$

∴ दी गई सामग्री का माध्य 27.31 है ।

(2) माध्यिका (Median) : सामग्री की संख्याओं को आरोही (या अवरोही) क्रम में लिखने पर मध्यभाग में आने वाली संख्या को उस सामग्री की माध्यिका कहते हैं । सामग्री में प्राप्तांकों को संख्या यदि सम संख्या हो तो मध्यभाग में आने वाली दो संख्याओं का औसत, माध्यिका मानी जाती है ।

उदा. (1) 72, 66, 87, 92, 63, 78, 54 इस सामग्री की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

हल : दिए गए प्राप्तांकों को आरोही क्रम मे लिखें ।

54, 63, 66, **72,** 78, 87, 92

इस रचना में चौथे क्रमांक पर आने वाली संख्या 72 मध्य में है ।

$\therefore$ दी गई सामग्री की माध्यिका = 72

उदा. (2) 30, 25, 32, 23, 42, 36, 40, 33, 21, 43 इस सामग्री की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

हल : दिए गए प्राप्तांक आरोही क्रम में लिखने पर

21, 23, 25, 30, **32, 33,** 36, 40, 42, 43

यहाँ प्राप्तांकों की संख्या 10 अर्थात सम है ।

$\therefore$ पाँचवीं तथा छठी दो संख्याएँ मध्य भाग में आती हैं । यह संख्याएँ क्रमशः 32 तथा 33 हैं ।

$\therefore$ सामग्री की माध्यिका $= \frac{32+33}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$

थोड़ा याद करें

सामग्री के प्राप्तांकों की संख्या n होने पर

(i) n विषम हो तो किस क्रम का प्राप्तांक उस सामग्री की माध्यिका होगी ?

(ii) n सम संख्या हो तो किस क्रम के दो प्राप्तांकों का औसत माध्यिका होगी ?

(3) बहुलक (Mode) : सामग्री में सर्वाधिक बार आने वाला प्राप्तांक ही उस सामग्री का बहुलक होता है ।

उदा. (1) 90, 55, 67, 55, 75, 75, 40, 35, 55, 95 इस सामग्री का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

हल : सामग्री के प्राप्तांक आरोही क्रम में लिखने पर कौन-सा प्राप्तांक सर्वाधिक बार आया है यह जानना आसान होगा ।

सामग्री का आरोही क्रम : 35, 40, 55, 55, 55, 67, 75, 75 90, 95

55 सर्वाधिक बार आया है ।

$\therefore$ बहुलक = 55

उदा. (2) किसी कारखाने के मजदूरों की आयु तालिका में दी है ।

आयु (वर्ष में)	19	21	25	27	30
मजदूर	5	15	13	15	7

इस आधार पर मजदूरों की आयु का बहुलक ज्ञात कीजिए ।

हल : यहाँ सर्वाधिक बारंबारता 15 है परंतु यह बारंबारता दो प्राप्तांकों की है ।

$\therefore$ बहुलक = 21 तथा 27

$\therefore$ आयु का बहुलक 21 वर्ष तथा 27 वर्ष है ।

प्रश्नसंग्रह 7.5

(1) मुकुंद का 7 वर्षों का सोयाबीन का प्रति एकड़ उत्पादन क्विंटल में क्रमशः 10,7,5,3,9,6,9 है तो प्रति एकड़ उत्पादन का माध्य ज्ञात कीजिए।

(2) दी गई सामग्री की माध्यिका ज्ञात कीजिए। 59,75,68,70,74,75,80

(3) गणित के गृहकार्य में 7 विद्‍यार्थियों को 100 में से निम्नलिखित अंक प्राप्त हुए हैं।
99, 100, 95, 100, 100, 80, 90 प्राप्तांकों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

(4) किसी कारखाने के 30 मजदूरों को मिलने वाला मासिक वेतन (रुपयों) में निम्नलिखित है।
5000, 7000, 3000, 4000, 4000, 3000, 3000, 3000, 8000, 4000,
4000, 9000, 3000, 5000, 5000, 4000, 4000, 3000, 5000, 5000,
6000, 8000, 3000, 3000, 6000, 7000, 7000, 6000, 6000, 4000
के आधार पर मजदूरों के मासिक वेतन का माध्य ज्ञात कीजिए।

(5) एक टोकरी के 10 टमाटरों का द्रव्यमान ग्राम में क्रमशः 60, 70, 90, 95, 50, 65,70, 80, 85, 95 है तो टमाटरों के द्रव्यमान की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

(6) किसी हॉकी के खिलाड़ी द्‍वारा 9 स्पर्धाओं में किए गए गोल निम्नलिखित हैं।
5, 4, 0, 2, 2, 4, 4, 3, 3 इनका माध्य, माध्यिका तथा बहुलक ज्ञात कीजिए।

(7) 50 प्राप्तांकों का माध्य 80 है। परंतु गलती से उसमें 19 के स्थान पर 91 लिया गया ऐसा बाद में ध्यान आया प्राप्तांक सही लिखने के बाद का माध्य ज्ञात कीजिए।

(8) 10 प्राप्तांक आरोही क्रम में लिखे गए हैं, 2, 3, 5, 9, $x + 1$, $x + 3$, 14, 16, 19, 20, यदि इनकी माध्यिका 11 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

(9*) 35 प्राप्तांकों का माध्य 20 है। जिसमें पहले 18 प्राप्तांकों का माध्य 15 तथा अंतिम 18 प्राप्तांकों का माध्य 25 हो तो 18 वाँ प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

(10) पाँच प्राप्तांकों का माध्य 50 है। यदि उनमें से एक प्राप्तांक कम करने पर माध्य 45 हो तो, वह प्राप्तांक कितना होगा?

