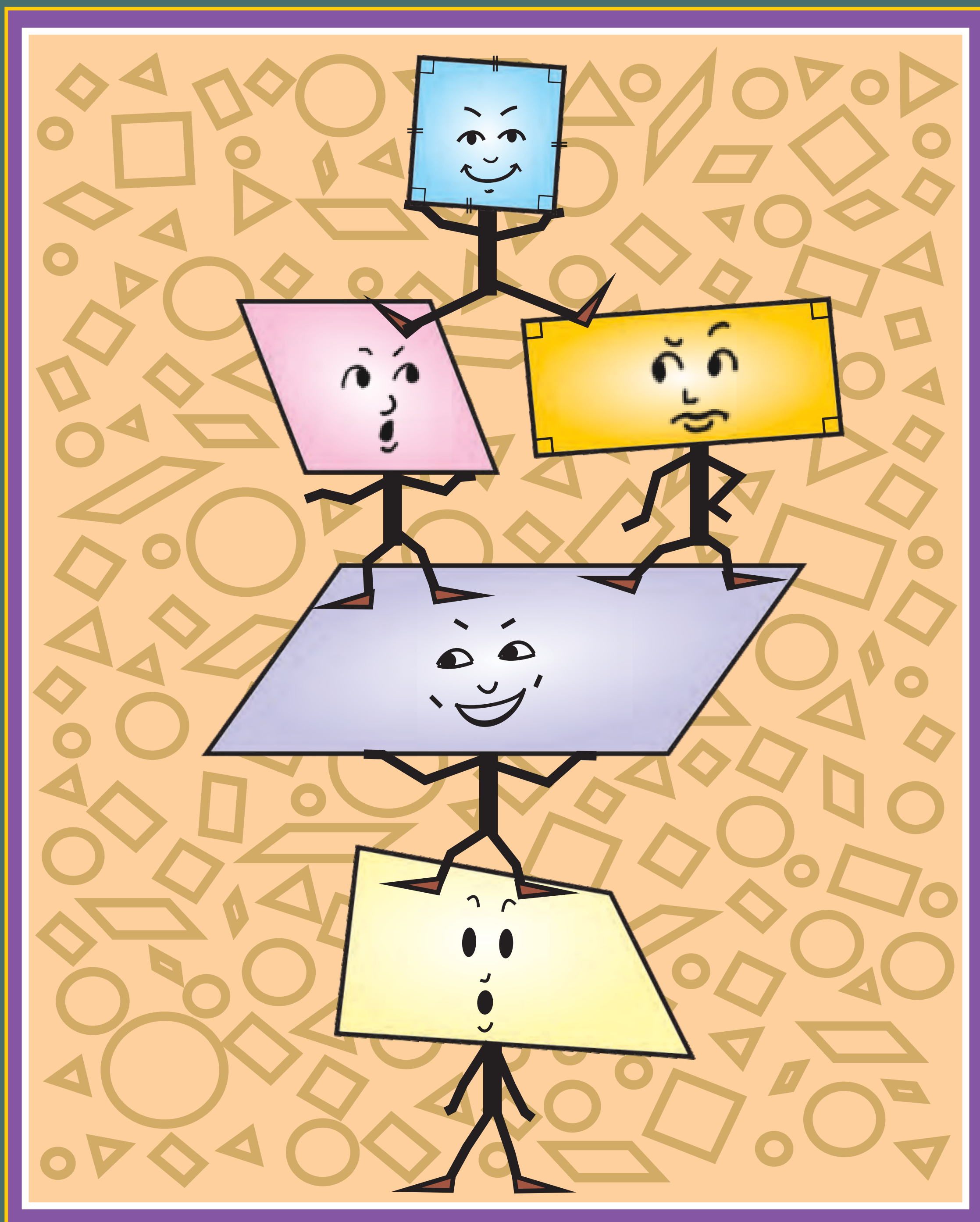
గణితశాస్త్రం

ఎనిమిదవ తరగతి



భారత సంవిధానము

పార్ట్ – IV A

ప్రాథమిక బాధ్యతలు

51 ఎ) ప్రాథమిక బాధ్యతలు

ప్రతి పౌరుడు ఈ క్రింది బాధ్యతలను మనసారా స్వీకరించి బాధ్యతాయుతంగా ప్రవర్తించవలెను.

ఎ) రాజ్యాంగ శాసనబద్ధుడై యుండుట. శాసనమందలి ఆశయములనూ, శాసనం స్థాపించే సంస్థలనూ, జాతీయ పతకాన్ని, జాతీయ గీతాన్ని అంకితభావంతో గౌరవించుట.

బి) స్వాతంత్ర్యోద్యమ స్ఫూర్తితో అన్ని రంగాలలో వ్యవహరించుట.

సి) దేశ సార్వభౌమత్వాన్ని, సమన్వయతనూ, సమగ్రతను రక్షించుట.

డి) దేశరక్షణలో అనుక్షణం సంసిద్ధుడై ఉండుట.

ఇ) ప్రజాజీవనంలో అన్యోన్యతనూ, భ్రాతృభావాన్ని పోషించుట, మత, భాష, ప్రాంతీయతత్త్వాలకు వర్గవైరుధ్యములకు అతీతముగా ఉండుట. స్త్రీలను అగౌరవపరచే ఆచారములను విడనాడుట.

ఎఫ్) అమూల్యమైన భారతీయ చారిత్రక సంపదనూ, సుసంపన్న సంస్కృతినీ పరిరక్షించుట.

జి) పర్యావరణాన్ని అడవులను, కొలనులనూ, నదులనూ రక్షించుట, అభివృద్ధి పరచుట, మృగరక్షణ జలజంతు జీవరాసులపై కరుణార్తత.

హెచ్) శాస్త్రీయ మరియు మానవతా దృక్పథాలను అలవరచుకొనుట, జిజ్ఞాసను పెంపొందించు కొనుట, సంస్కరణ తత్వమును పెంపొందించుట.

ఐ) హింసను విడనాడుట, ప్రజల ఆస్తుల విధ్వంసం చర్యలను నిరోధించుట.

జె) వ్యక్తిత్వ శక్తి సామర్థ్యాల ఔన్నత్యాన్ని పెంపొందించుకొనుట ద్వారా మరియూ సమిష్టి కృషి ద్వారా అన్ని రంగాలలో గణనీయమైన స్థాయిని చేరుటకొరకు, శిఖరాగ్ర సాధనకొరకు నిరంతరం కృషి సల్పుట.

కె) రక్షకులు లేదా సంరక్షకులుగా ఉన్నవారందరూ ఆరు నుంచి 14 సంవత్సరముల లోపల పసివారికి విద్యాభ్యాసము చేయు అవకాశమును కల్పించవలెను.

ప్రభుత్వ తీర్మానం క్రమ సంఖ్య : అభ్యాస్-2116/(ప్ర.క్ర.43/16) ఎస్‌డి-4 తేదీ 25.4.2016 ప్రకారం స్థాపించబడిన సమన్వయ సమితి యొక్క తేదీ 29.12.2017 రోజు సమావేశంలో ఈ పాఠ్య పుస్తకమును 2018-19 విద్యాసంవత్సరం నుంచి నిర్దేశించుటకుగాను అనుమతి ఇవ్వబడినది.

గణితశాస్త్రం

ఎనిమిదవ తరగతి

మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె-411 004.

మీ స్మార్ట్‌ఫోన్‌తో DIKSHA App నుపయోగించి పాఠ్యపుస్తకం మొదటి పుటలోని QR CODE ను స్కాన్ చేసిన డిజిటల్ పాఠ్యపుస్తకం మరియు ప్రతి పాఠంలోని QR CODE ను స్కాన్ చేసిన ఆ పాఠానికి సంబంధించిన అధ్యయన-అధ్యాపనలకు ఉపయుక్తమగు దృశ్య-శ్రవణ సాహిత్యం లభిస్తుంది.

ప్రథమ ప్రచురణ : 2018
పునర్ముద్రణ : 2022

గణిత విషయనిపుణుల సమితి

డా॥ మంగళ నార్లీకర్	(అధ్యక్షులు)
డా॥ జయశ్రీ అత్రే	(సభ్యులు)
శ్రీ వినాయక్ గోడ్‌బోలె	(సభ్యులు)
శ్రీ రమాకాంత్ సరోదే	(సభ్యులు)
శ్రీమతి ప్రాజక్తి గోఖలె	(సభ్యులు)
శ్రీ సందీప్ పంచ్‌భాయ్	(సభ్యులు)
శ్రీమతి పూజా జాధవ్	(సభ్యులు)
శ్రీమతి ఉజ్వల గోడ్‌బోలె	(సభ్యకార్యదర్శి)

గణిత విషయం - రాష్ట్ర అధ్యయనవర్గ సభ్యులు

శ్రీమతి జయశ్రీ పురందరె	శ్రీమతి తరూబెన్ పోపట్
శ్రీ రాజేంద్ర చౌదరి	శ్రీ. ప్రమోద్ ఠోంబరే
శ్రీ రామా వన్యాళ్‌కర్	డా. భారతి సహస్రబుద్ధే
శ్రీ అన్నాప్పా పారిట్	శ్రీ వసంత్ శెవాలే
శ్రీ అన్సార్ శేఖ	శ్రీ ప్రసాద్ కాశిద్
శ్రీ శ్రీపాద్ దేశపాండె	శ్రీ మిలింద్ భాకరే
శ్రీ సురేష్ దాతె	శ్రీ జ్ఞానేశ్వర్ మష్గాల్‌కర్
శ్రీ ఉమేష్ రేళే	శ్రీ గణేష్ కోల్‌తే
శ్రీ బన్సీ హావళే	శ్రీ సందేష్ సొనావ్‌ణే
శ్రీమతి రోహిణి శిర్కె	శ్రీ సుధీర్ పాటిల్
శ్రీ ప్రకాష్ జెండే	శ్రీ ప్రకాశ్ కాప్‌సే
శ్రీ లక్ష్మణ్ దావణ్‌కర్	శ్రీ రవీంద్ర ఖందారే
శ్రీ శ్రీకాంత్ రత్న పార్ఖీ	శ్రీమతి స్వాతి ధర్మాధికారి
శ్రీ సునిల్ శ్రీవాస్తవ్	శ్రీ అరవింద్ కుమార్ తివారి
శ్రీ అన్సారి అబ్దుల్ హమిద్	శ్రీ మల్లేషం బేతి
శ్రీమతి సువర్ణ దేశ్‌పాండే	శ్రీమతి ఆర్యా భిడె

ముఖచిత్రం మరియు కంప్యూటర్ స్కెచ్
శ్రీ సందీప్ కోళి, చిత్రకారులు, పుణె

అక్షర కూర్పు :
శ్రీ విజయ్‌కుమార్ దండె, పుణె

ప్రధాన సంయోజకులు :
శ్రీమతి ఉజ్వల శ్రీకాంత్ గోడ్‌బోలే
ఇ. విశేషాధికారిణి, గణితం
పాఠ్యపుస్తక సంస్థ, పుణె.

అనువాదం సమీక్ష : శ్రీ సత్యనారాయణ ఈరయ్య సందుపట్ల
శ్రీ మురళీ రాజేశం కుందారం

పునస్సమీక్ష : శ్రీ మల్లేషం కృష్ణహరి బేతి

అనువాద సంయోజకులు : **డా॥ శ్రీమతి తులసీ భారత్,**
విశేషాధికారిణి-తెలుగు,
పాఠ్యపుస్తక సంస్థ, పుణె

నిర్మితి :
శ్రీ సచ్చితానంద్ ఆఫళే
ముఖ్యనిర్మితి అధికారి
శ్రీ సంజయ్ కాంబ్లే
నిర్మితి అధికారి
శ్రీ ప్రశాంత్ హరణె
నిర్మితి సహాయకులు

కాగితం :
70 జి.యస్.యమ్. క్రీమ్‌వోవ్

ముద్రణాదేశం :

ముద్రకులు :

ప్రకాశకులు
శ్రీ వివేక్ ఉత్తమ్ గోసావి, నియంత్రకులు,
పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి సంస్థ,
ప్రభాదేవి, ముంబయి-25.

భారత సంవిధానము

ప్రస్తావన

భారతదేశ ప్రజలమగు మేము, భారతదేశమును **సార్వభౌమ్య సామ్యవాద లౌకిక ప్రజాస్వామ్య గణరాజ్యముగ** నెలకొల్పుటకు మరియు అందలి పౌరులెల్లరకు సామాజిక, ఆర్థిక, రాజకీయ **న్యాయమును**, భావము, భావప్రకటన, విశ్వాసము, ధర్మము, ఆరాధన -- వీటి **స్వాతంత్ర్యమును**, అంతస్తులోను, అవకాశములోను **సమానత్వమును** చేకూర్చుటకు; మరియు వారందరిలో వ్యక్తి గౌరవమును, జాత్యైక్యతను, అఖండతను తప్పక ఒనగూర్చు **సౌభ్రాత్రమును**, పెంపొందించుటకు; సత్యనిష్ఠా పూర్వకముగ తీర్మానించుకొని, ఈ 1949వ సంవత్సరము నవంబరు ఇరువది యారవ దినమున **మా సంవిధాన సభయందు ఇందుమూలముగ, ఈ సంవిధానమును అంగీకరించి, అధిశాసనము చేసి మాకు మేము ఇచ్చుకొన్నవారమైతిమి.**

జాతీయ గీతము

జనగణమన – అధినాయక జయ హే
భారత – భాగ్యవిధాతా
పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కల, బంగ,
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా,
ఉచ్ఛల జలధితరంగ,
తవ శుభ నామే జాగే, తవ శుభ ఆశిస మాగే,
గాహే తవ జయగాథా,
జనగణ మంగలదాయక జయ హే,
భారత – భాగ్యవిధాతా
జయ హే, జయ హే, జయ హే,
జయ జయ జయ, జయ హే

ప్రతిజ్ఞ

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరు నా సహోదరులు.

నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికి సర్వదా నేను కృషిచేస్తాను.

నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా నడచుకొంటాను.

నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను. వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

ప్రస్తావన

విద్యార్థి మిత్రులారా,

ఎనిమిదవ తరగతిలోకి మీ అందరికి స్వాగతం!

మీరు ఒకటి నుండి ఏడు తరగతుల గణితం పాఠ్యపుస్తకాలను అభ్యసించారు. ఇప్పుడు ఎనిమిదవ తరగతి గణితం పాఠ్యపుస్తకమును మీ చేతులకు అందిస్తున్నందుకు మాకు చాలా ఆనందంగా అనిపిస్తున్నది.

గణితశాస్త్రం బాగా అర్థం కావడానికి, మనోరంజకముగా అనిపించుటకై ఈ పాఠ్యపుస్తకంలో కొన్ని కృత్యాలు, నిర్మాణాలు ఇవ్వబడినవి. వాటిని తప్పకుండా చేసి చూడండి. వాటికి సంబంధించి మీలో మీరు చర్చించండి. దానినుండి గణితంలోని కొన్ని కొత్త ధర్మాలు మీకు అర్థం అవుతాయి.

పాఠ్యపుస్తకంలోని ప్రతి పాఠాన్ని చాలా జాగ్రత్తగా సూక్ష్మంగా చదవాలని మా అపేక్ష. ఏ భాగమైన సరిగా అర్థం కాకపోతే ఉపాధ్యాయుల, తల్లిదండ్రుల లేదా ఇతర విద్యార్థుల సహాయంతో అర్థం చేసుకోండి. దానికై సాంకేతిక సమాచార సహాయం గూడా తీసుకోండి. ప్రతి పాఠ్యాంశం చివర క్యూఆర్ కోడ్ ఇవ్వబడింది. వాటిని కూడా ఉపయోగించుకోండి.

పాఠ్యంలో వివరించిన అంశాలు అర్థం అయినట్లయితే అభ్యాసమాలికలోని ఉదాహరణలను సాధించండి. అభ్యాసము వలన పాఠ్యభాగంలోని ముఖ్యమైన అంశాలు భాగా అర్థమయి, గుర్తుండిపోతాయి. అభ్యాసమాలికలోని ఉదాహరణలాంటివి అనేక ఉదాహరణలు మీరు కూడా తయారు చేయగలగుతారు. అభ్యాసమాలికలోని నక్షత్రపు గుర్తుతో సూచించినవి కొంచెం సవాలులాంటివి, వాటిని కూడా తప్పక సాధించండి.

గణితంలోని అభ్యాసాలలో అనేకసార్లు యిచ్చిన సమాచారం తక్కువ అనిపించనను తార్కిక ఆలోచనలతో ఎక్కువ నిష్కర్షలు పొందవచ్చు. ఉదాహరణకు త్రిభుజ సర్వసమానత్వ నియమాలు, మున్ముందుగల అభ్యాసాలలో ఈ నియమాల ఉపయోగం బాగా కలుగనుంది. గనుక వాటిని సూక్ష్మంగా అభ్యసించండి.

జీవితంలో ఆర్థిక వ్యవహారంలో ఉపయోగింపబడే చక్రవడ్డీ, రాయితీ, కమిషన్, చరత్వం, నియమిత, అనియతమైన వివిధ ఆకృతుల యొక్క వైశాల్యం, కొన్ని త్రిమితీయ ఆకారాల ఘనపరిమాణము మొదలగునవి ఈ పాఠ్య పుస్తకంలో వివరించబడినవి.

గణితం అధ్యయనం చేయునప్పుడు క్రింది తరగతులలో నేర్చుకొన్న జ్ఞానమును ఉపయోగించాల్సి వస్తుంది. కనుక వివిధ పాఠ్యభాగాలలోని ముఖ్యమైన సూత్రాలు, ధర్మాలు మొదలగునవి 'ఇది నా కర్థమైంది' శీర్షిక క్రింద గడులలో ఇవ్వబడినవి. వాటిని ఖచ్చితంగా గుర్తుంచుకోండి.

ఎనిమిదవ తరగతి ప్రాథమిక విద్యలో అఖరు సంవత్సరము, కనుక ఈ సంవత్సరం బాగా నేర్చుకొని మాధ్యమిక స్థాయిలోని విద్యాభ్యాసానికై తొమ్మిదవ తరగతిలోనికి ఆత్మవిశ్వాసంతో ప్రవేశించండి. దానికై మీ అందరికి హృదయపూర్వక శుభాకాంక్షలు.

(డా. సునీల్ మగర్)

సంచాలకులు

మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు

పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె-411004.

పుణె

తేది : ఏప్రిల్ 18, 2018

భారతీయ సౌరమాన తేది: 28 చైత్రం 1940

ఎనిమిదవ తరగతి - గణితం అధ్యయన ఫలితాలు

అధ్యయన-అధ్యాపన ప్రక్రియ

అధ్యయనార్థులను వ్యక్తిగతంగా/జంటగా/సమూహంగా అవకాశమిచ్చి కృత్యం చేయుటకు ప్రోత్సహించుట.

- అకరణీయ సంఖ్యల క్రియలన్నిటితో ఉదాహరణలు శోధించుట మరియు ఆ క్రియలలోని చిత్రాకృతులను (pattern) శోధించుట.
- వర్గసంఖ్యలు, వర్గమూలం, ఘనసంఖ్యలు, ఘనమూలం మొదలగు వాటి చిత్రాకృతులను శోధించి పూర్ణసంఖ్యలకు ఘాతాంకాలకు నియమాలను శోధించుట.
- సామాన్య సమీకరణాలు తయారు చేయుటకు పరిస్థితులను కల్పించుట మరియు సాధారణ పద్ధతినుపయోగించి వాటిని సాధించుటకు ప్రోత్సహించుట.
- సంఖ్యల వితరణ ధర్మాలనుబట్టి, రెండు బీజీయ పదాలు లేదా బహుపదుల మొ.వాటి గుణకార అనుభవం ఇచ్చుట మరియు వేర్వేరు బీజీయ నిత్యసమానత్వపు ప్రత్యక్ష ఉదాహరణలు సామాన్యీకరణం చేయుట.
- రెండు సంఖ్యలను కారణాంకాలుగా విభజించుట అనునది పూర్వజ్ఞానంపై, కృత్యం సహాయంతో బీజీయ పదముల కారణాంకాలు మరియు వాటి పరిచయం చేసుకొనుట.
- శాతాల ఉపయోగం అంతర్భుతంగా ఉన్న మినహాయింపు, లాభం-నష్టం, సరళవడ్డీ, చక్రవడ్డీ మొదలగు సంఘటనలను కల్పించుట.
- సరళ (బారు) వడ్డీ మళ్ళీ మళ్ళీ తీసి చక్రవడ్డీ సూత్రాన్ని పొందుట, దీనికొరకు వివిధ ఉదాహరణలు తయారు చేసి ఇచ్చుట.
- ఒక రాశి వేరొక రాశిపై ఆధారపడి ఉండే వివిధ సంఘటనలను కల్పించుట. రెండు రాసులు ఒకదానితోబాటు మరొకటి పెరుగుతాయి లేదా ఒక రాశి పెరిగినపుడు రెండవ రాశి తగ్గుతుంది. ఇలాంటి సంఘటనలను గుర్తించుటకు ప్రోత్సహించుట. ఉదా.వాహన వేగం పెరిగితే అది దూరాన్ని అధిగమించుటకు పట్టే కాలం తగ్గుతుంది.
- వేర్వేరు చతుర్భుజాల కోణాలు మరియు భుజాలను కొలుచుట మరియు వాటిలోని సంబంధాల చిత్రాకృతులను శోధించుట, సామాన్యీకరణం చేసి నియమాలు శోధించుట మరియు తర్వాతి ఉదాహరణలను పరీక్షించుట.
- సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ధర్మాలు, చతుర్భుజ నిర్మాణం చేసి వాటి కర్ణాలు గీసి, భుజాలు మరియు కోణాలు కొలిచి, పరీక్షించి చూసుట మరియు కారణాలిచ్చుట.
- రేఖాగణిత సాధనాల సహాయంతో వివిధ చతుర్భుజాల నిర్మాణాల ప్రాత్యక్షికం ఇచ్చుట.

అధ్యయన ఫలితాలు

అధ్యయనార్థి

08.71.01 చిత్రాకృతుల ద్వారా అకరణీయ సంఖ్యల కూడిక, తీసివేత, గుణకారం మరియు భాగహారం మొదలగు వాటి ధర్మాలను సామాన్యీకరణ చేయును.

08.71.02 ఇచ్చిన రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యగల అత్యధిక అకరణీయ సంఖ్యలను శోధించి తీయును.

08.71.03 వివిధ పద్ధతులలో వర్గం, ఘనం, వర్గమూలం మరియు ఘనమూలం కనుగొనును.

08.71.04 పూర్ణసంఖ్యల ఘాతాంకాల ఉదాహరణలు సాధించును.

08.71.05 చరరాసులనుపయోగించి సమస్యలు మరియు దైనందిన జీవనంలోని ఉదాహరణలు సాధించును.

08.71.06 బీజీయ రాసులను గుణకారం చేయును.

ఉదా. $(2x + 5)\ (3x^2 + 7)$ విస్తరించును.

08.71.07 దైనందిన జీవనంలోని సమస్యలు సాధించుటకు బీజీయ నిత్యసమానత్వ ధర్మాలను ఉపయోగించును.

08.71.08 రిబేట్ (మినహాయింపు) మరియు చక్రవడ్డీ ఉదాహరణలలో లాభం లేదా నష్టం కనుగొనుటకు శాతాల సంకల్పనను ఉపయోగించును.

08.71.09 ముద్రించిన విలువ మరియు ప్రత్యక్ష మినహాయింపు ఇచ్చినపుడు మినహాయింపు శాతం కనుగొనును లేదా అమ్మిన వెల మరియు లాభం ఇచ్చినపుడు లాభాశాతం కనుగొనును.

08.71.10 అనులోమానుపాతం మరియు విలోమానుపాతంపై ఆధారపడిన ఉదాహరణలు సాధించును.

08.71.11 చతుర్భుజం యొక్క కోణాలకొలతల మొత్తం ధర్మాలనుపయోగించి చతుర్భుజం కోణాల కొలతలపై గల ఉదాహరణలు సాధించును.

08.71.12 సమాంతర చతుర్భుజం ధర్మాలను పరీక్షించి చూచును. వాటిలోని సంబంధం, కారణాలు చెప్పి స్పష్టం చేయును.

08.71.13 కంపాస్ మరియు స్కేలు సహాయంతో వివిధ చతుర్భుజాల నిర్మాణం చేయును.

08.71.14 చిత్రాకృతుల సహాయంతో ఐలర్ సూత్రాన్ని పరీక్షించును.

08.71.15 చదరపు కాగితం లేదా గ్రాపు కాగితం ఉపయోగించి బహుభుజాకృతులు మరియు సమలంబ చతుర్భుజం వీటి సుమారు వైశాల్యం కనుగొనును. అలాగే సూత్రాన్నుపయోగించి పరీక్షించును.

అధ్యయన-అధ్యాపన ప్రక్రియ	అధ్యయన ఫలితాలు
• గ్రాఫు కాగితంపై సమలంబ చతుర్భుజం మరియు ఇతర బహుభుజాకృతులు గీయుట మరియు విద్యార్థులు చదరపు ప్రమాణాలలో కొలిచి వాటి వైశాల్యం నిశ్చయించుట. • త్రిభుజం మరియు దీర్ఘచతురస్రం/(చతురస్రం) మొదలగు వాటి వైశాల్యాలను ఉపయోగించి సమలంబ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనుట. • ఘనం, దీర్ఘఘం మరియు వృత్తకూచి వంటి త్రిమితీయ ఆకృతుల ఉపరితల భాగం గుర్తించుట. • ఘనం, దీర్ఘఘనం మరియు వృత్తకూచీల ఉపరితల వైశాల్య సూత్రం దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం మరియు వృత్తవైశాల్యం సూత్రాలనుపయోగించి కనుగొనుట. • ఘనం మరియు దీర్ఘఘనం ఘనపరిమాణంను ప్రమాణాలనుపయోగించి కనుగొనుట. • సామగ్రి సేకరించుట, వాటిని వర్గీకరించుట మరియు కమ్మీరేఖాచిత్రాలు గీసి చూపుట. • ఇచ్చిన సామాగ్రి యొక్క ప్రతినిధిత్వ విలువను కనుగొనుట అనగా సామాగ్రి సగటును కనుగొనుట. • ముందుగా సర్వసమానత్వ నియమాలు నిర్ణయించి పటాలను ఒకదానిపై నొకటి ఉంచి, సర్వసమానం ధర్మాన్ని సరిచూసుకొనుట.	**08.71.16** బహుభుజాకృతుల వైశాల్యం కనుగొనును. **08.71.17** దీర్ఘఘనం మరియు వృత్తకూచి ఆకారపు వస్తువుల ఉపరితల వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణం కనుగొనుము. **08.71.18** కమ్మీరేఖాచిత్రాన్ని చదువును మరియు అర్థనిర్వచనం చేయును. **08.71.19** రెండు సమాంతర రేఖల తిర్యగ్రేఖ వలన ఏర్పడే కోణాల జతల ధర్మాలను సరిచూసుకొంటారు. **08.71.20** భు.భు.భు., భు.కో.భు., కో.భు.కో., కర్ణం, భుజం ఈ నియమాలనుపయోగించి త్రిభుజాల సర్వసమానత్వమును స్పష్టం చేయును. **08.71.21** గ్రాఫ్ కాగితం లేదా గడుల కాగితాన్ని ఉపయోగించి సంవృతపటం వైశాల్యాన్ని సుమారుగా కనుగొంటారు. **08.71.22** నిత్యజీవితంలోని సాంఖ్యక సమాచారాన్ని బట్టి సగటు కనుగొంటారు. **08.71.23** ఇచ్చిన రేఖకు సమాంతర రేఖను నిర్మిస్తారు.

ఉపాధ్యాయులకు సూచనలు

ఎనిమిదవ తరగతి గణిత పుస్తకమును తరగతిలో బోధిస్తున్నప్పుడు ప్రశ్నోత్తరాలు, కృత్యాలు, చర్చలు, సామూహిక ఉపక్రమాల వంటి వివిధ పద్ధతులను ఉపయోగించుట ఆశించడమైనది. అందుకోసం ఉపాధ్యాయులు పాఠ్యపుస్తకాన్ని కూలంకషంగా చదివి పాఠ్యపుస్తకంలోని వివిధ కృత్యాలను విద్యార్థుల ద్వారా చేయించాలి. ఈ సందర్భంలో అర్థం చేయుటకై వెనుక, ముందరి తరగతుల పాఠ్యపుస్తకాలలోని సాహిత్యాలను అభ్యసించండి. దీనికై క్యూఆర్ కోడ్‌పైనున్న వివరాలుగూడా ఉపయోగపడును.

మన పరిసరాలలోని, భౌగోళిక, వైజ్ఞానిక, అర్థశాస్త్రం మరియు ఇతర విషయాలు గణితానికి సంబంధించినవి ఈ పుస్తకంలో పొందుపరచబడినవి. ఈ విధంగా అనేక విషయాల్లో గణితం యొక్క కల్పనాశక్తి ఉపయోగించి సాధించటానికి ఉపాధ్యాయులు విద్యార్థులకు సహాయం చేయండి. ప్రకల్పనలు, ఉపక్రమాలను ప్రత్యక్షంగా చేసి చూపించండి. అందువల్ల నిత్యవ్యవహారంలో గణిత ఉపయోగం స్పష్టమయి, విద్యార్థులకు అది నేర్చుకోవడంలోని ప్రాముఖ్యత తెలుస్తుంది. గణితంలో సంకల్పన, స్పష్టీకరణ చాలా సుళువైన భాషలో ఇవ్వడం జరిగినవి. అభ్యాసమాలికలో యిచ్చిన ఉదాహరణల ఆధారంలో అనేక ఉదాహరణలను తయారుచేసి విద్యార్థులు సాధించుటకై ఇవ్వాలి ఆలాగే కొత్త ఉదాహరణలు తయారు చేయుటకై వారిని ప్రోత్సహించాలి.

విద్యార్థులకు కొన్ని సవాళ్ళవంటి ప్రశ్నలను నక్షత్రగుర్తుతో ఇవ్వబడినవి. అధిక వివరాలకై అను శీర్షికలో కొంచెం వివరణ యివ్వడం జరిగింది. వీటి ఆధారంగా గణితంలోని ముందుగల అభ్యాసాలు అభ్యసించుటకై విద్యార్థులకు ఉపయోగపడును, ఈ ఎనిమిదవ తరగతి గణితం పాఠ్యపుస్తకం మీకు తప్పకుండ నచ్చుతుందని మా ఆశ.

విషయసూచిక

విభాగం 1

విభాగం 2

1 అకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్యలు

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

సహజ సంఖ్యల సమూహం, పూర్ణాంకాల సమూహం, పూర్ణసంఖ్యల సమూహం మరియు అకరణీయ సంఖ్యా సమూహాలను మనం పరిచయం చేసుకొన్నాం.

సహజ సంఖ్యల సమూహం	పూర్ణాంకాల సమూహం	పూర్ణసంఖ్యల సమూహం
1,2,3,4,...	0,1,2,3,4, ...	...,−4,−3,−2,−1, 0, 1, 2, 3,...

అకరణీ సంఖ్యల సమూహం

$\frac{-25}{3}, \frac{10}{-7}, -4, 0, 3, 8, \frac{32}{3}, \frac{67}{5}$ మొదలగునవి.

అకరణీయ సంఖ్యల సమూహం : $\frac{m}{n}$ రూపంలోని సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలని అంటారు. ఇచట m, n లు పూర్ణసంఖ్యలు కానీ n శూన్యేతర సంఖ్య.

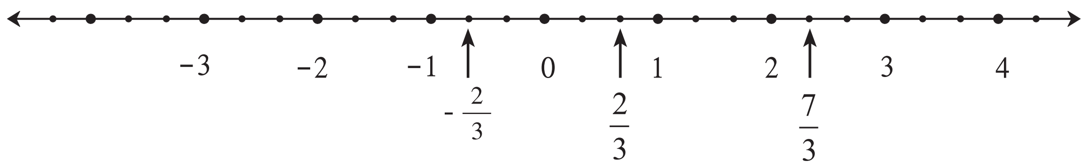
రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అసంఖ్యాకమైన అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయని మనం తెలుసుకొన్నాం.

తెలుసుకొందాం

సంఖ్యారేఖపై అకరణీయ సంఖ్యను చూపుట (To show rational numbers on a number line)

$\frac{7}{3}, 2, -\frac{2}{3}$ ఈ సహజ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై ఎలా చూపాలో చూద్దాం.

ముందుగా ఒక సంఖ్యారేఖను గీద్దాం.



- 2 అనేది అకరణీయ సంఖ్య మరియు పూర్ణసంఖ్య కూడా. దీనిని సంఖ్యారేఖపై చూపవచ్చు.
- $\frac{7}{3} = 7 \times \frac{1}{3}$, అనగా, సున్నా నుండి కుడివైపున 3 వరకు గల ప్రతి ప్రమాణమును మూడు సమాన భాగాలు చేసి చూపవచ్చును. సున్నా నుండి ఏడవ బిందువు $\frac{7}{3}$ ను చూపుతుంది. లేక, $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$, అనగా 2 తర్వాత $\frac{1}{3}$ ప్రమాణాల

దూరంలో బిందువు $\frac{7}{3}$ ను చూపుతుంది.

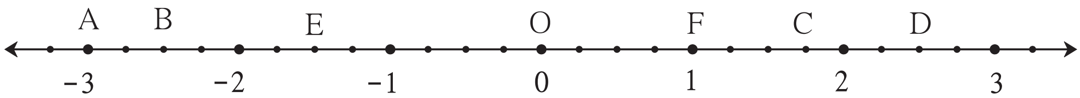
- సంఖ్యారేఖపై $-\frac{2}{3}$ అనే సంఖ్యను చూపుటకు, మొదట $\frac{2}{3}$ అనే సంఖ్యను చూపి. '0' యొక్క ఎడమవైపు అంతే దూరంలో $-\frac{2}{3}$ అనే సంఖ్యను చూపవచ్చును.

అభ్యాసమాలిక 1.1

1. సంఖ్యారేఖపై కింది అకరణీయ సంఖ్యలను చూపుము. ప్రతి ఉదాహరణకు స్వతంత్ర సంఖ్యారేఖను గీయండి.

(1) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$ (2) $\frac{7}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}$ (3) $-\frac{5}{8}, \frac{11}{8}$ (4) $\frac{13}{10}, -\frac{17}{10}$

2. ఇచ్చిన సంఖ్యారేఖను చూసి, అడిగిన ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.



(1) B బిందువు ఏ అకరణీయసంఖ్యను సూచిస్తుంది? (2) $1\frac{3}{4}$ ఈ సంఖ్య ఏ బిందువుచే చూపబడింది?

(3) $\frac{5}{2}$ అను అకరణీయ సంఖ్య D అను బిందువుచే చూపబడింది. ఈ వాక్యం సత్యమా, అసత్యమా రాయండి.

తెలుసుకొందాం

అకరణీయ సంఖ్యలలోని క్రమసంబంధం (చిన్నది పెద్దది) (Comparison of rational numbers)

సంఖ్యారేఖపై గల సంఖ్యల ప్రతి జతలో ఎడమ వైపునున్న సంఖ్య కుడి వైపునున్న సంఖ్యకంటె చిన్నదిగా ఉంటుందని మనకు తెలుసు. అలాగే అకరణీయ సంఖ్యలోని లవ, హారాలను ఒకే శూన్యేతర సంఖ్యచే గుణించినచో అదే సంఖ్య ఉంటుంది లేదా దాని విలువ మారదు. అనగా $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$, $(k \neq 0)$.

ఉదా. (1) $\frac{5}{4}$ మరియు $\frac{2}{3}$ లలో చిన్నది, పెద్దది నిర్ణయించండి. $<, =, >$ వీటిలో సరియైన చిహ్నాన్ని ఉపయోగించి రాయండి.

సాధన : $\frac{5}{4} = \frac{5\times3}{4\times3} = \frac{15}{12}$ $\frac{2}{3} = \frac{2\times4}{3\times4} = \frac{8}{12}$

$\frac{15}{12} > \frac{8}{12}$ $\therefore \frac{5}{4} > \frac{2}{3}$

ఉదా. (2) $\frac{-7}{9}, \frac{4}{5}$ ఈ అకరణీయ సంఖ్యలను పోల్చండి.

సాధన : ఋణసంఖ్య ఎల్లప్పుడు ధనసంఖ్యకంటే చిన్నది, కాబట్టి $-\frac{7}{9} < \frac{4}{5}$.

రెండు ఋణసంఖ్యలను పోల్చుటకు.

a, b లు ధనసంఖ్యలై $a < b$, అయిన $-a > -b$ దీనిని తెలుసుకొందాం.

$$\left.\begin{array}{l} 2 < 3 \text{ కానీ } -2 > -3 \\ \frac{5}{4} < \frac{7}{4} \text{ కానీ } \frac{-5}{4} > \frac{-7}{4} \end{array}\right\}$$ దీనిని సంఖ్యారేఖపై పరీక్షించి చూడండి.

ఉదా. (3) $\frac{-7}{3}, \frac{-5}{2}$ లను పోల్చండి.

సాధన : ముందుగా $\frac{7}{3}$ మరియు $\frac{5}{2}$ లను పోల్చుదాం.

$\frac{7}{3} = \frac{7\times 2}{3\times 2} = \frac{14}{6}$, $\frac{5}{2} = \frac{5\times 3}{2\times 3} = \frac{15}{6}$ మరియు $\frac{14}{6} < \frac{15}{6}$

$\therefore \frac{7}{3} < \frac{5}{2}$ $\therefore \frac{-7}{3} > \frac{-5}{2}$

ఉదా. (4) $\frac{3}{5}$ మరియు $\frac{6}{10}$ అకరణీయ సంఖ్యలు. వీటిని పోల్చి చూడండి.

సాధన : $\frac{3}{5} = \frac{3\times 2}{5\times 2} = \frac{6}{10}$ $\therefore \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

అకరణీయ సంఖ్యలను పోల్చునపుడు కింది నియమాలు ఉపయోగపడతాయి.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ అకరణీయ సంఖ్యలో b మరియు d ధనసంఖ్యలు అయినచో మరియు

(1) ఒకవేళ $a \times d < b \times c$ అయిన $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

(2) ఒకవేళ $a \times d = b \times c$ అయిన $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(3) ఒకవేళ $a \times d > b \times c$ అయిన $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

అభ్యాసమాలిక 1.2

1. కింది సంఖ్యలలో చిన్న-పెద్దను నిర్ణయించండి.

(1) $-7, -2$ (2) $0, \frac{-9}{5}$ (3) $\frac{8}{7}, 0$ (4) $\frac{-5}{4}, \frac{1}{4}$ (5) $\frac{40}{29}, \frac{141}{29}$

(6) $-\frac{17}{20}, \frac{-13}{20}$ (7) $\frac{15}{12}, \frac{7}{16}$ (8) $\frac{-25}{8}, \frac{-9}{4}$ (9) $\frac{12}{15}, \frac{3}{5}$ (10) $\frac{-7}{11}, \frac{-3}{4}$

తెలుసుకొందాం

అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశరూపం (Decimal representation of rational numbers)

అకరణీయ సంఖ్యల లవమును హారంచే భాగించునపుడు దశాంశ భిన్నాలనుపయోగించినట్లయితే ఆ సంఖ్యల దశాంశ రూపం వస్తుంది. ఉదాహరణకు, $\frac{7}{4} = 1.75$, ఇచట 7 ను 4 చే భాగించినపుడు శేషం సున్నవచ్చింది. భాగహార ప్రక్రియ పూర్తయింది.

అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క ఇలాంటి రూపమును అనావర్త దశాంశ రూపం అని అంటారు.

ప్రతి అకరణీయ సంఖ్యను ఆవర్తన దశాంశ రూపంలో రాయవచ్చువని మీకు తెలుసు.