(11*) किसी कक्षा में 40 विद्‍यार्थी हैं। इनमें 15 लड़के हैं। एक परीक्षा में लड़कों द्‍वारा प्राप्त अंकों का माध्य 33 तथा लड़कियों द्‍वारा प्राप्त अंकों का माध्य 35 है। कक्षा के सभी विद्‍यार्थियों द्‍वारा प्राप्त अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए।

(12) 10 विद्‍यार्थियों का वजन (किग्रा में) निम्नलिखित हैं।
40, 35, 42, 43, 37, 35, 37, 37, 42, 37 इनका बहुलक ज्ञात कीजिए।

(13) निम्नलिखित तालिका में कुछ परिवारों के 14 वर्ष से कम आयु के बच्चों की संख्या दर्शाई है। इस आधार पर 14 वर्ष से कम आयु के बच्चों की संख्या का बहुलक ज्ञात कीजिए।

बच्चों की संख्या	1	2	3	4
परिवार(बारंबारता)	15	25	5	5

(14) निम्नलिखित सामग्री का बहुलक ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक (गुण)	35	36	37	38	39	40
विद्‍यार्थी संख्या	09	07	09	04	04	02

'केंद्रीय प्रवृत्ति' के कौन-से माप लेना उचित है ?' इस प्रश्न का उत्तर इसके उद्देश्य पर निर्भर है।

माना, किसी क्रिकेट के खिलाड़ी ने लगातार 11 प्रतियोगताओं में क्रमशः 41, 58, 35, 80, 23, 12, 63, 48, 107, 9 और 73 रन बनाएँ। उसके कुल प्रदर्शन को निश्चित करते समय उसके द्‌वारा प्रत्येक प्रतियोगिता में बनाए गए रनों पर ध्यान देना आवश्यक है। अतः उसके रनों की 'केंद्रीय प्रवृत्ति माध्य' द्‌वारा दर्शाना उचित होगा।

इसी प्रकार कपड़े बनाने वाली किसी कंपनी में किस नाप के शर्ट अधिक सिलना हैं यह निश्चित करना हो तो उसके लिए (34, 36, 38, 40, 42, 44 में से) किस नाप के शर्ट अधिकतर लोग पहनते हैं इसका सर्वेक्षण करके जानना होगा अर्थात केंद्रीय प्रवृत्ति का बहुलक यह परिमाण चुनना होगा।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

(1) उचित विकल्प चुनिए।

(i) निम्नलिखित में से कौन-सी सामग्री प्राथमिक सामग्री नहीं है ?

(A) कक्षा में जाकर विद्‌यार्थियों के उपस्थिति की जानकारी एकत्रित किया।

(B) प्रत्यक्ष जाकर घर के व्यक्तियों की संख्या की जानकारी एकत्रित किया।

(C) पटवारी के पास जाकर गाँव के प्रत्येक किसान के सोयाबीन की खेती का क्षेत्रफल लिखा गया।

(D) प्रत्यक्ष देखकर नाले की स्वच्छता की जानकारी ली।

(ii) 25-35 वर्ग की उच्च वर्ग सीमा कौन-सी है?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iii) 25-35 इस वर्ग का वर्ग माध्य कौन-सा है?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iv) 0-10, 10-20, 20-30 .... ऐसे वर्गवाले बारंबारता सारिणी में 10 यह प्राप्तांक कौन-से वर्ग में समाविष्ट होगा ?

(A) 0-10 (B) 10-20 (C) 0-10 तथा 10-20 दोनों (D) 20-30

(v*) यदि $\bar{x}$ यह $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ और $\bar{y}$ यह $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_n$ का माध्य हो और $\bar{z}$ यह $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_n$ का माध्य हो तो $\bar{z} =$?

(A) $\dfrac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$ (B) $\bar{x}+\bar{y}$ (C) $\dfrac{\bar{x}+\bar{y}}{n}$ (D) $\dfrac{\bar{x}+\bar{y}}{2n}$

(vi*) पाँच संख्याओं का माध्य 50 हो तथा उसमें से 4 संख्याओं का माध्य 46 हो तो पाँचवीं संख्या कौन-सी है ?

(A) 4 (B) 20 (C) 434 (D) 66

(vii*) 100 प्राप्तांकों का माध्य 40 है। इनमें से 9 वाँ प्राप्तांक 30 है।

यदि 30 के स्थान पर 70 लिया जाए और शेष प्राप्तांकों को वही रहने दिया जाए तो नया माध्य कितना?