ఉదాహరణకు, (1) $\frac{7}{6} = 1.1666... = 1.1\dot{6}$ (2) $\frac{5}{6} = 0.8333... = 0.8\dot{3}$

(3) $\frac{-5}{3} = -1.666... = -1.\dot{6}$

(4) $\frac{22}{7} = 3.142857142857... = 3.\overline{142857}$ (5) $\frac{23}{99} = 0.2323... = 0.\overline{23}$

అలాగే $\frac{7}{4} = 1.75 = 1.75000... = 1.75\dot{0}$ ఈ విధంగా సున్నానుపయోగించి అనావర్తన దశాంశ రూపాన్ని ఆవర్తన దశాంశ రూపంలో రాయవచ్చును.

అభ్యాసమాలిక 1.3

1. కింది అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశ రూపాన్ని రాయండి.

(1) $\frac{9}{37}$ (2) $\frac{18}{42}$ (3) $\frac{9}{14}$ (4) $\frac{-103}{5}$ (5) $-\frac{11}{13}$

తెలుసుకొందాం

కరణీయ సంఖ్యలు (Irrational numbers)

అకరణీయ సంఖ్యలేగాకుండా ఇంకను అనేక సంఖ్యలు సంఖ్యారేఖపై ఉంటాయి. అవి అకరణీయాలు కావు, అనగా అవి కరణీయ సంఖ్యలవుతాయి. $\sqrt{2}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్యే.

మనం $\sqrt{2}$ అనే సంఖ్యను సంఖ్యారేఖపై చూపుదాం.

- సంఖ్యారేఖపై A అను బిందువు1 అనే సంఖ్యను చూపుతుంది. సంఖ్యారేఖకు బిందువు A నుండి రేఖ l లంబంగా గీయండి. రేఖ l పై బిందువు P ను OA = AP = 1 ప్రమాణంగానుండునట్లుగా తీసుకొనండి.
- రేఖాఖండం OP గీయండి. Δ OAP అను లంబకోణ త్రిభుజం ఏర్పడింది.

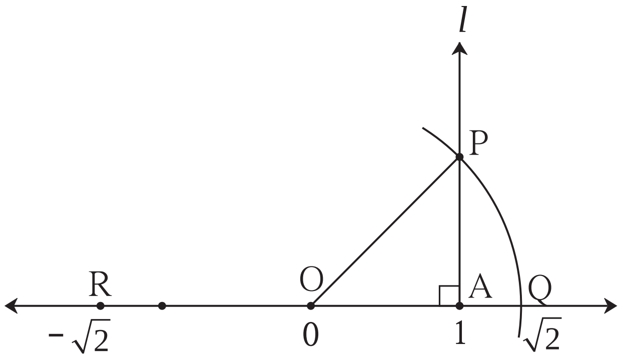
పైథాగరస్ సిద్ధాంతానుసారం

$OP^2 = OA^2 + AP^2$

$= 1^2 + 1^2 = 1+1 = 2$

$OP^2 = 2$

$\therefore\ OP = \sqrt{2}$ ...(రెండు వైపులా వర్గమూలాన్ని తీసుకొని)



- ఇపుడు O కేంద్రంగా OP వ్యాసార్థంగా తీసుకొని ఒక చాపం గీయండి. ఆ చాపం సంఖ్యారేఖను ఎచ్చట ఖండిస్తుందో, ఆ బిందువుకు Q అని పేరివ్వుము, OQ ఈదూరంకూడా $\sqrt{2}$.

అనగా $\sqrt{2}$ అను సంఖ్య, సంఖ్యారేఖపై Q బిందువుచే సూచించబడింది.

వృత్తలేఖినిలో OQ అంతదూరాన్ని తీసుకొని O యొక్క ఎడమవైపు R అను బిందువును గుర్తించినచో, ఆ బిందువుచే సూచించబడిన సంఖ్య $-\sqrt{2}$ అవుతుంది.

$\sqrt{2}$ ఈ సంఖ్య కరణీయ సంఖ్యయని మనం పై తరగతిలో నిరూపించుదాం. కరణీయ సంఖ్యల దశాంశరూపం అంతమొందని మరియు అనావర్తనమవుతుందని గూడా మనం పై తరగతిలో చూద్దాం.

గుర్తుంచుకోండి -

కింది తరగతిలో మనం π అను సంఖ్య అకరణీయంగాదని నేర్చుకొన్నాం. అనగా ఆ సంఖ్య కరణీయసంఖ్య అవుతుంది. వ్యవహారంలో మనం దాని విలువ $\frac{22}{7}$ లేదా 3.14 గా తీసుకొంటాం. కాని $\frac{22}{7}$ మరియు 3.14 లు కరణీయసంఖ్యలు.

సంఖ్యారేఖపై ఏ సంఖ్యలు బిందువులచే చూపించవచ్చో, ఆ సంఖ్యలను వాస్తవ సంఖ్యలంటారు. అన్ని కరణీయసంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై చూపవచ్చుననునది మనం చూసాం. కాబట్టి అన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు వాస్తవ సంఖ్యలువుతాయి. అలాగే అసంఖ్యాకమైన కరణీయసంఖ్యలు గూడా వాస్తవ సంఖ్యలవుతాయి.

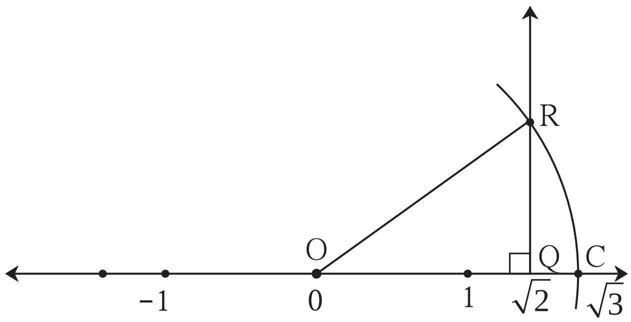
$\sqrt{2}$ అనునది కరణీయసంఖ్య. $3\sqrt{2}$, $7 + \sqrt{2}$, $3 - \sqrt{2}$ మొదలైనవన్నియు కరణీయ సంఖ్యలేనని గుర్తుంచుకోండి. ఎందుకనగా $3\sqrt{2}$ ఒకవేళ అకరణీయ సంఖ్యయినచో $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ గూడా అకరణీయసంఖ్య అయివుండాలి. కానీ ఇది నిజం కాదు.

అకరణీయ సంఖ్యను సంఖ్యారేఖపై ఎలా చూపాలో మనం చూసాం. అలాగే $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్యను మనం సంఖ్యారేఖపై చూపించాం. ఆ విధంగానే $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... ఇలా కరణీయ సంఖ్యలను గూడా మనం సంఖ్యారేఖపై చూపవచ్చు.

అభ్యాసమాలిక 1.4

1. $\sqrt{2}$ అను సంఖ్య సంఖ్యారేఖపై చూపబడినది. దాని ఆధారంగా $\sqrt{3}$ అను సంఖ్యను సంఖ్యారేఖపై చూపుటకు కింద కృత్యాల మెట్లు ఇవ్వబడినవి. ఆ మెట్లలోఖాళీ స్థలాలను సరియైన పద్ధతిలో నింపి, కృత్యమును పూర్తిచేయండి.

కృత్యం :



- సంఖ్యారేఖపై Q అను బిందువు .... సంఖ్యను సూచిస్తుంది.
- Q బిందువువద్ద ఒక లంబరేఖ గీయబడినది. ఆ రేఖపై 1 ప్రమాణం పొడవును సూచించు బిందువు R గలదు.
- OR ను కలపడం వలన Δ ORQ అను లంబకోణ త్రిభుజం ఏర్పడింది.
- l(OQ) = $\sqrt{2}$, l(QR) = 1

  $\therefore$ పైథాగరస్ సిద్ధాంతంను బట్టి

$$[l(OR)]^2 = [l(OQ)]^2 + [l(QR)]^2$$
$$= \boxed{}^2 + \boxed{}^2 = \boxed{} + \boxed{}$$
$$= \boxed{} \qquad \therefore\ l(OR) = \boxed{}$$

OR దూరాన్ని తీసుకొని గీసిన చాపం సంఖ్యారేఖను ఎచ్చటనయితే ఖండిస్తుందో, ఆ బిందువుకు C అని పేరు పెట్టండి. C బిందువు $\sqrt{3}$ అను సంఖ్యను చూపుతుంది.

2. సంఖ్యారేఖపై $\sqrt{5}$ అను సంఖ్యను చూపండి. **3★.** సంఖ్యారేఖపై $\sqrt{7}$ అను సంఖ్యను చూపండి.

జవాబుల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 1.1

2. (1) $\frac{-10}{4}$ (2) C (3) సత్యం

అభ్యాసమాలిక 1.2

1. (1) $-7 < -2$ (2) $0 > \frac{-9}{5}$ (3) $\frac{8}{7} > 0$ (4) $\frac{-5}{4} < \frac{1}{4}$ (5) $\frac{40}{29} < \frac{141}{29}$

(6) $\frac{-17}{20} < \frac{-13}{20}$ (7) $\frac{15}{12} > \frac{7}{16}$ (8) $\frac{-25}{8} < \frac{-9}{4}$ (9) $\frac{12}{15} > \frac{3}{5}$ (10) $\frac{-7}{11} > \frac{-3}{4}$

అభ్యాసమాలిక 1.3

(1) $0.\overline{243}$ (2) $0.\overline{428571}$ (3) $0.6\overline{428571}$ (4) -20.6

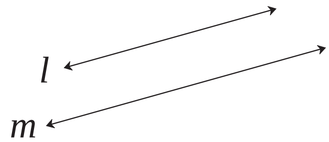
(5) $-0.\overline{846153}$

2 సమాంతర రేఖలు, తిర్యగ్రేఖ

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

ఒకే తలంలో ఉండి, పరస్పరం ఖండించుకోనట్టి రేఖలను సమాంతర రేఖలు అని అంటారు.

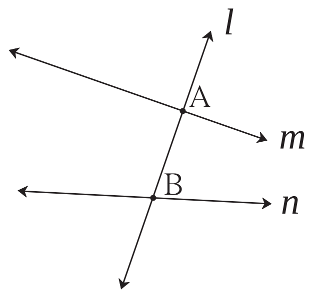
'రేఖ l , రేఖ m లు సమాంతరరేఖలు, దీనిని 'రేఖ $l \parallel$ రేఖ m' అని రాస్తారు.



తెలుసుకొందాం

తిర్యగ్రేఖ (Transversal)

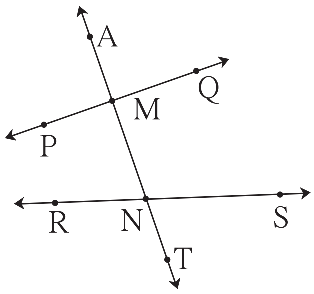
పక్కనున్న పటంలో రేఖ m, రేఖ n లను రేఖ l వరసగా బిందువు A, బిందువు B అనే రెండు భిన్న బిందువులలో ఖండిస్తుంది. రేఖ m, రేఖ n యొక్క తిర్యగ్రేఖ రేఖ l అవుతుంది.



ఒకవేళ ఏదేని రేఖ, ఇచ్చిన రెండు రేఖలను రెండు భిన్న బిందువులలో ఖండించినట్లయితే ఆ రేఖను, ఆ రెండు రేఖల తిర్యగ్రేఖ అని అంటారు.

తిర్యగ్రేఖ వలన ఏర్పడే కోణాలు (Angles made by transversal)

పక్కనున్న పటంలో తిర్యగ్రేఖ వలన ఖండన బిందువు M వద్ద నాలుగు మరియు ఖండన బిందువు N వద్ద నాలుగు ఇలా మొత్తం 8 కోణాలు ఏర్పడినట్లుగా కనిపిస్తుంది. ఎనిమిది కోణాలలోను ప్రతికోణం యొక్క భుజం తిర్యగ్రేఖపై గలదు. రెండవభుజం రెండింటిలో ఒక రేఖపై గలదు. దీనిని ఉపయోగించి కోణాల జతలు నిర్ణయించబడినవి. ఆ జతలను అభ్యసిద్ధాం.



• సంగత (సదృశ) కోణాలు (Corresponding angles)

ఏ జతలోని కోణాలయొక్క తిర్యగ్రేఖపైనున్న భుజాలు ఒకే దిశను సూచిస్తాయో తిర్యగ్రేఖపై లేని భుజాలు తిర్యగ్రేఖకు ఒకవైపున ఉంటాయో, ఆ జత సంగత కోణాలవుతాయి.

• అంతర కోణాలు (Interior angles)

ఏ జతలోని కోణం ఇచ్చిన రెండురేఖల యొక్క అంతర్భాగంలో మరియు తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపు గలవో, ఆజత అంతరకోణాల జత అవుతుంది.

పై పటంలో సంగత కోణాల జతలు –

(i) ∠AMP, ∠MNR

(ii) ∠PMN, ∠RNT

(iii) ∠AMQ, ∠MNS

(iv) ∠QMN, ∠SNT

పై పటంలో అంతర కోణాల జతలు –

(i) ∠PMN, ∠MNR

(ii) ∠QMN, ∠MNS

• ఏకాంతర కోణాలు (Alternate angles)

ఏ జతలోని కోణాలు తిర్యగ్రేఖకు ఇరువైపులా ఉంటాయో, మరియు తిర్యగ్రేఖ పైనున్న భుజాలు వ్యతిరేఖదిశను సూచిస్తాయో ఆ జత ఏకాంతర కోణాల జత అవుతుంది

పటంలో రెండు జతలు ఏకాంతర కోణాలు అయితే, రెండు జతల ఏక బాహ్యకోణాలు గలవు.

ఏకాంతర కోణాలు (రేఖల అంతర్భాగంలో గల కోణాలు)	ఏక బాహ్యకోణాలు (రేఖల బాహ్యభాగంలో గల కోణాలు)
(i) ∠PMN, ∠MNS	(i) ∠AMP, ∠TNS
(ii) ∠QMN, ∠RNM	(ii) ∠AMQ, ∠RNT

అభ్యాసమాలిక 2.1

1. పక్కనున్న పటం చూడండి. పటంలో కోణాల పేర్లు ఒక అక్షరంతో చూపబడినవి. దాని ఆధారంగా ఖాళీ గడులను నింపండి.

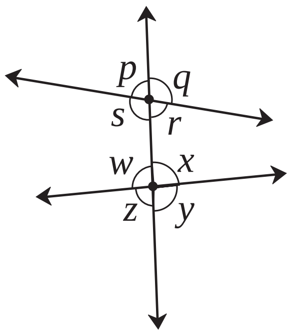
సంగత కోణాల జతలు.

(1) $\angle p$, ☐ (2) $\angle q$, ☐

(3) $\angle r$, ☐ (4) $\angle s$, ☐

ఏకాంతర కోణాల జతలు.

(5) $\angle s$, ☐ (6) $\angle w$, ☐

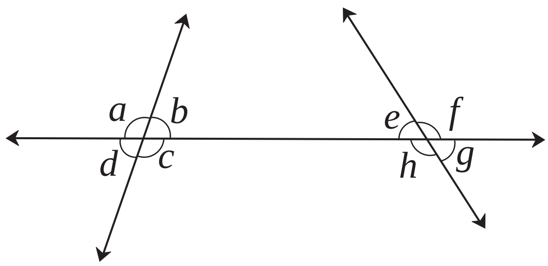


2. పక్కనున్న పటంలో చూపబడిన కోణాలను చూసి, కింది జతలను సూచించే కోణాలను రాయండి.

(1) ఏకాంతర కోణాలు

(2) సంగత కోణాలు

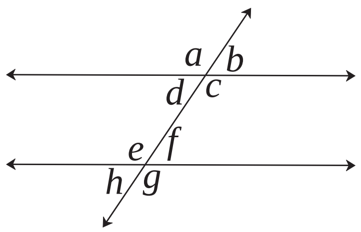
(3) అంతర కోణాలు



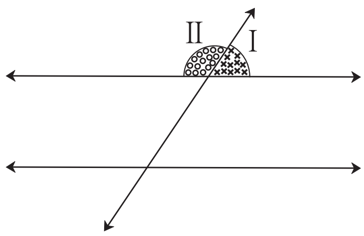
తెలుసుకొందాం

సమాంతర రేఖలు, తిర్యగ్రేఖ వలన ఏర్పడే కోణాలు, వాటి ధర్మాలు
(Properties of angles formed by two parallel lines and transversal)

కృత్యం (I): ఒక నోటుపుస్తకంలోని కాగితంపై పటం (A) లో చూపినవిధంగా రెండు సమాంతర రేఖలను గీసి, వాటికి ఒక తిర్యగ్రేఖను గీయండి. ట్రేస్ పేపర్ సహాయంతో అదే పటం యొక్క ఒక ప్రతిని ఒక కాగితంపై గీయండి. పటం (B) లో చూపిన విధంగా Iవ భాగం, IIవ భాగాలకు వేర్వేరు రంగులు వేయండి. ఈ రెండు భాగాలను కత్తెరతో కత్తిరించండి.



(A)



(B)

Iవ భాగం, IIవ భాగాలతో సూచించబడిన కోణాలు రేఖీయ జతలని గుర్తుంచుకొనుము.

ఇప్పుడు Iవ భాగం, IIవ భాగాలను పటం A లోని ఎనిమిది కోణాలలో ప్రతి కోణంపై పెట్టి చూడండి.

ఏయే కోణాలతో Iవ భాగం కచ్చితంగా ఏకీభవిస్తుంది?

ఏయే కోణాలతో IIవ భాగం కచ్చితంగా ఏకీభవిస్తుంది?

ఇలా చూపుతుంది, $\angle b \cong \angle d \cong \angle f \cong \angle h$, ఎందుకంటే కోణాలు I వ భాగంతో ఏకీభవిస్తాయి.

$\angle a \cong \angle c \cong \angle e \cong \angle g$, ఎందుకంటే కోణాలు II వ భాగంతో ఏకీభవిస్తాయి.

(1) $\angle a \cong \angle e,\ \angle b \cong \angle f,\ \angle c \cong \angle g,\ \angle d \cong \angle h$

(ఇవి సంగత కోణాల జతలు)

(2) $\angle d \cong \angle f$ మరియు $\angle e \cong \angle c$ (ఇవి ఏకాంతర కోణాల జతలు)

(3) $\angle a \cong \angle g$ మరియు $\angle b \cong \angle h$ (ఇవి ఏక బాహ్య కోణాల జతలు)

(4) $m\angle d + m\angle e = 180^\circ$ మరియు $m\angle c + m\angle f = 180^\circ$

(ఇవి అంతర కోణాల జతలు)

పదండి, చర్చిద్దాం.

రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఎనిమిది కోణాలు ఏర్పడుతాయి.

ఈ ఎనిమిది కోణాలలో ఒక కోణం కొలతనిచ్చినచో, ఇతర ఏడు కోణాల కొలతలు కనుగొనవచ్చునా?

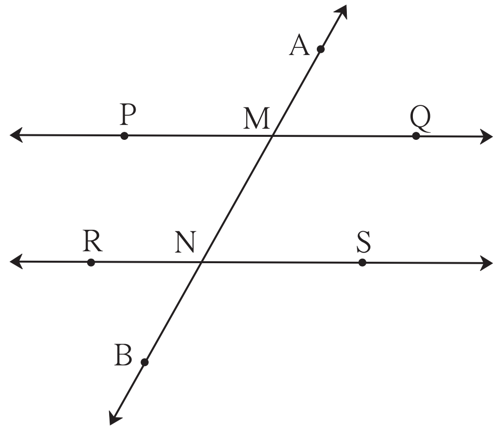
తెలుసుకొందాం

(1) సంగత కోణాల ధర్మం (Property of corresponding angles)

సమాంతర రేఖల తిర్యగ్రేఖ వలన ఏర్పడే సంగత కోణాల యొక్క ప్రతి జతలోని కోణాలు దానికొకటి సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

ఒక పక్కనున్న పటంలో రేఖ PQ || రేఖ RS.

రేఖ AB వాటి తిర్యగ్రేఖ



సంగత కోణాలు

$\angle AMP \cong \angle MNR$ $\quad$ $\angle PMN \cong \angle RNB$

$\angle AMQ \cong \angle MNS$ $\quad$ $\angle QMN \cong \angle SNB$

(2) ఏకాంతర కోణాల ధర్మం (Property of alternate angles)

సమాంతర రేఖల తిర్యగ్రేఖ వలన ఏర్పడే ఏకాంతర కోణాల యొక్క ప్రతి జతలోని కోణాలు ఒకదానితోనొకటి సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

ఏకాంతర కోణాలు	ఏక బాహ్య కోణాలు
$\angle PMN \cong \angle MNS$	$\angle AMP \cong \angle SNB$
$\angle QMN \cong \angle MNR$	$\angle AMQ \cong \angle RNB$

(3) అంతర కోణాల ధర్మం (Property of interior angles)

సమాంతర రేఖల తిర్యగ్రేఖ వలన ఏర్పడే అంతరకోణాల యొక్క ప్రతి జతలోని కోణాల కొలతల మొత్తం 180° ఉంటుంది.

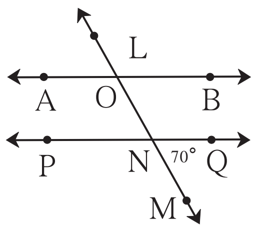
అంతర కోణాలు

$m\angle PMN + m\angle MNR = 180^\circ$

$m\angle QMN + m\angle MNS = 180^\circ$

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) పక్కనున్న పటంలో రేఖ AB || రేఖ PQ, రేఖ LM తిర్యగ్రేఖ, $m\angle MNQ = 70^\circ$, అయిన $\angle AON$ కొలతను కనుగొనండి.



సాధన :

I వ పద్ధతి

$m\angle MNQ = m\angle ONP = 70^\circ$ .....(శీర్షాభి ముఖ కోణాలు)

$m\angle AON + m\angle ONP = 180^\circ$ ...(అంతర కోణాలు)

$\therefore\ m\angle AON = 180^\circ - m\angle ONP$

$= 180^\circ - 70^\circ$

$= 110^\circ$

II వ పద్ధతి

$m\angle MNQ = 70^\circ$

$\therefore\ m\angle NOB = 70^\circ$..(సంగత కోణం)

$m\angle AON + m\angle NOB = 180^\circ$

$\therefore\ m\angle AON + 70^\circ = 180^\circ$

$\therefore\ m\angle AON = 110^\circ$

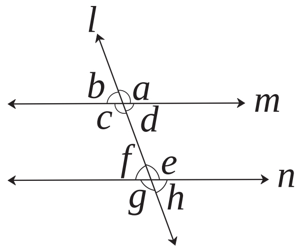
(మరోవిధంగా ఆలోచించి గూడా పైప్రశ్నను సాధించవచ్చు)

ఉదా. (2) పక్కనున్న పటంలో రేఖ $m \parallel$ రేఖ n

రేఖ l తిర్యగ్రేఖ

ఒకవేళ $m\angle b = (x + 15)^\circ$ మరియు

$m\angle e = (2x + 15)^\circ$ అయిన x విలువ కనుగొనండి.



సాధన : $\angle b \cong \angle f$ .... (సంగత కోణాలు) $\therefore m\angle f = m\angle b = (x + 15)^\circ$

$m\angle f + m\angle e = 180^\circ$ .... (రేఖీయ యుగ్మకోణాలు)

సమీకరణంలో విలువను ప్రతిక్షేపించగా,

$x + 15 + 2x + 15 = 180^\circ$ $\therefore 3x + 30 = 180^\circ$

$\therefore 3x = 180^\circ - 30^\circ$ .... (ఇరువైపులా 30 తీసివేయగా)

$x = \frac{150^\circ}{3}$ .... (ఇరువైపులా 3చే భాగించగా)

$\therefore x = 50^\circ$

ఇది నాకర్థమైంది

రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు ఏర్పడే కోణాలలో

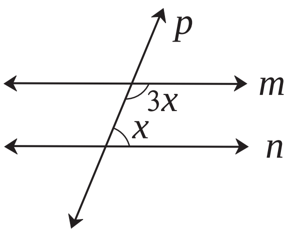
- సంగత కోణాల జతలలోని కోణాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.
- ఏకాంతర కోణాల జతలలోని కోణాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.
- అంతరకోణాల యొక్క ప్రతి జతలోని కోణాలు పరస్పరం సంపూరకాలు అవుతాయి.

అభ్యాసమాలిక 2.2

1. సరియైన పర్యాయాన్ని ఎన్నుకోండి.

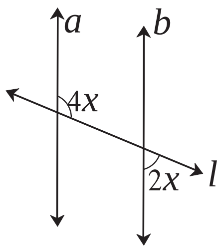
(1) పక్కనున్న పటంలో ఒకవేళ రేఖ $m \parallel$ రేఖ n మరియు రేఖ p వాటి తిర్యగ్రేఖ అయినచో x విలువ ఎంత?

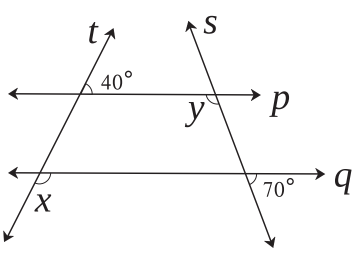
(A) 135° (B) 90° (C) 45° (D) 40°



(2) పక్కనున్న పటంలో ఒకవేళ రేఖ $a \parallel$ రేఖ b, రేఖ l వాటి తిర్యగ్రేఖ అయినచో x విలువ ఎంత?

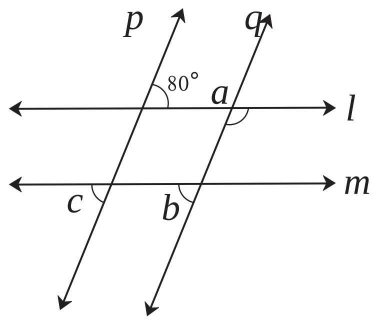
(A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 30°



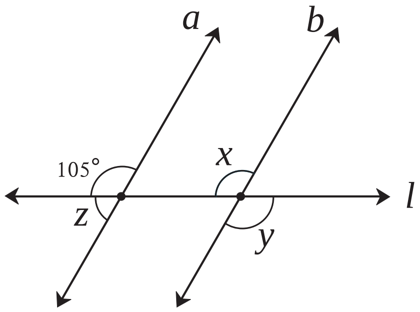


2. పక్కనున్న పటంలో రేఖ $p \parallel$ రేఖ q రేఖ t, రేఖ s లు తిర్యగ్రేఖలు. ఇచ్చిన కొలతలను బట్టి $\angle x$, $\angle y$ ల కొలతలు కనుగొనండి.

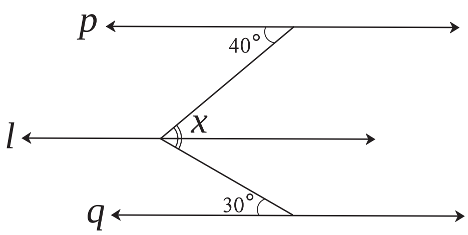
3. పక్కనున్న పటంలో రేఖ $p \parallel$ రేఖ q.
రేఖ $l \parallel$ రేఖ m. ఇచ్చిన కోణాల యొక్క కొలతలను బట్టి $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$ ల కొలతలను కనుగొని, కారణాలు రాయండి.



4★. పక్కనున్న పటంలో రేఖ $a \parallel$ రేఖ b. రేఖ l తిర్యగ్రేఖ. ఇచ్చిన కోణాల కొలతలను బట్టి $\angle x$, $\angle y$, $\angle z$ ల కొలతలను కనుగొనండి.



5★. పక్కనున్న పటంలో రేఖ $p \parallel$ రేఖ $l \parallel$ రేఖ q అయిన ఇచ్చిన కొలతలను బట్టి $\angle x$ కొలతను కనుగొనండి.



అధిక వివరాలకై

రెండు ఒకే తలంలోని రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే

– సంగత కోణాల ఒక జత సర్వసమానమైన, ఆ రేఖలు సమాంతరం.

– ఏకాంతర కోణాల ఒక జత సర్వసమానమైన, ఆ రేఖలు సమాంతరం.

– అంతర కోణాల ఒక జత సంపూరకం అయిన ఆ రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

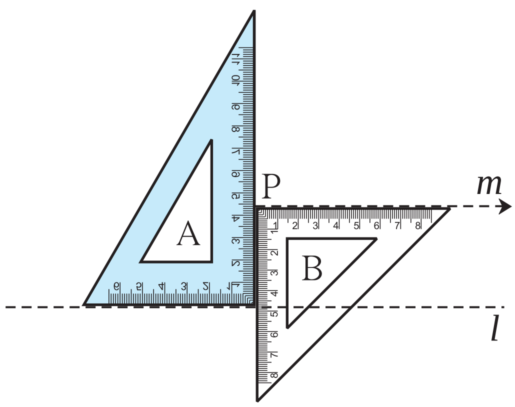
ఇచ్చిన రేఖకు సమాంతర రేఖను గీయుట. (To draw a line parallel to the given line)

నిర్మాణం (I) : ఇచ్చిన రేఖకు బాహ్య బిందువు నుండి మూలమట్టాల సహాయంతో సమాంతరరేఖను గీయుట.

పద్ధతి I : నిర్మాణ సోపానాలు.

(1) రేఖ l గీయండి. (2) రేఖ l నకు బయట P బిందువు తీసుకోండి.

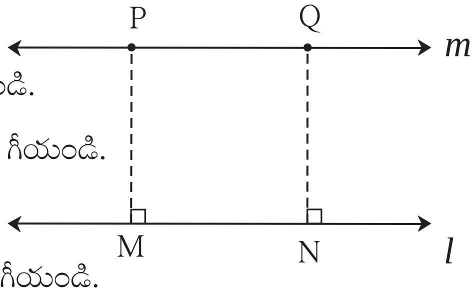
(3)పటంలో చూపిన విధంగా రెండు మూల మట్టాలను అతికించినట్లుగా ఉంచండి. A, B మూల మట్టాలను గట్టిగా పట్టుకొని, B మూల మట్టం యొక్క అంచు బిందువు P పైనున్న ఆ అంచుపై రేఖను గీయండి.



(4) ఆ రేఖకు m అని పేరు పెట్టండి.

(5) రేఖ m, రేఖ l నకు సమాంతరంగానున్నది.

పద్ధతి II : నిర్మాణ సోపానాలు.



(1) రేఖ l ను గీయండి. ఆ రేఖకు బయట P బిందువు తీసుకోండి.

(2) P బిందువు నుండి రేఖ l రేఖాఖండం PM అను లంబంను గీయండి.

(3) రేఖ l పై N అను మరొక బిందువును తీసుకోండి.

(4) బిందువు N నుండి రేఖాఖండం NQ రేఖ l నకు లంబంగా గీయండి.

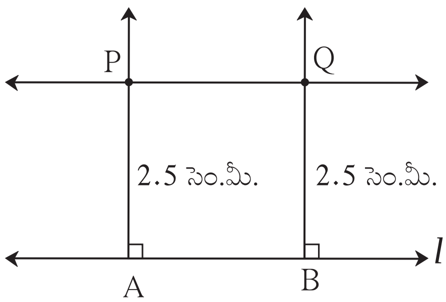
NQ = MP

(5) P, Q ల నుండి వెళ్ళునట్టి రేఖ m ను గీయండి. ఈ రేఖ l నకు సమాంతరంగా ఉంటుంది.

నిర్మాణం (II): ఇచ్చిన రేఖకు ఇచ్చిన దూరం నుండి సమాంతర రేఖను గీయుట.

పద్ధతి : రేఖ l నకు 2.5 సెం.మీ.ల దూరంలో సమాంతర రేఖను గీయండి.

నిర్మాణ సోపానాలు:



(1) రేఖ l గీయండి. (2) రేఖ l పై A, B ఇలా రెండు బిందువులు తీసుకోండి. (3) బిందువు A బిందువు B ల నుండి రేఖ l నకు లంబరేఖను గీయండి.

(4) ఆ రేఖపై, బిందువు A మరియు బిందువు B నుండి 2.5 సెం.మీ. దూరంలో బిందువు P మరియు బిందువు Q తీసుకోండి.

(5) రేఖ PQ గీయండి. (6) రేఖ PQ, రేఖ l నకు 2.5 సెం.మీ.ల దూరంలో సమాంతరంగానున్న రేఖ.

అభ్యాసమాలిక 2.3

1. రేఖ l గీయండి. ఆ రేఖ బయట బిందువు A ను తీసుకోండి బిందువు A నుండి వెళ్ళునట్టి మరియు రేఖ l నకు సమాంతరంగాగల రేఖను గీయండి.
2. రేఖ l గీయండి. ఆ రేఖ బయట బిందువు ను తీసుకోండి. బిందువు T నుండి వెళ్ళునట్టి మరియు రేఖ l నకు సమాంతరంగాగల రేఖను గీయండి.
3. రేఖ m మరియు ఆ రేఖకు 4 సెం.మీ. దూరంలో సమాంతరంగా గల రేఖ n గీయండి.

జవాబుల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 2.1 **1.** (1) $\angle w$ (2) $\angle x$ (3) $\angle y$ (4) $\angle z$ (5) $\angle x$ (6) $\angle r$

2. (1) $\angle c, \angle e, \angle b, \angle h$ (2) $\angle a, \angle e, \angle b, \angle f, \angle c, \angle g, \angle d, \angle h$

(3) $\angle c, \angle h, \angle b, \angle e.$

అభ్యాసమాలిక 2.2 **1.** (1) C (2) D **2.** $\angle x = 140°, \angle y = 110°$

3. $\angle a = 100°, \angle b = 80°, \angle c = 80°$

4. $\angle x = 105°, \angle y = 105°, \angle z = 75°$

5. $\angle x = 70°$

EE4G1V

3 ఘాతాంకం మరియు ఘనమూలం

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

కింది తరగతిలో మనం ఘాతాంకాలు, వాటి నియమాలను గూర్చి అభ్యసించాం.

- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ గుణకార రూపంలోని ఈ సంఖ్యను సంక్షిప్తంగా మనం 2^5 అని రాస్తాం.

  దీనిలో 2 భూమి 5 ను ఘాతాంకం అంటారు. 2^5 అనునది ఘాతాంక సంఖ్య అవుతుంది.

- ఘాతాంక నియమాలు : m, n లు పూర్ణ సంఖ్యలయినచో

  (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (iii) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ (iv) $a^0 = 1$

  (v) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ (vi) $(a^m)^n = a^{mn}$ (vii) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ (viii) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m$

- ఘాతాంక నియమాలనుపయోగించి కింది ఉదాహరణలలోని గడులలో సరియైన సంఖ్యను రాయండి.

  (i) $3^5 \times 3^2 = 3^{\square}$ (ii) $3^7 \div 3^9 = 3^{\square}$ (iii) $(3^4)^5 = 3^{\square}$

  (iv) $5^{-3} = \dfrac{1}{5^{\square}}$ (v) $5^0 = \square$ (vi) $5^1 = \square$

  (vii) $(5 \times 7)^2 = 5^{\square} \times 7^{\square}$ (viii) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^3 = \dfrac{\square^3}{\square^3}$ (ix) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-3} = \left(\dfrac{\square}{\square}\right)^3$

తెలుసుకొందాం

అకరణీయ సంఖ్య ఘాతాంకం గల సంఖ్య (The number with rational index)

(I) ఘాతాంకం $\dfrac{1}{n}$ రూపంలోని అకరణీయ సంఖ్య ఘాతాంకం గల సంఖ్యల అర్థం.

సంఖ్యల ఘాతాంకాలు $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \ldots, \dfrac{1}{n}$ ఈ రూపంలోని అకరణీయ సంఖ్యలున్నచో, ఆ సంఖ్యల అర్థాన్ని చూద్దాం.

ఏదేని సంఖ్య వర్గంను చూపడానికి దాని ఘాతాంకం 2 రాస్తారు. సంఖ్యల వర్గమూలంను చూపడానికి దాని ఘాతాంకమును $\dfrac{1}{2}$ గా రాస్తారు.

ఉదాహరణకు, 25 యొక్క వర్గమూలాన్ని $\sqrt{\ }$ ఈ చిహ్నాన్ని ఉపయోగించి మనం $\sqrt{25}$ ఇలా రాస్తాం. ఘాతాంకాన్ని ఉపయోగించి ఆ సంఖ్యను $25^{\frac{1}{2}}$ ఇలా రాస్తారు. అనగా $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}$.

సాధారణంగా a సంఖ్యయొక్క వర్గాన్ని a^2 అని రాస్తారు, అయితే a వర్గమూలాన్ని $\sqrt[2]{a}$ లేదా $\sqrt{a}$ లేదా $a^{\frac{1}{2}}$ అని రాస్తారు.

అదేవిధంగా a సంఖ్యయొక్క ఘనం a^3 అని రాస్తారు. అయితే a ఘనమూలాన్ని $\sqrt[3]{a}$ లేదా $a^{\frac{1}{3}}$ అని రాస్తారు.

ఉదా: $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

$\therefore$ 64 ఘనమూలాన్ని $\sqrt[3]{64}$ లేదా $(64)^{\frac{1}{3}}$ అని రాస్తారు. $64^{\frac{1}{3}} = 4$ అని గుర్తుంచుకోండి.

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$. అనగా 3 నకు 5 వ ఘాతం 243.

దీనికి విపర్యంగా 243 కు అయిదవ మూలం $(243)^{\frac{1}{5}}$ లేదా $\sqrt[5]{243}$ అని రాస్తారు. $\therefore (243)^{\frac{1}{5}} = 3$

సాధారణంగా a కు n వమూలం $a^{\frac{1}{n}}$ అని రాస్తారు.

ఉదాహరణకు, (i) $128^{\frac{1}{7}} = 128$ కి 7 వ మూలం, (ii) $900^{\frac{1}{12}} = 900$ కు 12 వ మూలం మొదలగునవి.

$10^{\frac{1}{5}} = x$ ఈ సంఖ్య ఉన్నచో $x^5 = 10$ అని గుర్తుంచుకోండి.

అభ్యాసమాలిక 3.1

1. ఘాతాంకమునుపయోగించి కింది సంఖ్యలు రాయండి.

(1) 13 కు అయిదవ మూలం (2) 9 కి ఆరవ మూలం (3) 256 వర్గమూలం

(4) 17 ఘనమూలం (5) 100 కు ఎనిమిదవ మూలం (6) 30 కి ఏడవ మూలం

2. కింది ఘాతాంక సంఖ్యలు ఏ సంఖ్యకు ఎన్నవ మూలమో రాయండి.

(1) $(81)^{\frac{1}{4}}$ (2) $49^{\frac{1}{2}}$ (3) $(15)^{\frac{1}{5}}$ (4) $(512)^{\frac{1}{9}}$ (5) $100^{\frac{1}{19}}$ (6) $(6)^{\frac{1}{7}}$

(II) సంఖ్యల ఘాతాంక స్థానంలో $\frac{m}{n}$ రూపంలోని అకరణీయ సంఖ్యగల సంఖ్యల అర్థం.

$8^2 = 64$, అని మనకు తెలుసును

64 యొక్క ఘనమూలం $= (64)^{\frac{1}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 4$

$\therefore$ 8 వర్గం యొక్క ఘనమూలం $= 4$ .... (I)

అదే విధంగా, 8 యొక్క ఘనమూలం $= 8^{\frac{1}{3}} = 2$

$\therefore$ 8 ఘన మూలం యొక్క వర్గం $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4$ ....(II)

(I) మరియు (II) నుండి

8 వర్గం యొక్క ఘనమూలం = 8 ఘనమూలం యొక్క వర్గం. అనగా $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$ అని తెలుస్తుంది.

ఘాతాంక పూర్ణసంఖ్య అయినపుడు, ఘాతాంకం యొక్క ఏ నియమాలయితే గలవో, అవే నియమాలు ఘాతాంకం అకరణీయ సంఖ్యగల సంఖ్యలకు కూడా వర్తిస్తాయి.

$\therefore$ $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$ ఈ నియమాన్ని ఉపయోగించి $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^{\frac{2}{3}}$

దీనిని బట్టి, $8^{\frac{2}{3}}$ ఈ సంఖ్య యొక్క అర్థాన్ని రెండు విధాలుగా చెప్పవచ్చు.

(i) $8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 8$ వర్గం యొక్క ఘనమూలం. (ii) $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8$ ఘనమూలం యొక్క వర్గం.

అదే విధంగా $27^{\frac{4}{5}} = \left(27^4\right)^{\frac{1}{5}}$ అనగా 27 యొక్క నాలుగవ ఘాతంనకు అయిదవ మూలం.

మరియు $27^{\frac{4}{5}} = \left(27^{\frac{1}{5}}\right)^4$ అనగా 27 యొక్క అయిదవ మూలానికి నాలుగవ ఘాతమని ఇలా రెండర్థాలు వస్తాయి.

సాధారణంగా $a^{\frac{m}{n}}$ ఈ సంఖ్య యొక్క అర్థాన్ని రెండు విధాలుగా వ్యక్తపరచవచ్చు.

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$ అనగా a యొక్క m వ ఘాతం n వ మూలం లేదా

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ అనగా a యొక్క n వ మూలం m వ ఘాతం.

అభ్యాసమాలిక 3.2

1. కింది పట్టికను పూర్తి చేయండి.

క్ర. సం.	సంఖ్య	ఎన్నవ మూలానికి ఎన్నవ ఘాతం	ఎన్నవ ఘాతానికి ఎన్నవమూలం
(1)	$(225)^{\frac{3}{2}}$	225 యొక్క వర్గమూల ఘనం	225 యొక్క ఘనం యొక్క వర్గమూలం
(2)	$(45)^{\frac{4}{5}}$		
(3)	$(81)^{\frac{6}{7}}$		
(4)	$(100)^{\frac{4}{10}}$		
(5)	$(21)^{\frac{3}{7}}$		

2. అకరణీయ ఘాతాంక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(1) 121 యొక్క అయిదవ ఘాతానికి వర్గమూలం. (2) 324 యొక్క నాలుగవ మూలానికి ఘనం.

(3) 264 యొక్క వర్గానికి అయిదవ మూలం. (4) 3 యొక్క ఘనమూలానికి ఘనం.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

- $4 \times 4 = 16$ అనగా $4^2 = 16$, అలాగే $(-4) \times (-4)$ అనగా $(-4)^2 = 16$ దీనిద్వారా 16 అను సంఖ్యకు ఒకటి ధన, మరొకటి ఋణ ఇలా రెండు వర్గమూలాలున్నాయి. సంకేతానుసారం 16 ధన వర్గమూలం $\sqrt{16}$, అయితే 16 ఋణ వర్గమూలంను $-\sqrt{16}$ ఇలా సూచిస్తారు. $\sqrt{16} = 4$ మరియు $-\sqrt{16} = -4$.
- ప్రతి ధనసంఖ్యకు రెండు వర్గమూలాలంటాయి.
- సున్నయొక్క వర్గమూలం సున్నయే అవుతుంది.

తెలుసుకొందాం

ఘనం మరియు ఘనమూలం (Cube and Cube Root)

ఏదేని సంఖ్యను మూడుసార్లు గుణించినచో వచ్చులబ్ధం ఆ సంఖ్య యొక్క ఘనం అవుతుంది. ఉదాహరణకు, $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$. అనగా 216 అను సంఖ్య 6 యొక్క ఘనం అవుతుంది.

అకరణీయ సంఖ్యల ఘనం.

ఉదా. (1) 17 ఘనం ఎంత.

$17^3 = 17 \times 17 \times 17$

$= 4913$

ఉదా. (2) (-6) ఘనం ఎంత.

$(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6)$

$= -216$

ఉదా. (3) $\left(-\frac{2}{5}\right)$ ఘనం ఎంత.

$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)$

$= -\frac{8}{125}$

ఉదా. (4) (1.2) ఘనం ఎంత.

$(1.2)^3 = 1.2 \times 1.2 \times 1.2$

$= 1.728$

ఉదా. (5) (0.02) ఘనం ఎంత.

$(0.02)^3 = 0.02 \times 0.02 \times 0.02$

$= 0.000008$

మెదడుకు మేత

ఉదా. (1) లో 17 ధనసంఖ్య. ఆ సంఖ్య యొక్క ఘనం 4913 గూడా ధన సంఖ్యయే.

ఉదా. (2) లో -6 ఈ సంఖ్య యొక్క ఘనం -216. మరికొన్ని ధన, ఋణ సంఖ్యలను తీసుకొని వాటి ఘనం చేసి చూడండి, దానిని బట్టి సంఖ్యల చిహ్నం మరియు ఆ సంఖ్యల ఘనాల చిహ్నాల మధ్య ఎలాంటి సంబంధం కనబడుతుందో వెదకండి.

ఉదా. (4) మరియు (5) లలోని ఇచ్చిన సంఖ్యలలో దశాంశబిందువు తర్వాత వచ్చే అంకెల సంఖ్య మరియు ఆ సంఖ్యల యొక్క ఘనాలలోవచ్చే దశాంశ బిందువు తర్వాత అంకెల సంఖ్యలలో ఎలాంటి సంబంధం కనిపిస్తుంది?

ఘనమూలం కనుగొనుట.

ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిలో ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గమూలాన్ని ఎలా కనుగొనాలో మనం చూసాం. అదే పద్ధతిలో మనం ఘనమూలం కనుగొందాం.

ఉదా. (1) 216 ఘనమూలం కనుగొనండి.

సాధన : ముందుగా 216 ను ప్రధాన కారణాంకాలుగా విభజిద్దాం. $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

3 మరియు 2 లు ఒక్కొక్కటి 3 సార్లు వచ్చింది. కాబట్టి దానిని ఒక్కొక్కటి తీసుకొని కింది విధంగా జతలు చేద్దాం.

$\therefore\ 216 = (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \quad = (3 \times 2)^3 = 6^3$

$\therefore\ \sqrt[3]{216} = 6$ అనగా $(216)^{\frac{1}{3}} = 6$

ఉదా. (2) -1331 ఘనమూలం కనుగొనండి.

సాధన : -1331 ఘనమూలం కనుగొనుటకు ముందుగా 1331 ప్రధాన కారణాంకాలు కనుగొందాం.

$$1331 = 11 \times 11 \times 11 = 11^3$$

$$-1331 = (-11) \times (-11) \times (-11) = (-11)^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{-1331} = -11$$

ఉదా.(4) $\sqrt[3]{0.125}$ కనుగొనండి.

సాధన :

$$\sqrt[3]{0.125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} \quad \cdots \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{10^3}} \quad \cdots \left(a^m\right)^{\frac{1}{m}} = a$$

$$= \frac{5}{10} = 0.5$$

ఉదా.(3) 1728 ఘనమూలం కనుగొనండి.

సాధన : $1728 = 8 \times 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 6$

$\therefore 1728 = 2^3 \times 6^3 = (2 \times 6)^3 \ \ldots\ldots\ a^m \times b^m = (a \times b)^m$

$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 6 = 12$ (-1728 ఘనమూలం -12 వస్తుందని గుర్తుంచుకోండి.)

అభ్యాసమాలిక 3.3

1. కింది సంఖ్యల ఘనమూలం కనుగొనండి.

   (1) 8000 (2) 729 (3) 343 (4) -512 (5) -2744 (6) 32768

2. ఘనమూలం కనుగొనండి. (1) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ (2) $\sqrt[3]{\frac{16}{54}}$

3. ఒకవేళ $\sqrt[3]{729} = 9$ అయిన $\sqrt[3]{0.000729} =$ఎంత ?

జవాబుల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 3.1 (1) $13^{\frac{1}{5}}$ (2) $9^{\frac{1}{6}}$ (3) $256^{\frac{1}{2}}$ (4) $17^{\frac{1}{3}}$ (5) $100^{\frac{1}{8}}$ (6) $30^{\frac{1}{7}}$

2. (1) 81 కి నాల్గవ మూలం (2) 49 యొక్క వర్గమూలం (3) 15 కు అయిదవ మూలం (4) 512 నకు తొమ్మిదవ మూలం (5) 100 కు పందొమ్మిదవ మూలం (6) 6 కు ఏడవ మూలం.

అభ్యాసమాలిక 3.2 **1.** (2) 45 యొక్క అయిదవ మూలానికి నాల్గవ ఘాతం; 45 యొక్క నాల్గవ ఘతానికి అయిదవ మూలం

(3) 81 యొక్క ఏడవ మూలానికి ఆరవ ఘాతం, 81 యొక్క ఆరవ ఘాతానికి ఏడవ మూలం.

(4) 100 యొక్క పదవ మూలానికి నాలుగవ ఘాతం; 100 యొక్క నాలుగవ ఘాతానికి పదవ మూలం.

(5) 21 యొక్క ఏడవ మూలానికి మూడవ ఘాతాం; 21 యొక్క మూడవ ఘాతానికి ఏడవ మూలం.

2. (1) $(121)^{\frac{5}{2}}$ (2) $(324)^{\frac{3}{4}}$ (3) $(264)^{\frac{2}{5}}$ (4) $3^{\frac{3}{3}}$

అభ్యాసమాలిక 3.3 **1.** (1) 20 (2) 9 (3) 7 (4) -8 (5) -14 (6) 32

2. (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{2}{3}$ **3.** 0.09

EEDC3I

4 త్రిభుజం ఉన్నతి మరియు మధ్యగత రేఖ

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

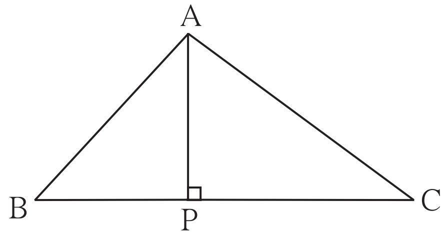
కింది తరగతిలో మనం త్రిభుజ కోణాల సమద్విఖండన రేఖలు మిళితాలవుతాయి, త్రిభుజం యొక్క భుజాల లంబ సమద్విఖండన రేఖలును మిళితాలు అవుతాయని తెలుసుకొన్నాం. వాటి మిళితబిందువులను వరసగా అంతరవృత్త కేంద్రం, పరివృత్త కేంద్రం అంటారని గూడా మనకు తెలుసు.

కృత్యం :

ఒక రేఖను గీసి, ఆ రేఖ బయట ఏదేని ఒక బిందువు తీసుకోండి. మూలమట్టం సహాయంతో ఆ బిందువు నుండి రేఖ పైకి లంబాన్ని గీయండి.

తెలుసుకొందాం

ఉన్నతి (Altitude)

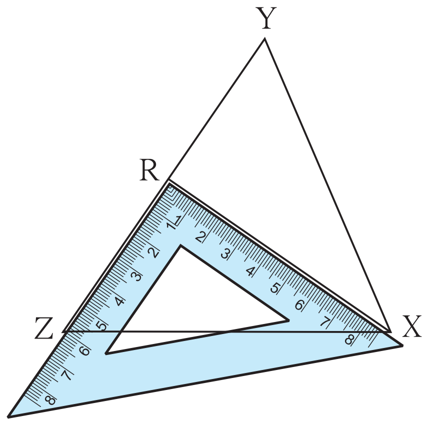


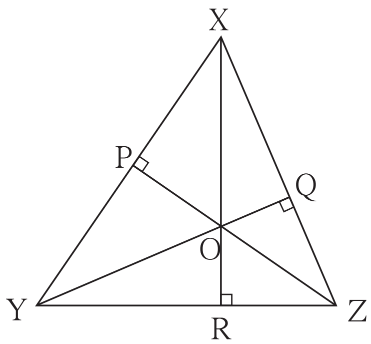
త్రిభుజ శీర్షబిందువు నుండి దాని ఎదుటి భుజంపైకి గీయబడిన లంబరేఖను, ఆ త్రిభుజం యొక్క ఉన్నతి అంటారు. Δ ABC లో రేఖాఖండం AP భూమి BC పై ఉన్నతి అవుతుంది.

త్రిభుజ ఉన్నతిని గీయుట :

1. ఏదేని ఒక త్రిభుజం, Δ XYZ గీయండి.
2. భూమి YZ ఎదురుగానున్న X శీర్షబిందువు నుండి మూలమట్టం సహాయంతో లంబాన్ని గీయండి. అది YZ ను ఎక్కడ ఖండిస్తుందో, ఆ బిందువుకు R అని పేరు పెట్టండి. రేఖాఖండం XR భూమి YZ పై నుండి ఉన్నతి అవుతుంది.
3. రే.ఖం. XZ దీనిని భూమిగా పరిగణించి దాని ఎదురుగానున్న Y శీర్ష బిందువు నుండి రే.ఖం. XZ పైకి లంబాన్ని గీయండి. రే.ఖం. YQ $\perp$ రే.ఖం. XZ.
4. రే.ఖం. XY దీనిని భూమిగా పరిగణించి, దాని ఎదురుగానున్న శీర్షబిందువు Z నుండి రే.ఖం. XY పైకి లంబాన్ని గీయండి. రే.ఖం. ZP $\perp$ రే.ఖం. XY.

   రే.ఖం. XR, రే.ఖం. YQ, రే.ఖం. ZP లు Δ XYZ నకు ఉన్నతులు అవుతాయి. ఈ మూడు ఉన్నతులు మిళితాలవుతాయి అని గుర్తుంచుకోండి.

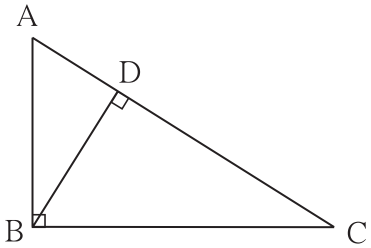




ఈ మిళిత బిందువు త్రిభుజం యొక్క ఉన్నత మిళిత బిందువు లేదా లంబ మిళిత బిందువు అని అంటారు. దానిని 'O' ను అక్షరాన్ని చూపించండి.

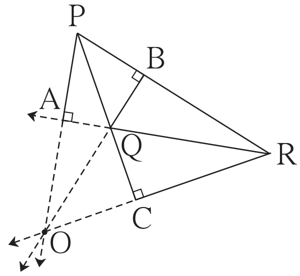
త్రిభుజం యొక్క లంబమిళిత బిందువు యొక్క స్థానం:

కృత్యం I :



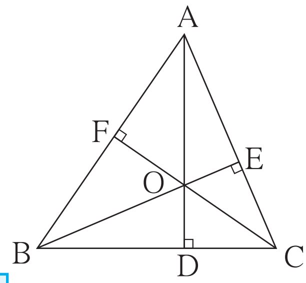
ఏదేని ఒక లంబకోణ త్రిభుజం గీయండి. వాటి అన్ని లంబశీర్షాలు గీయండి. అవి ఏ బిందువు వద్ద కలుస్తాయో రాయండి.

కృత్యం II :



ఏదేని ఒక అధిక కోణ త్రిభుజం గీయండి. దాని మూడు ఉన్నతులు గీయండి. అవి ఒకదానికొకటి కలుస్తాయా? ఈ ఉన్నతులు కల్గియుండే రేఖలను గీయండి. త్రిభుజ బాహ్యభాగంలోని అవి ఒకే బిందువు నుండి వెళతాయని తెలుసుకోండి.

కృత్యం III :



Δ ABC అను ఒక అల్ప కోణ త్రిభుజాన్ని గీయండి. వాటి అన్ని ఉన్నతులు గీయండి. లంబ మిళిత బిందువు స్థానం ఎక్కడ ఉందో, చూడండి.

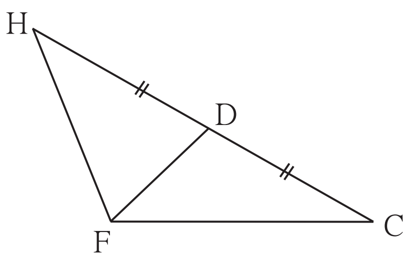
ఇది నాకర్థమయింది.

త్రిభుజ ఉన్నతులు ఒకే బిందువునుండి వెళతాయి, అంటే ఈ ఉన్నతులు మిళితాలు (Concurrent) అవుతాయి. వాటి మిళిత బిందువును లంబ కేంద్రీయ బిందువు (Orthocentre) అని అంటారు. దానిని 'O' అనే అక్షరంతో సూచిస్తారు.

- లంబకోణ త్రిభుజ లంబ కేంద్రం లంబకోణ శీర్షంపై ఉంటుంది.
- అధిక కోణ త్రిభుజ లంబ కేంద్రీయ బిందువు ఆ త్రిభుజ బాహ్యభాగంలో ఉంటుంది.
- అల్పకోణ త్రిభుజం లంబ కేంద్రీయ బిందువు ఆ త్రిభుజ అంతర్భాగంలో ఉంటుంది.

తెలుసుకొందాం

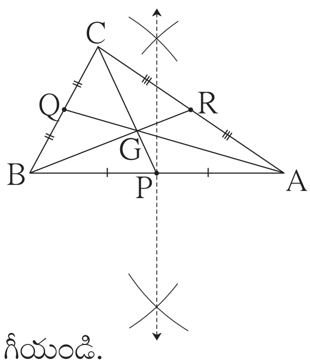
మధ్యగత రేఖ (Median)



త్రిభుజ శీర్షబిందువు మరియు ఎదురుగానున్న భుజం మధ్య బిందువును కలిపే రేఖాఖండమును, త్రిభుజం మధ్యగత రేఖ అంటారు.

Δ HCF లో రేఖాఖండం FD భూమి HC పైనున్న మధ్యగత రేఖ అవుతుంది.

త్రిభుజ మధ్యగత రేఖను గీయుట :



1. Δ ABC గీయండి.
2. AB భుజం మధ్య బిందువును తీసుకొని, దానికి P అని పేరు పెట్టండి. రేఖాఖండం CP గీయండి.
3. BC భుజం మధ్యబిందువును తీసుకొని, దానికి Q అని పేరు పెట్టండి. రేఖాఖండం AQ గీయండి.
4. AC భుజం మధ్యబిందువును తీసుకొని, దానికి R అని పేరు పెట్టండి. రే.ఖం. BR గీయండి.

రే.ఖం. PC, రే.ఖం. QA, రే.ఖం. BR లు Δ ABC యొక్క మధ్యగతరేఖలు అవుతాయి. వాటియొక్క మిళిత బిందువును మధ్యగత, మిళిత బిందువు అంటారని తెలుసుకోండి. దానిని G అక్షరంతో సూచిస్తారు.

కృత్యం IV : ఒక లంబకోణ త్రిభుజం, ఒక అధికకోణ త్రిభుజం, ఒక అల్పకోణ త్రిభుజాలను గీసి వాటి మధ్యగత రేఖలను గీయండి. వాటికి మిళిత బిందువు ఒకటే ఉంటుందని తెలుసుకోండి.

త్రిభుజ మధ్యగతరేఖల మిళిత బిందువుల ధర్మాలు :

- Δ ABC అను ఏదేని ఒక పెద్ద త్రిభుజంను గీయండి.
- Δ ABC యొక్క రే.ఖం. AR, రే.ఖం. BQ మరియు రే.ఖం. CP వీటి మధ్యగత రేఖలను గీయండి. మిళిత బిందువుకు G అను పేరు పెట్టండి.

పటంలోని రేఖా ఖండాల పొడవులను కొలిచి పట్టికలోని ఖాళీ గడులను పూరించండి.

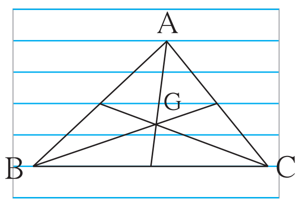
l(AG) = ☐	l(GR) = ☐	l(AG) : (GR) = ☐ : ☐
l(BG) = ☐	l(GQ) = ☐	l(BG) : (GQ) = ☐ : ☐
l(CG) = ☐	l(GP) = ☐	l(CG) : (GP) = ☐ : ☐

ఈ అన్ని నిష్పత్తులు సుమారుగా 2:1 గా ఉంటాయని తెలుసుకోండి.

ఇది నాకర్థమయింది.

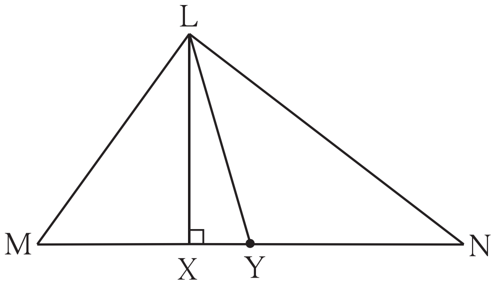
త్రిభుజ మధ్యగత రేఖలు మిళితాలు అవుతాయి. వాటి మిళిత బిందువును మధ్యగత మిళితబిందువు **(Centroid)** అంటారు. దానిని **G** అనే అక్షరంతో సూచించబడుతుంది. ఏదైనా త్రిభుజంలోని **G** యొక్క స్థానం త్రిభుజ అంతర్భాగంలో ఉంటుంది. మిళిత బిందువువలన మధ్యగతరేఖ 2:1 నిష్పత్తిలో విభజించబడుతుంది.

పదండి, చర్చిద్దాం.



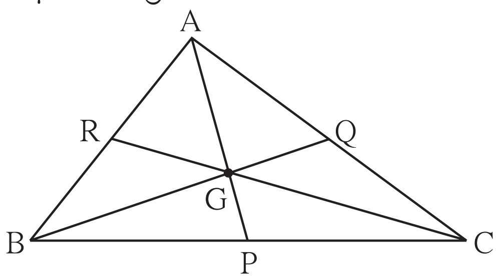
ఒక విద్యార్థి నోటుపుస్తకంలో కాగితంపై అయిదు సమాంతర రేఖలనుపయోగించి Δ ABC ని గీసి, G అను మధ్యగత మిళితబిందువును శోధించెను. అయితే అతను నిర్ణయించిన G స్థానం సరియైనదేనని ఎలా నిర్ణయించగలవు?

అభ్యాసమాలిక 4.1

1. 

Δ LMN లో ...... ఉన్నతి మరియు ...... మధ్యగత రేఖ అవుతుంది. (ఖాళీస్థలంలో సరియైన రేఖాఖండాల పేర్లు రాయండి.)

2. Δ PQR అను ఒక అల్పకోణ త్రిభుజాన్ని గీసి, దాని మూడు ఉన్నతులు గీయండి. మిళిత బిందువునకు 'O' అని పేరు పెట్టండి.
3. Δ STV అను ఒక అధికకోణ త్రిభుజాన్ని గీసి, వాటి మధ్యగత రేఖలు గీసి, వాటి మధ్యగత మిళిత బిందువును చూపండి.
4. Δ LMN అను ఒక అధిక కోణత్రిభుజాన్ని గీసి, వాటన్నిటిలో ఉన్నతులు గీయండి. మిళిత బిందువును O చే చూపండి.
5. Δ XYZ అను త్రిభుజాన్ని గీసి, దాని మధ్యగత రేఖను గీయండి.. మిళితబిందువును G చే చూపండి.
6. ఏదేని సమద్విబాహుత్రిభుజాన్ని గీయండి. వాటన్నింటి మధ్యగత రేఖలు, ఉన్నతులు గీయండి. వాటి మిళిత బిందువును గూర్చి మీ పరిశీలనను నమోదు చేయండి.
7. ఖాళీలను పూరించండి.



Δ ABC యొక్క మధ్యగత రేఖల మిళిత బిందువు G.

(1) $l(RG) = 2.5$ అయిన $l(GC) =$ ......

(2) $l(BG) = 6$ అయిన $l(BQ) =$ ......

(3) $l(AP)=6$ అయిన $l(AG)=$.... , $l(GP)=$....

ఇది చేసి చూడండి.

(I) : ఏదేని ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని గీసి, ఆ త్రిభుజంలో పరివృత్తకేంద్రం (C), అంతరవృత్తకేంద్రం (I), మధ్యగతరేఖల మిళిత బిందువు (G) మరియు ఉన్నతుల మిళిత బిందువు (O) లను గీసి, పరిశీలనను నమోదు చేయండి.

(II): ఏదేని ఒక సమద్విబాహుత్రిభుజాన్ని గీసి, దాని మధ్యగతల మిళితబిందువు, ఉన్నతుల మిళితబిందువు, పరివృత్తకేంద్రం, అంతరవృత్తకేంద్రం ఇవి సరేఖీయాలు అవుతాయా పరీక్షించి చూడండి.

జవాబుల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 4.1

1. రే.ఖం. LX మరియు రే.ఖం. LY   7. (1) 5, (2) 9, (3) 4, 2

EEN856

5 విస్తరణ సూత్రాలు

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

కింది తరగతిలో, మనం కింది విస్తరణ సూత్రాలను అభ్యసించాం.

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, (ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

(iii) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

పై విస్తరణ సూత్రాలనుపయోగించి కింది గడులలో సరియైన పదమును రాయండి.

(i) $(x + 2y)^2 = x^2 + \square + 4y^2$

(ii) $(2x - 5y)^2 = \square - 20xy + \square$

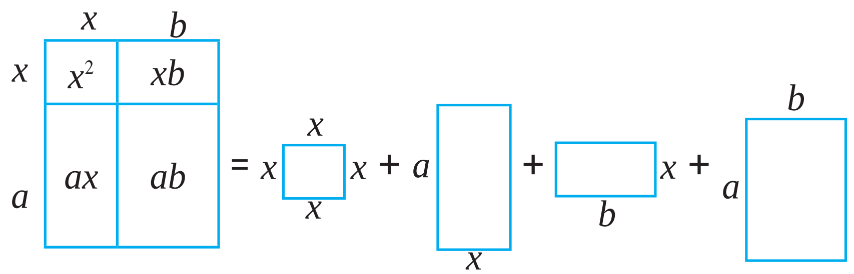
(iii) $(101)^2 = (100 + 1)^2 = \square + \square + 1^2 = \square$

(iv) $(98)^2 = (100 - 2)^2 = 10000 - \square + \square = \square$

(v) $(5m + 3n)(5m - 3n) = \square - \square = \square - \square$

తెలుసుకొందాం

కృత్యం : దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రాల వైశాల్యాల సహాయంతో $(x + a)(x + b)$ విస్తరణ చేయండి.



$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

(I) $(x + a)(x + b)$ యొక్క విస్తరణ (Expansion of $(x + a)(x + b)$)

$(x + a)(x + b)$ ఇది ఒక పదం సమానంగాగల ద్విపది. ఈ ద్విపదినిగుణించుదాం.

$$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b) = x^2 + bx + ax + ab$$

$$= x^2 + (a + b)x + ab$$

$$\therefore \boxed{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$$

విస్తరణ చేయండి :

ఉదా. **(1)** $(x + 2)(x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + (2 \times 3) = x^2 + 5x + 6$

ఉదా. **(2)** $(y + 4)(y - 3) = y^2 + (4 - 3)y + (4) \times (-3) = y^2 + y - 12$

ఉదా. **(3)** $(2a + 3b)(2a - 3b) = (2a)^2 + [(3b) + (-3b)]2a + [3b \times (-3b)]$

$= 4a^2 + 0 \times 2a - 9b^2 = 4a^2 - 9b^2$

ఉదా. **(4)** $\left(m+\frac{3}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right) = m^2 + \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)m + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = m^2 + 2m + \frac{3}{4}$

ఉదా. **(5)** $(x - 3)(x - 7) = x^2 + (-3 - 7)x + (-3)(-7) = x^2 - 10x + 21$

అభ్యాసమాలిక 5.1

1. విస్తరణ చేయండి.

(1) $(a + 2)(a - 1)$ (2) $(m - 4)(m + 6)$ (3) $(p + 8)(p - 3)$

(4) $(13 + x)(13 - x)$ (5) $(3x + 4y)(3x + 5y)$ (6) $(9x - 5t)(9x + 3t)$

(7) $\left(m+\frac{2}{3}\right)\left(m-\frac{7}{3}\right)$ (8) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$ (9) $\left(\frac{1}{y}+4\right)\left(\frac{1}{y}-9\right)$

తెలుసుకొందాం

(II) $(a + b)^3$ యొక్క విస్తరణ (Expansion of $(a + b)^3$)

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)(a + b)^2$$
$$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$
$$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$\therefore \boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

ఈ విస్తరణ సూత్రాలనుపయోగించి సాధించిన కొన్ని ఉదాహరణలను నేర్చుకొందాం.

ఉదా. **(1)** $(x + 3)^3$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ఇచట $a = x$, $b = 3$ గలదు.

$$\therefore\ (x + 3)^3 = (x)^3 + 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times (3)^2 + (3)^3$$

$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

ఉదా. (2) $(3x + 4y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(4y) + 3(3x)(4y)^2 + (4y)^3$

$$= 27x^3 + 3 \times 9x^2 \times 4y + 3 \times 3x \times 16y^2 + 64y^3$$

$$= 27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64\,y^3$$

ఉదా. (3) $\left(\frac{2m}{n}+\frac{n}{2m}\right)^3 = \left(\frac{2m}{n}\right)^3 + 3\left(\frac{2m}{n}\right)^2\left(\frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{n}{2m}\right)^2 + \left(\frac{n}{2m}\right)^3$

$$= \frac{8m^3}{n^3} + 3\left(\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(\frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{n^2}{4m^2}\right) + \frac{n^3}{8m^3}$$

$$= \frac{8m^3}{n^3} + \frac{6m}{n} + \frac{3n}{2m} + \frac{n^3}{8m^3}$$

ఉదా. (4) $(41)^3 = (40 + 1)^3 = (40)^3 + 3 \times (40)^2 \times 1 + 3 \times 40 \times (1)^2 + (1)^3$

$$= 64000 + 4800 + 120 + 1 \quad = 68921$$

అభ్యాసమాలిక 5.2

1. విస్తరణ చేయండి.

(1) $(k + 4)^3$ (2) $(7x + 8y)^3$ (3) $(7 + m)^3$ (4) $(52)^3$

(5) $(101)^3$ (6) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$ (7) $\left(2m+\frac{1}{5}\right)^3$ (8) $\left(\frac{5x}{y}+\frac{y}{5x}\right)^3$

కృత్యం : a మరియు b భుజాలుగల ఒక్కొక్క ఘనం తయారు చేయండి. పొడవు, వెడల్పులు a మరియు ఎత్తు b ఇలా 3 దీర్ఘఘనం, అలాగే పొడవు, వెడల్పులు b మరియు ఎత్తు a ఇలా 3 దీర్ఘఘనాలు తయారు చేయండి. ఈ ఘనాకృతులను సరియైన విధంగా అమర్చి $(a + b)$ భుజంగల ఘనం తయారు చేయండి.

తెలుసుకొందాం

(III) $(a - b)^3$ యొక్క విస్తరణ (Expansion of $(a - b)^3$)

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b) = (a - b)(a - b)^2$$

$$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$\therefore \quad \boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

ఉదా. (1) విస్తరణ చేయండి. $(x - 2)^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ఇచ్చట, $a = x, b = 2$ గా తీసుకొని

$(x - 2)^3 = (x)^3 - 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times (2)^2 - (2)^3$

$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

ఉదా. (2) $(4p - 5q)^3$ దీని విస్తరణ చేయండి.

$(4p - 5q)^3 = (4p)^3 - 3(4p)^2(5q) + 3(4p)(5q)^2 - (5q)^3$

$(4p - 5q)^3 = 64p^3 - 240p^2q + 300pq^2 - 125q^3$

ఉదా. (3) విస్తరణ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి 99 ఘనం రాయండి. $(99)^3 = (100 - 1)^3$

$(99)^3 = (100)^3 - 3 \times (100)^2 \times 1 + 3 \times 100 \times (1)^2 - 1^3$

$= 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 9,70,299$

ఉదా. (4) సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $(p + q)^3 + (p - q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$

$= 2p^3 + 6pq^2$

(ii) $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

$= [(2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3]$

$- [(2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3]$

$= (8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3) - (8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3)$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 - 8x^3 + 36x^2y - 54xy^2 + 27y^3$

$= 72x^2y + 54y^3$

ఇదినాకర్థమయింది

(i) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

(ii) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

అభ్యాసమాలిక 5.3

1. విస్తరణ చేయండి.

(1) $(2m - 5)^3$ (2) $(4 - p)^3$ (3) $(7x - 9y)^3$ (4) $(58)^3$

(5) $(198)^3$ (6) $\left(2p - \frac{1}{2p}\right)^3$ (7) $\left(1 - \frac{1}{a}\right)^3$ (8) $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^3$

2. సూక్ష్మీకరించండి.

(1) $(2a + b)^3 - (2a - b)^3$ (2) $(3r - 2k)^3 + (3r + 2k)^3$

(3) $(4a - 3)^3 - (4a + 3)^3$ (4) $(5x - 7y)^3 + (5x + 7y)^3$

తెలుసుకొందాం

(IV) $(a + b + c)^2$ యొక్క విస్తరణ [Expansion of $(a + b + c)^2$]

$$
\begin{aligned}
(a + b + c)^2 &= (a + b + c) \times (a + b + c) \\
&= a\,(a + b + c) + b\,(a + b + c) + c\,(a + b + c) \\
&= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac
\end{aligned}
$$

$\therefore \boxed{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}$ ఈ సూత్రాన్ని పొందవచ్చు.

ఉదా. (1) విస్తరణ చేయండి $(p + q + 3)^2$

$= p^2 + q^2 + (3)^2 + 2 \times p \times q + 2 \times q \times 3 + 2 \times p \times 3$

$= p^2 + q^2 + 9 + 2pq + 6q + 6p \quad = p^2 + q^2 + 2pq + 6q + 6p + 9$

ఉదా. (2) వర్గ విస్తరణ సోపానాలలోని గడులలో సరియైన పదంను రాయండి.

$(2p + 3m + 4n)^2$

$= (2p)^2 + (3m)^2 + \boxed{} + 2 \times 2p \times 3m + 2 \times \boxed{} \times 4n + 2 \times 2p \times \boxed{}$

$= \boxed{} + 9m^2 + \boxed{} + 12pm + \boxed{} + \boxed{}$

ఉదా. (3) సూక్ష్మీకరించండి. $(l + 2m + n)^2 + (l - 2m + n)^2$

$= l^2 + 4m^2 + n^2 + 4lm + 4mn + 2ln + l^2 + 4m^2 + n^2 - 4lm - 4mn + 2ln$

$= 2l^2 + 8\,m^2 + 2n^2 + 4ln$

అభ్యాసమాలిక 5.4

1. విస్తరణ చేయండి. (1) $(2p + q + 5)^2$ (2) $(m + 2n + 3r)^2$

(3) $(3x + 4y - 5p)^2$ (4) $(7m - 3n - 4k)^2$

2. సూక్ష్మీకరించండి. (1) $(x - 2y + 3)^2 + (x + 2y - 3)^2$

(2) $(3k - 4r - 2m)^2 - (3k + 4r - 2m)^2$ (3) $(7a - 6b + 5c)^2 + (7a + 6b - 5c)^2$

జవాబుల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 5.1 (1) $a^2 + a - 2$ (2) $m^2 + 2m - 24$ (3) $p^2 + 5p - 24$

(4) $169 - x^2$ (5) $9x^2 + 27xy + 20y^2$ (6) $81x^2 - 18xt - 15t^2$

(7) $m^2 - \frac{5}{3}m - \frac{14}{9}$ (8) $x^2 - \frac{1}{x^2}$ (9) $\frac{1}{y^2} - \frac{5}{y} - 36$

అభ్యాసమాలిక 5.2 (1) $k^3 + 12k^2 + 48k + 64$ (2) $343x^3 + 1176x^2y + 1344xy^2 + 512y^3$

(2) $343 + 147m + 21m^2 + m^3$ (4) 140608 (5) 1030301

(6) $x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$ (7) $8m^3 + \frac{12m^2}{5} + \frac{6m}{25} + \frac{1}{125}$

(8) $\frac{125x^3}{y^3} + \frac{15x}{y} + \frac{3y}{5x} + \frac{y^3}{125x^3}$

అభ్యాసమాలిక 5.3 1. (1) $8m^3 - 60m^2 + 150m - 125$ (2) $64 - 48p + 12p^2 - p^3$

(3) $343x^3 - 1323x^2y + 170xy^2 + 729y^3$ (4) 1,95,112

(5) 77,62,392 (6) $8p3 - 6p + \frac{3}{2p} - \frac{1}{8p^3}$

(7) $1 - \frac{3}{a} + \frac{3}{a^2} - \frac{1}{a^3}$ (8) $\frac{x^3}{27} - x + \frac{9}{x} - \frac{27}{x^3}$

2. (1) $24a^2b + 2b^3$ (2) $54r^3 + 72rk^2$

(3) $-288a^2 - 54$ (4) $250x^3 + 1470xy^2$

అభ్యాసమాలిక 5.4 1. (1) $4p^2 + q^2 + 25 + 4pq + 10q + 20p$

(2) $m^2 + 4n^2 + 9r^2 + 4mn + 12nr + 6mr$

(3) $9x^2 + 16y^2 + 25p^2 + 24xy - 40py - 30px$

(4) $49m^2 + 9n^2 + 16k^2 - 42mn + 24nk - 56km$

2. (1) $2x^2 + 8y^2 + 18 - 24y$ (2) $32rm - 48kr$

(3) $98a^2 + 72b^2 + 50c^2 - 120bc$

EEH46T

6 బీజీయ సమాసాల కారణాంకాలు

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

కింది తరగతిలో మీరు $ax + ay$ మరియు $a^2 - b^2$ ఈ రూపంలోని బీజీయ సమాసాలను కారణాంకాలుగా ఎలా విభజిస్తారో నేర్చుకొన్నారు.

ఉదాహరణకు, (1) $4xy + 8xy^2 = 4xy(1 + 2y)$

(2) $p^2 - 9q^2 = (p)^2 - (3q)^2 = (p + 3q)(p - 3q)$

తెలుసుకొందాం

వర్గ త్రిపది కారణాంకాలు (Factors of a quadratic trinomial)

$ax^2 + bx + c$ ఈ రూపంలో బీజీయ సమాసాన్ని వర్గ త్రిపది అని అంటారు.

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore\ x^2 + (a + b)x + ab$ నకు $(x + a)$, $(x + b)$ అనునవి కారణాంకాలు అవుతాయి.

$x^2 + 5x + 6$ ఈ త్రిపది కారణాంకాలు కనుగొనుటకు దానిని $x^2 + (a + b)x + ab$ ఈ త్రిపదితో పోల్చిన, $a + b = 5$ మరియు $ab = 6$ అవుతుంది. నుక 6 యొక్క కారణాంకాల మొత్తం 5 వచ్చునట్లుగా విభజించి త్రిపదిని $x^2 + (a + b)x + ab$ రూపంలో రాసి, దానిని కారణాంకాలుగా విభజించుదాం.

$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2$ .... $x^2 + (a + b)x + ab$

$= \underline{x^2 + 3x} + \underline{2x + 2 \times 3}$ .... $(3 + 2)$ ను x చే గుణించగా వచ్చిన నాలుగు పదాలను రెండు సమూహాలుగా విభజించి, కారణాంకాలను పొందుదాం.

$= x(x + 3) + 2(x + 3)$ $\quad = (x + 3)(x + 2)$

ఇచ్చిన వర్గ త్రిపది యొక్క కారణాంకాలను కనుగొనుటకై కొన్ని పద్ధతులను కింది ఉదాహరణాల ద్వారా తెలుసుకుందాం.

ఉదా. (1) $2x^2 - 9x + 9$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : వర్గ పదం యొక్క సహగుణకం, స్థిరాంకాలను గుణించండి. ఇచ్చట $2 \times 9 = 18$ లబ్దం అవుతుంది.

18 యొక్క కారణాంకాల మొత్తం మధ్యపదం యొక్క సహగుణకం -9 వచ్చునట్లుగా విభజించుదాం.

$18 = (-6) \times (-3)$; $(-6) + (-3) = -9$

$-9x$ పదమును $-6x - 3x$ గా రాద్దాం.