(A) 40.6 (B) 40.4 (C) 40.3 (D) 40.7

(viii) 19, 19, 15, 20, 25, 15, 20, 15 इस सामग्री का बहुलक कौन-सा है ?

(A) 15 (B) 20 (C) 19 (D) 25

(ix) 7, 10, 7, 5, 9, 10 की माध्यिका कौन-सी है?

(A) 7 (B) 9 (C) 8 (D) 10

(x) नीचे दी गई सारिणी के अनुसार 30-40 वर्ग की उच्च वर्ग सीमा 'से कम' प्रकार की संचयी बारंबारंता कितनी है?

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारंबारता	7	3	12	13	2

(A) 13 (B) 15 (C) 35 (D) 22

(2) 20 कर्मचारियों के वेतन का माध्य 10,250 रुपये हैं। यदि उसमें कार्यालय प्रमुख का वेतन मिला दिया जाए तो माध्य 750 रुपये से बढ़ जाता हो तो कार्यालय प्रमुख का वेतन ज्ञात कीजिए।

(3) नौ संख्याओं का माध्य 77 है, यदि इसमें एक संख्या और जोड़ दें तो माध्य 5 बढ़ जाता है। जोड़ी गई वह संख्या ज्ञात कीजिए।

(4) किसी शहर के एक महिने के प्रत्येक दिन का अधिकतम तापमान अंश सेल्सियस में निम्नलिखित है। उचित वर्ग लेकर वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारिणी (अखंडीत वर्ग) बनाइए।

29.2, 29.0, 28.1, 28.5, 32.9, 29.2, 34.2, 36.8, 32.0, 31.0,
30.5, 30.0, 33, 32.5, 35.5, 34.0, 32.9, 31.5, 30.3, 31.4,
30.3, 34.7, 35.0, 32.5, 33.5, 29.0, 29.5, 29.9, 33.2, 30.2

सारिणी के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए।

(i) अधिकतम तापमान $34^\circ c$ से कम है ऐसे कितने दिन हैं?

(ii) अधिकतम तापमान $34^\circ c$ या उससे अधिक है ऐसे कितने दिन हैं ?

(5) यदि निम्नलिखित प्राप्तांकों का माध्य 20.2 हो तो p का मान ज्ञात कीजिए।

x_i	10	15	20	25	30
f_i	6	8	p	10	6

(6) मॉडल हायस्कूल नांदपुर के 9 वीं कक्षा के 68 विद्‌यार्थियों ने गणित की लिखित परीक्षा में 80 में से निम्नलिखित अंक प्राप्त किए।

70, 50, 60, 66, 45, 46, 38, 30, 40, 47, 56, 68,
80, 79, 39, 43, 57, 61, 51, 32, 42, 43, 75, 43,
36, 37, 61, 71, 32, 40, 45, 32, 36, 42, 43, 55,
56, 62, 66, 72, 73, 78, 36, 46, 47, 52, 68, 78,
80, 49, 59, 69, 65, 35, 46, 56, 57, 60, 36, 37,
45, 42, 70, 37, 45, 66, 56, 47

30-40, 40-50 ...इस प्रकार वर्ग लेकर उच्च वर्ग सीमा 'से कम' प्रकार की संचयी बारंबारता सारिणी बनाएँ। उस सारिणी के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए।

(i) 80 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्‌यार्थी कितने हैं?

(ii) 40 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्‌यार्थी कितने हैं?

(iii) 60 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्‌यार्थी कितने हैं?

(7) उदा. 6 में दी गई सामग्री के आधार पर 30−40, 40−50 .... ऐसे वर्ग लेकर निम्न वर्ग सीमा से अधिक प्रकार की संचयी बारंबारता बंटन सारिणी बनाए तथा उसके आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

(i) 70 या उससे अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्‍यार्थी कितने हैं?

(ii) 30 या उससे अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्‍यार्थी कितने हैं?

(8) निम्नलिखित आरोही क्रम में लिखें गए 10 प्राप्तांकों 45,47,50,52,x, x+2, 60,62,63,74 की माध्यिका 53 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए तथा

दी गई सामग्री का माध्य एवं बहुलक ज्ञात कीजिए ।

गणितीय मनोरंजन

पास्कल का त्रिभुज

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

....

....

....