$2x^2 - 9x + 9$

$= \underline{2x^2 - 6x} - \underline{3x + 9}$

$= 2x\,\underline{(x - 3)} - 3\underline{(x - 3)}$

$= (x - 3)(2x - 3)$

$\therefore\ 2x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(2x - 3)$

ఉదా.(2) $2x^2+5x-18$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : $2x^2 + 5x - 18$

$= \underline{2x^2 + 9x} \underline{-4x - 18}$ ($-36 = +9 \times -4$)

$= x(2x + 9) - 2(2x + 9)$

$= (2x + 9)(x - 2)$

ఉదా.(3) $x^2 - 10x + 21$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : $x^2 - 10x + 21$

$= \underline{x^2 - 7x} - \underline{3x + 21}$ ($+21 = -7 \times -3$)

$= x(x - 7) - 3(x - 7)$

$= (x - 7)(x - 3)$

ఉదా. (4) $2y^2 - 4y - 30$ ను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : $2y^2 - 4y - 30$

$= 2(y^2 - 2y - 15)$ .... అన్ని పదాలనుండి ఉమ్మడి కారణాంకం 2 ను తీయగా

$= 2(\underline{y^2 - 5y} + \underline{3y - 15})$ .... ($-15 = -5 \times +3$)

$= 2[y(y - 5) + 3(y - 5)]$

$= 2(y - 5)(y + 3)$

అభ్యాసమాలిక 6.1

1. కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(1) $x^2 + 9x + 18$	(2) $x^2 - 10x + 9$	(3) $y^2 + 24y + 144$
(4) $5y^2 + 5y - 10$	(5) $p^2 - 2p - 35$	(6) $p^2 - 7p - 44$
(7) $m^2 - 23m + 120$	(8) $m^2 - 25m + 100$	(9) $3x^2 + 14x + 15$
(10) $2x^2 + x - 45$	(11) $20x^2 - 26x + 8$	(12) $44x^2 - x - 3$

తెలుసుకొందాం

$a^3 + b^3$ యొక్క కారణాంకాలు (Factors of $a^3 + b^3$)

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ అని మీకు తెలుసు.

కుడి వైపునున్న సమాసంలో నుండి $3ab$ ని ఉమ్మడి కారణాంకాన్ని తీసుకొని, ఈ వర్గ విస్తరణ సూత్రాన్ని కింది విధంగా అమర్చవచ్చును.

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

ఇప్పుడు, $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$.......... రెండు వైపులు తారుమారుచేయగా

$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = [(a + b)(a + b)^2] - 3ab(a + b)$

$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$

$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$\therefore \boxed{\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}}$

రెండు ఘనాల మొత్తం యొక్క కారణాంకాలను పై సూత్రం ఉపయోగించి కొన్ని ఉదాహరణలను సాధించుదాం.

ఉదా. (1) $x^3 + 27y^3 = x^3 + (3y)^3$

$$= (x + 3y)\,[x^2 - x(3y) + (3y)^2]$$

$$= (x + 3y)\,[x^2 - 3xy + 9y^2]$$

ఉదా. (2) $8p^3 + 125q^3 = (2p)^3 + (5q)^3 = (2p + 5q)\,[(2p)^2 - 2p \times 5q + (5q)^2]$

$$= (2p + 5q)\,(4p^2 - 10pq + 25q^2)$$

ఉదా. (3) $m^3 + \dfrac{1}{64m^3} = m^3 + \left(\dfrac{1}{4m}\right)^3 = \left(m + \dfrac{1}{4m}\right)\left[m^2 - m \times \dfrac{1}{4m} + \left(\dfrac{1}{4m}\right)^2\right]$

$$= \left(m + \frac{1}{4m}\right)\left(m^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16m^2}\right)$$

ఉదా. (4) $250p^3 + 432q^3 = 2(125p^3 + 216q^3)$

$$= 2\,[(5p)^3 + (6q)^3] = 2(5p + 6q)\,(25p^2 - 30pq + 36q^2)$$

అభ్యాసమాలిక 6.2

1. కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(1) $x^3 + 64y^3$ (2) $125p^3 + q^3$ (3) $125k^3 + 27m^3$ (4) $2l^3 + 432m^3$

(5) $24a^3 + 81b^3$ (6) $y^3 + \dfrac{1}{8y^3}$ (7) $a^3 + \dfrac{8}{a^3}$ (8) $1 + \dfrac{q^3}{125}$

తెలుసుకొందాం

$a^3 - b^3$ యొక్క కారణాంకాలు (Factors of $a^3 - b^3$)

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

ఇప్పుడు, $a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b) = (a - b)^3$

$$\therefore \quad a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b)$$

$$= [(a - b)(a - b)^2 + 3ab\,(a - b)]$$

$$= (a - b)\,[(a - b)^2 + 3ab]$$

$$= (a - b)\,(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$

$$= (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$$

$$\therefore \quad \boxed{\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}}$$

రెండు ఘనాల తీసివేతల కారణాంకాల విభజన సూత్రంనుపయోగించి కొన్ని సమాసములను కారణాంగాలుగా విభజించుదాం.

ఉదా. **(1)** $x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$$\therefore x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$$
$$= (x - 2y)\,(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

ఉదా. **(2)** $27p^3 - 125q^3 = (3p)^3 - (5q)^3 \quad = (3p - 5q)\,(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

ఉదా. **(3)** $54p^3 - 250q^3 = 2\,[27p^3 - 125q^3] = 2\,[(3p)^3 - (5q)^3]$

$$= 2(3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$$

ఉదా. **(4)** $a^3 - \dfrac{1}{a^3} = \left(a - \dfrac{1}{a}\right)\left(a^2 + 1 + \dfrac{1}{a^2}\right)$

ఉదా. **(5)** సూక్ష్మీకరించండి : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3)$

సాధన : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3 = -3a^2b + 3ab^2$

ఉదా. **(6)** సూక్ష్మీకరించండి : $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

సాధన : $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$ సూత్రం ప్రకారం

$$\therefore (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$$
$$= [(2x+3y)-(2x-3y)]\,[(2x+3y)^2+(2x+3y)(2x-3y)+(2x-3y)^2]$$
$$= [2x + 3y - 2x + 3y]\,[4x^2+12xy+9y^2 + 4x^2-9y^2+4x^2-12xy+9y^2]$$
$$= 6y\,(12x^2 + 9y^2) = 72x^2y + 54y^3$$

ఇది నాకర్థమయింది.

(i) $a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$ (ii) $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$

అభ్యాసమాలిక 6.3

1. కారణాంకాలుగా విభజించండి. (1) $y^3 - 27$ (2) $x^3 - 64y^3$ (3) $27m^3 - 216n^3$ (4) $125y^3 - 1$

(5) $8p^3 - \dfrac{27}{p^3}$ (6) $343a^3 - 512b^3$ (7) $64x^3 - 729y^3$ (8) $16a^3 - \dfrac{128}{b^3}$

2. సూక్ష్మీకరించండి. (1) $(x + y)^3 - (x - y)^3$ (2) $(3a + 5b)^3 - (3a - 5b)^3$

(3) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$ (4) $p^3 - (p + 1)^3$

(5) $(3xy - 2ab)^3 - (3xy + 2ab)^3$

తెలుసుకొందాం

నైష్పత్తిక బీజీయ సమాసములు (Rational algebraic expressions)

A మరియు B అను రెండు బీజీయ సమాసాలయిన $\frac{A}{B}$ సమాసమును నైష్పత్తిక బీజీయ సమాసమని అంటారు. నైష్పత్తిక బీజీయ సమాసాలను సూక్ష్మీకరించునపుడు చేయవలసిన సంకలన, వ్యవకలన, గుణకార, భాగహార మొదలైన ప్రక్రియలు, అకరణీయ సంఖ్యలపై ప్రక్రియల మాదిరిగానే ఉంటాయి. బీజీయ సమాసమును భాగించునప్పుడు హారం శూన్యేతరమై ఉండాలి. అని దృష్టిలో పెట్టుకోండి.

ఉదా.(1) సూక్ష్మీకరించండి. $\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12} \times \frac{a-4}{a^2-4}$

సాధన : $\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12} \times \frac{a-4}{a^2-4}$

$= \frac{(a+3)(a+2)}{(a-4)(a+3)} \times \frac{(a-4)}{(a+2)(a-2)}$

$= \frac{1}{a-2} \quad (\because a \neq 2)$

ఉదా. (2) $\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16} \times \frac{14x-8}{x+2}$

సాధన : $\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16} \times \frac{14x-8}{x+2}$

$= \frac{(7x+4)(x+2)}{(7x+4)(7x-4)} \times \frac{2(7x-4)}{(x+2)}$

$= 2$

ఉదా. (3) సూక్ష్మీకరించండి. $\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3}$

సాధన : $\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3} = \frac{(x+3y)(x-3y)}{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)} \quad = \frac{x+3y}{x^2+3xy+9y^2}$

అభ్యాసమాలిక 6.4

1. సూక్ష్మీకరించండి.

(1) $\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2} \times \frac{m^2+mn+n^2}{m^3-n^3}$ (2) $\frac{a^2+10a+21}{a^2+6a-7} \times \frac{a^2-1}{a+3}$ (3) $\frac{8x^3-27y^3}{4x^2-9y^2}$

(4) $\frac{x^2-5x-24}{(x+3)(x+8)} \times \frac{x^2-64}{(x-8)^2}$ (5) $\frac{3x^2-x-2}{x^2-7x+12} \div \frac{3x^2-7x-6}{x^2-4}$ (6) $\frac{4x^2-11x+6}{16x^2-9}$

(7) $\frac{a^3-27}{5a^2-16a+3} \div \frac{a^2+3a+9}{25a^2-1}$ (8) $\frac{1-2x+x^2}{1-x^3} \times \frac{1+x+x^2}{1+x}$

అభ్యాసమాలిక 6.1

1. (1) $(x+6)(x+3)$ (2) $(x-9)(x-1)$ (3) $(y+12)(y+12)$
(4) $5(y+2)(y-1)$ (5) $(p-7)(p+5)$ (6) $(p+4)(p-11)$
(7) $(m-15)(m-8)$ (8) $(m-20)(m-5)$ (9) $(x+3)(3x+5)$
(10) $(x+5)(2x-9)$ (11) $2(5x-4)(2x-1)$ (12) $(11x-3)(4x+1)$

అభ్యాసమాలిక 6.2

1. (1) $(x+4y)(x^2-4xy+16y^2)$ (2) $(5p+q)(25p^2-5pq+q^2)$
(3) $(5k+3m)(25k^2-15km+9m^2)$ (4) $2(l+6m)(l^2-6lm+36m^2)$
(5) $3(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$ (6) $\left(y+\frac{1}{2y}\right)\left(y^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}\right)$
(7) $\left(a+\frac{2}{a}\right)\left(a^2-2+\frac{4}{a^2}\right)$ (8) $\left(1+\frac{q}{5}\right)\left(1-\frac{q}{5}+\frac{q^2}{25}\right)$

అభ్యాసమాలిక 6.3

1. (1) $(y-3)(y^2+3y+9)$ (2) $(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$
(3) $(3m-6n)(9m^2+18mn+36n^2)$ (4) $(5y-1)(25y^2+5y+1)$
(5) $\left(2p-\frac{3}{p}\right)\left(4p^2+6+\frac{9}{p^2}\right)$ (6) $(7a-8b)(49a^2+56ab+64b^2)$
(7) $(4x-9y)(16x^2+36xy+81y^2)$ (8) $16\left(a-\frac{2}{b}\right)\left(a^2+\frac{2a}{b}+\frac{4}{b^2}\right)$

2. (1) $6x^2y+2y^3$ (2) $270a^2b+250b^3$ (3) $3a^2b+3ab^2$
(4) $-3p^2-3p-1$ (5) $-108x^2y^2ab-16a^3b^3$

అభ్యాసమాలిక 6.4

1. (1) $\frac{1}{m+n}$ (2) $a+1$ (3) $\frac{4x^2+6xy+9y^2}{2x+3y}$
(4) 1 (5) $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(x-3)^2(x-4)}$
(6) $\frac{x-2}{4x+3}$ (7) $5a+1$ (8) $\frac{1-x}{1+x}$

EF528G

7 చరత్వం

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

ఒక డజను పుస్తకాల వెల 240 రూపాయలు ఉన్నచో 3 పుస్తకాల వెల ఎంత? 9 పుస్తకాల వెల ఎంత? 24 పుస్తకాల వెల ఎంత? 50 పుస్తకాల వెల ఎంత? దీనిని కనుగొనుటకు కింది పట్టికను పూర్తి చేయండి.

పుస్తకాల సంఖ్య(x)	12	3	9	24	50	1
వెల (రూపాయలు) (y)	240	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\boxed{20}$

ప్రతి జతలోను పుస్తకాల సంఖ్య (x), వాటి వెలలు (y) నిష్పత్తి $\frac{1}{20}$ గా ఉన్నది. ఇది స్థిరంగా ఉన్నది. పుస్తకాల సంఖ్య, వాటి వెలలు అనులోమానపాతంలో ఉన్నాయని, పై పట్టికను బట్టి తెలుస్తుంది. ఇలాంటి ఉదహారణలలో రెండింటిలో ఒక సంఖ్య పెరిగినచో రెండవ సంఖ్య అదే ప్రమాణంలో పెరుగును.

తెలుసుకొందాం

అనులోమ చరత్వం (Direct variation)

x మరియు y లు అనులోమానుపాతంలో ఉన్నాయి, ఇదే వాక్యాన్ని x మరియు y లు అనులోమ చరత్వంలో ఉన్నాయి లేదా x మరియు y ల మధ్య అనులోమచరత్వం ఉంది అని రాయవచ్చు. అలాగే ఈ వాక్యాన్ని గుర్తును ఉపయోగించి గణితభాషలో $x \alpha y$ అని గూడా రాయవచ్చు.

[α(అల్ఫా) ఇది చరత్వంనకు అర్థంగా ఉపయోగించబడే గ్రీక్ అక్షరం]

$x \alpha y$ ను సమీకరణ రూపంలో $x = \mathrm{k}y$ అని రాస్తారు. ఇచట k స్థిరపదం.

$x = \mathrm{k}y$ లేదా $\frac{x}{y} = \mathrm{k}$ ఈ అమరిక చరత్వ సమీకరణం. k చరత్వ స్థిరాంకం.

కింది వాక్యాలను చరత్వ చిహ్నంనుపయోగించి ఎలా రాస్తారో చూడండి.

(i) వృత్త వైశాల్యం, దాని వ్యాసార్థం యొక్క వర్గానికి అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

వృత్తవైశాల్యం = A, వ్యాసార్థం = r ఈ చరరాశులను తీసుకొని పై వాక్యాన్ని $A \alpha r^2$ అని రాయవచ్చు.

(ii) ద్రవ పీడనం (p) ఆ ద్రవం లోతుతో (d) అనులోమ చరత్వంలో ఉంటుంది. ఈ వాక్యాన్ని $p \alpha d$ అని రాస్తారు.

అనులోమ చరత్వం యొక్క చిహ్నంకిత అమరికలోని అన్ని సంకల్పనలు అర్థంగావడానికి కింది ఉదాహరణలు అభ్యసించండి.

ఉదా. (1) x, y తో అనులోమ చరత్వంలో ఉన్నది. $x = 5$ అయినపుడు $y = 30$, అయితే చరత్వ స్థిరాంకను కనుగొని చరత్వ సమీకరణాన్ని రాయండి.

సాధన : x, y తో అనులోమ చరత్వంలోనున్నది అనగా $x \alpha y$

$\therefore\ x = ky$ .... k చరత్వ స్థిరాంకం

$x = 5$ అయినపుడు $y = 30$ అని ఇవ్వబడినది.

$\therefore\ 5 = k \times 30 \ \therefore\ k = \frac{1}{6}$ (చరత్వ స్థిరాంకం)

దీని ద్వారా $x = ky$ అనగా $x = \frac{y}{6}$ లేదా $y = 6x$ అను సమీకరణం వస్తుంది.

ఉదా. (2) వేరుశనగ ధర దాని బరువుకు అనులోమానుపాతంలోనున్నది. 5 కి.గ్రా.ల వేరుశనగ ధర ₹ 450 అయినచో 1 క్వింటాల్ వేరుశనగ ధర ఎంత? (1 క్వింటాల్ = 100 కి.గ్రా.)

సాధన : వేరుశనగ ధర x మరియు వేరుశనగ బరువు y అని అనుకొందాం.

x, y లు అనులోమ చరత్వంలో ఉన్నాయని ఇవ్వబడింది. అనగా $x \alpha y$ కాబట్టి $x = ky$

కానీ $x = 450$ అయినపుడు $y = 5$ అవుతుందని ఇవ్వబడింది. దీనిని బట్టి k ను కనుగొందాం.

$x = ky$ $\quad \therefore\ 450 = 5k$ $\quad \therefore\ k = 90$ (చరత్వ స్థిరాంకం)

చరత్వ సమీకరణం $x = 90y$.

$\therefore\ y = 100$ అయినచో $x = 90 \times 100 = 9000$

$\therefore$ 1 క్వింటాల్ వేరుశనగ ధర 9000 రూపాయలు అవుతుంది.

అభ్యాసమాలిక 7.1

1. చరత్వ చిహ్నాన్ని ఉపయోగించి రాయండి.

(1) వృత్తపరిధి (c) దాని వ్యాసార్ధంతో (r) అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

(2) మోటార్‌లో నింపిన పెట్రోల్ (l) అది ప్రయాణించిన దూరం(d) అనులోమ చరత్వంలో ఉంటాయి.

2. సపోటాపళ్ళ ధర మరియు సపోటా పళ్ళ సంఖ్యలు అనులోమ చరత్వంలోనున్నవి. దీనిని బట్టి కింది పట్టికను పూర్తిచేయండి.

సపోటాపళ్ళ సంఖ్య (x)	1	4	. . .	12	. . .
సపోటాపళ్ళ ధర (y)	8	32	56	. . .	160

3. ఒకవేళ $m \alpha n$ మరియు $m = 154$ అయినపుడు $n = 7$, అయితే $n = 14$ అయినపుడు m విలువ కనుగొనండి.

4. n, m తో అనులోమ చరత్వంలోనున్నవి అయితే కింది పట్టికను పూర్తి చేయండి.

m	3	5	6.5	. . .	1.25
n	12	20	. . .	28	. . .

5. y, x వర్గమూలం యొక్క అనులోమ చరత్వంలో మారుతుంది. $x = 16$ అయినపుడు $y = 24$ అవుతుంది, అయితే చరత్వ స్థిరాంకను కనుగొని, చరత్వ సమీకరణాన్ని రాయండి.

6. సోయాబీన్ గింజలు ఏరుటకు 4 గురు కూలీలకు ₹ 1000 కూలీ ఇవ్వవలసివస్తుంది. ఒక వేళ కూలీ సొమ్ము మరియు కూలీల సంఖ్య అనులోమ చరత్వంలో ఉన్నచో 17 మంది కూలీలకు ఎంత కూలీ ఇవ్వవలసి వస్తుంది.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

కవాయతుకై పిల్లల వరసలు చేశారు. ప్రతి వరసలో పిల్లల సంఖ్య, వరసల సంఖ్య కింది విధంగా ఉన్నాయి.

వరసలోని పిల్లల సంఖ్య	40	10	24	12	$\boxed{8}$
వరసల సంఖ్య	6	24	$\boxed{10}$	$\boxed{20}$	30

ప్రతి జతలోను, వరసలోని పిల్లల సంఖ్య, మొత్తం వరసల సంఖ్యల లబ్ధం 240 అవుతుంది. అనగా ఈ లబ్ధం స్థిరంగా ఉంటుంది. ప్రతి వరుసలోని పిల్లల సంఖ్య మరియు వరసల సంఖ్యలు విలోమానుపాతంలోనున్నవని పై పట్టిక నుండి తెలుస్తుంది.

ఎప్పుడైతే రెండు సంఖ్యలలో ఒక సంఖ్య పెరుగుతుందో, రెండవది దాని ప్రమాణంలో తగ్గుతుంది. అప్పుడు ఆ రెండు సంఖ్యలు విలోమానుపాతంలో ఉంటాయి. ఉదాహరణకు ఒక సంఖ్య రెట్టింపు అయితే రెండవ సంఖ్య సగభాగం అవుతుంది.

తెలుసుకొందాం

విలోమ చరత్వం (Inverse variation)

x మరియు y లు విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయి, ఇదేవాక్యాన్ని x మరియు y విలోమ చరత్వంలోనున్నవి అని రాస్తారు. x మరియు y విలోమ చరత్వంలోనున్నట్లయితే $x \times y$ స్థిరంగా ఉంటుంది. దానిని k అనుకొని ఉదాహరణలు సాధించడం సులభమవుతుంది.

x మరియు y విలోమ చరత్వంలోనున్నవి, దీనిని $x \alpha \frac{1}{y}$ అని సూచిస్తారు.

$x \alpha \frac{1}{y}$ అనగా $x = \frac{k}{y}$ లేదా $x \times y = \mathrm{k}$ ఈ అమరిక చరత్వ సమీకరణం. k అనునది చరత్వ స్థిరాంకం.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. **(1)** ఒకవేళ a, b తో విలోమ చరత్వంలోనున్నట్లయితే కింది పట్టికను పూర్తిచేయండి.

a	6	12	15	. . .
b	20	. . .	. . .	4
$a \times b$	120	120	. . .	. . .

సాధన : (i) $a \alpha \frac{1}{b}$ అనగా $a \times b = \mathrm{k}$

$a = 6$ అయినపుడు $b = 20$ $\therefore \mathrm{k} = 6 \times 20 = 120$ (చరత్వ స్థిరాంకం)

(ii) $a = 12$ అయితే $b = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore 12 \times b = 120$

$\therefore \quad b = 10$

(iii) $a=15$ అయితే $b = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore 15 \times b = 120$

$\therefore \quad b = 8$

(iv) $b = 4$ అయితే $a = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore a \times 4 = 120$

$\therefore \quad a = 30$

ఉదా. **(2)** $f \propto \frac{1}{d^2}$, $d = 5$ అయినపుడు $f = 18$

అయితే (i) $d = 10$ ఉన్నపుడు f విలువ కనుగొనండి. (ii) $f = 50$ ఉన్నపుడు d కనుగొనండి.

సాధన : $f \propto \frac{1}{d^2}$ $\quad \therefore f \times d^2 = k$, $\quad d = 5$ అయినపుడు $f = 18$ దీనిని బట్టి k కనుగొందాం.

$18 \times 5^2 = k \quad \therefore k = 18 \times 25 = 450$ (చరత్వ స్థిరాంకం)

(i) $d = 10$ అయితే $f = ?$

$f \times d^2 = 450$

$\therefore f \times 10^2 = 450$

$\therefore f \times 100 = 450$

$\therefore \quad f = 4.5$

(ii) $f = 50$, $d = ?$

$f \times d^2 = 450$

$\therefore 50 \times d^2 = 450$

$\therefore \quad d^2 = 9$

$\therefore \quad d = 3$ లేదా $d = -3$

అభ్యాసమాలిక 7.2

1 . ఒక పనిని పూర్తిచేయడానికి నియమించిన కూలీల సంఖ్య మరియు పని పూర్తికావడానికి పట్టు రోజుల సమాచారం కింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది. ఆ పట్టికను పూర్తిచేయండి.

కూలీలసంఖ్య	30	20		10	
రోజులు	6	9	12		36

2. ప్రతి ఉదాహరణలో చరత్వస్థిరాంకం కనుగొని, చరత్వ సమీకరణం రాయండి.

(1) $p \propto \frac{1}{q}$; $p = 15$ అయినపుడు $q = 4$ (2) $z \propto \frac{1}{w}$; $z = 2.5$ అయినపుడు $w = 24$

(3) $s \propto \frac{1}{t^2}$; $s = 4$ అయినపుడు $t = 5$ (4) $x \propto \frac{1}{\sqrt{y}}$; $x = 15$ అయినపుడు $y = 9$

3. ఆపిళ్ళ రాశిలోని అన్ని ఆపిళ్లను పెట్టెలలో నింపవలసి ఉన్నది. ప్రతిపెట్టెలో 24 ఆపిళ్ళు పెట్టినట్లయితే, అవి నింపడానికి 27 పెట్టెలు కావాలి. అయితే ప్రతి పెట్టెలో 36 ఆపిళ్ళు పెట్టినట్లయితే ఎన్ని పెట్టెలు అవసరం ?

4. కింది వాక్యాలు చరత్వం చిహ్నాన్ని ఉపయోగించి రాయండి.

(1) ధ్వని తరంగదైర్ఘ్యం (l) మరియు పౌనఃపున్యం (f) ల మధ్య విలోమ చరత్వం ఉంటుంది.

(2) లైటు కాంతి తీవ్రత (I) మరియు లైటు, తెరలమధ్య దూరం (d) వర్గాల మధ్య విలోమ చరత్వముంటుంది.

5. $x \;\alpha\; \frac{1}{\sqrt{y}}$ మరియు $x = 40$ అయినపుడు $y = 16$, ఒకవేళ $x = 10$ అయిన y ఎంత ఉండొచ్చు?

6. x మరియు y రాశులమధ్య విలోమ చరత్వమున్నది. $x=15$ అయినపుడు $y=10$ అవుతుంది, $x=20$ అయినపుడు y = ఎంత?

తెలుసుకొందాం

కాలం, పని, వేగం (Time, Work, Speed)

ఏదేని నిర్మాణం పూర్తి చేయడానికి నియమించిన కూలీల సంఖ్య, వారు పని చేయుటకు పట్టు కాలం వీటికి సంబంధించినవి విలోమ చరత్వం అవుతుంది. అలాగే కొన్ని విలోమ చరత్వ ఉదాహరణలు వేగం, అవి నిర్ణీత దూరం పయనించడానికి పట్టు కాలానికి, సంబంధించినవిగా ఉంటాయి. ఇలాంటి ఉదాహరణలను కాలం–పని–వేగానికి సంబంధించిన ఉదాహరణలంటారు.

చరత్వ చిహ్నాన్ని ఉపయోగించి ఈ రకమైన ఉదాహరణలు ఎలా సాధించాలో చూద్దాం.

ఉదా. (1) ఒక పొలంలో కలుపుతీయు పని 15 మంది స్త్రీలు 8 రోజులలో పూర్తి చేస్తారు. అదే పనిని 6 రోజులలో పూర్తి చేయవలసివచ్చిన ఎంతమంది స్త్రీలు పనిచేయాలి?

సాధన : పని పూర్తిగావడానికి పట్టు రోజులు మరియు పనిచేయు స్త్రీల సంఖ్యలో విలోమ చరత్వముంటుంది. రోజుల సంఖ్య d మరియు స్త్రీల సంఖ్యను n అనుకొందాం.

$d \;\alpha\; \frac{1}{n}$ $\therefore\; d \times n = \mathrm{k}$ (k స్థిరాంకం)

$n = 15$, అయినపుడు $d = 8$ $\therefore\; \mathrm{k} = d \times n = 15 \times 8 = 120$ (చరత్వ స్థిరాంకం)

ఇపుడు $d = 6$ ఉన్నపుడు n ఎంతనో కనుగొందాం.

$d \times n = 120$

$\therefore\; d \times n = 120$ $\therefore\; 6 \times n = 120,$ $\therefore\; n = 20$

$\therefore$ పని 6 రోజులలో పూర్తి చేయుటకు 20 మంది స్త్రీలు పనిచేయాలి.

ఉదా. (2) ఒక వాహనం సరాసరి వేగం గంటకు 48 కి.మీ. అయిన కొంతదూరం పోవడానికి 6 గంటలు పడుతుంది, అయితే వేగం గంటకు 72 కి.మీ. అయిన అంతే దూరం పోవడానికి ఎంత కాలం పట్టును?

సాధన : వాహన వేగంను s అనుకొందాం; పట్టు కాలం t అనుకొందాం. వేగం, కాలాలు విలోమ చరత్వములో ఉన్నాయి.

$s \propto \frac{1}{t}$ $\therefore s \times t = k$ (k స్థిరాంకం)

$k = s \times t = 48 \times 6 = 288$ (చరత్వ స్థిరాంకం) ఇపుడు $s = 72$ అయినచో t కనుగొందాం.

$s \times t = 288$ $\therefore 72 \times t = 288$ $\therefore t = \frac{288}{72} = 4$

$\therefore$ వేగం గంటకు 72 కి.మీ. ఉన్నపుడు అంతే దూరం పోవడానికి 4 గంటలు పడుతుంది.

అభ్యాసమాలిక 7.3

1. కిందివాటిలో ఏ వాక్యాలు విలోమ చరత్వానికి చెందినవి?

(1) కూలీల సంఖ్య, వారు పనిని పూర్తిచేయుటకు పట్టుకాలం.

(2) తొట్టి నింపడానికి గల ఒకే విధమైన కొళాయిల సంఖ్య, తొట్టి నింపడానికి పట్టుకాలం.

(3) వాహనంలో నింపిన పెట్రోలు, దాని విలువ

(4) వృత్తవైశాల్యం, ఆ వృత్త వ్యాసార్థం

2. 15 మంది కూలీలకు ఒక గోడ కట్టడానికి 48 గంటలు పడుతుంది. అయితే 30 గంటలలో ఆ పని పూర్తి చేయడానికి ఎంతమంది కూలీలు అవసరం?

3. సంచులలో పాలునింపే యంత్రందా్వరా 3 నిమిషాలలో అర లీటరువి 120 సంచులు నింపబడుతాయి, అయితే 1800 సంచులు నింపడానికి ఎంతకాలం పట్టును?

4. ఒక కారు గంటకు 60 కి.మీ. సరాసరి వేగంతో కొంత దూరంను ప్రయాణించటానికి 8 గంటలు పట్టెను. అయితే అదే దూరమును ఏడున్నర గంటలలో ప్రయాణించాలంటే ఆ కారు యొక్క సరాసరి వేగంను కనుగొనండి?

జవాబుల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 7.1 **1.** (1) $c \propto r$ (2) $l \propto d$ **2.** x వరుసగా 7, 20, $y = 96$ **3.** 308
4. $m = 7, n$ వరుసగా 26, 5 **5.** $k = 6, y = 6\sqrt{x}$ **6.** ₹ 4250

అభ్యాసమాలిక 7.2 **1.** కూలీల సంఖ్య 15 మరియు 5, దినములు = 18 **2.** (1) $k = 60, pq = 60$
(2) $k = 60, zw = 60$ (3) $k = 100, st^2 = 100$ (4) $k = 45, x\sqrt{y} = 45$
3. 18 పెట్టెలు **4.** (1) $l \propto \frac{1}{f}$ (2) $I \propto \frac{1}{d^2}$ **5.** $y = 256$ **6.** $y = 7.5$

అభ్యాసమాలిక 7.3 **1.** (1), (2) విలోమ చరత్వంకు చెందినవి. **2.** 24 కార్మికులు
3. 45 నిమిషాలు **4.** 4 కి.మీ./గంటకు

EFEVA4

8 చతుర్భుజాల నిర్మాణం, చతుర్భుజ రకాలు

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

- ఇచ్చిన కొలతలను బట్టి త్రిభుజాలను నిర్మించండి.

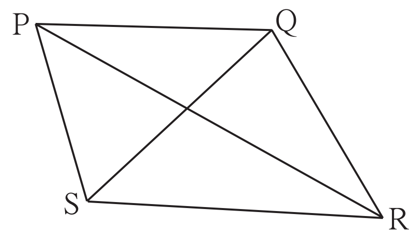
(1) ΔABC ; $l(AB) = 5$ సెం.మీ., $l(BC) = 5.5$ సెం.మీ., $l(AC) = 6$ సెం.మీ.

(2) ΔDEF ; $m\angle D = 35^\circ$, $m\angle F = 100^\circ$, $l(DF) = 4.8$ సెం.మీ.

(3) ΔMNP ; $l(MP) = 6.2$ సెం.మీ., $l(NP) = 4.5$ సెం.మీ., $m\angle P = 75^\circ$

(4) ΔXYZ ; $m\angle Y = 90^\circ$, $l(XY) = 4.2$ సెం.మీ., $l(XZ) = 7$ సెం.మీ.

- ఏదేని చతుర్భుజానికి నాలుగు కోణాలు, నాలుగు భుజాలు, రెండు కర్ణాలు ఇలా మొత్తం పది ఘటకాలు ఉంటాయి.



తెలుసుకొందాం

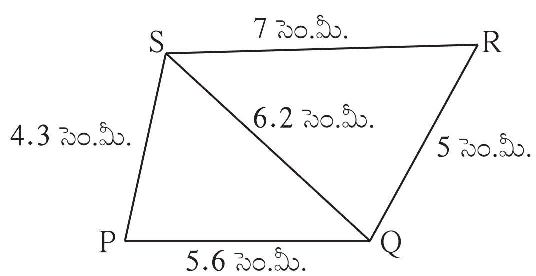
చతుర్భుజ నిర్మాణం (Construction of a quadrilateral)

చతుర్భుజం యొక్క పది ఘటకాలలో నుండి అయిదు నిర్ణీత ఘటకాల కొలతలు తెలిసినట్లయితే, ఆ చతుర్భుజంను నిర్మించవచ్చు, త్రిభుజ నిర్మాణాలే ఈ నిర్మాణాలకు ఆధారమని కింది ఉదాహరణాల నుండి గ్రహించండి.

(I) చతుర్భుజం యొక్క నాలుగు భుజాలు, ఒక కర్ణం ఇచ్చిన చతుర్భుజాన్ని నిర్మించుట.

ఉదా. $l(PQ) = 5.6$ సెం.మీ. , $l(QR) = 5$ సెం.మీ., $l(PS) = 4.3$ సెం.మీ., $l(RS) = 7$ సెం.మీ., $l(QS) = 6.2$ సెం.మీ. ఉండునట్లుగా $\square$ PQRS ను గీయండి.

సాధన : ముందుగా చిత్తు పటం గీద్దాం. పటంలో చతుర్భుజం యొక్క ఇవ్వబడిన అంశాల వివరణ చూపుదాం. పటంను బట్టి Δ SPQ మరియు Δ SRQ యొక్క అన్ని భుజాల పొడవులు మనకు తెలుసునని సులభంగా తెలిసిపోతుంది.

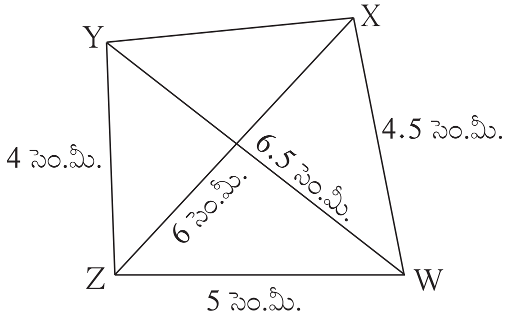


దానిని బట్టి, Δ SPQ మరియు Δ SRQ గనక గీసినట్లయితే, ఇచ్చిన కొలతలు గల $\square$ PQRS వస్తుంది. ఈ చతుర్భుజ నిర్మాణాన్ని మీరు స్వయంగా చేయండి.

(II) చతుర్భుజం యొక్క మూడు భుజాలు మరియు రెండు కర్ణాలు ఇచ్చిన చతుర్భుజాన్ని నిర్మించుట.

ఉదా. l (YZ) = 4 సెం.మీ., l (ZX) = 6 సెం.మీ., l (WX) = 4.5 సెం.మీ., l (ZW) = 5 సెం.మీ., l (YW) = 6.5 సెం.మీ. ఉంటునట్లుగా □ WXYZ ను గీయండి.

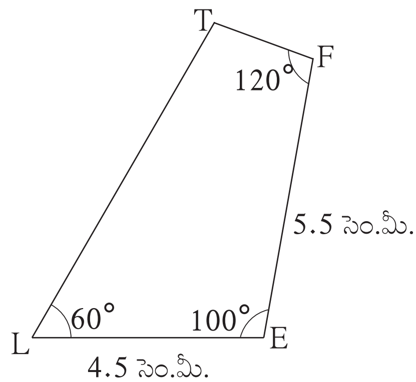
సాధన : చిత్తుపటాన్ని గీద్దాం. ఇచ్చిన వివరణను పటంలో చూపుదాం. Δ WXZ మరియు Δ WZY ల యొక్క అన్ని భుజాల పొడవులు మనకు లభించినట్లుగా, పటంను బట్టి తెలుస్తుంది. దానిని బట్టి Δ WXZ మరియు Δ WZY గీద్దాం. తర్వాత రే.ఖం. XY ని గీసినట్లయితే, ఇచ్చిన కొలతలు గల □ WXYZ లభిస్తుంది. ఈ చతుర్భుజాన్ని మీరు నిర్మించండి.



(III) చతుర్భుజం యొక్క రెండు ఆసన్న భుజాలు, ఏవేని మూడు కోణాలిచ్చిన చతుర్భుజాన్ని నిర్మించుట.

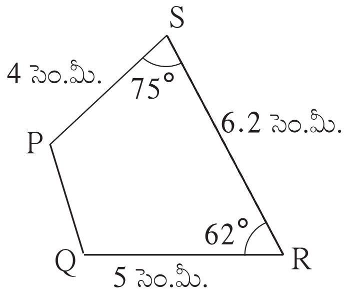
ఉదా. l (EL) = 4.5 సెం.మీ., l (EF) = 5.5 సెం.మీ., $m\angle L = 60^\circ$, $m\angle E = 100^\circ$, $m\angle F = 120^\circ$ నుండునట్లు □ LEFT ను గీయండి.

సాధన: చిత్తుపటాన్ని గీసి, అందులో ఇచ్చిన వివరణను సూచిద్దాం. పటాన్ని బట్టి 4.5 సెం.మీ. పొడవుగల రే.ఖం. LE గీసి, బిందువు E వద్ద 100° కొలతగల కోణాన్ని ఏర్పరుచు రే.ఖం. EF గీసినట్లయితే చతుర్భుజం యొక్క L, E, F అను మూడు బిందువులు లభించునని తెలుస్తుంది. బిందువు L వద్ద 60° కొలతగల కోణాన్ని ఏర్పరుచు, అలాగే బిందువు F వద్ద 120° కొలతగల కోణాన్ని ఏర్పరుచు కిరణాలను గీద్దాం. వాటి ఖండన బిందువే T బిందువు అవుతుంది. ఈ చతుర్భుజాన్ని మీరు గీయండి.



(IV) చతుర్భుజం యొక్క మూడు భుజాలు మరియు అవి కలిగియున్న కోణాలు ఇచ్చినచో చతుర్భుజాన్ని నిర్మించుట.

ఉదా. l (QR) = 5 సెం.మీ., l (RS) = 6.2 సెం.మీ., l (SP) = 4 సెం.మీ., $m\angle R = 62^\circ$, $m\angle S = 75^\circ$ నుండునట్లు □ PQRS ను గీయండి.



సాధన : చతుర్భుజం చిత్తుపటం గీసి, అందులో ఇచ్చిన వివరణను చూపుదాం. దానిని బట్టి, ఇచ్చిన పొడవుగల రే.ఖం. QR ను గీసి, బిందువు R వద్ద 62° కొలతగల కోణాన్ని ఏర్పరుచు రే.ఖం. RS ను గీసినచో, చతుర్భుజం యొక్క Q, R, S

బిందువుల లభిస్తాయి. రే.ఖం. RS తో 75° కొలతగల కోణాన్ని ఏర్పరుచు రే.ఖం. SP గీసినచో, 4 సెం.మీ. దూరంలో P బిందువు లభిస్తుంది. రే.ఖం. PQ ను గీసిన, ఇచ్చిన కొలతలు గల □ PQRS లభిస్తుంది. ఈ చతుర్భుజాన్ని ఇప్పుడు మీరు నిర్మించవచ్చు.

అభ్యాసమాలిక 8.1

1. కింది కొలతలతో చతుర్భుజాలను నిర్మించండి.

(1) □MORE లో $l(\mathrm{MO}) = 5.8$ సెం.మీ., $l(\mathrm{OR}) = 4.4$ సెం.మీ., $m\angle \mathrm{M} = 58^\circ$, $m\angle \mathrm{O} = 105^\circ$, $m\angle \mathrm{R} = 90^\circ$.

(2) $l(\mathrm{DE}) = 4.5$ సెం.మీ., $l(\mathrm{EF}) = 6.5$ సెం.మీ., $l(\mathrm{DG}) = 5.5$ సెం.మీ., $l(\mathrm{DF}) = 7.2$ సెం.మీ., $l(\mathrm{EG}) = 7.8$ సెం.మీ. నుండునట్లుగా □ DEFG గీయండి.

(3) □ ABCD లో $l(\mathrm{AB}) = 6.4$ సెం.మీ., $l(\mathrm{BC}) = 4.8$ సెం.మీ., $m\angle \mathrm{A} = 70^\circ$, $m\angle \mathrm{B} = 50^\circ$, $m\angle \mathrm{C} = 140^\circ$.

(4) □ LMNO ను గీయండి. $l(\mathrm{LM}) = l(\mathrm{LO}) = 6$ సెం.మీ., $l(\mathrm{ON}) = l(\mathrm{NM}) = 4.5$ సెం.మీ., $l(\mathrm{OM}) = 7.5$ సెం.మీ.

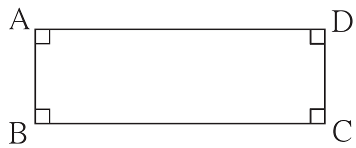
కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

చతుర్భుజ పటం యొక్క భుజాలు, కోణాలపై వేర్వేరు నిబంధనలు చేర్చినపుడు, వివిధ రకాల చతుర్భుజాలు లభిస్తాయి. లంబకోణ చతుర్భుజం లేదా దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం ఈ రకమైన చతుర్భుజాలు మీకు సుపరిచితం. ఈ విధమైన అలాగే ఇతర మరికొన్ని రకాలను కృత్యాలాధారంగా అభ్యసిద్దాం.

లంబకోణ చతుర్భుజం లేదా దీర్ఘచతురస్రం (Rectangle)

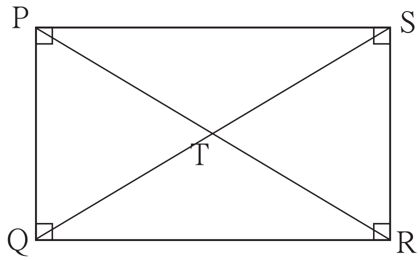
ఏ చతుర్భుజంలో నాలుగు కోణాలు, లంబకోణాలవుతాయో ఆ చతుర్భుజాన్ని లంబకోణ చతుర్భుజం లేదా దీర్ఘచతురస్రం అని అంటారు.

చతుర్భుజాన్ని గీయడానికిచ్చిన అయిదు ఘటకాలలో రెండు ఆసన్న భుజాలు కావాల్సివస్తుంది. రెండు ఆసన్న భుజాలు, మూడు కోణాలు తెలిసియున్నచో మీరు చతుర్భుజాన్ని నిర్మించగలుగుతారు.



నిర్వచనమునుసరించి దీర్ఘచతురస్రంలోని అన్ని కోణాలు లంబ కోణాలు గావున దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క రెండు భుజాలు తెలిసిన, మీరు దీర్ఘచతురస్రాన్ని నిర్మించవచ్చు.

కృత్యం I : మీకు అనువైన విధంగా ఆసన్న భుజాలు గల ఒక దీర్ఘచతురస్రం PQRS గీయండి. దాని కర్ణాల ఖండన బిందువుకు T అని పేరివ్వండి. విభాగిని మరియు స్కేలు సహాయంతో



(1) అభిముఖ భుజాలు, భుజం QR మరియు భుజం PS ల పొడవులను కొలవండి.

(2) భుజం PQ, భుజం SR ల పొడవులను కొలవండి.

(3) కర్ణం PR, కర్ణం QS ల పొడవులను కొలవండి.

(4) కర్ణం PR యొక్క రే.ఖం. PT, రే.ఖం. TR ఈ భాగాల పొడవులను కొలవండి.

(5) కర్ణం QS యొక్క భాగాలు రే.ఖం. QT, రే.ఖం. TS ల పొడవులను కొలవండి.

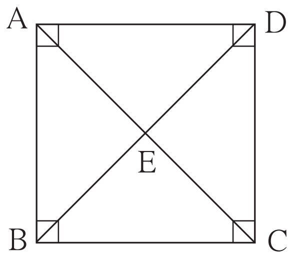
మీకు లభించిన కొలతలను పరిశీలించి, తరగతిలో ఇతరులు కొలిచిన కొలతలను ఒకరికొకరు చూపించుకొని వాటిపై చర్చించండి. చర్చ వలన దీర్ఘచతురస్రం యొక్క కింది ధర్మాలు మీ దృష్టికి వస్తాయి.

- దీర్ఘచతురస్రం ఎదుటి భుజాలు ఒకదానికొకటి సర్వసమానంగా వుంటాయి.
- దీర్ఘచతురస్రం కర్ణాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.
- దీర్ఘచతురస్ర కర్ణాలుపరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

చతురస్రం (Square)

ఏ చతుర్భుజంలో అన్ని భుజాలు సర్వసమానంగా మరియు అన్ని కోణాలు లంబకోణాలుగా ఉంటాయో, ఆ చతుర్భుజంను చతరురస్రం అని అంటారు.

కృత్యం II : అనువైనటువంటి భుజాల పొడవులుగల చతురస్రం ABCD గీయండి. దాని కర్ణాల ఖండన బిందువుకు E అని పేరు పెట్టండి. జ్యామితి పెట్టెలోని సాధనాలనుపయోగించి.



(1) కర్ణం AC మరియు BD ల పొడవులను కొలవండి.

(2) బిందువు E వలన ఏర్పడిన ప్రతికర్ణం యొక్క రెండు భాగాల పొడవులను కొలవండి.

(3) బిందువు E వద్ద ఏర్పడిన అన్ని కోణాల కొలతలను కొలవండి.

(4) చతురస్రంలో కర్ణం వలన ఏర్పడిన ప్రతి కోణం యొక్క భాగాల కొలతలను కొలవండి. (ఉదా., $\angle ADB$, $\angle CDB$).

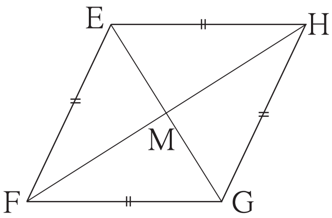
మీకు మరియు మీ తరగతిలోని ఇతరులకు లభించిన కొలతలను పరిశీలించి చర్చించండి.

మీకు చతురస్రం యొక్క కింది ధర్మాలు లభిస్తాయి.

- సమాన పొడవుగల కర్ణాలు, అనగా కర్ణాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.
- కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.
- కర్ణాలు పరస్పరం లంబకోణాలు ఏర్పరుస్తాయి.
- కర్ణం, చతురస్రం అభిముఖకోణాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.

సమభుజ చతుర్భుజం (Rhombus)

ఏ చతుర్భుజం యొక్క అన్ని భుజాలు సమాన పొడవుతో (సర్వసమానంగా) ఉంటాయో, ఆ చతుర్భుజాన్ని సమభుజ చతుర్భుజం అని అంటారు.



కృత్యం III : తగినంత భుజం పొడవు తీసుకొని, అలాగే ఒక కోణం ఏదేని వీలైన కొలత తీసుకొని సమభుజ చతుర్భుజం గీయండి. దాని కర్ణాలను గీసి వాటి ఖండన బిందువునకు M అని పేరు పెట్టండి.

(1) చతుర్భుజం అభిముఖ కోణాలు అలాగే బిందువు M వద్ద ఏర్పడిన కోణాన్ని కొలవండి.

(2) కర్ణం మూలంగా చతుర్భుజం యొక్క ప్రతికోణంలో ఏర్పడిన రెండు భాగాలను కొలవండి.

(3) రెండు కర్ణాల పొడవులను కొలవండి. బిందువు M మూలంగా ఏర్పడిన కర్ణాల భాగాలను కొలవండి.

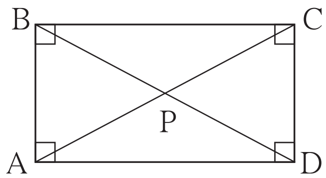
కొలతలను బట్టి సమభుజ చతుర్భుజం యొక్క కింది ధర్మాలు మీ దృష్టికి వస్తాయి.

- అభిముఖ కోణాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.
- కర్ణం సమభుజ చతుర్భుజం యొక్క కోణాలను సమద్విఖండన చేస్తుంది.
- కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి, అలాగే పరస్పరం లంబకోణాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

తరగతిలోని ఇతరులకు కూడా ఈ ధర్మాలు దృష్టికి రావచ్చునని తెలుస్తుంది.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ABCD దీర్ఘచతురస్రం యొక్క కర్ణాల ఖండన బిందువు P. (i) $l(AB) = 8$ సెం.మీ. అయిన $l(DC)$ = ఎంత ?, (ii) $l(BP) = 8.5$ సెం.మీ. అయిన $l(BD)$ మరియు $l(BC)$ కనుగొనండి.



సాధన : ఒక చిత్తు పటాన్ని గీసి, ఇచ్చిన కొలతను చూపుదాం.

(i) దీర్ఘచతురస్రం ఎదుటి భుజాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

$\therefore\ l(DC) = l(AB) = 8$ సెం.మీ.

(ii) దీర్ఘచతురస్రం కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

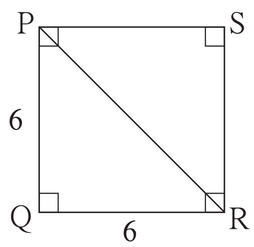
$\therefore\ l(BD) = 2 \times l(BP) = 2 \times 8.5 = 17$ సెం.మీ.

Δ BCD లంబకోణ త్రిభుజం, పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం.

$l(BC)^2 = l(BD)^2 - l(CD)^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$

$\therefore\ l(BC) = \sqrt{225} = 15$ సెం.మీ.

ఉదా. (2) 6 సెం.మీ. భుజం గల చతురస్ర కర్ణం పొడవును కొనుగొనండి.



సాధన : పటంలో చూపిన విధంగా □PQRS 6 సెం.మీ. భుజం గల చతురస్రం, రే.ఖం. PR కర్ణం అనుకోండి.

Δ PQR లో పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం, $l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$

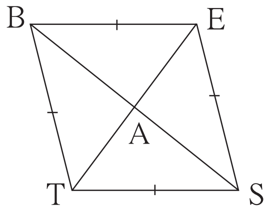
$$= (6)^2+(6)^2 = 36 + 36 = 72$$

$\therefore\ l(PR) = \sqrt{72}$, $\therefore$ కర్ణం పొడవు $\sqrt{72}$ సెం.మీ.

ఉదా. (3) $\square$BEST అను సమభుజ చతుర్భుజం యొక్క కర్ణాలు ఒకదానికొకటి A బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి.

(i) ఒకవేళ $m\angle$ BTS = 110°, అయిన $m\angle$ TBS కనుగొనండి.

(ii) ఒకవేళ $l(TE) = 24$, $l(BS) = 70$, అయిన $l(TS)$= ఎంత ?



సాధన : $\square$BEST చిత్తు పటాన్ని గీసి, కర్ణాల ఖండన బిందువు A ను చూపుదాం.

(i) సమభుజ చతుర్భుజం అభిముఖ కోణాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

$\therefore\ m\angle BES = m\angle BTS = 110^\circ$

ఇపుడు, $m\angle BTS + m\angle BES + m\angle TBE + m\angle TSE = 360^\circ$

$\therefore 110^\circ + 110^\circ + m\angle TBE + m\angle TSE = 360^\circ$

$\therefore\ m\angle TBE + m\angle TSE = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$

$\therefore\ 2\, m\angle TBE = 140^\circ$...... $\because$ సమభుజ చతుర్భుజ కోణాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

$\therefore\ m\angle TBE = 70^\circ$

$\therefore\ m\angle TBS = \frac{1}{2} \times 70^\circ = 35^\circ$ ... $\because$ సమభుజచతుర్భుజ కర్ణాలు అభిముఖ కోణాలను సమద్విఖండనం చేస్తాయి.

(ii) సమభుజ చతుర్భుజ కర్ణాలు ఒకదానినొకటి లంబసమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

$\therefore\ \Delta$ TAS లో, $m\angle TAS = 90^\circ$

$l(TA) = \frac{1}{2}\ l(TE) = \frac{1}{2} \times 24 = 12$, $l(AS) = \frac{1}{2}\ l(BS) = \frac{1}{2} \times 70 = 35$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును బట్టి.

$l(TS)^2 = l(TA)^2 + l(AS)^2 = (12)^2 + (35)^2 = 144 + 1225 = 1369$

$\therefore\ l(TS) = \sqrt{1369} = 37$

అభ్యాసమాలిక 8.2

1. $l(AB) = 6.0$ సెం.మీ., $l(BC) = 4.5$ సెం.మీ. గల దీర్ఘచతురస్రం ABCD ని గీయండి.
2. 5.2 సెం.మీ. ల భుజం గల చతురస్రం WXYZ గీయండి.
3. భుజం 4 సెం.మీ. మరియు $m\angle K = 75^\circ$ గల సమభుజ చతుర్భుజం $\square$ KLMN ను గీయండి.
4. కర్ణం 26 సెం.మీ. గల ఒక దీర్ఘచతురస్రం యొక్క ఒక భుజం 24 సెం.మీ. గలదు. అయితే దాని రెండవ భుజం కనుగొనండి.

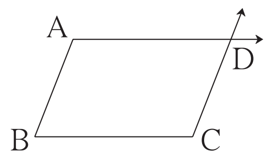
5. సమభుజ చతుర్భుజం □ ABCD యొక్క కర్ణాల పొడవులు 16 సెం.మీ., 12 సెం.మీ. గలవు. అయితే ఆ సమభుజ చతుర్భుజం భుజాలు మరియు చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.
6. 8 సెం.మీ. భుజంగల చతురస్రం యొక్క కర్ణం పొడవును కనుగొనండి.
7. ఒక సమభుజ చతుర్భుజం యొక్క ఒక కోణం కొలత 50° గలదు. అయితే దాని యితర మూడు కోణాల కొలతలను కనుగొనండి.

సమాంతర చతుర్భుజం (Parallelogram)

ఈ రకమైన చతుర్భుజం పేరును బట్టి దాని నిర్వచనం మీరు సులభంగా చెప్పగల్గుతారు.

ఏ చతుర్భుజం యొక్క అభిముఖ భుజాలు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉంటాయో, ఆ చతుర్భుజంను సమాంతర చతుర్భుజమని అంటారు.

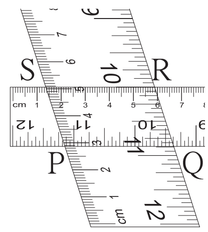
సమాంతర చతుర్భుజంను ఎలా గీయవచ్చు ?



పక్కనున్న పటంలో చూపిన విధంగా రే.ఖం. AB మరియు రే.ఖం. BC లు ఒకదానితోనొకటి ఏదేని కొలతగల కోణాన్ని ఏర్పరుచు రేఖాఖండాలను గీయండి.

'రేఖ బాహ్య బిందువు నుండి ఆ రేఖకు సమాంతర రేఖను గీయుట' ఈ నిర్మాణాన్ని మీరు చేసి ఉన్నారు. దానినుపయోగించి బిందువు C నుండి రే.ఖం. AB నకు సమాంతర రేఖను గీయండి. అలాగే బిందువు A నుండి రే.ఖం. BC నకు సమాంతర రేఖను గీయండి. వాటి ఖండన బిందువునకు D అని పేరు పెట్టండి. □ ABCD సమాంతర చతుర్భుజం ఏర్పడుతుంది. సమాంతర రేఖల తిర్యగ్రేఖ వలన ఏర్పడే అంతర కోణాలు పరస్పరం సంపూరకాలు అవుతాయి అని గుర్తుంచుకోండి. కాబట్టిపై పటంలో $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$, $m\angle B + m\angle C = 180^\circ$, $m\angle C + m\angle D = 180^\circ$ మరియు $m\angle D + m\angle A = 180^\circ$ అనగా సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కోణాల ఒక ధర్మం కింది విధంగా ఉన్నది. • సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఆసన్న కోణాల జతలు పరస్పరం సంపూరకాలు అవుతాయి.

ఈ రకమైన చతుర్భుజం యొక్క మరికొన్ని ధర్మాలు తెలుసుకోవడానికై □ PQRS అను ఏదేని ఒక సమాంతర చతుర్భుజానికై కింది **కృత్యం** చేసి చూడండి. ఎక్కువ, తక్కువ వెడల్పులు గల రెండు స్కేల్‌లు తీసుకోండి. వాటిలో ఒక స్కేలు కాగితంపై పెట్టి దాని అంచుల వెంబడి గీత గీయండి. దానిపై రెండవ పట్టి ఏటవాలుగా పెట్టి దాని అంచుల వెంట గీత గీయండి. దీంతో సమాంతర చతుర్భుజం ఏర్పడుతుంది. దాని కర్ణాలను గీసి వాటి ఛేదన బిందువుకు T అని పేరు పెట్టండి.



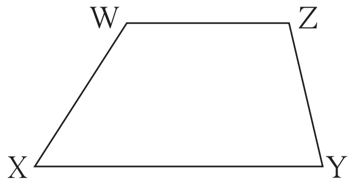
(1) చతుర్భుజ అభిముఖ కోణాల కొలతలను కొలిచి రాయండి. (2) అభిముఖ భుజాల జతల పొడవులను కొలిచి రాయండి. (3) కర్ణాల పొడవులను రాయండి. (4) బిందువు T వలన ఏర్పడిన ప్రతి కర్ణం యొక్క భాగాల పొడవును కొలిచి రాయండి.

కొలతలను బట్టి సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కింది ధర్మాలు లభిస్తాయి.
- అభిముఖ కోణాల కొలతలు సమానంగా ఉంటాయి, అనగా అభిముఖ కోణాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.
- ఎదుటి భుజాలు సమాన పొడవుతో అనగా సర్వసమానంగా ఉంటాయి.
- కర్ణాలు ఒకదానినొకటి సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

వేర్వేరు సమాంతర చతుర్భుజాలను గీసి, ఈ ధర్మాలను పరీక్షించి చూడండి.

సమలంబ చతుర్భుజం (Trapezium)

ఏ చతుర్భుజం యొక్క ఎదుటి భుజాల ఒకే ఒక జత సమాంతరంగా ఉంటే, ఆ చతుర్భుజాన్ని సమలంబ చతుర్భుజం అని అంటారు.



పటంలోని □ WXYZ లో, రే.ఖం. WZ, రే.ఖం. XY, ఈ ఎదుటి భుజాల ఒకే ఒక జత సమాంతరంగా ఉన్నవి.

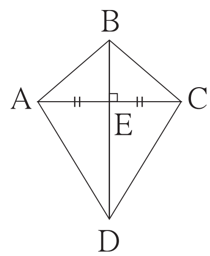
□ WXYZ సమలంబ చతుర్భుజం.

సమాంతర రేఖల తిర్యగ్రేఖ వలన ఏర్పడే అంతర కోణాల ధర్మాన్ని బట్టి

$m\angle W + m\angle X = 180^\circ$ మరియు $m\angle Y + m\angle Z = 180^\circ$

సమలంబ చతుర్భుజంలో నాలుగు ఆసన్న కోణాలలో రెండు జతలు పరస్పరం సంపూరకాలు.

గాలిపటం (Kite)



□ ABCD పటం చూడండి. ఈ చతుర్భుజం యొక్క కర్ణం BD కర్ణం AC కి లంబసమద్విఖండన రేఖ అవుతుంది.

ఏ చతుర్భుజంలో ఒక కర్ణం రెండవ కర్ణం యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ అవుతుందో అలాంటి చతుర్భుజాన్ని గాలిపటం అంటారు.

ఈ పటంలో రే.ఖం. AB ≅ రే.ఖం. CB, రే.ఖం. AD ≅ రే.ఖం. CD వీటిని విభాగిని సహాయంతో పరీక్షించి చూడండి. అలాగే, ∠BAD మరియు ∠BCD లను కొలిచి, అవి సర్వసమానంగా ఉన్నాయను దానిని పరీక్షించి చూడండి.

అనగా గాలిపటము చతుర్భుజ రకంలో రెండు ధర్మాలుంటాయి.

- ఆసన్న భుజాల రెండు జతలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.
- అభిముఖ కోణాల ఒక జత సర్వసమానంగా ఉంటుంది.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ఒక సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఆసన్న కోణాల కొలతలు $(5x - 7)^\circ$ మరియు $(4x + 25)^\circ$ గలవు. అయిన ఆ కోణాల కొలతలను కనుగొనండి.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజ ఆసన్న కోణాలు సంపూరకాలు.

$\therefore\ (5x - 7) + (4x + 25) = 180$

$\therefore\ 9x + 18 = 180$

$\therefore\ 9x = 180 - 18 = 162$

$\therefore\ x = 18$

$\therefore$ ఒక కోణం కొలత $= (5x - 7)^\circ = 5 \times 18 - 7 = 90 - 7 = 83^\circ$

రెండవ కోణం కొలత $= (4x + 25)^\circ = 4 \times 18 + 25 = 72 + 25 = 97^\circ$

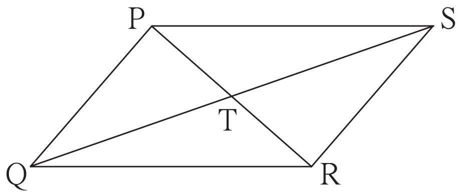
ఉదా.(2) పక్కనున్న పటం $\square$ PQRS సమాంతర చతుర్భుజం. దాని కర్ణాల యొక్క ఖండన బిందువు T పటము ఆధారంగా కింది ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయండి.

(i) ఒకవేళ $l(\text{PS})=5.4$ సెం.మీ., అయితే $l(\text{QR})$ = ఎంత ?

(ii) ఒకవేళ $l(\text{TS})=3.5$ సెం.మీ., అయితే $l(\text{QS})$= ఎంత ?

(iii) $m\angle \text{QRS} = 118^\circ$, అయిన $m\angle \text{QPS}$ = ఎంత ?

(iv) $m\angle \text{SRP} = 72^\circ$ అయితే $m\angle \text{RPQ}$ = ఎంత ?



సాధన : సమాంతర చతుర్భుజం PQRS లో,

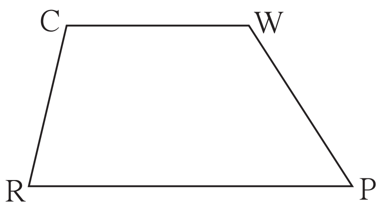
(i) $l(\text{QR}) = l(\text{PS}) = 5.4$ సెం.మీ. .... ఎదుటి భుజాలు సర్వసమానం

(ii) $l(\text{QS})=2\times l(\text{TS})=2\ 3.5 = 7$ సెం.మీ......... కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

(iii) $m\angle \text{QPS} = m\angle \text{QRS} = 118^\circ$ .... అభిముఖ కోణాలు సర్వసమానం.

(iv) $m\angle \text{RPQ} = m\angle \text{SRP} = 72^\circ$ .... ఏకాంతర కోణాలు సర్వసమానం

ఉదా. . (3) $\square$ CWPR యొక్క క్రమానుగత కోణాల కొలతల నిష్పత్తి 7:9:3:5 గలదు. అయితే ఆ చతుర్భుజ కోణాల కొలతలను కనుగొని చతుర్భుజ రకాన్ని గుర్తించండి.



సాధన : $m\angle \text{C} : m\angle \text{W} : m\angle \text{P} : m\angle \text{R} = 7:9:3:5$ అనుకోండి.

$\therefore \angle \text{C}, \angle \text{W}, \angle \text{P}, \angle \text{R}$ ల కొలతలు వరసగా

$7x, 9x, 3x, 5x$ అనుకొందాం.

$\therefore\ 7x + 9x + 3x + 5x = 360^\circ$

$\therefore\ 24x = 360^\circ \quad \therefore\ x = 15$

$\therefore\ m\angle \text{C} = 7 \times 15 = 105^\circ,\ m\angle \text{W} = 9 \times 15 = 135^\circ$

$m\angle \text{P} = 3 \times 15 = 45^\circ$ మరియు $m\angle \text{R} = 5 \times 15 = 75^\circ$

$\therefore\ m\angle \text{C} + m\angle \text{R} = 105^\circ + 75^\circ = 180^\circ \quad \therefore$ భుజం CW $\parallel$ భుజం RP

$m\angle \text{C} + m\angle \text{W} = 105^\circ + 135^\circ = 240^\circ \neq 180^\circ$

$\therefore$ భుజం CR భుజం WP నకు సమాంతరంగా లేదు

$\therefore \square$ CWPR యొక్క ఎదుటి భుజాల ఒకే ఒక జత సమాంతరంగా ఉన్నది.

$\therefore \square$ CWPR ఒక సమలంబ చతుర్భుజం అవుతుంది.

అభ్యాసమాలిక 8.3

1. ఒక సమాంతర చతుర్భుజ అభిముఖ కోణాల కొలతలు $(3x-2)^\circ$ మరియు $(50 - x)^\circ$ ఉన్నచో, చతుర్భుజ ప్రతి కోణం కొలతను కనుగొనండి.

2. పక్కనున్న సమాంతర చతుర్భుజ పటాన్ని బట్టి కింది ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయండి.

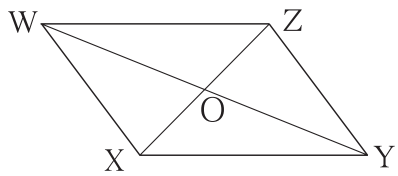
(1) ఒకవేళ $l(WZ) = 4.5$ సెం.మీ. అయిన $l(XY) = ?$

(2) ఒకవేళ $l(YZ) = 8.2$ సెం.మీ. అయిన $l(XW) = ?$

(3) ఒకవేళ $l(OX) = 2.5$ సెం.మీ. అయిన $l(OZ) = ?$

(4) ఒకవేళ $l(WO) = 3.3$ సెం.మీ. అయిన $l(WY) = ?$

(5) ఒకవేళ $m\angle WZY = 120^\circ$ అయిన $m\angle WXY = ?$, $m\angle XWZ = ?$



3. $l(BC) = 7$ సెం.మీ., $\angle ABC = 40^\circ$, $l(AB) = 3$ సెం.మీ. ఉండునట్లు □ ABCD సమాంతర చతుర్భుజాన్ని గీయండి.

4. ఒక చతుర్భుజం యొక్క క్రమానుగత నాలుగు కోణాల నిష్పత్తి 1:2:3:4 గా ఉన్నచో అది ఏరకమైన చతుర్భుజం అయి ఉండవచ్చు? ఆ చతుర్భుజం యొక్క ప్రతి కోణం కొలతను కనుగొని, కారణం రాయండి.

5. $l(BA) = l(BC) = 4.2$ సెం.మీ., $l(AC) = 6.0$ సెం.మీ., $l(AR) = l(CR) = 5.6$ సెం.మీ. ఉండునట్లుగా □ BARC ని గీయండి.

6★. $l(PQ) = 3.5$ సెం.మీ., $l(QR) = 5.6$ సెం.మీ., $l(RS) = 3.5$ సెం.మీ., $m\angle Q = 110^\circ$, $m\angle R = 70^\circ$. ఉంటునట్లుగా □ PQRS ను గీయండి.

□ PQRS సమాంతర చతుర్భుజమని ఇచ్చినచో పై వాటిలో ఏ సమాచారం ఇవ్వడం అవసరం లేదో రాయండి.

జవాబుల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 8.2

4. 10 సెం.మీ. **5.** భుజం10 సెం.మీ., చుట్టుకొలత = 40 సెం.మీ. **6.** $\sqrt{128}$ సెం.మీ. **7.** 130°, 50°, 130°

అభ్యాసమాలిక 8.3

1. 37°, 143°, 37°, 143°

2. (1) 4.5 సెం.మీ. (2) 8.2 సెం.మీ. (3) 2.5 సెం.మీ. (4) 6.6 సెం.మీ. (5) 120°, 60°

4. 36°, 72°, 108°, 144°, సమలంబ చతుర్భుజం.

9 రాయితీ మరియు కమీషన్

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

కింది ఖాళీ గడులలో సరియైన సంఖ్యను రాయండి.

1. $\frac{12}{100} = \square$ శాతం $= \square\%$ 2. 47 శాతం $= \frac{\square}{\square}$ 3. $86\% = \frac{\square}{\square}$

4. 300 లో 4 శాతం $= 300 \times \frac{\square}{\square} = \square$ 5. 1700 లలో 15% $= 1700 \times \frac{\square}{\square} = \square$

పదండి, చర్చిద్దాం.

ఇలాంటి ప్రకటన మీరు చూసివుండవచ్చు. సేల్‌లో అనేక వస్తువుల యొక్క ధరలపై రాయితీ లేదా రిబేట్ ఇవ్వబడుతుంది. మనకిక్కడ సాధారణంగా జులై నెలలో ప్రత్యేకంగా వస్త్రాల సేల్ ప్రారంభమవుతుంది. దీనికారణాలను వెదకి, చర్చించండి.

తెలుసుకొందాం

రాయితీ (Discount)

శ్రీ సురేష్ జూన్ మరియు జులై నెలలో చేసిన చీరల అమ్మకం మరియు లాభాల పట్టికను చూడండి.

నెల	చీర అసలు ధర రూపాయలు	చీర అమ్మిన ధర రూపాయలు	ఒక చీరపై లాభం రూపాయలు	అమ్మిన చీరల సంఖ్య	మొత్తం లాభం రూపాయలు
జూన్	200	250	50	40	$50 \times 40 = 2000$
జులై (సేల్)	200	230	30	100	$30 \times 100 = 3000$

జూలై నెలలో చీరల సేల్ ప్రకటించి ప్రతి చీరపై రాయితీ ఇచ్చారు. అందువలన అతనికి ఒక చీరపై లాభం జూన్ నెల కంటె జులై నెలలో తగ్గినను, జులై నెలలో ఎక్కువ చీరలు అమ్మినందువల్ల లాభం మొత్తం పెరిగినట్లుగా పట్టికను బట్టి మీ దృష్టికి వచ్చి ఉండవచ్చు.

అమ్మడానికి గల వస్తువులపై, ఆవస్తువు వెల ముద్రించబడి ఉంటుంది. దానిని ఆ వస్తువుయొక్క **ముద్రణవెల** (Marked Price) అంటారు. దుకాణదారుడు ముద్రణ వెలపై రాయితీ ఇస్తాడు.

వస్తువును అమ్ముచున్నపుడు, దుకాణదారుడు ముద్రణ వెల కంటె ఎంత తక్కువ సొమ్ము తీసుకుంటాడో ఆ సొమ్మును **'రాయితీ'** అంటారు. రాయితీ ఇవ్వగా మిగిలిన వెలను అమ్మిన వెల అంటారు. అనగా అమ్మకపువెల = ముద్రణ వెల – రాయితీ.

అనగా రాయితీ సాధారణంగా శతమానంలో (వందకు) అనగా శాతాలలో ఇవ్వబడుతుంది.

'20 శాతం రాయితీ' దీనర్థం వస్తువు యొక్క ముద్రణ వెలలో 20% తక్కువ ధరకు వస్తువును అమ్మడం.

అనగా వస్తువు ముద్రణ వెల 100 రూపాయలున్నచో దానిపై 20 రూపాయల రాయితీ ఇవ్వగా దాని అమ్మకం వెల 100 – 20 = 80 రూపాయలు అవుతుంది.

ఇలాంటి వ్యవహారంలో రాయితీ $x\%$ అయితే $\dfrac{x}{100} = \dfrac{\text{వస్తువు విలువపై రాయితీ}}{\text{ముద్రణ వెల}}$ లాంటి సంబంధం ఉంటుంది.

$$\therefore \text{ వస్తువు విలువపై రాయితీ} = \frac{\text{ముద్రణ వెల} \times x}{100}$$

అధిక వివరాలకై

దుకాణంలోకి వెళ్ళి ఖరీదు చేసే బదులు, పుస్తకాలు, బట్టలు, మొబైల్‌లు, మొదలగు అనేక వస్తువులను ఆన్‌లైన్‌లో కొనడం జరుగుతుంది. ఏ కంపనీ ఆన్‌లైన్ వస్తువులు అమ్ముచున్నదో, అకంపెనికి దుకాణాలు ఏర్పరుచుట, నిర్వహణ మొదలైన ఖర్చులు తక్కువ ఉంటాయి. అందుకే ఆన్‌లైన్‌లోని ఖరీదుపై రాయితీతో పాటు వస్తువులను ఇంటికే తెచ్చిస్తారు.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ఒక పుస్తకం ముద్రణవెల 360 రూపాయలు గలదు. దుకాణదారుడు ఆ పుస్తకం 306 రూపాయలకు అమ్మినచో అతను ఎంత శాతం రాయితీ ఇచ్చాడు?

సాధన : ముద్రణ వెల = ₹ 360, అమ్మిన వెల = ₹ 306. ∴ రాయితీ = 360 – 306 = ₹ 54.

ముద్రణ వెల 360 రూపాయలు, రాయితీ 54 రూపాయలు.

∴ వస్తువు ముద్రణవెల 100 రూపాయలు అయినపుడు రాయితీ x అనుకొందాం. $\dfrac{\text{రాయితీ}}{\text{ముద్రణవెల}} = \dfrac{x}{100}$

$$\therefore \frac{54}{360} = \frac{x}{100} \qquad \therefore \quad x = \frac{54 \times 100}{360} = 15$$

∴ పుస్తకం యొక్క ముద్రణ వెలపై 15 శాతం రాయితీ ఇచ్చాడు.

ఉదా. (2) 1200 రూపాయల ముద్రణ వెల గల కుర్చీపై 10% రాయితీ ఉన్నచో రాయితీ మొత్తం ఎంత? వస్తువు అమ్మిన వెల ఎంత?

సాధన :

పద్ధతి I

ముద్రణ వెల = 1200 రూ. రాయితీ = 10%

$\frac{\text{రాయితీ}}{\text{ముద్రణ వెల}}$ ఈ నిష్పత్తిని కనుగొందాం.

కుర్చీ వెలపై x రూపాయల రాయితీ లభిస్తుందని అనుకొందాం.

$$\therefore \frac{x}{1200} = \frac{10}{100}$$

$$x = \frac{10}{100} \times 1200$$

$$x = 120$$

రాయితీ మొత్తం = 120 రూ.

అమ్మిన వెల = ముద్రణ వెల − రాయితీ

= 1200 − 120

= 1080

$\therefore$ కుర్చీ అమ్మిన వెల 1080 రూపాయలు.

పద్ధతి II

ముద్రణ వెలపై 10% రాయితీ కాబట్టి, ఒక వేళ ముద్రణ వెల ₹ 100 అయిన అమ్మిన వెల ₹ 90.

$\therefore$ ముద్రణ వెల 1200 రూపాయలు అయినపుడు అమ్మిన వెల x రూపాయలు అనుకొందాం.

$$\therefore \frac{x}{1200} = \frac{90}{100}$$

$$\therefore x = \frac{90}{100} \times \frac{1200}{1}$$

$\therefore x = 1080$

$\therefore$ కుర్చీ అమ్మిన వెల 1080 రూపాయలు.

$\therefore$ రాయితీ మొత్తం = 1200 − 1080 = 120 రూపాయలు.

ఉదా. (3) ముద్రణ వెలపై 20% రాయితీ ఇచ్చి, ఒక చీర 1120 రూపాయలకు అమ్మినచో, ఆ చీర ముద్రణ వెల ఎంతుండెను?

సాధన : చీర ముద్రణ వెల 100 రూపాయలు. దానిపై 20% రాయితీ ఇచ్చారు అనుకోండి. అంటే కొనగోలుదారునకు చీర 100 − 20 = 80 రూపాయలకు అమ్మారు. అనగా అమ్మిన వెల 80 రూపాయలు అయినపుడు ముద్రణ వెల 100 రూపాయలు, అమ్మిన వెల 1120 రూపాయలు అయినపుడు ముద్రణ వెల x రూపాయలు అనుకొందాం.

$$\therefore \frac{80}{100} = \frac{1120}{x}$$

$$\therefore x = \frac{1120 \times 100}{80}$$

$$= 1400$$

$\therefore$ చీర ముద్రణ వెల 1400 రూపాయలుండెను.

ఉదా. (4) దుకాణదారుడు ఒక వస్తువు కొంత ధరకు విక్రయించడానికి మనసులో నిర్ణయించుకొని, వస్తువు ధరను అతను నిర్ణయించుకొన్న ధర కన్న 30% పెంచి ముద్రిస్తాడు. వస్తువును అమ్ముచున్నపుడు కొనుగోలుదారునకు 20% రాయితీ ఇచ్చినచో, దుకాణదారునకు అతను నిర్ణయించుకొన్న ధరకన్న ఎంతశాతం ఎక్కువ ధర లభిస్తుందో కనుగొనండి.

సాధన : ధరలో పెరుగుదల అలాగే అధిక లాభం వీటి శాతం నిర్ణయించిన ధరపై ఉంటుంది, కాబట్టి నిర్ణయించిన ధర 100 అనుకొన్నచో ఉదాహరణ సులభమవుతుంది. $\therefore$ నిర్ణయించిన ధర 100 రూ॥ అనుకొందాం.

ఈ ధర అతను 30% పెంచి ముద్రిస్తాడు. $\therefore$ ముద్రణవెల = 130 రూపాయలు.

రాయితీ = 130 లో 20% $= 130 \times \frac{20}{100} = 26$

$\therefore$ అమ్మినవెల $= 130 - 26 = 104$ రూపాయలు.

$\therefore$ నిర్ణయించిన ధర 100 రూపాయలున్నచో, అతనికి 104 రూపాయలు లభిస్తాయి.

అనగా దుకాణదారునికి అతను నిర్ణయించిన ధరకంటె 4% ఎక్కువ ధర లభిస్తుంది.

ఉదా. (5) ఒక వస్తువుపై దుకాణదారుడు కొనుగోలుదారునికి 8% రాయితీ ఇస్తాడు, అయినను అతనికి 15% లాభం కలుగుతుంది, ఒకవేళ ఆ వస్తువు ముద్రణ వెల 1750 రూపాయలున్నచో, దుకాణదారుడు ఆ వస్తువును ఎంత ధరకు కొనుగోలుచేసి ఉండవచ్చును?

సాధన : వస్తువు ముద్రణ వెల = 1750 రూపాయలు, రాయితే శాతం = 8

$\therefore$ రాయితి $= 1750 \times \frac{8}{100} = 140$ రూ.

వస్తువు అమ్మినవెల $= 1750 - 140 = 1610$ రూపాయలు.

లాభం 15%, అనగా వస్తువు కొన్నవెల 100 రూపాయలున్నచో, అమ్మినవెల 115 రూపాయలు.

అనగా అమ్మినవెల 115 రూపాయలు అయినపుడు కొన్నవెల 100 రూపాయలు.

అమ్మినవెల 1610 రూపాయలు అయినపుడు కొన్నవెల x రూపాయలు అనుకొందాం.

$\therefore \frac{x}{100} = \frac{1610}{115} \qquad \therefore \quad x = \frac{1610 \times 100}{115} = 1400$

వస్తువు కొన్నవెల = 1400 రూపాయలు.

ఇదినాకర్థమయింది.

- రాయితీ = ముద్రణవెల − అమ్మినవెల
- రాయితీ శాతం x అయితే $\frac{x}{100} = \frac{\text{లభించిన రాయితీ}}{\text{ముద్రణవెల}}$

అభ్యాసమాలిక 9.1

1. ముద్రణ వెల = ₹ 1700, అమ్మినవెల = ₹ 1540 అయిన రాయితీని కనుగొనండి.
2. ముద్రణ వెల = ₹ 990, రాయితీ 10 శాతం, అయిన అమ్మిన వెల కనుగొనండి.
3. అమ్మినవెల = ₹ 900. రాయితీ 20 శాతం, అయిన ముద్రణ వెలను కనుగొనండి.
4. ఒక పంఖా ముద్రణ వెల 3000 రూపాయలు గలదు. దుకాణదారుడు 12 శాతం రాయితీ ఇచ్చినచో, పంఖాపై ఇచ్చిన రాయితీ, పంఖా అమ్మిన వెలను కనుగొనండి.
5. 2300 రూపాయలు ముద్రణ వెల గల మిక్సర్ కొనుగోలుదారునకు 1955 రూపాయలకు లభించినచో, కొనుగోలుదారునికి లభించిన రాయితీ శాతం కనుగొనండి.
6. దుకాణదారుడు ఒక దూరదర్శన్ సెట్‌పై 11 శాతం రాయితీ ఇస్తాడు, అందువల్ల కొనుగోలుదారునికి ఆ సెట్ 22,250 రూపాయలకు లభించినచో, ఆ దూరదర్శన్ సెట్ ముద్రణ వెల కనుగొనండి.
7. ముద్రణ వెలపై 10% రాయితీ ఉన్నపుడు వినియోగదారునికి రాయితీ మొత్తం 17 రూపాయలు లభించినచో, వినియోగదారునికి ఆ వస్తువు ఎంతకు వస్తుందో కనుగొనడానికై కింది ఖాళీ గడులలో సరియైన సంఖ్యలను నింపి కృత్యాన్ని పూర్తి చేయండి.