संख्याओं का उपरोक्त आकृतिबंध त्रिभुजाकार रचना है । यह रचना 'पास्कल का त्रिभुज' के नाम से पहचाना जाता है । इस रचना की आगे की तीन पंक्तियाँ आप पूर्ण कीजिए । इस रचना में क्षैतिज पंक्ति में आने वाली संख्या $(x + y)$ द्‍विपद के घातांक के क्रमिक विस्तार से आने वाले गुणांक होते हैं । निम्नलिखित विस्तार देखिए ।

$(x + y)^0 = 1$

$(x + y)^1 = 1x + 1y$

$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$

$(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$

इस विस्तार में x तथा y के घातांकों का निरीक्षण कीजिए । इस आधार पर $(x + y)^{10}$ का विस्तार लिखने का प्रयत्न कीजिए ।

उत्तर सूची

1. समुच्चय

प्रश्नसंग्रह 1.1

(1) (i) $\{2, 4, 6, 8, ...\}$ (ii) $\{2\}$ (iii) $\{-1, -2, -3, ...\}$ (iv) {सा, रे, ग, म, प, ध, नी}

(2) (i) $\frac{4}{3}$ यह समुच्चय Q का घटक है । (ii) -2 यह समुच्चय N का घटक नहीं है ।

(iii) समुच्चय P का घटक p इस प्रकार है की p यह विषम संख्या है ।

(4) (i) A = {चैत्र, वैशाख, ज्येष्ठ, आषाढ़, श्रावण, भाद्रपद, आश्विन, कार्तिक, (अग्रहायण) मार्गशीर्ष, पौष, माघ, फाल्गुन}

(ii) X = {C, O, M, P, L, E, N, T} (iii) Y = {नाक, कान, आँख, जीभ, त्वचा}

(iv) $Z = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

(v) E = {एशिया, अफ्रीका, यूरोप, ऑस्ट्रेलिया, अंटार्क्टिका, दक्षिणी अमेरिका, उत्तरी अमेरिका}

(5) (i) $A = \{x \mid x = n^2, n \in N, n \leq 10\}$ (ii) $B = \{x \mid x = 6n, n \in N, n < 9\}$

(iii) C = {y | y ये 'SMILE' इस शब्द के अक्षर है ।}

(iv) D = {z | z यह सप्ताह के दिन है ।} (v) X = {y | y ये 'eat' इस शब्द के अक्षर हैं}

प्रश्नसंग्रह 1.2

(1) A = B = C (2) A = B (3) समुच्चय A और C यह रिक्त समुच्चय है ।

(4) (i), (iii), (iv), (v) इन उदाहरणों के समुच्चय सीमित है एवं (ii), (vi), (vii) इनके समुच्चय अनंत समुच्चय है ।

प्रश्नसंग्रह 1.3

(1) (i), (ii), (iii), (v) के विधान असत्य है तो (iv), (vi) के विधान सत्य है ।

(4) $\{1\}, \{3\}, \{2\}, \{7\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 7\}, \{3, 2\}, \{3, 7\}, \{2, 7\}, \{1, 3, 2\}, \{1, 2, 7\}, \{3, 2, 7\}, \{1, 3, 2, 7\}$ ऐसे कोई भी 3

(5) (i) $P \subseteq H,\ P \subseteq B,\ I \subseteq M,\ I \subseteq B,\ H \subseteq B,\ M \subseteq B$ (ii) समुच्चय B

(6) (i) N, W, I में से कोई भी समुच्चय (ii) N, W, I में से कोई भी समुच्चय

(7) गणित में 50% से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय

प्रश्नसंग्रह 1.4

(1) $n(B) = 21$ (2) एक भी पेय न पीने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 5

(3) कुल विद्यार्थियों की संख्या = 70

(4) पर्वतारोहण तथा आकाशदर्शन में से किसी का शौक न रखने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 20

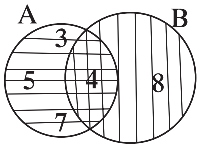
सिर्फ पर्वतारोहण में रुचि रखने वाले विद्यार्थी = 20 सिर्फ आकाशदर्शन में रुचि रखने वाले विद्यार्थी = 70

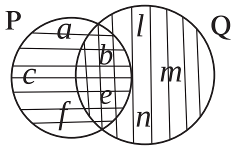
(5) (i) $A = \{x, y, z, m, n\}$ (ii) $B = \{p, q, r, m, n\}$

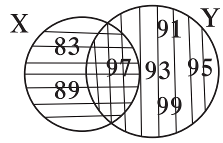
(iii) $A \cup B = \{x, y, z, m, n, p, q, r\}$ (iv) $U = \{x, y, z, m, n, p, q, r, s, t\}$

(v) $A' = \{p, q, r, s, t\}$ (vi) $B' = \{x, y, z, s, t\}$ (vii) $(A \cup B)' = \{s, t\}$

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

(1) (i) (C) (ii) (D) (iii) (C) (iv) (B) (v) (A) (vi) (A)
(2) (i) (A) (ii) (A) (iii) (B) (iv) (C)
(3) सिर्फ अंग्रेजी बोलने वाले 57, सिर्फ फ्रेंच बोलने वाले 28, दोनों भाषा बोलने वाले 15
(4) 135 (5) 12 (6) 4
(7) (i) 

(ii) 

(iii) 

(8) $S \subseteq X$, $V \subseteq X$, $S \subseteq X$, $T \subseteq X$, $S \subseteq Y$, $S \subseteq V$, $S \subseteq T$, $V \subseteq T$, $Y \subseteq T$,
(9) $M \cup \phi = M$, $M \cap \phi = \phi$
(10) U = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13}, A = {1, 2, 3, 5, 7} B = {1, 5, 8, 9, 10}
$M \cup B$ = {1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10}, $A \cap B$ = {1, 5}