   వస్తువు ముద్రణ వెల 100 రూపాయలు అనుకోండి.

   అనగా వినియోగదారునికి ఆ వస్తువు $\boxed{} - \boxed{}$ = 90 రూపాయలకు లభిస్తుంది.

   అనగా $\boxed{}$ రాయితీ అయినపుడు అమ్మినవెల $\boxed{}$ రూపాయలు.

   అయితే $\boxed{}$ రూపాయలు రాయితీ అయినపుడు అమ్మినవెల x రూపాయలు అనుకొందాం.

   $$\therefore \frac{x}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \qquad \therefore x = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

   ∴ వినియోగదారునికి ఆ వస్తువు 153 రూపాయలకు వస్తుంది.

8. దుకాణదారుడు ఒకవస్తువును ఒక ప్రత్యేక ధరకు అమ్ముటకు నిర్ణయించుకొని, దాని ధర నిర్ణయించుకొన్న ధర కంటె 25% పెంచి ముద్రిస్తాడు, వస్తువు అమ్ముచున్నపుడు అతను వినియోగదారునికి 20% రాయితీ ఇచ్చినచో, దుకాణదారునకు అతను నిర్ణయించుకొన్న ధర మరియు ప్రత్యక్షంగా అమ్మిన ధర వీటిలో ఎంత శాతం తేడా వచ్చింది?

తెలుసుకొందాం

కమీషన్ (Commission)

వస్తువులనుత్పత్తి చేసే కంపెనీకి తన సరుకులు స్వయంగా విక్రయించడం సాధ్యంకాదు, అపుడు ఆ కంపెనీ

కొంతమంది వ్యక్తులపై తమ సరుకులు అమ్మే బాధ్యతను అప్పగిస్తుంది. (ఉదాహరణకు పుస్తకాలు, బట్టలు, సబ్బులు మొదలైనవి). ఈ సేవకై ఆ వ్యక్తికి కొంత ప్రతిఫలం ఇవ్వబడుతుంది. దానినే **కమీషన్** అని అంటారు కాబట్టి ఇలా పని చేసే వ్యక్తులను కమీషన్ ఏజెంట్ అంటారు. కమీషన్ శాతాలలో ఇవ్వబడుతుంది. వాటి రేటు వస్తువును బట్టి వేర్వేరుగా ఉంటుంది.

భూమి (స్థలం), ఇండ్లు, పశువుల యజమానులకు వీటిని విక్రయించుటకు సులభంగా కొనుగోలుదారులు దొరుకకపోవచ్చు. అందువల్ల అమ్మకందార్లు, కొనుగోలుదారులను ఒకటిగా జేర్చేపని ఏవ్యక్తులైతే చేస్తారో, వారిని **మధ్యవర్తి** లేదా **దళారీ** లేదా **కమీషన్ ఏజంట్** అని అంటారు.

ధాన్యం, కూరగాయలు, పూలు పళ్ళు మొదలైన వ్యవసాయ ఉత్పత్తుల విక్రయం ఏ మధ్యవర్తి ద్వారా జరుగుతందో, ఆ వ్యక్తిని దళారి లేదా అడితి దారుడు అని అంటారు. ఈ పనికై మధ్యవర్తికి ఏ కమీషన్ అయితే లభిస్తుందో దానిని దలాలీ లేదా అడితి అంటారు. ఈ దలాలీ లేదా అడితి ఎవరి సరుకులు అమ్ముతారో వారినుండి లేదా ఎవరైతే సరుకులు కొంటారో వారినుండి లేదా ఇరువురి నుండి లభించవచ్చు.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ఒక దళారి ద్వారా శ్రీపతి 2,50,000 రూపాయల విలువ గల స్థలం సదాశివకు అమ్ముతాడు. దళారి ఒక్కొక్కరినుండి 2% అడితి ఇద్దరినుండి తీసుకొన్నచో, దళారికి మొత్తం ఎంత అడితి లభించింది?

సాధన : స్థలం విలువ = 2,50,000

$\therefore$ అడితి $= 250000 \times \frac{2}{100} = 5000$

ఇద్దరి వద్ద నుండి అడితి తీసుకొనెను $\therefore$ మొత్తం అడితి $= 5000 + 5000 = 10000$ రూపాయలు.

ఉదా. (2) సుఖ్‌దేవ్ దళారీ ద్వారా 10 క్వింటాల్ గోధుమలను ఒక క్వింటాల్‌కు 4050 రూపాయలు చొప్పున అమ్మెను. అతను అడితి దారునికి 1% చొప్పున అడితి ఇచ్చినచో, గోధుమలు అమ్మగా సుఖ్‌దేవ్‌కు ఎంత సొమ్ము లభించిందో కనుగొనండి.

సాధన : గోధుమలు అమ్మినధర $= 10 \times 4050 = 40500$ రూపాయలు అడితి రేటు 1 శాతం.

$\therefore$ ఇచ్చిన అడితి $= 40500 \times \frac{1}{100} = 405$ రూ.

$\therefore$ గోధుమలు అమ్మగా వచ్చిన సొమ్ము = గోధుమలు అమ్మినవెల – అడితి

$= 40500 - 405 = 40,095$ రూ.

గోధుమలు అమ్మగా సుఖ్‌దేవ్‌కు లభించిన సొమ్ము = 40,095 రూపాయలు.

రిబేట్ (Rebate)

ఖాదీ గ్రామోద్యోగ సంస్థ, చేనేత దుకాణాలు, హస్తకళ వస్తువుల విక్రయ కేంద్రాలు, మహిళా పొదుపు సంఘాలు మొదలైన సంస్థలు కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాల నిమిత్తం కొనుగోలుదారులకు రాయితీలు ఇస్తారు, ఉదా. గాంధీ జయంతి సందర్భంగా ఖాదీ బట్టలపై రాయితీ ఇవ్వబడుతుంది.

ఇలాంటి సమయాలలో దుకాణదారునికి ముద్రణ వెల కంటె ఎంత సొమ్ము తక్కువ లభిస్తుందో ప్రభుత్వం అంత పరిహారం చెల్లిస్తుంది. ఇలాంటి పథకం ద్వారా కొనుగోలుదారులకు ఏ రాయితీ లభిస్తుందో దానిని **రిబేట్** అంటారు.

ఆదాయపన్ను చెల్లించే ఏ వ్యక్తి యొక్క ఆదాయం నిర్ణీత పరిమితి వరకు ఉంటుందో వారి ఆదాయ పన్నులో రాయితీ లభిస్తుంది. ఆ రాయితీని కూడా రిబేట్ అంటారు.

క్లుప్తంగా రిబేట్ అంటే ఒకరకమైన మినహాయింపే, దానిని ప్రత్యేక నిబంధనల ప్రకారం గుర్తింపు పొందిన సంస్థలు లేదా ప్రభుత్వం నుండి ఇవ్వబడుతుంది.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. చేనేత సంస్థ యొక్క ఒక దుకాణం నుండి సుధీర్ కింది వస్తువులు ఖరీదు చేసేను.

(i) 2 దుప్పట్లు, ఒక్కొక్కటి 375 రూపాయలు, (ii) 2 జంబుఖానలు (తివాసీ), ఒక్కొక్కటి 525 రూపాయలు ఈ కొనుగోలుపై 15 శాతం రిబేట్ లభించినచో, మొత్తం రిబేట్ సొమ్ము ఎంత? సుధీర్ దుకాణదారునికి ఎంత డబ్బు ఇవ్వాలి?

సాధన : 2 దుప్పట్ల ధర $= 2 \times 375 =$ ₹ 750. 2 జంబుఖానల ధర $= 2 \times 525 =$ ₹ 1050.

కొనుగోలు చేసిన వస్తువుల మొత్తం ధర $= 750 + 1050 = 1800$ రూపాయలు.

లభించే రిబేట్ మొత్తం $= 1800 \times \dfrac{15}{100} = 270$ రూపాయలు.

$\therefore$ సుధీర్ దుకాణదారునికి ఇవ్వవలసిన డబ్బు $= 1800 - 270 = 1530$ రూపాయలు.

అభ్యాసమాలిక 9.2

1. జాన్‌కు ఒక ప్రచురణ కర్త 4500 రూపాయల విలువగల పుస్తకాలు అమ్మెను. అందుకు అతనికి 15 శాతం కమీషన్ లభించినచో, జాన్‌కు లభించే మొత్తం కమీషన్ ఎంత దీనిని కనుగొనుటకు ఖాళీ గడులలో సరియైన సంఖ్యలను రాయండి.

పుస్తకాలు అమ్మినధర = $\boxed{}$ కమీషన్ రేటు = $\boxed{}$

లభించిన కమీషన్ = $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} \times \boxed{}$ $\therefore$ కమీషన్ = $\boxed{}$ రూపాయలు

2. రఫీక్ 4 శాతం అడితి ఇచ్చి దళారీ ద్వారా 15000 రూపాయల పువ్వులు అమ్మినచో, అడితి కనుగొని, రఫీక్‌కు లభించే సొమ్మును కనుగొనండి.

3. ఒక రైతు 9200 రూపాయల విలువగల సరుకులు అడితిదారుని ద్వారా అమ్మెను. అతనికి 2% అడితి ఇవ్వవలసి వచ్చింది. అయిన అడితిదారునికి ఎంత సొమ్ము లభించింది?

4. ఖాధీ భాండాగారం నుండి ఉమాతాయి కింది వస్తువులు కొనుగోలు చేసెను.

(i) 3 చీరలు, ఒక్కొక్కటి 560 రూపాయలు. (ii) 6 బాటిళ్ళ తేనె ఒక్కొక్కటి 90 రూపాయలు.

ఈ కొనుగోలుపై 12 శాతం చొప్పున రిబేట్ లభించినచో, ఉమాతాయికి ఈ వస్తువులు ఎంతకు లభించినవి?

5. ఇచ్చిన వివరాల ప్రకారం ఖాళీ గడులలో సరియైన సంఖ్యలను నింపండి.

ఒక దళారీ ద్వారా శ్రీమతి దీపాంజలి 7,50,000 రూపాయల విలువ గల ఇల్లును శ్రీమతి లీలాబేన్ దగ్గర నుండి ఖరీదు చేసెను. దళారీ ఇద్దరి నుండి 2% అడితి తీసుకొనెను. అయితే

(1) శ్రీమతి దీపాంజలి ఇల్లును కొనటానికై $\square \times \dfrac{\square}{\square} = \square$ రూపాయల అడితి ఇచ్చెను.

(2) లీలాబెన్‌గారు ఇల్లును అమ్మినందుకు $\square$ రు. అడితి ఇచ్చెను.

(3) ఈ వ్యవహారంలో దళారీకి మొత్తం $\square$ రూపాయల అడితి లభించెను.

(4) శ్రీమతి దీపాంజలికి ఇల్లు $\square$ రూపాయలకు లభించెను.

(5) శ్రీమతి లీలాబెన్‌కు తన ఇల్లు అమ్మగా $\square$ రూపాయలు లభించెను.

జవాబుల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 9.1

1. ₹ 160 **2.** ₹ 891 **3.** ₹ 1125 **4.** రాయితీ ₹ 360; అ.వె. ₹ 2640

5. 15% **6.** ₹ 25,000 8. 0 %.

అభ్యాసమాలిక 9.2

2. అడితి ₹ 600; లభించిన సొమ్ము ₹ 14,400

3. ₹ 184 **4.** ₹ 1953.60

1వ సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహం

1. క్రింది ప్రశ్నలకు పర్యాయి సమాధానాలివ్వబడినవి. అందులో సరియైన పర్యాయాన్ని ఎన్నుకోండి.

(1) $\square$ PQRS లో $m\angle P = m\angle R = 108^\circ$ మరియు $m\angle Q = m\angle S = 72^\circ$ అయితే క్రిందివాటిలో ఏ భుజాలు సమాంతరంగా కలవు?

(A) భుజం PQ; భుజం QR (B) భుజం PQ; భుజం SR

(C) భుజం SR; భుజం SP (D) భుజం PS; భుజం PQ

(2) క్రింది వాక్యాలను చదవండి, క్రింద నీయబడిన పర్యాయాలనుండి సరియైన పర్యాయాన్ని ఎన్నుకోండి.

(i) దీర్ఘచతురస్రం యొక్క కర్ణాలు పరస్పరం లంబసమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

(ii) సమచతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

(iii) సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరంగా లంబసమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

(iv) గాలిపటం యొక్క కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

(A) (ii), (iii) వ వాక్యాలు సత్యం (B) కేవలం (ii) వ వాక్యం సత్యం.

(C) (ii), (iv) వ వాక్యాలు సత్యం (D) (i), (iii), (iv) వాక్యాలు సత్యం

(3) $19^3 = 6859$ దీనిని బట్టి $\sqrt[3]{0.006859}$ = ఎంత?

(A) 1.9 (B)19 (C) 0.019 (D)0.19

2. క్రింది సంఖ్యల ఘనమూలంను కనుగొనండి.

(1) 5832 (2) 4096

3. $m \propto n$, $m = 25$ అయినపుడు $n = 15$ దీనిని బట్టి

(1) $n = 87$ అయినపుడు m ఎంత ? (2) $m = 155$ అయితే n = ?

4. x మరియు y లో విలోమ చరత్వం ఉన్నట్లయితే $x = 12$ అయినపుడు $y = 30$ అవుతుంది.

(1) $x = 15$ అయితే y = ఎంత ? (2) $y = 18$ అయితే x = ?

5. ఒక రేఖ l గీయండి. ఆ రేఖ నుండి 3.5 సెం.మీ. దూరంలో ఒక సమాంతర రేఖను గీయండి.

6. $(256)^{\frac{5}{7}}$ ఈ సంఖ్యలో ఏ సంఖ్యయొక్క ఎన్నవ ఘాతం మరియు ఎన్నవ మూలం రాయండి.

7. సూత్రాన్ని ఉపయోగించి విస్తరించండి.

(1) $(5x-7)(5x-9)$ (2) $(2x-3y)^3$ (3) $(a + \frac{1}{2})^3$

8. ఒక అధిక కోణ త్రిభుజాన్ని గీయండి. ఆ త్రిభుజం యొక్క అన్ని మధ్యగత రేఖలను గీసి వాటి మిళిత బిందువును చూపండి.

9. l (BC) = 5.5 సెం.మీ. $m\ \angle ABC = 90°$, l (AB) = 4 సెం.మీ. కొలతలుగల Δ ABC ని గీయండి. ఈ త్రిభుజం ఉన్నతుల మిళిత బిందువును చూపండి.

10. ఒక బస్సువేగం గంటకు 48 కి.మీ. ఉన్నపుడు ఒక గ్రామం నుండి రెండవ గ్రామానికి చేరడానికి 5 గంటలు పడుతుంది. బస్సు వేగం గంటకు 8 కి.మీ.ల తగ్గించినచో అంతే దూరం ప్రయాణం చేయడానికి ఎన్ని గంటలు పట్టునో కనుగొనండి. చరత్వము యొక్క రకాన్ని గుర్తించి ఉదాహరణను సాధించండి.

11. Δ ABC లో రే.ఖం. AD రే.ఖం. BE లు మధ్యగత రేఖలు. G మధ్యగత మిళిత బిందువు, అయితే l(AG) = 5 సెం.మీ. అయినా l(GD) = ఎంత? అయితే l(GE) = 2 సెం.మీ. అయిన l(BE) = ఎంత ?

12. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో రాయండి.

(1) $\frac{8}{13}$ (2) $\frac{11}{7}$ (3) $\frac{5}{16}$ (4) $\frac{7}{9}$

13. కారణాంకాలుగా విభజించండి.

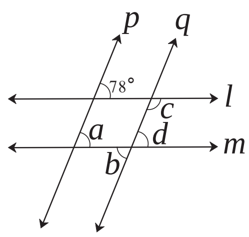
(1) $2y^2-11y+5$ (2) $x^2-2x-80$ (3) $3x^2-4x+1$

14. ఒక దూరదర్శన్ సెట్ యొక్క వెల 50000 రూపాయలు. దానిని దుకాణదారుడు 15% రాయితీ యిచ్చి అమ్మినచో కొనుగోలు దారునికి ఎంతకు వస్తుంది?

15. రాజాభావు తన ఫ్లాటును మధ్యవర్తి లేదా దళారీ ద్వారా 88,00000 రూపాయలకు అమ్మెను. వారిద్దరి వద్ద 2% చొప్పున అడితి తీసుకున్నా ఆ దళారీకి మొత్తం ఎంత అడితి లభించినది?

16. l(DC) = 5.5 సెం.మీ., $m\angle D = 45°$, l(AD) = 4 సెం.మీ. లుండునట్లుగా □ ABCD సమాంతరంగా చతుర్భుజంను గీయండి.

17. పటంలో రేఖ $l \parallel$ రేఖ m అదేవిధంగా రేఖ $p \parallel$ రేఖ q దీనిని బట్టి $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$ ల కొలతలను కనుగొనండి.



జవాబుల సూచిక

1. (i) B (ii) B (iii) D 2. (1)18 (2) 16 3. (1) 145 (2) 93

4. (1) 24 (2) 20 6. 256 యొక్క ఏడవ మూలానికి అయిదవ ఘాతం

7. (1) $25x^2-80x+63$ (2) $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$ (3) $a^3+\frac{3a^2}{2}+\frac{3a}{4}+\frac{1}{8}$

10. 6 గంటలు, విలోమ చరత్వము 11. l(GD) = 2.5 సెం.మీ., l(BE)= 6 సెం.మీ.

12. (1) $0.\overline{615384}$ (2) $1.\overline{571428}$ (3) 0.3125 (4) $0.\dot{7}$

13. (1) $(y-5)(2y-1)$ (2) $(x-10)(x+8)$ (3) $(x-1)(3x-1)$

14. ₹42500 15. ₹ 352000 17. 78°, 78°, 102°, 78°

10 బహుపదుల భాగహారము

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

మనం క్రింది తరగతిలో బీజీయ సమాసాలపై కూడికలు, తీసివేతలు మరియు గుణకారం లాంటి ప్రక్రియలు ఎలా చేయాలో నేర్చుకొన్నాం.

కింది ఉదాహరణలలో ఖాళీలను పూరించండి.

(1) $2a + 3a = \boxed{}$ (2) $7b - 4b = \boxed{}$

(3) $3p \times p^2 = \boxed{}$ (4) $5m^2 \times 3m^2 = \boxed{}$

(5) $(2x + 5y) \times \dfrac{3}{x} = \boxed{}$ (6) $(3x^2 + 4y) \times (2x + 3y) = \boxed{}$

తెలుసుకొందాం

బహుపదుల పరిచయము (Introduction to polynomial)

ఏక చరరాశి బీజీయ సమాసములో ప్రతి పదములో చరరాశి యొక్క ఘాతాంకము పూర్ణాంకం అయినచో ఆ సమాసమును ఏక చరరాశిగల బహుపది అంటారు.

ఉదా:, $x^2 + 2x + 3$; $3y^3 + 2y^2 + y + 5$ ఏక చరరాశి గల బహుపదులు.

బహుపది, ప్రత్యేక బీజీయ సమాసం అవుతుంది కాబట్టి బహుపదులపై కూడికలు, తీసివేతలు మరియు గుణకారం ఈ ప్రక్రియలన్ని బీజీయ సమాసాల విధంగానే చేయాలి.

ఉదా:, (1) $(3x^2 - 2x) \times (4x^3 - 3x^2)$

$$= 3x^2(4x^3 - 3x^2) - 2x(4x^3 - 3x^2)$$
$$= 12x^5 - 9x^4 - 8x^4 + 6x^3$$
$$= 12x^5 - 17x^4 + 6x^3$$

(2) $(4x - 5) - (3x^2 - 7x + 8)$

$$= 4x - 5 - 3x^2 + 7x - 8$$
$$= -3x^2 + 11x - 13$$

బహుపది యొక్క పరిమాణము (Degree of a polynomial)

కింది ఉదాహరణాలలో ఇవ్వబడిన బహుపదిలోని అతి పెద్ద ఘాతాంకను గడిలో రాయండి.

ఉదా. (1) $3x^2 + 4x$ అను బహుపదిలో చరరాశి యొక్క అతి పెద్ద ఘాతాంకము $\boxed{2}$.

ఉదా. (2) $7x^3 + 5x + 4x^5 + 2x^2$ అను బహుపదిలో చరరాశి యొక్క అతి పెద్ద ఘాతాంకము $\boxed{}$.

ఇచ్చిన బహుపదిలోని అతి పెద్ద ఘాతాంకమును ఆ బహుపది యొక్క పరిమాణము అంటారు.

ఇది నాకర్థమైంది.

- ఏక చరరాశిగల బీజీయసమాసం ప్రతి పదంలోని చరరాశి ఘాతాంకం పూర్ణాంకం అయినచో ఆ రాశిని బహుపది అంటారు.
- బహుపదిలోని చరరాశి అతి పెద్ద ఘాతాంకమును ఆ బహుపది యొక్క పరిమాణము అంటారు.

తెలుసుకొందాం

(I) ఏకపదిని ఏకపదిచే భాగించుట (To divide a monomial by a monomial)

ఉదా. (1) $15p^3 \div 3p$ భాగించండి.

సాధన : భాగహారము గుణకారం యొక్క వ్యతిరేక ప్రక్రియ

$\therefore$ $15p^3 \div 3p$ భాగించడానికి, $3p$ ఏకపదిని ఏ ఏకపదిచే గుణించినచో లబ్ధం $15p^3$ వచ్చునో ఆలోచించవలసి ఉంటుంది.

$3p \times 5p^2 = 15p^3 \quad \therefore \; 15p^3 \div 3p = 5p^2$

ఈ ఉదాహరణ అమరికను ప్రక్కన చూపిన విధంగా చేయవచ్చు.

$$\begin{array}{r|l} & 5p^2 \\ 3p & 15p^3 \\ & \underline{-15p^3} \\ & 0 \end{array}$$

ఉదా. (2) భాగించి గడిలో సరియైన పదాన్ని రాయండి.

(i) $(-36x^4) \div (-9x)$ (ii) $(5m^2) \div (-m)$ (iii) $(-20y^5) \div (2y^3)$

$$\begin{array}{r|l} & \boxed{} \\ -9x & -36x^4 \\ & \underline{\boxed{}} \\ & \boxed{} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \boxed{} \\ -m & 5m^2 \\ & \underline{\boxed{}} \\ & \boxed{} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \boxed{} \\ 2y^3 & -20y^5 \\ & \underline{\boxed{}} \\ & \boxed{} \end{array}$$

బహుపదిని ఏకపదిచే భాగించుట (To divide a polynomial by a monomial)

కింది ఉదాహరణను అభ్యసించి బహుపదిని ఏకపదిచే భాగించే పద్ధతిని అర్థంచేసుకోండి.

ఉదా. (1) $(6x^3 + 8x^2) \div 2x$

సాధన :

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 4x \\ 2x & 6x^3 + 8x^2 \\ & \underline{-6x^3} \\ & 0 + 8x^2 \\ & \underline{\quad - 8x^2} \\ & \quad 0 \end{array}$$

వివరణ –

(i) $2x \times \boxed{3x^2} = 6x^3$

(ii) $2x \times \boxed{4x} = 8x^2$

$\therefore$ భాగఫలం $= 3x^2 + 4x$, శేషం $= 0$

ఉదా. **(2)** $(15y^4 + 10y^3 - 3y^2) \div 5y^2$

సాధన :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3y^2 + 2y - \frac{3}{5} \\
\hline
5y^2 & 15y^4 + 10y^3 - 3y^2 \\
 & \underline{_{-}15y^4} \\
 & 0 + 10y^3 - 3y^2 \\
 & \underline{_{-}10y^3} \\
 & 0 - 3y^2 \\
 & \underline{\mp 3y^2} \\
 & 0
\end{array}
$$

వివరణ –

(i) $5y^2 \times \boxed{3y^2} = 15y^4$

(ii) $5y^2 \times \boxed{2y} = 10y^3$

(iii) $5y^2 \times \boxed{\frac{-3}{5}} = -3y^2$

$\therefore$ భాగఫలం $= 3y^2 + 2y - \frac{3}{5}$ మరియు శేషం $= 0$

ఉదా. **(3)** $(12p^3 - 6p^2 + 4p) \div 3p^2$

సాధన :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4p - 2 \\
\hline
3p^2 & 12p^3 - 6p^2 + 4p \\
 & \underline{_{-}12p^3} \\
 & 0 - 6p^2 + 4p \\
 & \underline{\mp 6p^2} \\
 & 0 + 4p
\end{array}
$$

వివరణ –

(i) $3p^2 \times \boxed{4p} = 12p^3$

(ii) $3p^2 \times \boxed{-2} = -6p^2$

$\therefore$ భాగఫలం $= 4p - 2$ మరియు శేషం $= 4p$

ఉదా. **(4)** $(5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6) \div x^2$

సాధన :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^2 - 3x + 4 \\
\hline
x^2 & 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\
 & \underline{-5x^4} \\
 & 0 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\
 & \underline{\mp 3x^3} \\
 & 0 + 4x^2 + 2x - 6 \\
 & \underline{_{-}4x^2} \\
 & 0 + 2x - 6
\end{array}
$$

వివరణ –

(i) $x^2 \times \boxed{5x^2} = 5x^4$

(ii) $x^2 \times \boxed{-3x} = -3x^3$

(iii) $x^2 \times \boxed{4} = 4x^2$

$\therefore$ భాగఫలం $= 5x^2 - 3x + 4$ మరియు శేషం $= 2x - 6$

బహుపదిని భాగించేటప్పుడు శేషం సున్నా మిగిలినపుడు లేదా శేషం యొక్క పరిమాణము బహుపది భాజకము పరిమాణము కంటె తక్కువ (చిన్నగా) ఉన్నచో భాగహారం ప్రక్రియ పూర్తి అవుతుంది.

పై ఉదా. (3) లో, శేషం $4p$ యొక్క పరిమాణం $3p^2$ యొక్క భాజక బహుపది యొక్క పరిమాణం కంటె తక్కువ కలదు. ఉదా. (4) లో శేషం $2x - 6$ ఈ శేషం యొక్క పరిమాణం x^2 భాజక బహుపది యొక్క పరిమాణం కంటె చిన్నగా ఉందని గుర్తుంచుకోండి.

అభ్యాసమాలిక 10.1

1. భాగించి, భాగఫలం మరియు శేషాన్ని రాయండి.

(1) $21m^2 \div 7m$ (2) $40a^3 \div (-10a)$

(3) $(-48p^4) \div (-9p^2)$ (4) $40m^5 \div 30m^3$

(5) $(5x^3 - 3x^2) \div x^2$ (6) $(8p^3 - 4p^2) \div 2p^2$

(7) $(2y^3 + 4y^2 + 3) \div 2y^2$ (8) $(21x^4 - 14x^2 + 7x) \div 7x^3$

(9) $(6x^5 - 4x^4 + 8x^3 + 2x^2) \div 2x^2$ (10) $(25m^4 - 15m^3 + 10m + 8) \div 5m^3$

తెలుసుకొందాం

బహుపదిని ద్విపదిచే భాగించుట (To divide a polynomial by a binomial)

బహుపదిని ద్విపదిచే భాగించే పద్ధతి ఏకపదిచే బహుపదిని భాగించే పద్ధతి ప్రకారమే ఉంటుంది.

ఉదా. **(1)** $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$

సాధన :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 2 \\
\hline
x + 2 & x^2 + 4x + 4 \\
 & \underline{\overset{-}{}x^2 \ \overset{+}{\underset{-}{}}\ 2x} \\
 & 0 + 2x + 4 \\
 & \underline{\pm 2x \pm 4} \\
 & 0
\end{array}
$$

వివరణ –

(i) ముందుగా విభాజ్యము మరియు విభాజకముల యొక్క ఘాతాంకాల అవరోహణ క్రమములో రాయాలి.

విభాజకము యొక్క మొదటి పదంను x చే గుణించగా విభాజ్యంలోని మొదటి పదం లభిస్తుంది.

$\therefore$ విభాజకంను x చే గుణించాలి.

(ii) $(x + 2) \times \boxed{2} = 2x + 4$

$\therefore$ భాగఫలం $= x + 2$ మరియు శేషం $= 0$

ఉదా. **(2)** $(y^4 + 24y - 10y^2) \div (y + 4)$

సాధన : ఇచట విభాజ్య బహుపది పరిమాణము 4 ఇందులోని చరరాశుల ఘాతాంకాలు అవరోహణ క్రమములో లేవు అలాగే 3 ఘాతాంకం గల పదం కూడా లేదు. దానిని $0y^3$ అనుకొని విభాజ్య బహుపది ఘాతాంకాలను అవరోహణ క్రమములో రాసి భాగించుదాం.

$$
\begin{array}{r|l}
 & y^3 - 4y^2 + 6y \\
\hline
y + 4 & y^4 + 0y^3 - 10y^2 + 24y \\
 & \underset{-}{} y^4 \underset{-}{+} 4y^3 \\
\cline{2-2}
 & 0 - 4y^3 - 10y^2 + 24y \\
 & \underset{+}{-} 4y^3 \underset{+}{-} 16y^2 \\
\cline{2-2}
 & 0 + 6y^2 + 24y \\
 & \underset{-}{} 6y^2 \underset{-}{+} 24y \\
\cline{2-2}
 & 0 \quad 0
\end{array}
$$

వివరణ –

(i) $(y + 4) \times y^3 = y^4 + 4y^3$

(ii) $(y + 4) \times -4y^2 = -4y^3 - 16y^2$

(iii) $(y + 4) \times 6y = 6y^2 + 24y$

$\therefore$ భాగఫలం $= y^3 - 4y^2 + 6y$ మరియు శేషం $= 0$

ఉదా. **(3)** $(6x^4 + 3x^2 - 9 + 5x + 5x^3) \div (x^2 - 1)$

సాధన :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 6x^2 + 5x + 9 \\
\hline
x^2 - 1 & 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 9 \\
 & \underset{-}{} 6x^4 \qquad \underset{+}{-} 6x^2 \\
\cline{2-2}
 & 0 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 9 \\
 & \underset{-}{+} 5x^3 \qquad \underset{+}{-} 5x \\
\cline{2-2}
 & 0 + 9x^2 + 10x - 9 \\
 & \underset{-}{} 9x^2 \qquad \underset{+}{-} 9 \\
\cline{2-2}
 & 0 + 10x + 0
\end{array}
$$

వివరణ –

(i) $(x^2 - 1) \times 6x^2 = 6x^4 - 6x^2$

(ii) $(x^2 - 1) \times 5x = 5x^3 - 5x$

(iii) $(x^2 - 1) \times 9 = 9x^2 - 9$

$\therefore$ భాగఫలం $= 6x^2 + 5x + 9$ మరియు శేషం $= 10x$

ఇది నాకర్థమైంది.

- బహుపదిని భాగించునపుడు శేషం సున్నా వస్తే, లేదా శేషం యొక్క పరిమాణము బహుపదిలోని విభాజక పరిమాణము కంటే చిన్నగా ఉన్నచో అప్పుడు భాగహార ప్రక్రియ పూర్తవుతుంది.
- విభాజ్య బహుపదిలోని పదాలు ఘాతాంకాల అవరోహణ క్రమములో లేకపోతే ఆ బహుపదిని ఘాతాంకాల అవరోహణ క్రమములో రాయాలి. దానిని అలా రాయునపుడు ఏదైన ఘాతాంక పదం లేకపోతే దాని గుణకం '0' అనుకొని ఘాతాంకాల అవరోహణ క్రమాన్ని పూర్తిచేయాలి.

అభ్యాసమాలిక 10.2

1. భాగించి, భాగఫలం మరియు శేషాన్ని రాయండి.

(1) $(y^2 + 10y + 24) \div (y + 4)$ (2) $(p^2 + 7p - 5) \div (p + 3)$

(3) $(3x + 2x^2 + 4x^3) \div (x - 4)$ (4) $(2m^3 + m^2 + m + 9) \div (2m - 1)$

(5) $(3x - 3x^2 - 12 + x^4 + x^3) \div (2 + x^2)$

(6★) $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) \div (a^3 - 2)$

(7★) $(4x^4 - 5x^3 - 7x + 1) \div (4x - 1)$

జవాబుల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 10.1

1. $3m$, 0   2. $-4a^2$, 0   3. $\frac{-16}{3}p^2$, 0   4. $\frac{4}{3}m^2$, 0

5. $5x - 3$, 0   6. $4p - 2$, 0   7. $y + 2$, 3   8. $3x$, $-14x^2 + 7x$

9. $3x^3 - 2x^2 + 4x + 1$, 0   10. $5m - 3$, $10m + 8$

అభ్యాసమాలిక 10.2

1. $y + 6$, 0   2. $p + 4$, -17 3. $4x^2 + 18x + 75$, 300

4. $m^2 + m + 1$, 10   5. $x^2 + x - 5$, $x - 2$

6. $a - 1$, $a^2 + a - 1$ 7. $x^3 - x^2 - \frac{x}{4} - \frac{29}{16}$, $\frac{-13}{16}$

11 సాంఖ్యక శాస్త్రము

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

ఉదా. నినాద్ ప్రతిరోజు, ఒక పుస్తకములో చదివిన పుటల సంఖ్యలు వరుసగా 60, 50, 54, 46, 50 ఇలా ఉన్నాయి. దీనిని బట్టి ప్రతిరోజు చదివిన పుటల సరాసరిని కనుగొనండి.

సాధన : సరాసరి $= \dfrac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$

$$= \frac{60 + \square + \square + \square + 50}{\square} = \frac{\square}{\square} = \square$$

$\therefore$ ప్రతిరోజు చదివిన పుటల సరాసరి $\square$.

ఈ సరాసరిని సగటు లేదా అంకగణిత సగటు అంటారు.

తెలుసుకొందాం

పై ఉదాహరణలో రోజూ చదివిన పుటల సంఖ్యలను సాంఖ్యక సమాచారం అంటారు. దానినిబట్టి సాధారణంగా నినాద్ రోజూ 52 పుటలు చదివెనని కనుగొనడం జరిగింది.

ఈ విధముగా సంఘటనలు లేదా సమస్యలకు సంబంధించిన విషయాలను సాంఖ్యక సమాచార రూపంలో సేకరించుట, ఈ సమాచారమును అధ్యయనం చేసి ఏదైన ముగింపుకు (నిష్కర్ష) రావడానికి ఒక ప్రత్యేకమైన శాస్త్ర విభాగం కలదు. ఈ శాఖకు **సాంఖ్యక శాస్త్రము** అనే పేరు గలదు.

సగటు (Mean)

60, 50, 54, 46 మరియు 50 ఈ సంఖ్యల సరాసరి 52 అవుతుందని మనం చూసాం. ఈ సరాసరిని సాంఖ్యకశాస్త్ర పరిభాషలో సగటు అంటారు. సాంఖ్యక దత్తాంశము యొక్క సగటు కనుగొనటానికి దత్తాంశములోని రాశులను కూడి, ఆ మొత్తంను దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్యచే భాగిస్తారు.

'సగటు' కనుగొనే ఈ పద్ధతిలో మనం మరికొన్ని అభ్యసిద్దాం. అందుకై కింది ఈ ఉదాహరణను చూడండి.

ఉదా. ఒక పాఠశాలలోని 8వ తరగతిలోని 37 మంది విద్యార్థులకు గణితంలోని 10 మార్కుల పరీక్షలో పొందిన మార్కులు క్రింది విధముగా ఉన్నాయి. ఆ మార్కుల 'సగటు' ను కనుగొనండి.

2, 4, 4, 8, 6, 7, 3, 8, 9, 10, 10, 8, 9, 7, 6, 5, 4, 6, 7, 8, 4, 8, 9, 7, 6, 5, 10, 9, 7, 9, 10, 9, 6, 9, 9, 4, 7.

సాధన : ఈ ఉదాహరణలో దత్తాంశంలోని అన్ని సంఖ్యలను కూడాలంటే ఎక్కువ సమయము పడుతుంది. $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \times 5 = 35$ అని మనకు తెలుసు. దీనిని బట్టి ఒక సంఖ్యలో అదే సంఖ్యను కలిపే ప్రక్రియ సులభమని గుర్తుంచుకోండి. దీనిని ఉపయోగించి దత్తాంశంలోని అన్ని సంఖ్యలను కూడటం సులభం అవుతుంది. కాబట్టి దత్తాంశంలోని సంఖ్యలను వర్గీకరించి సంఖ్యలను కూడుదాం.

పొందిన మార్కులు x_i (ప్రాప్తాంకం)	గణన చిహ్నాలు	విద్యార్థుల సంఖ్య (పౌనః పున్యం)	$f_i \times x_i$
2	|	1	$1 \times 2 = 2$
3	|	1	$1 \times 3 = 3$
4	~~||||~~	5	$5 \times 4 = 20$
5	||	2	$2 \times 5 = 10$
6	~~||||~~	5	$5 \times 6 = 30$
7	~~||||~~ |	6	$6 \times 7 = 42$
8	~~||||~~	5	$5 \times 8 = 40$
9	~~||||~~ |||	8	$8 \times 9 = 72$
10	||||	4	$4 \times 10 = 40$
		N = 37	$\Sigma f_i x_i = 259.$

సగటు $= \dfrac{\Sigma f_i \times x_i}{N}$

$= \dfrac{259}{37}$

$= 7$

పై విధంగా పట్టిక తయారు చేసి యిచ్చిన దత్తాంశల సగటు కనుగొనటానికి కింది సోపానాలను దృష్టిలో పెట్టుకోండి.

- మొదటి స్తంభంలో $x_1 < x_2 < x_3 \ldots$ ఇలా ఆరోహణ క్రమములో ప్రాప్తాంకాలు రాసి, దానిని x_i చే సూచించండి.
- రెండవ స్తంభంలో గణన చిహ్నాలు రాయండి.
- మూడవ స్తంభంలో ప్రతి ప్రాప్తాంకానికి సంబందించిన గణన చిహ్నాలు లెక్కించి పౌనఃపున్యం రాయండి. ఈ పౌనఃపున్యము f_i చే సూచించబడింది. దాని కింద అన్ని పౌనః పున్యాల మొత్తంను రాయండి. మొత్తం పౌనఃపున్యం N చే సూచించబడింది.
- చివరి స్తంభంలో $f_i \times x_i$ లబ్ధాన్ని రాయండి. దానికింద అన్ని లబ్దాల మొత్తంను రాయండి. $f_i \times x_i$ ల లబ్ధాల మొత్తమును $\Sigma f_i \times x_i$ సూచిస్తారు. Σ (సిగ్మా) అనే చిహ్నము 'మొత్తం' అనే అర్థంలో ఉపయోగించబడుతుంది. సగటు $\overline{x}$ (ఎక్స్‌బార్) చే సూచిస్తారు.

$\therefore$ సగటు $\overline{x} = \dfrac{\Sigma f_i \times x_i}{N}$

ఉదా. రాజాపూర్ అనే గ్రామంలో 30 మంది రైతులు పండించిన సోయాబీన్ పంట ఎకరం ఉత్పత్తి క్వింటాళ్ళలో క్రింది విధంగా గలదు.

9, 7.5, 8, 6, 5.5, 7.5, 5, 8, 5, 6.5, 5, 5.5, 4, 4, 8,
6, 8, 7.5, 6, 9, 5.5, 7.5, 8, 5, 6.5, 5, 9, 5.5, 4, 8.

దీనిని బట్టి పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక తయారు చేసి ఒక ఎకరానికి సోయాబీన్ పంట ఉత్పత్తి సగటును కనుగొనండి.

సాధన :

ఎకరం ఉత్పత్తి (క్వింటాలు) (ప్రాప్తాంకం) x_i	గణన చిహ్నాలు	రైతుల సంఖ్య (పౌనః పున్యం) f_i	$f_i \times x_i$
4	III	3	12
5	~~IIII~~	5	25
5.5	IIII	4	22
6	III	3	18
6.5	II	2	13
7.5	IIII	4	30
8	~~IIII~~ I	6	48
9	III	3	27
		N = 30	$\Sigma f_i x_i = 195.$

సగటు $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i \times x_i}{N} = \dfrac{195}{30} = 6.5$

ఒక ఎకరానికి సోయాబీన్ పంట ఉత్పత్తి సగటు 6.5 క్వింటాళ్ళు.

అభ్యాసమాలిక 11.1

1. 8 వ తరగతిలోని 30 మంది విద్యార్థులలో ప్రతి ఒక్కరు నాటిన మొక్కల సంఖ్య కింది పౌనఃపున్య పట్టికలో యివ్వబడింది. దానిని బట్టి ప్రతి ఒక్కరు నాటిన మొక్కల సగటు కనుగొనటానికి కింది గడులను పూరించండి.

మొక్కల సంఖ్య (ప్రాప్తాంకం) x_i	విద్యార్థుల సంఖ్య (పౌనఃపున్యం) f_i	$f_i \times x_i$
1	4	4
2	6	$\boxed{}$
3	12	$\boxed{}$
4	8	$\boxed{}$
	N = $\boxed{}$	$\Sigma f_i x_i = \boxed{}$

సగటు $\bar{x} = \dfrac{\boxed{}}{N}$

$= \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$

$= \boxed{}$

$\therefore$ ప్రతి ఒక్కరు నాటిన మొక్కల సగటు $\boxed{}$ కలదు.

2. ఎకలారా గ్రామములోని 25 కుటుంబాలు మే నెలలో ఉపయోగించిన కరెంటును యూనిట్లలో కింది పట్టికలో యివ్వబడినది. పట్టికను పూరించి క్రింద యివ్వబడిన ప్రశ్నలకు జవాబులు ఇవ్వండి.

కరెంటు ఉపయోగం (యూనిట్లు) (ప్రాప్తాంకం)x_i	కుటుంబాల సంఖ్య (పౌనఃపున్యం) f_i	$f_i \times x_i$
30	7	....
45	2	....
60	8	....
75	5	....
90	3	....
	N = ...	$\Sigma f_i x_i$ =.......

(1) 45 యునిట్ల కరెంటు ఉపయోగించే మొత్తం కుటుంబాలు ఎన్ని?

(2) ఏ ప్రాప్తాంక పౌనఃపున్యము 5 కలదో ఆ ప్రాప్తంకము ఏది?

(3) N = ఎంత? $\Sigma f_i x_i$ = ఎంత?

(4) దీనిని బట్టి మే నెలలో ప్రతి కుటుంబం ఉపయోగించిన కరెంటు సగటును కనుగొనండి.

3. భిలార్‌లోని 40 కుటుంబాల సభ్యుల సంఖ్య కింది విధంగా కలదు. 1, 6, 5, 4, 3, 2, 7, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 2, 3, 2, 1, 4, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 2, 3, 5, 5, 4, 6, 2, 3, 5, 6, 4, 2. దీని నుండి 40 కుటుంబాలలో సభ్యుల సగటును పౌనఃపున్య పట్టికను ఉపయోగించి కనుగొనండి.

4. ''మోడల్ హైస్కూల్ నాందపూర్'' రాష్ట్రస్థాయి విజ్ఞాన ప్రదర్శనలో గత 20 సంవత్సరాలలో వైజ్ఞానిక మరియు గణిత ఉపక్రమాల (ప్రాజెక్ట్) సంఖ్యలు కింది విధంగా గలవు. దీనిని బట్టి పౌనఃపున్య పట్టిక తయారుచేసి దత్తాంశాల సగటును కనుగొనండి.
2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 5, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 2.

తెలుసుకొందాం

కింది తగరతిలో మీరు సాధారణ కమ్మీ రేఖాచిత్రాలు మరియు జోడు కమ్మీ రేఖాచిత్రాలను గూర్చి అభ్యసించారు. ఇపుడు మరికొన్ని కమ్మీ రేఖాచిత్రాలను అభ్యసిద్దాం.

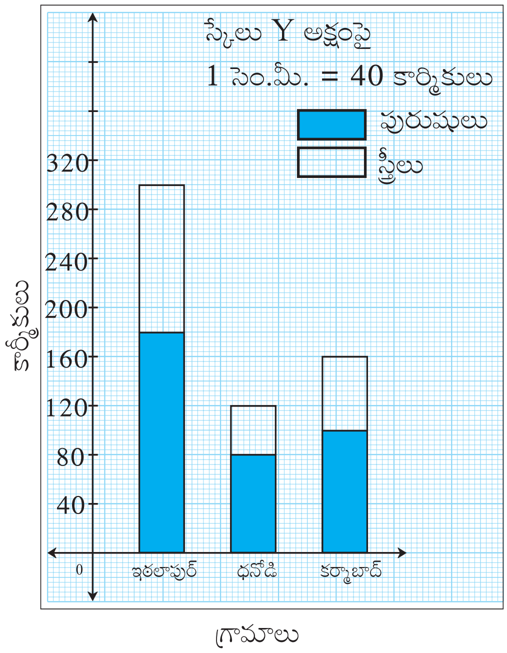
ఉపవిభాగ కమ్మీ రేఖాచిత్రము (Subdivided bar diagram)

దత్తాంశములోని సమాచారము యొక్క తారతమ్య విశ్లేషణ ద్వికమ్మీరేఖాచిత్రాల విధంగానే ఉపవిభాగ కమ్మీరేఖా చిత్రముతో కూడ చేయవచ్చును. ఇందులో రెండు లేక ఎక్కువ అంశాల సమాచారం ఒకే కమ్మీలో చూపబడుతుంది. ఉపవిభాగ కమ్మీ రేఖాచిత్రమును గీయు మెట్లను చూద్దాం.

గ్రామము	ఇతలాపుర్	ధనోడి	కర్మాబాద్
పురుష కార్మికులు	180	80	100
స్త్రీ కార్మికులు	120	40	60
మొత్తం కార్మికులు	300		

- ముందుగా దత్తాంశములోని వివరాలను పై పట్టిక మాదిరిగా తయారు చేయండి.

- గ్రాఫ్ పేపరుపై X– అక్షం మరియు Y– అక్షం గీయండి.
- X– అక్షంపై సమాన దూరములో గ్రామాల పేర్లను రాయండి.
- Y – అక్షంపై కార్మికుల సంఖ్యను రాయండి. 1 సెం.మీ. = 40 కార్మికులు ప్రమాణంగా తీసుకోండి.
- ఇఠలాపూర్ గ్రామంలో మొత్తం కార్మికులు 300 లు ఉన్నారు. కార్మికుల సంఖ్యను ఒక కమ్మీతో చూపండి.

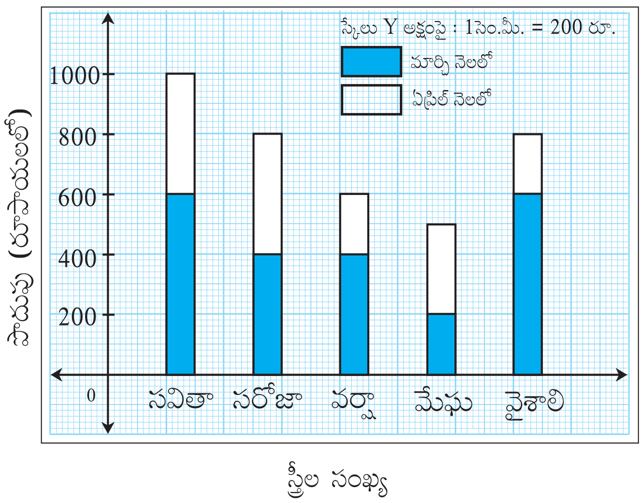


- అందులో పురుష కార్మికులు మొత్తం కార్మికుల కమ్మీలో ఒక భాగం దానిని ఒక గుర్తుచే చూపండి.
- కమ్మీలో మిగిలిన భాగము సహజంగానే స్త్రీల సంఖ్యను సూచించును. దానిని వేరే గుర్తుచే చూపండి.
- ఈ విధంగానే ధనోడి మరియు కర్మాబాద్ గ్రామముల ఉపవిభాగ కమ్మీలను గీయండి.

పై ఈ మెట్లననుసరించి ఉపవిభాగ కమ్మీరేఖా చిత్రము గీసి చూపబడింది. దానిని పరిశీలించండి.

అభ్యాసమాలిక 11.2

1. క్రింది పటంను పరిశీలించి ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వండి.



(1) ఈ పటం ఏ రకమైన కమ్మీరేఖా చిత్రము?

(2) వైశాలి ఏప్రిల్ నెలలో ఎంత పొదుపు చేసింది?

(3) మార్చి మరియు ఏప్రిల్ నెలలో సరోజ మొత్తం ఎంత పొదుపు చేసింది?

(4) సవితా యొక్క మొత్తం పొదుపు మేఘ యొక్క మొత్తం పొదుపు కన్న ఎంత ఎక్కువ కలదు?

(5) ఏప్రిల్ నెలలో ఎవరి పొదుపు అతి తక్కువ గలదు?

2. ఒక జిల్లాపరిషత్ పాఠశాలలోని 5 నుండి 8 వ తరగతి వరకు గల అబ్బాయిల మరియు అమ్మాయిల సంఖ్యను కింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది. దానినిబట్టి ఉపవిభాగ కమ్మీరేఖాచిత్రం గీయండి. (ప్రమాణము: Y అక్షము, 1 సెం.మీ.= 10 విద్యార్థులను తీసుకోండి)

తరగతి	5	6	7	8
అబ్బాయిలు	34	26	21	25
అమ్మాయిలు	17	14	14	20

3. కింది పట్టికలో 2016 మరియు 2017 సంవత్సరములో 4 గ్రామాలవారు, నాటిన చెట్ల సంఖ్య ఇవ్వబడినది. దానిని బట్టి ఉపవిభాగ కమ్మీరేఖా చిత్రమును గీయండి.

గ్రామం / సం.	కర్జత్	వడగావ్	శివాపూర్	ఖండాలా
2016	150	250	200	100
2017	200	300	250	150

4. కింది పట్టికలో మూడు పట్టణాలలోని 8వ తరగతి విద్యార్థులు పాఠశాలకు వెళ్ళడానికి ఉపయోగించిన రవాణాసాధనాలు మరియు కాలి నడకన వెళ్ళేవారి సమాచారము ఇవ్వబడినది. ఈ సమాచారమును చూపించే ఉపవిభాగ కమ్మీరేఖా చిత్రమును గీయండి. (ప్రమాణము : Y అక్షంపై – 1 సెం.మీ. = 500 విద్యార్థులను తీసుకొనండి.)

నగరములు / సాధనములు	పైఠన్	యెవలా	శహాపూర్
సైకిలు	3250	1500	1250
బస్సు, ఆటో	750	500	500
కాలి నడక	1000	1000	500

తెలుసుకొందాం

శతమాన కమ్మీరేఖా చిత్రము (Percentage bar diagram)

ఆర్వీ గ్రామంలో 60 చెట్లను నాటగా అందులో 42 చెట్లు పెరిగినవి మరియు మోర్షి గ్రామంలో 75 చెట్లను నాటగా అందులో 45 చెట్లు పెరిగినవి. బార్షీ గ్రామంలో 90 చెట్లను నాటగా 45 చెట్లు పెరిగినవి.

ఏ గ్రామంలో వృక్షారోపణం అధిక విజయవంతం అయిందో తెలుసుకోవడానికి కేవలం సంఖ్యలు సరిపోవు. దానికై పెరిగిన చెట్ల శాతాన్ని కనుగొనవలసి వస్తుంది.

ఆర్వీలో పెరిగిన చెట్ల శాతం $= \frac{42}{60} \times 100 = 70.$

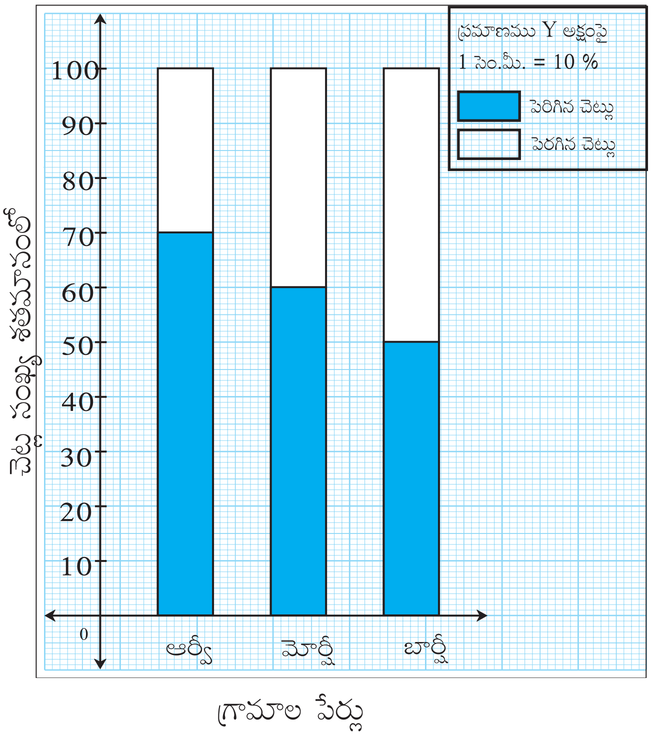
మోర్షీలో పెరిగిన చెట్ల శాతం $= \frac{45}{75} \times 100 = 60.$

ఈ శతమానం ద్వారా ఆర్వీగ్రామంలో పెరిగిన చెట్ల సంఖ్య తక్కువ ఉన్నప్పటికి వారి శతమానం ఎక్కువ గలదు. అనగా శతమానంనుబట్టి కొంచెం వేరే రకమైన సమాచారం లభిస్తుంది. ఇచ్చిన సమాచారంను శాతరూపంలోకి మార్చి ఏ ఉపవిభాగ

కమ్మీ రేఖాచిత్రం గీస్తామో దానినే శతమాన కమ్మీరేఖాచిత్రం అంటారు. అనగా ఉపవిభాగ కమ్మీ రేఖాచిత్రం యొక్క ప్రత్యేక రూపమే ఈ శతమాన కమ్మీ రేఖాచిత్రం ఈ శతమాన కమ్మీ రేఖాచిత్రంను క్రింది మెట్ల ఆధారంగా గీద్దాం.

- ముందుగా కింది విధంగా పట్టికను తయారుచేద్దాం.

గ్రామము	ఆర్వీ	మోర్షీ	బార్షీ
నాటిన మొత్తం చెట్లు	60	75	90
పెరిగిన చెట్లు	42	45	45
పెరిగిన చెట్ల శాతము	$\frac{42}{60} \times 100 = \boxed{70}$	$\frac{45}{75} \times 100 = \boxed{60}$	$\frac{45}{90} \times 100 = \boxed{50}$



- శతమాన కమ్మీరేఖాచిత్రంలో కమ్మీలన్నీ 100 ప్రమాణాల ఎత్తులో ఉంటాయి.
- ప్రతి కమ్మీ చిత్రంలో పెరిగిన చెట్ల శతమానం చూపుదాం. మిగిలినది పెరగని చెట్ల శతమానం అవుతుంది.
- శతమాన కమ్మీరేఖా చిత్రం ఒకరకమైన ఉపవిభాగ కమ్మీ రేఖాచిత్రం కావడం వలన మిగిలిన అన్ని కృత్యములు ఉపవిభాగ కమ్మీ రేఖాచిత్రంలో గీయు కృత్యం మాదిరిగానే ఉంటుంది.

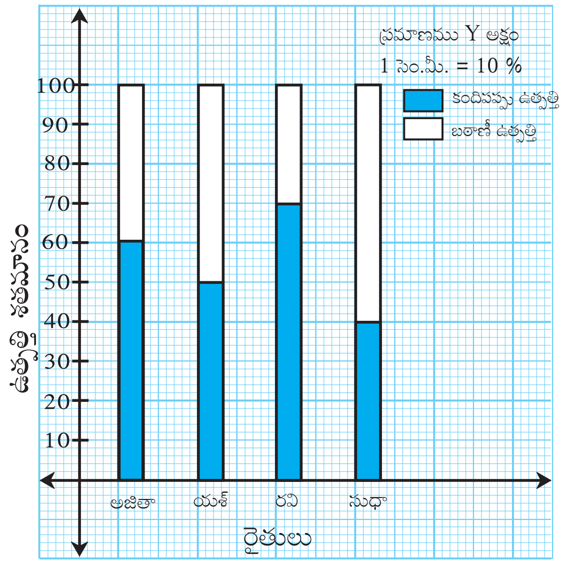
పై సోపానాల ప్రకారం పక్కన శతమాన కమ్మీరేఖా చిత్రం గీయబడింది. దానిని పరిశీలించండి.

అభ్యాసమాలిక 11.3

1. కింది పట్టికలోని సమాచారంను బట్టి శతమాన కమ్మీ రేఖాచిత్రంను గీయండి.

8వ తరగతి విభాగాలు	A	B	C	D
గణితంలో A శ్రేణి పొందిన విద్యార్థులు	45	33	10	15
మొత్తం విద్యార్థులు	60	55	40	75

2. కింది కమ్మీరేఖా చిత్రంను పరిశీలించి ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వండి.



(1) పక్కనున్న కమ్మీరేఖాచిత్రము ఏ రకమైంది?

(2) అజిత్ పొలంలో పండిన కందిపప్పు మొత్తం ఉత్పత్తిలో ఎంతశాతం?

(3) యశ్ మరియు రవిలలో ఎవరి బఠాణీ పంట ఉత్పత్తి శతమానం ఎంత ఎక్కువ ఉన్నది?

(4) కందుల ఉత్పత్తి అందరికంటె తక్కువ శాతము ఎవరిది కలదు?

(5) సుధాయొక్క కందులు మరియు బఠాణీ పంటల ఉత్పత్తి శాతమెంత?

3. కొన్ని పాఠశాలలో 10 వ తరగతి విద్యార్థులను సర్వేక్షణ చేయగా లభించిన సమాచారం కింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది. ఆ సమాచారమును శతమాన కమ్మీ రేఖాచిత్రం ద్వారా చూపించండి.

పాఠశాల	మొదటి	రెండవ	మూడవ	నాల్గవ
విజ్ఞాన శాఖ వైపు దృష్టి	90	60	25	16
వాణిజ్యశాఖ వైపు దృష్టి	60	20	25	24

ఉపక్రమం : శతమాన కమ్మీరేఖాచిత్రం మరియు ఉపవిభాగ కమ్మీరేఖా చిత్రాలను పోల్చుతు చర్చించండి. దీనిని ఉపయోగించి విజ్ఞానము, భూగోళము లాంటి విషయాలలోని ఇలాంటి కమ్మీ రేఖా చిత్రాల సమాచారమును పొందండి.

జవాబుల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 11.1 **2.** (1) 2 (2) 75 (3) N = 25, $\Sigma f_i \times x_i = 1425$ (4) 57

3. 3.9 **4.** 2.75

అభ్యాసమాలిక 11.2 (1) ఉపవిభాగ కమ్మీరేఖాచిత్రం (2) ₹ 600 (3) ₹ 800

(4) ₹ 500 (5) మేఘది

అభ్యాసమాలిక 11.3 **2.** (1) శతమాన కమ్మీ రేఖాచిత్రం (2) 60%

(3) యశ్ ఉత్పత్తి 20% ఎక్కువ (4) సుధది

(5) 40% మరియు 60%

12 ఏక చరరాశి సమీకరణాలు

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

కింది తరగతిలో మీరు ఏక చరరాశి సమీకరణాల గురించి అభ్యసించారు.

- సమీకరణములో ఇచ్చిన చరరాశికి ఏ విలువను ప్రతిక్షేపించడం వలన రెండు వైపులు సమానమవుతుందో, ఆ విలువ ఆ సమీకరణమునకు **సాధన** అవుతుంది.
- సమీకరణంను సాధించడమంటే దాని సాధనను కనుగొనుట.
- సమీకరణాల యొక్క రెండు వైపులా సమాన ప్రక్రియ చేసినచో వచ్చు సమీకరణం సత్యం అవుతుంది. ఈ ధర్మాన్ని ఉపయోగించి మనం నూతన సులభమైన సమీకరణాలను తయారుచేసి, ఇచ్చిన సమీకరణాలను సాధించుదాము.

సమీకరణం యొక్క ఇరువైపులా చేయు ప్రక్రియలు.

(i) ఇరువైపులా సమాన సంఖ్యను కలుపుట. (ii) ఇరువైపుల సమాన సంఖ్యను తీసివేయుట.

(iii) ఇరువైపులా సమాన సంఖ్యచే గుణించుట. (iv) ఇరువైపులా ఒకే శూన్యేతర సంఖ్యతో భాగించుట.

క్రింది సమీకరణాలను సాధించుటకై ఖాళీలను పూరించండి.

ఉదా. (1) $x + 4 = 9$

$$x + 4 - \boxed{} = 9 - \boxed{}$$

$$\therefore\ x = \boxed{}$$

ఉదా. (2) $x - 2 = 7$

$$x - 2 + \boxed{} = 7 + \boxed{}$$

$$\therefore\ x = \boxed{}$$

ఉదా. (3) $\frac{x}{3} = 4$

$$\frac{x}{3} \times \boxed{} = 4 \times \boxed{}$$

$$\therefore\ x = \boxed{}$$

ఉదా. (4) $4x = 24$

$$\frac{4x}{\boxed{}} = \frac{24}{\boxed{}}$$

$$\therefore\ x = \boxed{}$$

తెలుసుకొందాం

ఏక చరరాశి సమీకరణ సాధన (Solution of equations in one variable)

ఒక్కొక్కసారి సమీకరణమును సాధించడానికి వాటిపై ఒకటి కంటె ఎక్కువ ప్రక్రియలు చేయవలసి వస్తుంది. అలాంటి సమీకరణాల యొక్క ఇరువైపుల ప్రక్రియలు చేసి సమీకరణ సాధన కనుగొను కొన్ని రకాలను చూద్దాం.

ఉదా. **(1)** సమీకరణాలను సాధించండి.

(i) $2(x-3) = \frac{3}{5}(x+4)$

సాధన : ఇరువైపులా 5 చే గుణించగా.

$10(x-3) = 3(x+4)$

$\therefore\ 10x - 30 = 3x + 12$

ఇరువైపులా 30ని కలుపగా

$\therefore\ 10x - 30 + 30 = 3x + 12 + 30$

$10x = 3x + 42$

ఇరువైపులా $3x$ ను తీసివేయగా

$\therefore\ 10x - 3x = 3x + 42 - 3x$

$\therefore\ 7x = 42$

ఇరువైపులా 7చే భాగించగా

$\frac{7x}{7} = \frac{42}{7}$

$\therefore\ x = 6$

(ii) $9x - 4 = 6x + 29$

సాధన : ఇరువైపులా 4ను కలుపగా

$9x - 4 + 4 = 6x + 29 + 4$

$\therefore\ 9x = 6x + 33$

ఇరువైపులా $6x$ ను తీసివేయగా

$\therefore 9x - 6x = 6x + 33 - 6x$

$\therefore\ 3x = 33$

ఇరువైపులా 3చే భాగించగా

$\therefore\ \frac{3x}{3} = \frac{33}{3}$

$\therefore\ x = 11$

(iii) $\frac{2}{3} + 5a = 4$

సాధన : **పద్ధతి I**

$\frac{2}{3} + 5a = 4$

ప్రతిపదంను 3చే గుణించగా.

$3 \times \frac{2}{3} + 3 \times 5a = 4 \times 3$

$\therefore\ 2 + 15a = 12$

$\therefore\ 15a = 12 - 2$

$\therefore\ 15a = 10$

$\therefore\ a = \frac{10}{15}$

$\therefore\ a = \frac{2}{3}$

పద్ధతి II

ఇరువైపులా $\frac{2}{3}$ ను తీసివేయగా

$\frac{2}{3} + 5a - \frac{2}{3} = 4 - \frac{2}{3}$

$\therefore\ 5a = \frac{12-2}{3}$

$\therefore\ 5a = \frac{10}{3}$

ఇరువైపులా 5 చే భాగించగా

$\frac{5a}{5} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{5}$

$\therefore\ a = \frac{2}{3}$

A, B, C, D శూన్యేతర రాశులకై $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ అయినచో ఇరువైపులా $B \times D$ చే గుణించగా $AD = BC$ అను సమీకరణం లభించును. దీనిని ఉపయోగించి ఉదాహరణలను సాధించుదాం.

(iv) $\dfrac{(x-7)}{(x-2)} = \dfrac{5}{4}$

సాధన : $\dfrac{(x-7)}{(x-2)} = \dfrac{5}{4}$

$\therefore\ 4(x - 7) = 5(x - 2)$

$\therefore\ 4x - 28 = 5x - 10$

$\therefore\ 4x - 5x = -10 + 28$

$\therefore\ -x = 18 \qquad \therefore\ x = -18$

(v) $\dfrac{8m-1}{2m+3} = 2$

సాధన : $\dfrac{8m-1}{2m+3} = \dfrac{2}{1}$

$1(8m - 1) = 2(2m + 3)$

$\therefore\ 8m - 1 = 4m + 6$

$\therefore\ 8m - 4m = 6 + 1$

$\therefore\ 4m = 7 \qquad \therefore\ m = \dfrac{7}{4}$

అభ్యాసమాలిక 12.1

1. ప్రతి సమీకరణానంతరము చరరాశికై ఇచ్చిన విలువ సమీకరణము యొక్క సాధన అవుతుందో లేదో నిర్ణయించండి.

(1) $x - 4 = 3$, $x = -1, 7, -7$ (2) $9m = 81$, $m = 3, 9, -3$

(3) $2a + 4 = 0$, $a = 2, -2, 1$ (4) $3 - y = 4$, $y = -1, 1, 2$

2. క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి.

(1) $17p - 2 = 49$ (2) $2m + 7 = 9$ (3) $3x + 12 = 2x - 4$

(4) $5(x - 3) = 3(x + 2)$ (5) $\dfrac{9x}{8} + 1 = 10$ (6) $\dfrac{y}{7} + \dfrac{y-4}{3} = 2$

(7) $13x - 5 = \dfrac{3}{2}$ (8) $3(y + 8) = 10(y - 4) + 8$ (9) $\dfrac{x-9}{x-5} = \dfrac{5}{7}$

(10) $\dfrac{y-4}{3} + 3y = 4$ (11) $\dfrac{b+(b+1)+(b+2)}{4} = 21$

తెలుసుకొందాం

పద సమస్యలు (Word Problems)

పద సమస్యలలో యిచ్చిన సమాచారానికై చరరాశిని ఉపయోగించి ఆ సమాచారమును బీజీయ సమాసములలో ఎలా రాస్తారో చూద్దాం.

నా వయస్సు x సం.లు

మా నాన్న వయస్సు నా వయస్సు కంటె 32 సం.ల ఎక్కువ గలదు ∴ నాన్నవయస్సు = $\boxed{\quad}$ సం.

మా నాన్నమ్మవయస్సు నా వయస్సు కంటె నాలుగు రెట్ల కంటె 10 ఎక్కువ కలదు. ∴ నాన్నమ్మ వయస్సు $(4x+10)$సం.

మా చెల్లె వయస్సు నా వయస్సుకంటె 4 సం.లు తక్కువ కలదు. ∴ చెల్లె వయస్సు $\boxed{\quad}$ సం.

నా మిత్రుని వయస్సు నా వయస్సులో సగం కంటె 5 సం.లు ఎక్కువ కలదు. ∴ మిత్రుని వయస్సు $\boxed{\quad}$ సం.

మా అమ్మ వయస్సు నా వయస్సుకు మూడు రెట్లు గలదు. ∴ తల్లి వయస్సు $\boxed{\quad}$ సం.లు

ముందు ఇచ్చిన సమాచారం ప్రకారం నా యొక్క మిత్రుని వయస్సు 12 సం.లు అయితే నా వయస్సెంత?

నా వయస్సు = x సం.; ∴ మిత్రుని వయస్సు = $\frac{x}{2} + 5$

$\frac{x}{2} + 5 = 12$ ...... (ఇచ్చిన ప్రకారం)

∴ $x + 10 = 24$ ...... (ప్రతి పదంను 2చే గుణించగా)

∴ $x = 24 - 10$

∴ $x = 14$

∴ నా వయస్సు 14 సం.లు. దీనిని బట్టి పై సమాచారంలోని ఇతర సభ్యుల వయస్సును కనుగొనండి.

కృత్యం : గడులలో సరియైన సంఖ్యను రాయండి.

వెడల్పునకు 3 రెట్ల పొడవు.

నేను దీర్ఘచతురస్రంను నా చుట్టు కొలత 40 సెం.మీ.

వెడల్పు x

దీర్ఘచతురస్ర చుట్టుకొలత = 40

$2(\boxed{}\,x + \boxed{}\,x) = 40$

$2 \times \boxed{}\,x = 40$

$\boxed{}\,x = 40$

$x = \boxed{}$

∴ దీర్ఘచతురస్ర వెడల్పు = $\boxed{}$ సెం.మీ., దీర్ఘచతురస్ర పొడవు = $\boxed{}$ సెం.మీ.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) జోసెఫ్ బరువు అతని చిన్న తమ్ముని బరువు కంటె రెండు రెట్లు కలదు. వారిద్దరి బరువుల మొత్తం 63 కి.గ్రా. కలదు. అయితే జోసెఫ్ బరువు ఎంత?

సాధన : జోసెఫ్ చిన్న తమ్ముని బరువు x కి.గ్రా. అనుకొందాం.

∴ జోసెఫ్ బరువు అతని తమ్ముని బరువు కంటె రెండు రెట్లు = $2x$

∴ ఇచ్చిన సమాచారమును బట్టి $x + 2x = 63$

∴ $3x = 63$ ∴ $x = 21$

∴ జోసెఫ్ యొక్క బరువు = $2x = 2 \times 21 = 42$ కి.గ్రా.

ఉదా. (2) ఒక భిన్నంలోని లవం, దాని హారం కంటే 5 ఎక్కువకలదు. లవం మరియు హారాలలో ప్రతిదానికి 4 కలిపినచో $\frac{6}{5}$ భిన్నం లభించినచో, ఆ భిన్నంను కనుగొనండి.

సాధన : భిన్నం యొక్క హారం x అనుకొందాం.

∴ భిన్నం యొక్క లవం, హారం కంటె 5 ఎక్కువ అనగా $x + 5$.

∴ ఆ భిన్నం $\frac{x+5}{x}$ అవుతుంది.

దాని లవ, హారాలకు 4 కలిపినచో కొత్త భిన్నం $\frac{6}{5}$ ఏర్పడును.

$\therefore \quad \frac{x+5+4}{x+4} = \frac{6}{5}$

$\therefore \quad \frac{x+9}{x+4} = \frac{6}{5}$

$\therefore \; 5(x + 9) = 6(x + 4)$

$\therefore \; 5x + 45 = 6x + 24$

$\therefore \; 45 - 24 = 6x - 5x$

$\therefore \quad 21 = x$

$\therefore$ భిన్నంలోని హారం 21, లవం = 21 + 5 = 26

$\therefore$ ఆ భిన్నం = $\frac{26}{21}$

ఉదా. (3) రత్న వద్దనున్న రొక్కము రఫీక్ వద్దనున్న రొక్కమునకు మూడు రెట్ల కంటె 200 రూపాయలు ఎక్కువ కలదు. రత్న నుండి 300 రూపాయలు తీసుకొని రఫీక్‌కు ఇచ్చినచో రత్నవద్దనున్న రొక్కము రఫీక్ వద్దనున్న రొక్కము కంటె $\frac{7}{4}$ రెట్లు అయితే రఫీక్ వద్ద ముందున్న రొక్కమెంత? ముందున్న రొక్కము కనుగొనటానికి క్రింది కృత్యంను పూర్తిచేయండి.

సాధన : రత్న వద్దనున్న రొక్కము, రఫీక్ వద్దనున్న రొక్కము మూడు రెట్లకంటె 200 రూపాయలు ఎక్కువ కలదు.

$\therefore$ రఫీక్ వద్దనున్న రొక్కము x రూపాయలు అనుకొందాం. $\therefore$ రత్న వద్దనున్న రొక్కము $\boxed{}$ రూపాయలు

$\therefore$ రత్న దగ్గరి 300 రూపాయలు రఫీక్‌కు ఇచ్చారు, కాబట్టి రత్న వద్ద మిగిలినవి $\boxed{}$ రూపాయలు.

$\therefore$ రఫీక్ వద్ద $x + 300$ రూపాయలు అయినాయి.

రత్న వద్దనున్న కొత్త రొక్కము రఫీక్ వద్దనున్న రొక్కము కంటె $\frac{7}{4}$ రెట్లు అయింది.

$\frac{\text{రత్న వద్దనున్న రొక్కము}}{\text{రఫీక్ వద్దనున్న రొక్కము}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

$\frac{3x-100}{x+300} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

$4\boxed{} = 7\boxed{}$

$12x - 400 = 7x + 2100$

$12x - 7x = \boxed{}$

$5x = \boxed{}$

$x = \boxed{}$

$\therefore$ రఫీక్ వద్ద $\boxed{}$ రూపాయలుండెను.

అభ్యాసమాలిక 12.2

1. తల్లి వయస్సు కుమారుని వయస్సు కంటె 25 సంవత్సరాలు ఎక్కువ కలదు. 8 సం. తరువాత కుమారుని వయస్సు తల్లి వయస్సుల నిష్పత్తి $\frac{4}{9}$ అయినచో కుమారుని వయస్సును కొనుగొనండి.

2. ఒక భిన్నంలోని హారం, లవంకంటె 12 ఎక్కువ కలదు. ఆ లవం నుండి 2 తీసివేసి హారంలో 7 కలుపగా వచ్చు భిన్నం $\frac{1}{2}$ కు సమాన విలువగల భిన్నమవుతుంది. అయితే ఆ భిన్నం ఏది?

3. ఇత్తడి అను మిశ్రమంలో రాగి మరియు జింక్ 13:7 ప్రమాణములో ఉన్నచో 700 గ్రాముల బరువుగల ఇత్తడి పాత్రలో జింక్ ఎంత ఉండవచ్చు?

4★. మూడు వరుస పూర్ణాంకాల మొత్తం 45 కంటె ఎక్కువ. కానీ 54 కంటె తక్కువ కలదు అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

5. రెండు అంకెల సంఖ్యలో పదుల స్థానంలోని అంకె ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెకు రెండు రెట్లు కలదు. అంకెలను తారుమారు చేయగా వచ్చిన సంఖ్య మరియు మొదటి సంఖ్యల మొత్తం 66 అయితే ఇచ్చిన సంఖ్య ఏది?

6★. ఒక నాట్యగృహంలో నాటకమునకై 200 రూపాయల మరియు 100 రూపాయల విలువ గల కొన్ని టిక్కెట్లు అమ్మినారు. 200 రూపాయల విలువగల టిక్కెట్ల సంఖ్య 100 రూపాయల విలువగల టిక్కెట్ల సంఖ్య కంటె 20 టిక్కెట్లు ఎక్కువ అమ్మ బడినవి. రెండు రకాల టికెట్లను అమ్మగా నాట్యగృహానికి 37000 రూపాయలు లభించినచో 100 రూపాయల టిక్కెట్లు ఎన్ని అమ్మినారు?

7. మూడు వరుస సహజ సంఖ్యలలో అతి చిన్న సంఖ్యకు ఐదురెట్లు అతి పెద్ద సంఖ్య నాలుగు రెట్ల కంటె 9 ఎక్కువ అయినచో ఆ సంఖ్య ఏది?

8. రాజు ఒక సైకిలును 8% లాభంతో అమిత్‌కు అమ్మెను. అమిత్ 54 రూ. ఖర్చు చేసి దానిని రిపేరు చేయించెను. అతను ఆ సైకిల్‌ను నిఖిల్‌కు రూ. 1134 కు అమ్మెను. అప్పుడు అమిత్‌కు లాభంగాని, నష్టంగాని కలుగలేదు. అయితే రాజు ఆ సైకిలును ఎన్ని రూపాయలకు ఖరీదు చేసినాడు?

9. ఒక క్రికెట్ ఆటగాడు మొదటి పోటిలో 180 పరుగులు చేయగా రెండవ పోటిలో 257 పరుగులు చేసాడు. మూడవ పోటీలో అతను ఎన్ని పరుగులు చేసిన పోటీలలో అతని పరుగుల సరాసరి 230 అవుతుంది?

10. సుధీర్ వయస్సు వీరు వయస్సుకు మూడు రెట్లకంటె 5 ఎక్కువ కలదు. అనిల్ వయస్సు సుధీర్ వయస్సులో సగభాగం ఉండెను. సుధీర్ వయస్సు మరియు వీరు వయస్సుల మొత్తం అనిల్ వయస్సుకు మూడు రెట్లు వాటి నిష్పత్తి 5:6 అయినచో వీరు వయస్సును కనుగొనండి.

జవాబుల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 12.1 1. సమీకరణ సాధన విలువ. (1) $x = 7$ (2) $m = 9$ (3) $a = -2$ (4) $y = -1$ 2. (1) $p = 3$ (2) $m = 1$ (3) $x = -16$ (4) $x = \frac{21}{2}$ (5) $x = 8$ (6) $y = 7$ (7) $x = \frac{1}{2}$ (8) $y = 8$ (9) $x = 19$ (10) $y = \frac{8}{5}$ (11) $b = 27$

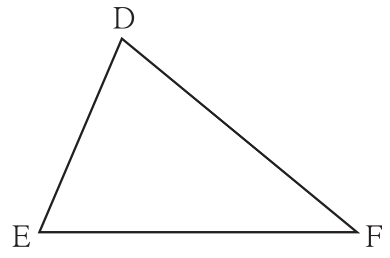
అభ్యాసమాలిక 12.2 1. 12 సం॥లు 2. $\frac{23}{35}$ 3. 245 గ్రాములు
4. 15, 16, 17 లేక 16, 17, 18 5. 42 6. 110
7. 17, 18, 19 8. ₹ 1000 9. 253 10. 5 సం॥లు

EPG6AU

13 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

పక్కనున్న పటంను బట్టి కింది ప్రశ్నలకు జవాబులు వెదకండి.



(i) భుజం DE ఎదురుగా గల కోణం ఏది?

(ii) $\angle$ E కోణం ఏ భుజానికి ఎదురుగా గల కోణం?

(iii) భుజం DE మరియు భుజం DF ల అంతర్భూతమైన కోణం ఏది?

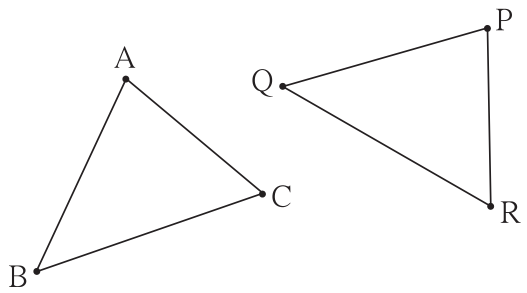
(iv) $\angle$ E మరియు $\angle$ F ల అంతర్భూతమైన భుజం ఏది?

(v) భుజం DE కి ఆసన్నంగా ఏ కోణం గలదు.

- ఏ పటాలైతే పరస్పరం పూర్తిగా ఏకీభవిస్తాయో ఆ పటాలను సర్వసమాన పటాలు అంటారు.
- ఏ రేఖాఖండాల పొడవులు సమానంగా ఉంటాయో. ఆ రేఖాఖండాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.
- ఏ కోణాల కొలతలు సమానంగా ఉంటాయో ఆ కోణాలు సర్వసమానం.