(11) $n(A \cup B) = 16$

2. वास्तविक संख्या

प्रश्नसंग्रह 2.1

(1) सांत : (i), (iii), (iv) अनवसानी आवर्ती (अखंड आवर्ती) : (ii), (v)

(2) (i) 0.635 (ii) $0.\overline{25}$ (iii) $3.\overline{285714}$ (iv) 0.8 (v) 2.125

(3) (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{37}{99}$ (iii) $\frac{314}{99}$ (iv) $\frac{1574}{99}$ (v) $\frac{2512}{999}$

प्रश्नसंग्रह 2.2

(4) (i) −0.4, −0.3, 0.2 जैसी असंख्य संख्या
(ii) −2.310, −2.320, −2.325 जैसी असंख्य संख्या
(iii) 5.21, 5.22, 5.23 जैसी असंख्य संख्या
(iv) −4.51, −4.55, −4.58 जैसी असंख्य संख्या

प्रश्नसंग्रह 2.3

(1) (i) 3 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 2 (v) 3
(2) (i), (iii), (vi) करणी है तथा (ii), (iv), (v) करणी नहीं है ।
(3) सजातीय करणी : (i), (iii), (iv) तथा विजातीय करणी : (ii), (v), (vi)
(4) (i) $3\sqrt{3}$ (ii) $5\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{10}$ (iv) $4\sqrt{7}$ (v) $2\sqrt{42}$
(5) (i) $7\sqrt{2} > 5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247} < \sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$
(iv) $5\sqrt{5} < 7\sqrt{5}$ (v) $4\sqrt{42} > 9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3} < 9$ (vii) $7 > 2\sqrt{5}$
(6) (i) $13\sqrt{5}$ (ii) $10\sqrt{5}$ (iii) $24\sqrt{3}$ (iv) $\frac{12}{5}\sqrt{7}$

(7) (i) $18\sqrt{6}$ (ii) $126\sqrt{5}$ (iii) $6\sqrt{10}$ (iv) 80

(8) (i) 7 (ii) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (iii) $\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{62}$.

(9) (i) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{14}}{14}$ (iii) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$ (iv) $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ (v) $\frac{11}{3}\sqrt{3}$

प्रश्नसंग्रह 2.4

(1) (i) $-3+\sqrt{21}$ (ii) $\sqrt{10}-\sqrt{14}$ (iii) $-18+13\sqrt{6}$

(2) (i) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$ (ii) $\frac{3\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)}{2}$ (iii) $28-16\sqrt{3}$ (iv) $4-\sqrt{15}$

प्रश्नसंग्रह 2.5

(1) (i) 13 (ii) 5 (iii) 28 (2) 2 या $\frac{4}{3}$ (ii) 1 या 6 (iii) -2 या 18 (iv) 0 या -40

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

(1) (i) B (ii) D (iii) C (iv) D (v) A

(vi) C (vii) C (viii) C (ix) A (x) B

(2) (i) $\frac{555}{1000}$ (ii) $\frac{29539}{999}$ (iii) $\frac{9306}{999}$ (iv) $\frac{357060}{999}$ (v) $\frac{30189}{999}$

(3) (i) $-0.\overline{714285}$ (ii) $0.\overline{81}$ (iii) 2.2360679... (iv) $9.\overline{307692}$ (v) 3.625

(5) (i) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (ii) $-\frac{5}{3}\sqrt{5}$

(6) (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{10}$ (v) $\sqrt{2}$ (vi) $\sqrt{11}$

(7) (i) $6\sqrt{3}$ (ii) $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ (iii) $\frac{15}{2}\sqrt{6}$ (iv) $-25\sqrt{3}$ (v) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

(8) (i) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ii) $\frac{2\sqrt{7}}{21}$ (iii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (iv) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{37}$ (v) $\frac{6\left(4\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{23}$

3. बहुपद

प्रश्नसंग्रह 3.1

(1) (i) नहीं क्योंकि $\frac{1}{y}$ में y का घातांक (-1) है ।

(ii) नहीं क्योंकि $5\sqrt{x}$ में x का घातांक $\left(\frac{1}{2}\right)$ अपूर्णांक है ।

(iii) है । (iv) नहीं क्योंकि $2m^{-2}$ में घातांक (-2) है । (v) है ।

(2) (i) 1 (ii) $-\sqrt{3}$, (iii) $-\frac{2}{3}$

(3) (i) x^7 (ii) $2x^{35}-7$ (iii) x^8-2x^5+3 इन तीनों उदाहरणों में इस प्रकार के अनेक उत्तर हो सकते हैं।

(4) (i) 0 (ii) निश्चित घात नहीं बता सकते । (iii) 2 (iv) 10 (v) 1 (vi) 5 (vii) 3 (viii) 10

(5) (i) वर्ग (ii) रेखीय (iii) रेखीय (iv) घन (v) वर्ग (vi) घन

(6) (i) $m^3 + 5m + 3$ (ii) $y^5 + 2y^4 + 3y^3 - y^2 - 7y - \frac{1}{2}$

(7) (i) (1, 0, 0, −2) (ii) (5, 0) (iii) (2, 0, −3, 0, 7) (iv) $\left(\frac{-2}{3}\right)$

(8) (i) $x^2 + 2x + 3$ (ii) $5x^4 - 1$ (iii) $-2x^3 + 2x^2 - 2x + 2$

(9) द्विपद बहुपद : x^2; $2x^2 + 5x + 10$; $3x^2 + 5x$; त्रिघात बहुपद : $x^3 + x^2 + x + 5$; $x^3 + 9$

रेखीय बहुपद : $x + 7$; द्विपद : $x + 7$, $x^3 + 9$; त्रिपद : $2x^2 + 5x + 10$; एकपद : x^2

प्रश्नसंग्रह 3.2

(1) (i) $a + bx$ (ii) xy (iii) $10n + m$

(2) (i) $6x^3 - 2x^2 + 2x$ (ii) $-2m^4 + 2m^3 + 2m^2 + 3m - 6 + \sqrt{2}$ (iii) $5y^2 + 6y + 11$

(3) (i) $-6x^2 + 10x$ (ii) $10ab^2 + a^2b - 7ab$

(4) (i) $2x^3 - 4x^2 - 2x$ (ii) $x^8 + 2x^7 + 2x^5 - x^3 - 2x^2 - 2$ (iii) $-4y^4 + 7y^2 + 3y$

(5) (i) $x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 0$

(ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2 = (x^2 - x)(5x^3 + 9x^2 + 6x + 8) + (8x + 2)$

(6) $a^4 + 7a^2b^2 + 2b^4$

प्रश्नसंग्रह 3.3

(1) (i) भागफल = $2m + 7$, शेष = 45

(ii) भागफल = $x^3 + 3x - 2$, शेष = 9

(iii) भागफल = $y^2 + 6y + 36$, शेष = 0

(iv) भागफल = $2x^3 - 3x^2 + 7x - 17$, शेष = 51

(v) भागफल = $x^3 - 4x^2 + 13x - 52$, शेष = 200

(vi) भागफल = $y^2 - 2y + 3$, शेष = 2

प्रश्नसंग्रह 3.4

(1) 5 (2) 1 (3) $4a^2 + 20$ (4) −11

प्रश्नसंग्रह 3.5

(1) (i) −41 (ii) 7 (iii) 7 (2) (i) 1, 0, −8 (ii) 4, 5, 13 (iii) −2, 0, 10

(3) 0 (4) 2 (5) (i) 17 (ii) $2a^3 - a^2 - a$ (iii) 1544 (6) 92 (7) है

(8) 2 (9) (i) नहीं (ii) है (10) 30 (11) है

(13) (i) −3 (ii) 80

प्रश्नसंग्रह 3.6

(1) (i) $(x + 1)(2x - 1)$ (ii) $(m + 3)(2m - 1)$ (iii) $(3x + 7)(4x + 11)$

(iv) $(y - 1)(3y + 1)$ (v) $(x + \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 1)$ (vi) $(x - 4)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

(2) (i) $(x - 3)(x + 2)(x - 2)(x + 1)$ (ii) $(x - 13)(x - 2)$

(iii) $(x - 8)$ $(x + 2)$ $(x - 4)$ $(x - 2)$ (iv) $(x^2 - 2x + 10)$ $(x^2 - 2x - 2)$

(v) $(y^2 + 5y - 22)$ $(y + 4)$ $(y + 1)$ (vi) $(y + 6)$ $(y - 1)$ $(y + 4)$ $(y + 1)$

(v) $(x^2 - 8x + 18)$ $(x^2 - 8x + 13)$

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

(1) (i) D (ii) D (iii) C (iv) A (v) C (vi) A (vii) D (viii) C (ix) A (x) A

(2) (i) 4 (ii) 0 (iii) 9

(3) (i) $7x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 9$ (ii) $5p^4 + 2p^3 + 10p^2 + p - 8$

(4) (i) (1, 0, 0, 0, 16) (ii) (1, 0, 0, 2, 3, 15)

(5) (i) $3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 7x + 18$ (ii) $6x^3 + x^2 + 0x + 7$ (iii) $4x^3 + 5x^2 - 3x + 0$

(6) (i) $10x^4 + 13x^3 + 9x^2 - 7x + 12$ (ii) $p^3q + 4p^2q + 4pq + 7$

(7) (i) $2x^2 - 7y + 16$ (ii) $x^2 + 5x + 2$

(8) (i) $m^7 - 4m^5 + 6m^4 + 6m^3 - 12m^2 + 5m + 6$

(ii) $5m^5 - 5m^4 + 15m^3 - 2m^2 + 2m - 6$

(9) शेष = 19 (10) $m = 1$ (11) कुल जनसंख्या $= 10x^2 + 5y^2 - xy$

(12) $b = \frac{1}{2}$ (13) $11m^2 - 8m + 5$ (14) $-2x^2 + 8x + 11$ (15) $2m + n + 7$

4. अनुपात और समानुपात

प्रश्नसंग्रह 4.1

(1) (i) 6 : 5 (ii) 2 : 3 (iii) 2 : 3

(2) (i) 25 : 11 (ii) 35 : 31 (iii) 2 : 1 (iv) 10 : 17 (v) 2 : 1 (vi) 220 : 153

(3) (i) 3 : 4 (ii) 11 : 25 (iii) 1 : 16 (iv) 13 : 25 (v) 4 : 625

(4) 4 मनुष्य (5) (i) 60% (ii) 94% (iii) 70% (iv) 91% (v) 43.75%

(6) आभा की आयु 18 वर्ष एवं माँ की आयु 45 वर्ष (7) 6 वर्ष (8) श्रेया की वर्तमान आयु 8 वर्ष ।

प्रश्नसंग्रह 4.2

(1) (i) क्रमशः 20, 49, 2.5 (ii) क्रमशः 7, 27, 2.25

(2) (i) $1 : 2\pi$ (ii) $2 : r$ (iii) $\sqrt{2} : 1$ (iv) 34 : 35

(3) (i) $\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18} > \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1} > \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) 80° (ii) अल्बर्ट की वर्तमान आयु 25 वर्ष, सलीम की वर्तमान आयु 45 वर्ष

(iii) लंबाई 13.5 सेमी, चौड़ाई 4.5 सेमी (iv) 124, 92 (v) 20, 18

(5) (i) 729 (ii) 45 : 7 (6) 2 : 125 (7) $x = 5$

प्रश्नसंग्रह 4.3

(1) (i) 22 : 13 (ii) 125 : 71 (iii) 316 : 27 (iv) 38 : 11

(2) (i) 3 : 5 (ii) 1 : 6 (iii) 7 : 43 (iv) 71 : 179 (3) 170 : 173

(4) (i) $x = 8$ (ii) $x = 9$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = 6$ (v) $x = \frac{9}{14}$ (vi) $x = 3$

प्रश्नसंग्रह 4.4

(1) (i) 36, 22 (ii) 16, $2a - 2b + 2c$

(2) (i) 29 : 21 (ii) 23 : 7 (4) (i) $x = 2$ (ii) $y = 1$

प्रश्नसंग्रह 4.5

(1) $x = 4$ (2) $x = \frac{347}{14}$ (3) 18, 12, 8 अथवा 8, 12, 18 (6) $\frac{x+y}{xy}$

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

(1) (i) B (ii) C (iii) B (iv) D (v) C

(2) (i) 7 : 16 (ii) 2 : 5 (iii) 5 : 9 (iv) 6 : 7 (v) 6 : 7

(3) (i) 1 : 2 (ii) 5 : 4 (iii) 1 : 1

(4) (i) तथा (iii) सतत अनुपात में है। (ii) तथा (iv) सतत अनुपात में नहीं है। (5) $b = 9$

(6) (i) 7.4% (ii) 62.5% (iii) 73.33% (iv) 31.25% (v) 12%

(7) (i) 5 : 6 (ii) 85 : 128 (iii) 1 : 2 (iv) 50 : 1 (v) 3 : 5

(8) (i) $\frac{17}{9}$ (ii) 19 (iii) $\frac{35}{27}$ (iv) $\frac{13}{29}$

(11) $x = 9$

5. दो चरांकवाले रेखीय समीकरण

प्रश्नसंग्रह 5.1

(3) (i) $x = 3;\ y = 1$ (ii) $x = 2;\ y = 1$ (iii) $x = 2;\ y = -2$

(iv) $x = 6;\ y = 3$ (v) $x = 1;\ y = -2$ (vi) $x = 7;\ y = 1$

प्रश्नसंग्रह 5.2

(1) 5 रुपयों के 30 नोट तथा 10 रुपयों के 20 नोट हैं ।

(2) $\frac{5}{9}$ (3) प्रियंका की आयु 20 वर्ष, दीपिका की आयु 14 वर्ष (4) 20 सिंह, 30 मोर

(5) प्रारंभिक वेतन 3900 रुपये, वार्षिक वृद्धि 150 रुपये

(6) ₹ 4000 (7) 36 (8) $\angle A = 90^0$, $\angle B = 40^0$, $\angle C = 50^0$

(9) 420 सेमी (10) 10

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

(1) (i) A (ii) C (iii) C

(2) (i) $x = 2;\ y = 1$ (ii) $x = 5;\ y = 3$ (iii) $x = 8;\ y = 3$

(iv) $x = 1;\ y = -4$ (v) $x = 3;\ y = 1$ (vi) $x = 4;\ y = 3$

(3) (i) $x = 1;\ y = -1$ (ii) $x = 2;\ y = 1$ (iii) $x = 26;\ y = 18$ (iv) $x = 8;\ y = 2$

(4) (i) $x = 6;\ y = 8$ (ii) $x = 9;\ y = 2$ (iii) $x = \frac{1}{2};\ y = \frac{1}{3}$ (5) 35

(6) ₹ 69 (7) प्रत्येक की मासिक आय क्रमशः 1800 रुपये तथा 1400 रुपये

(8) लंबाई 347 इकाई, चौड़ाई 207 इकाई (9) 40 किमी/घंटा, 30 किमी/घंटा

(10) (i) 54, 45 (ii) 36, 63 आदि ।

6. आर्थिक नियोजन

प्रश्नसंग्रह 6.1

(1) ₹ 1200 (2) दूसरे वर्ष के बाद का कुल निवेश 42,000 रुपये, मूल निवेश पर 16% हानि

(3) मासिक आय 50,000 रुपये (4) श्री फर्नांडिस (5) ₹ 25,000

प्रश्नसंग्रह 6.2

(1) (i) आयकर नहीं भरना होगा (ii) भरना होगा (iii) भरना होगा

(iv) भरना होगा (v) भरना नहीं होगा (2) ₹ 9836.50

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

(1) (i) A (ii) B (2) आय ₹ 8750

(3) हीरालाल का प्रतिशत लाभ 36.73%, रमणिकलाल का प्रतिशत लाभ 16.64%, हीरालाल

(4) ₹ 99383.75 (5) ₹ 4,00,000 (6) 12.5%

(7) रमेश की बचत 48000 रुपये ; सुरेश की बचत 51000 रुपये; प्रीति की बचत 36000 रुपये

(8) (i) ₹ 213000 (ii) ₹ 7500 (iii) कर नहीं है ।

7. सांख्यिकी

प्रश्नसंग्रह 7.2

(1) प्राथमिक सामग्री : (i), (iii), (v) द्‌वितियक सामग्री : (ii), (iv)

प्रश्नसंग्रह 7.3

(1) निम्न वर्ग सीमा = 20, उच्च वर्ग सीमा = 25 (2) 37.5 (3) 7-13

प्रश्नसंग्रह 7.4

(3) (i) 38 (ii) 3 (iii) 19 (iv) 62 (4) (i) 24 (ii) 3 (iii) 43 (iv) 43

प्रश्नसंग्रह 7.5

(1) 7 क्विंटल (2) 74 (3) 100 (4) ₹ 4900 (5) 75 ग्राम

(6) माध्य = 3, माध्यिका = 3, बहुलक = 4 (7) 78.56 (8) $x = 9$ (9) 20 (10) 70

(11) 34.25 (12) 37 किग्रा (13) 2 (14) 35 तथा 37

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

(1) (i) C (ii) B (iii) D (iv) B (v) A (vi) D

(vii) B (viii) A (ix) C (x) C

(2) ₹ 26000 (3) ₹ 127

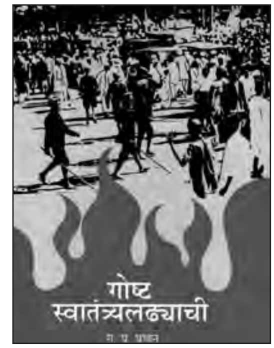
(4) (i) 24 (ii) 06

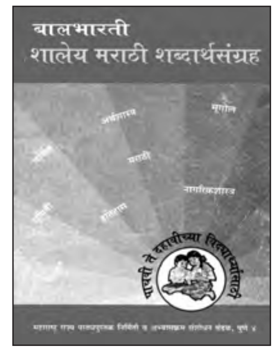
(5) P = 20

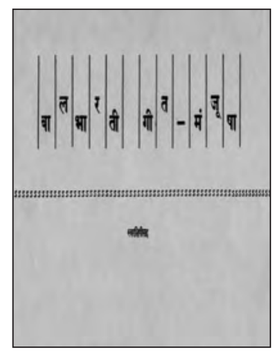
(6) (i) 66 (ii) 14 (iii) 45

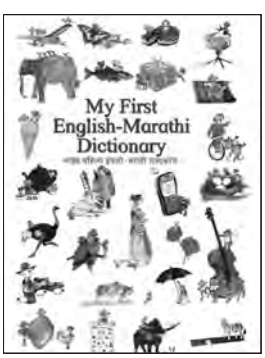
(7) (i) 11 (ii) 68

(8) $x = 52$, माध्य = 55.9, बहुलक = 52









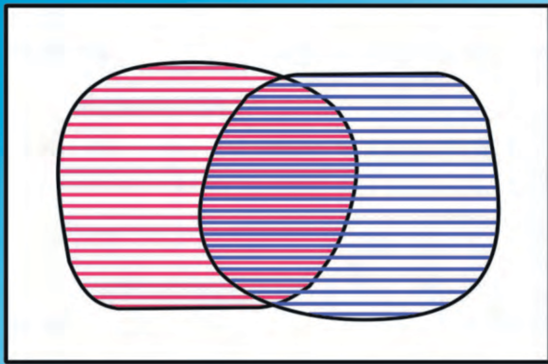
- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.

पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५



$$x + y = 4$$

$$2x + 3y = 3$$

$$x = \boxed{}, \quad y = \boxed{}$$

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ,

पुणे – ४११ ००४

हिंदी गणित इ. ९वी भाग-१ ₹ 64.00