తెలుసుకొందాం

త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం (Congruence of triangles)



కృత్యం : పక్కనున్న పటమును చూడండి. ఉల్లిపొర కాగితంపై Δ ABC గీసి ఆ కాగితాన్ని Δ PQR పైన పెట్టి చూడండి. A బిందువు P బిందువుపై, B బిందువు Q బిందువుపై మరియు C బిందువు R బిందువుపై పెట్టి చూడండి. రెండు త్రిభుజాలు పూర్తిగా ఏకీభవిస్తున్నాయి, అంటే అవి సర్వసమానమని తెలుస్తుంది.

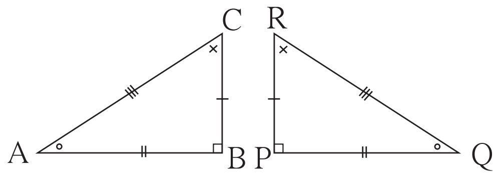
కృత్యంలో Δ ABC ను Δ PQR పైన పెట్టె ఒక పద్ధతి ఇవ్వబడింది. కాని A బిందువు Q పైన B బిందువు R పైన మరియు C బిందువు P పైన పెట్టినచో ఆ త్రిభుజాలు పూర్తిగా ఒకదానికొకటి ఏకీభవించవు. అనగా ప్రత్యేక పద్ధతి ప్రకారమే అవి ఒకదానికొకటి పూర్తిగా ఏకీభవించాలి.

ఈ ఏకీభవించే పద్ధతి ఒకదానికొకటి సదృశంగా చూపబడతుంది. A బిందువు యొక్క సదృశం బిందువు P తో గలదు. దీనిని A $\leftrightarrow$ P ఈ విధంగా రాస్తారు ఇచట, A $\leftrightarrow$ P, B $\leftrightarrow$ Q, C $\leftrightarrow$ R ఇలాంటి సదృశాలతో త్రిభుజాలు సర్వసమానం అయినావి. ఈ పద్ధతిలో త్రిభుజాలు సర్వసమానమైనచో $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$ అట్లే రే.ఖం. AB $\cong$ రే.ఖం. PQ, రే.ఖం. BC $\cong$ రే.ఖం. QR, రే.ఖం. CA $\cong$ రే.ఖం. RP ఇలా

ఆరు సర్వసమానత్వాలు లభిస్తాయి. కాబట్టి Δ ABC మరియు Δ PQR ఇవి ABC $\leftrightarrow$ PQR ఈ సదృశ్యంతో సర్వసమానం అవుతాయని అంటారు. Δ ABC $\cong$ Δ PQR ఈ విధంగా రాస్తారు. ఇలా రాయడంలో A $\leftrightarrow$ P, B $\leftrightarrow$ Q, C $\leftrightarrow$ R ఈ శీర్షబిందువులు, ఒకదానికొకటి సదృశం దానివల్ల లభించే పై ఆరు సర్వసమానత్వాలు అంతర్భూతమై ఉంటాయి. కాబట్టి రెండుత్రిభుజాలు సర్వసమానమని రాస్తున్నపుడు శీర్షబిందువుల వరుస ఒకదానికొకటి సదృశ్యాలను పాటించడంపై దృష్టిపెట్టండి.

చదవండి, చర్చిద్దాం

Δ ABC మరియు Δ PQR ఈ సర్వసమాన త్రిభుజాల సర్వసమాన అంశాలను ఒకే విధమైన గుర్తులతో సూచించారు.



అనిల్, రేహానా మరియు సుర్జిత్‌లు త్రిభుజాల సర్వసమానత్వమును ఈ క్రింది విధముగా రాసారు.

అనిల్ రాసింది : Δ ABC $\cong$ Δ QPR

రేహానా రాసింది : Δ BAC $\cong$ Δ PQR

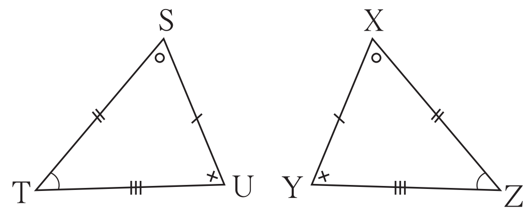
సుర్జిత్ రాసింది : Δ ABC $\cong$ Δ PQR

ఇందులో ఎవరు రాసింది సరిగా ఉంది. ఎవరు తప్పు రాశారు? చర్చించండి.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) పక్కనున్న పటములోని త్రిభుజాలపై ఒకే విధమైన గుర్తులతో చూపిన అంశాలు సర్వసమానంగా కలవు.

(i) శీర్షబిందువులు ఏది ఒకదానితోనొకటి సదృశంగా సర్వసమానం అవుతాయో ఆ సదృశాలతో త్రిభుజాలు సర్వసమానత్వంను రెండు రకాలుగా రాయండి.



(ii) Δ XYZ $\cong$ Δ STU రాసింది సరిగా ఉందా, తప్పా సకారణంగా వ్రాయండి.

సాధన : పరిశీలన ద్వారా ఇచ్చిన త్రిభుజాలు STU $\leftrightarrow$ XZYలు ఒకదానికొకటి సదృశంగా సర్వసమానత్వం కలిగి ఉన్నాయి.

(i) ఒకటవ రకం : Δ STU $\cong$ Δ XZY, రెండవ రకం: Δ UST $\cong$ Δ YXZ

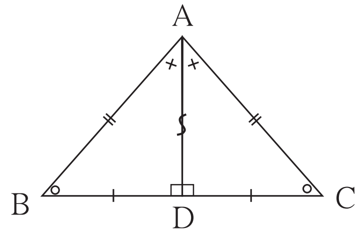
వివిధ రకాలుగా రాయుటకు ప్రయత్నించండి.

(ii) త్రిభుజాలు సర్వసమానత్వంను Δ XYZ $\cong$ Δ STU గా రాసినచో భుజం ST $\cong$ భుజం XY అవుతుంది. కాని ఇది తప్పు.

$\therefore$ Δ XYZ $\cong$ Δ STU ను రాయడం తప్పు.

(Δ XYZ $\cong$ Δ STU ఇలా రాయడం వలన ఇంకా కొన్ని తప్పులు అవుతాయి. వాటిని విద్యార్థులు కనిపెట్టవలెను. కాని జవాబు ఎందుకు తప్పు అని చెప్పుటకు ఒక తప్పు చూపిస్తే సరిపోతుంది.)

ఉదా. (2) కింది ఇచ్చిన పటంలో త్రిభుజాల జతలో ఒకే విధమైన గుర్తులతో సూచించిన అంశాలు సర్వసమానం. ఈ త్రిభుజాల శీర్ష బిందువులు ఒకదానితోనొకటి ఏ సదృశానుసారం త్రిభుజ సర్వసమానమవుతాయో చెప్పండి. మరియు త్రిభుజాలు సర్వసమానత్వం గుర్తులచే చూపండి.



సాధన : ΔABD మరియు ΔACD లో భుజం AD ఉమ్మడి రేఖాఖండం కలదు. ప్రతి రేఖాఖండం దానికదే సర్వసమానంగా ఉంటుంది.

సదృశం : A $\leftrightarrow$ A, B $\leftrightarrow$ C, D $\leftrightarrow$ D. Δ ABD $\cong$ Δ ACD

గమనిక : ఉమ్మడి భుజంపై ' ' ఈ విధమైన గుర్తుపెట్టె పద్ధతి కలదు.

తెలుసుకొందాం

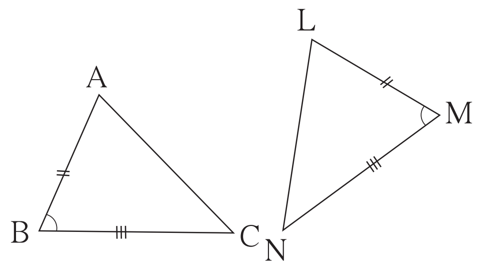
ఏదేని జతలోని త్రిభుజాలు సర్వసమానమని చూపుటకు పై ఆరు అంశాల సర్వ సమానత్వంను చూపవలసిన అవసరం లేదు. ఒక త్రిభుజంలోని మూడు ప్రత్యేక అంశాలు, రెండవ త్రిభుజంలోని సదృశ అంశాలతో సర్వసమానంగా ఉన్నపుడు మిగిలిన మూడు అంశాల జతలుగూడ పరస్పరం సర్వసమానంగా ఉంటాయి. అనగా ఆ మూడు ప్రత్యేక 5 అంశాలు సర్వసమానత్వ నియమాలను నిర్ణయిస్తాయి.

మీరు కొన్ని త్రిభుజాలను నిర్మించడం నేర్చుకొన్నారు. ఏ మూడు అంశాలు యిస్తే ఒక త్రిభుజం గీయవచ్చునో. ఆ అంశాలే సర్వసమానత్వ నియమాలను నిర్ణయిస్తాయి దీనిని పరీక్షించి చూద్దాం.

(1) రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్యనున్న కోణం:

భు.కో.భు. నియమం

రెండు భుజాల జతలు సర్వసమానంగా ఉండి, మరియు వాటి మధ్య కోణము కూడా, సర్వసమానం గల ΔABC మరియు ΔLMN లను గీయండి.

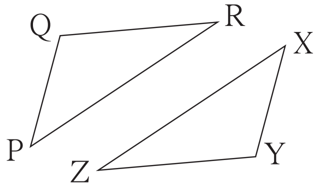


ΔABC మరియు ΔLMN లో l(AB)=l(LM), l(BC) = l(MN), $m\angle$ABC = $m\angle$LMN

ΔABC ఉల్లిపొర కాగితంను ΔLMN పై శీర్షబిందువు A ను శీర్షబిందువు L పైన, భుజం AB భుజం LM పైన, $\angle$B ని $\angle$M పై మరియు భుజం BC ని భుజం MN పైన ఉండునట్లు ఉంచాలి.

ΔABC $\cong$ ΔLMN గలదని తెలుస్తుంది.

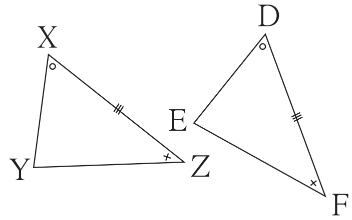
(2) మూడు సదృశ భుజాలు : భు.భు.భు. నియమం.



$l(PQ) = l(XY), l(QR) = l(YZ), l(RP) = l(ZX)$ గల త్రిభుజాలు ΔPQR మరియు ΔXYZ లను గీయండి.

ఉల్లిపొర కాగితంపై ΔPQR గీసి దీనిని ΔXYZ పైన $P \leftrightarrow X, Q \leftrightarrow Y, R \leftrightarrow Z$ ఇలా ఒకదానికొకటి సదృశానుసారం పెట్టండి. $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ అని తెలుస్తుంది.

(3) రెండు కోణాలు మరియు వాటిమధ్య భుజం : కో.భు.కో. నియమం.



ΔXYZ మరియు ΔDEF లను గీయండి.

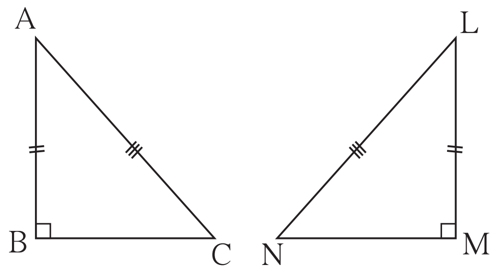
$l(XZ) = l(DF), \angle X \cong \angle D$ మరియు $\angle Z \cong \angle F$

నుండునట్లుగా ΔXYZ ఉల్లిపొర కాగితంపై ఆ కాగితంలోని ΔDEF పైన $X \leftrightarrow D,\ Y \leftrightarrow E,\ Z \leftrightarrow F$ సదృశానుసారం $\Delta XYZ \cong \Delta DEF$ ఇలా కనిపిస్తుంది.

(4) కో.కో.భు. (లేదా భుకోకో) నియమం :

రెండు త్రిభుజాలలో రెండు సదృశ కోణాల జతలు సర్వసమానం అయితే, మిగిలిన కోణం సర్వసమానంగా ఉంటుంది. ఎందుకంటె ప్రతి త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల కొలతల మొత్తం 180° ఉంటుంది. కనుక ఏవైన రెండు కోణాలు మరియు ఒక కోణం యొక్క ఆసన్న భుజం రెండవ త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు, సదృశ భుజంతో సర్వసమానంగా ఉన్నచో, కోకోభు నియమం ప్రకారం, ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానం అవుతాయి.

(5) లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క కర్ణం భుజం (లం.క.భు.) నియమమం.

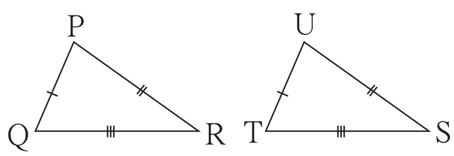


లంబకోణ త్రిభుజంలోని కర్ణము, మరియు ఒక భుజం ఇచ్చినచో ఒకే ఒక త్రిభుజం గీయవచ్చును. ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలోని కర్ణము మరియు ఒక భుజం రెండవ లంబకోణ త్రిభుజంలోని సదృశ అంశాలతో సర్వసమానంగా గల రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలను గీయండి. పైన ఇచ్చిన పద్ధతి ప్రకారం అవి సర్వసమానంగా కలవని పరీక్షించండి.

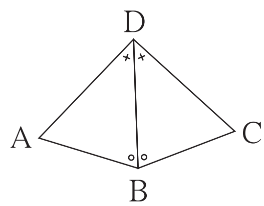
సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) కింది పటాలలో త్రిభుజాల యొక్క ప్రతి జతలో ఒకే రకమైన గుర్తుతో చూపబడిన అంశాలు సర్వసమానంగా ఉన్నాయి. ప్రతి జతలోని త్రిభుజాలు ఏ నియమం ప్రకారం మరియు శీర్షబిందువు ఒకదానితోనొకటి ఏ సదృశానుసారం సర్వసమానం అవుతాయో రాయండి.

(i)



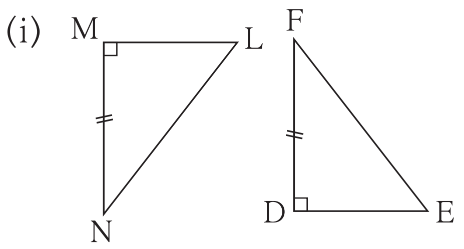
(ii)



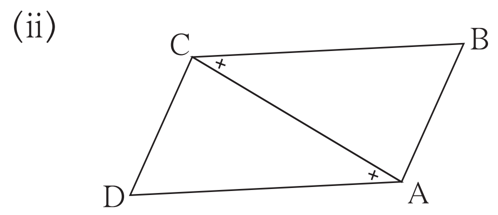
సాధన : (i) భు.భు.భు. నియమమంతో సదృశానుసారము PQR $\leftrightarrow$ UTS

(ii) కో.భు.కో. నియమంతో సదృశానుసారము DBA $\leftrightarrow$ DBC

ఉదా. (2) కింది పటాలలోని త్రిభుజాలలోని ప్రతి జతలో ఒకే విధమైన గుర్తుచే చూపిన అంశాలు సర్వసమానం గలవి. ప్రతి పటం కింద త్రిభుజ సర్వసమానత్వ నియమం రాసి ఉన్నవి. ఆ నియమం ప్రకారం త్రిభుజం సర్వసమాన కావడానికి ఇంకను ఎలాంటి సమాచారం ఇచ్చుట అవసరం మరియు ఆ సమాచారం ఇచ్చిన తర్వాత త్రిభుజం యొక్క శీర్ష బిందువులు సదృశానుసారం సర్వసమానం అవుతాయో రాయండి.



లం.క.భు. నియమం



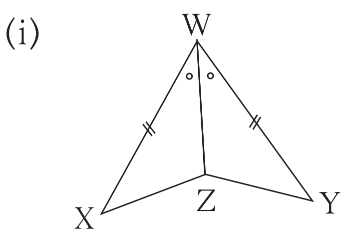
కో.భు.కో. నియమం.

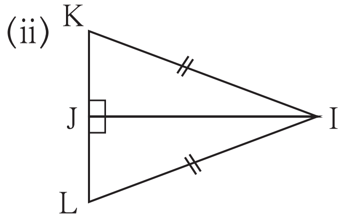
సాధన : (i) ఇచ్చిన త్రిభుజము లంబకోణ త్రిభుజం. దానియొక్క ప్రతి ఒక భుజం సర్వసమానంగా ఉన్నాయి. కనుక దాని రే.ఖం. LN, EF ఈ కర్ణాలు సర్వసమానంగా కలవు. ఈ వివరణ యివ్వడం అవసరం. ఈ వివరణలు ఇచ్చిన తర్వాత LMN $\leftrightarrow$ EDF ఈ సదృశంతో త్రిభుజాలు సర్వసమానత్వం అవుతాయి.

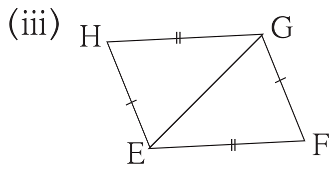
(ii)పటంలోని త్రిభుజం యొక్క రేఖాఖండం CA ఉమ్మడి భుజం కనుక $\angle$ DCA $\cong$ $\angle$ BAC ఈ వివరణ ఇవ్వడం అవసరం. వివరణ ఇచ్చిన తరువాత DCA $\leftrightarrow$ BAC ఈ సదృశంతో త్రిభుజాలు సర్వసమానం అవుతాయి.

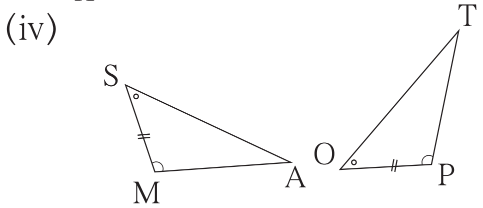
అభ్యాసమాలిక 13.1

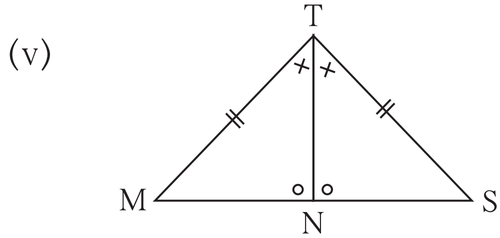
1. కింది పటాలలోని త్రిభుజాల యొక్క ప్రతి జతలో ఒకే రకమైన గుర్తులచే చూపబడిన అంశాలు సర్వసమానం. ప్రతి జతలోని త్రిభుజాలు నియమం ప్రకారం మరియు శీర్ష బిందువులు ఒకదానితోనొకటి ఏ సదృశానుసారం సర్వసమానం అవుతాయో రాయండి.











ఇది నా కర్థమైంది.

(1) భు.కో.భు. నియమం : ఒక త్రిభుజములోని రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్యకోణము రెండవ త్రిభుజంలోని రెండు సదృశ భుజాలు వాటి మధ్య కోణంతో సర్వసమానము అయితే ఆ త్రిభుజాలు పరస్పరం సర్వసమానములు.

(2) భు.భు.భు. నియమం : ఒక త్రిభుజములోని మూడు భుజాలు రెండవ త్రిభుజంలోని మూడు సదృశ భుజాలతో సర్వసమానంగా ఉన్నచో ఆ రెండు త్రిభుజాలు ఒకదానితో ఒకటి సర్వసమానంగా అవుతాయి.

(3) కో.భు.కో. నియమం : ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు మరియు వాటి మధ్య భుజము రెండవ త్రిభుజంలోని రెండు సదృశ కోణాలు మరియు వాటి మధ్య భుజంతో సర్వసమానమైతే, ఆ రెండు త్రిభుజాలు ఒకటికొకటి సర్వసమానం అవుతాయి.

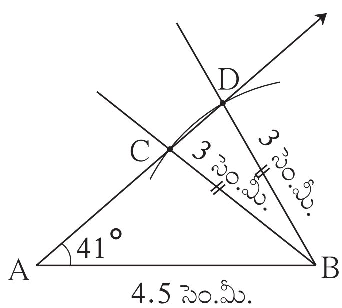
(4) కో.కో.భు. నియమం : ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు మరియు వాటి మధ్యలో లేని భుజం రెండవ త్రిభుజంలోని సదృశ కోణాలు మరియు సదృశ భుజంతో సర్వసమానముగా ఉన్నచో ఆ రెండు త్రిభుజాలు పరస్పరం సర్వసమానములు.

(5) లం.క.భు. నియమం : ఒక లంబకోణ త్రిభుజములోని కర్ణం మరియు ఒక భుజము రెండవ లంబకోణ త్రిభుజంలోని కర్ణం మరియు సదృశ భుజంతో సర్వసమానముగా ఉన్నచో, ఆ రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు పరస్పరం సర్వసమానాలు.

అధిక వివరాలకై

ఒక త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్యలోని కోణం రెండవ త్రిభుజము యొక్క సదృశ అంశాలతో సర్వసమానంగా ఉన్నచో ఆ రెండు త్రిభుజాలు పరస్పరం సర్వసమానముగా ఉంటాయా?

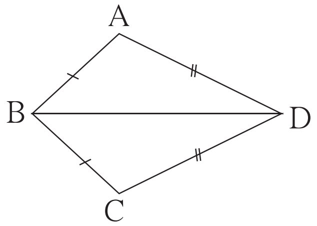
పక్కనున్న పటంను చూడండి. Δ ABC మరియు Δ ABD లలో భుజం AB ఉమ్మడిగా ఉన్నది. భుజం BC $\cong$ భుజం BD, $\angle$ A ఉమ్మడి కోణంగా ఉన్నది. కాని ఆ భుజాలు కలిగియున్న కోణం కాదు. అనగా ఒక త్రిభుజంలోని మూడు అంశాలు రెండవ త్రిభుజం సదృశ అంశాలలో సర్వసమానం గలవి, కాని ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానం కాదు.



దీనిని బట్టి, ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్యలో లేని కోణం రెండవ త్రిభుజంలోని సదృశ అంశాలతో సర్వసమానంగా ఉన్నచో రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉండాలని లేదు.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. **(1)** పటంలో □ ABCD యొక్క సర్వసమాన భుజాలను ఒకే రకమైన గుర్తులచే చూపించారు. ఈ పటంలో సర్వసమాన కోణాల జతలు ఉన్నాయా, వెదకండి.



సాధన : Δ ABD మరియు Δ CBD లో,

భుజం AB $\cong$ భుజం CB ... (ఇవ్వబడినది)

భుజం DA $\cong$ భుజం DC ... (ఇవ్వబడినది)

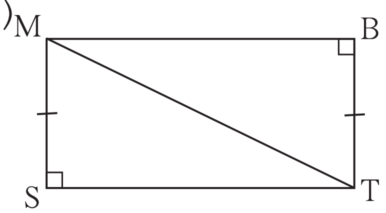
భుజం BD ఉమ్మడిగా కలదు.

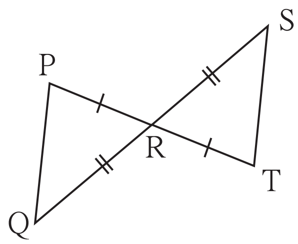
$\therefore$ Δ ABD $\cong$ Δ CBD .... (భు.భు.భు. నియమానుసారము)

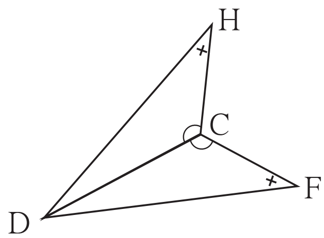
$\therefore$ $\angle$ ABD $\cong$ $\angle$ CBD
$\angle$ BAD $\cong$ $\angle$ BCD
$\angle$ ADB $\cong$ $\angle$ CDB
} ..... (సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశ కోణాలు)

అభ్యాసమాలిక 13.2

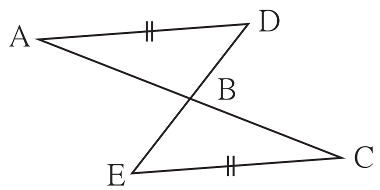
1. కింది వాటిలో ప్రతి జతలోని త్రిభుజాలలో ఒకే రకమైన గుర్తులచే సూచించినవి సర్వసమానం కలవి. ప్రతి జతలోని త్రిభుజం శీర్షబిందులు ఏ సదృశంతో ఉన్నాయి. మరియు ఏ నియమానుసారము సర్వసమానం అవుతాయో రాయండి. ప్రతి ఒక జతలోని త్రిభుజాల మిగిలిన సదృశ సర్వసమాన అంశాలను రాయండి.

(1)


(2)


(3)


2★. పక్కనున్న పటంలో రే.ఖం. AD $\cong$ రే.ఖం. EC ఇంకా ఏ వివరణలను ఇచ్చినట్లైతే ΔABD మరియు ΔEBC లను భు.కో.కో. నియమం ప్రకారం సర్వసమానం అవుతాయి?



జవాబుల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 13.1 **1.** (i) భు.కో.భు., XWZ $\leftrightarrow$ YWZ (ii) లం.క.భు. KJI $\leftrightarrow$ LJI (iii) భు.భు.భు. HEG $\leftrightarrow$ FGE (iv) కో.భు.కో. SMA $\leftrightarrow$ OPT (v) భు. కో. కో. లేదా కో.భు. కో. MTN $\leftrightarrow$ STN

అభ్యాసమాలిక 13.2 **1.** (1) Δ MST $\cong$ Δ TBM – లం.క.భు., భుజం ST $\cong$ భుజం MB, $\angle$ SMT $\cong$ $\angle$ BTM, $\angle$ STM $\cong$ $\angle$ BMT (2) Δ PRQ $\cong$ Δ TRS – భు.కో.భు., భుజం PQ $\cong$ భుజం TS, $\angle$ RPQ $\cong$ $\angle$ RTS, $\angle$ PQR $\cong$ $\angle$ TSR
(3) Δ DCH $\cong$ Δ DCF భు. కో. కో., $\angle$ DHC $\cong$ $\angle$ DFC, భుజం HC $\cong$ భుజం FC
2. $\angle$ ADB $\cong$ $\angle$ CEB మరియు $\angle$ ABD $\cong$ $\angle$ CBE లేదా $\angle$ DAB $\cong$ $\angle$ ECB మరియు $\angle$ ABD $\cong$ $\angle$ CBE

EPQ2CH

14 చక్రవడ్డీ

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

ఒక వ్యక్తి బ్యాంకులో, సహకార బ్యాంకుల్లాంటి సంస్థల నుండి కొంత సొమ్మును నిర్ణీత వడ్డీరేటుతో అప్పుగా తీసుకొంటాడు. కొంత కాలం తరువాత తీసుకొన్న సొమ్మును తిరిగి చెల్లిస్తాడు. ఇవి ఉపయోగించుకొన్నందుకు కొంత అధికంగా ప్రతి సంవత్సరం ప్రతిఫలంగా డబ్బు చెల్లిస్తాడు. దీనిని వడ్డీ అంటారు. వడ్డీని కనుగొనుటకై $I = \frac{PNR}{100}$ ఈ సూత్రంను మీరు నేర్చుకొన్నారు. ఈ సూత్రంలో I = వడ్డీ (Intrest), P = అసలు, N = సంవత్సరాలలో కాలం మరియు R = సంవత్సరం నూటికి (సం.నూ.కి) వడ్డీరేటు ఉంటుంది. ఈ విధమైన వడ్డీ విధింపును సరళ (బారు) వడ్డీ అంటారు.

తెలుసుకొందాం

చక్రవడ్డీ (Compound interest)

పొదుపు లేక అప్పుపై బ్యాంకు చక్రవడ్డీని లెక్కిస్తుంది. అది ఎందుకు మరియు ఎలా అనే దానిని మనం తెలుసుకొందాం.

ఉపా. : సజ్జన్‌రావ్ ఒక బ్యాంకు నుండి సం॥నూ॥కి 10 శాతం వడ్డీరేటు చొప్పున 1 సంవత్సరంలో తిరిగి చెల్లించు షరతుపై 10,000 రూపాయలు అప్పుగా తీసుకొనెను, అయినచో సంవత్సరం చివర అతను వడ్డీతో సహా మొత్తం ఎంత కట్టవలెను?

విద్యార్థి : P = 10,000 రు. ; R = 10; N = 1 సం॥

$$I = \frac{PNR}{100} = \frac{10000 \times 10 \times 1}{100} = 1000 \text{ రూ.}$$

∴ సజ్జన్‌రావు సంవత్సరాంతమున 10,000 + 1000 = 11,000 రూపాయలు కట్టాలి.

విద్యార్థి : కాని ఎవరైనా ఋణగ్రస్తుడు సంవత్సరాంతమున కూడా వడ్డీ చెల్లించనట్లయితే?

ఉపా. : బ్యాంకు ప్రతి సంవత్సరం చివర వడ్డీని లెక్కిస్తుంది. మరియు ప్రతి సంవత్సరం ఋణగ్రస్తుడు వడ్డీ యొక్క సొమ్మును బ్యాంకులో కట్టాలని కోరుకుంటాయి. ఋణగ్రస్తుడు మొదటి సంవత్సరము వడ్డీ కట్టని ఎడల, బ్యాంకు రెండవ సంవత్సరమునకై అసలులో, మొదటి సంవత్సరం యొక్క వడ్డీని కలిపి అయ్యే మొత్తం అప్పుగా పరిగణిస్తారు. కాబట్టి రెండవ సంవత్సరము అసలు మరియు మొదటి సంవత్సరం వడ్డీని కలిపి ఏ మొత్తం అవుతుందో ఆ మొత్తంనే అసలుగా భావించి, తర్వాత దానిపై వడ్డీ లెక్కించబడుతుంది. రెండవ సంవత్సరము వడ్డీని లెక్కిస్తున్నపుడు మొదటి సంవత్సరం రాశియంతనే అసలు ఉంటుంది. ఈ పద్ధతిలో వడ్డీని లెక్కించుటనే ''చక్రవడ్డీ'' అంటారు.

విద్యార్థి : సజ్జన్‌రావు అప్పు చెల్లించే కాలము ఇంకొక సంవత్సరం పొడిగించినచో?

ఉపా. : అలా అయితే రెండవ సంవత్సరంనకు అసలు రూ. 11,000 రూపాయలు దానిపై వడ్డీ మరియు మొత్తం కనుగొనవలసి వస్తుంది.

విద్యార్థి : దీనికై కింది తరగతిలో నేర్చుకున్న $\frac{\text{మొత్తం}}{\text{అసలు}} = \frac{110}{100}$ అను నిష్పత్తిని ఉపయోగించవచ్చా?

ఉపా. : తప్పకుండా! ప్రతి సంవత్సరానికి $\frac{\text{మొత్తం}}{\text{అసలు}}$ అను నిష్పత్తి స్థిరంగా ఉంటుంది. చక్రవడ్డీని లెక్కించు సమయంలో ప్రతి సంవత్సరము గతసంవత్సరం మొత్తం తర్వాత సంవత్సరమునకు అసలు అవుతుంది. కాబట్టి వడ్డీ కనుగొనే బదులు మొత్తంను కనుగొనుట సులువైన పద్ధతి, మొదట్టి సంవత్సరం తరువాత మొత్తం A_1, రెండవ సంవత్సరం తర్వాత మొత్తం A_2, మూడవ సంవత్సరం తర్వాత మొత్తం A_3 ఇలా రాద్దాం.

ముందు గల అసలు P అనుకోండి.

$$\therefore \frac{A_1}{P} = \frac{110}{100} \quad \therefore A_1 = P \times \frac{110}{100}$$

రెండవ సంవత్సరము మొత్తం కనుగొనటానికై

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{110}{100} \quad \therefore A_2 = A_1 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

విద్యార్థి : మూడవ సంవత్సరము యొక్క మొత్తం A_3 కనుగొనునపుడు

$$\therefore \frac{A_3}{A_2} = \frac{110}{100} \quad \therefore A_3 = A_2 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

ఉపా. : శభాష్! చక్రవడ్డీతో మొత్తం కనుగొనే సూత్రం, $\frac{110}{100}$ ఒక రూపాయికి, సంవత్సరాంతమున అయ్యే మొత్తం అని జ్ఞాపకం పెట్టుకోండి, ఎన్ని సంవత్సరాల మొత్తంను కనుగొనాలంటే అన్ని సార్లు అసలును ఈ నిష్పత్తితో గుణించాలి.

విద్యార్థి : అనగా మొదటి సంవత్సరం చివర $\frac{\text{మొత్తం}}{\text{అసలు}}$ నిష్పత్తిని M మరియు P అసలు అని భావించినచో, సంవత్సరం చివర మొత్తము $P\times M$ గుణించగా , రెండవ సంవత్సరము చివర $P\times M^2$, అవుతుంది. మూడవ సంవత్సరము చివర మొత్తము $P\times M^3$ అవుతుంది. ఈ ప్రకారం ఎన్ని సంవత్సారాల మొత్తం అయిన కనుగొనవచ్చు.

ఉపా. : సరిగ్గా చెప్పావు, సం॥నూ॥కి R వడ్డీరేటు అయినచో

$\therefore$ 1 రూ॥కి 1 సం॥కు అయ్యే మొత్తం $= 1 \times M = 1 \times \frac{100+R}{100} = 1 \times \left(1+\frac{R}{100}\right)$ అగును.

$\therefore$ P రూ॥లకు 1 సం॥కు మొత్తం $= P \times \left(1+\frac{R}{100}\right) = P \times \frac{100+R}{100}$

$\therefore$ P=అసలు; R=సం॥నూ॥కి వడ్డీ రేటు, N సంవత్సరకాలం అయితే

N సంవత్సరాల తర్వాత, $A = P \times \left(\frac{100+R}{100}\right)^N = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^N$

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) 4000 రూపాయలకు 3 సంవత్సరాలకు సం॥నూ॥కి $12\frac{1}{2}$ రేటు చొప్పున చక్రవడ్డీని కనుగొనండి.

సాధన : ఇక్కడ, P = 4000 రు.; $R = 12\frac{1}{2}\%$; N = 3 సం॥లు.

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^N = P\left(1+\frac{12.5}{100}\right)^3$$

$$= 4000\left(1+\frac{125}{1000}\right)^3$$

$$A = 4000\left(\frac{1125}{1000}\right)^3 = 4000\left(\frac{9}{8}\right)^3$$

= 5695.31 రూ॥లు

$\therefore$ మూడు సంవత్సరములకు చక్రవడ్డీ (I) = మొత్తం – అసలు

= 5695.31 – 4000 = 1695.31 రూ॥లు

అభ్యాసమాలిక 14.1

1. చక్రవడ్డీతో లభించు మొత్తం, చక్రవడ్డీలను కనుగొనండి.

క్ర.సంఖ్య	అసలు (రూ.)	రేటు (సం.నూ.కి)	కాలం (సం.)
1	2000	5	2
2	5000	8	3
3	4000	7.5	2

2. సమీర్‌రావు ఒక సహకార సంస్థ నుండి సం॥నూ॥కి 12 రేటుచొప్పున 3 సంవత్సరములకై 12500 రూపాయలు అప్పుగా తీసుకొనెను. అయితే అతను మూడవ సంవత్సరాంతం చక్రవడ్డీ లెక్కింపుతో మొత్తం ఎన్నిరూపాయలు చెల్లించాలి?

3. శలాకా వ్యాపారం చేయుటకై సం॥నూ॥కి $10\frac{1}{2}$ రేటు చొప్పున 8000 రూపాయలు అప్పుగా తీసుకొనెను. అయితే 2 సంవత్సరాల తర్వాత తిరిగి చెల్లించునప్పుడు చక్రవడ్డీ లెక్కింపుతో ఆమె ఎంత వడ్డీ చెల్లించాలి?

అధిక వివరాలకై

1. కొన్ని ఆర్థిక వ్యవహారాలలో ప్రతి ఆరు నెలలకు వడ్డీని లెక్కిస్తారు. N సంవత్సరాల కాలానికి వడ్డీ రేటు R అయితే ఆరు నెలల వడ్డీ లెక్కింపులో ఇచ్చిన అసలుకై వడ్డీరేటు $\frac{R}{2}$ తీసుకుంటారు. N సంవత్సరాలకై, ఆరు నెలల అంచెలు 2N అవుతుంది, దీనిని దృష్టిలో పెట్టుకొని వడ్డీని లెక్కిస్తారు.
2. అనేక ఆర్థిక సంస్థలు నెల వడ్డీ లెక్కింపులో చక్రవడ్డీని లెక్కించి అప్పుడు వడ్డీరేటు నెలకు $\frac{R}{12}$ తీసుకొంటారు. మరియు కాలం $12 \times N$ మొత్తం నెలలకు చక్రవడ్డీ లెక్కింపు చేస్తారు.
3. ప్రస్తుత కాలంలో కొన్ని బ్యాంకులు రోజువారి వడ్డీని లెక్కింపు విధానంతో చక్రవడ్డీని లెక్కిస్తున్నాయి.

ఉపక్రమం: మీ దగ్గరున్న బ్యాంకులోకి వెళ్ళి (దర్శించి) వేర్వేరు పథకాల గురించి సమాచారంను సేకరించండి. ఆ పథకాల వడ్డీ రేట్లను పట్టికను తయారు చేసి తరగతి గదిలో పెట్టండి.

తెలుసుకొందాం

చక్రవడ్డీ సూత్రమును ఉపయోగించుట (Application of formula for compound interest)

చక్రవడ్డీ ద్వారా మొత్తము కనుగొనుటకై సూత్రంను ఉపయోగించి దైనందిన జీవితంలో కొన్ని రంగాలలో ఉదాహరణలను సాధించవచ్చు. ఉదాహరణకు జనాభా పెరుగుదల, ప్రతి సంవత్సరము తగ్గే ఏదేని వాహనం ధర మొదలగునవి.

ఏదైనా వస్తువును కొంతకాలము ఉపయోగించి దానిని అమ్మినచో దాని విలువ కొన్నవెల కంటె తగ్గును, తగ్గిన విలువను క్షీణత లేక విలువ తగ్గింపు **(depreciation)** అంటారు.

విలువలోని తగ్గింపు నిర్ణీత కాలంలో నిర్ణీతమైన శాతము చొప్పున తగ్గుచుండును. ఉదా: యంత్రముల యొక్క విలువ ప్రతి సంవత్సరము నిర్ణీత శాతము తగ్గును. కొంత కాలం తర్వాత తగ్గిన విలువను కనుగొనుటకు చక్రవడ్డీ సూత్రమును ఉపయోగిస్తారు.

ఈ విలువ కనుగొనుటకై తగ్గిన విలువ శాతంను గూర్చి తెలిసి ఉండాలి. వస్తువుల విలువ తక్కువ అవుతుండటంతో తగ్గిన విలువ (క్షీణత)శాతం 'R' ఋణాత్మకంగా తీసుకుంటాము.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ఒక పట్టణంలో జనాభా ప్రతి సంవత్సరం 8% చొప్పున పెరుగుతుంది. 2010 సంవత్సరంలో ఆ పట్టణ జనాభా 2,50,000 ఉన్నచో 2012 సంవత్సరంలో ఆ పట్టణములోని జనాభా ఎంత ఉండెను?

సాధన : ఇచ్చుట, P = 2010 యొక్క జనాభా = 2,50,000

A = 2012 లోని జనాభా;

R = జనాభా పెరుగుదల శాతం = ప్రతి సం॥ 8%

N = 2 సం॥లు

A = 2012 లో అనగా 2 సంవత్సరాలలో పెరిగే జనాభా

$$A = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^N = 250000 \times \left(1+\frac{8}{100}\right)^2$$

$$= 250000 \times \left(\frac{108}{100}\right)^2$$

$$= 250000 \times \left(\frac{108}{100}\right) \times \left(\frac{108}{100}\right)$$

$$= 2,91,600.$$

∴ 2012 లో పట్టణం యొక్క జనాభా 2,91,600 అవుతుంది.

ఉదా. (2) రేహానా ఒక స్కూటరును 2015 లో 60000 రూపాయలకు కొన్నది. విలువ తగ్గింపు సం॥నూ॥కి 20 చొప్పున అయితే 2 సంవత్సరాల తర్వాత ఆ స్కూటరుయొక్క విలువ ఎంత అగును?

సాధన : ఇక్కడ, P = 60000 రు. A = 2 సం॥ తరువాత లభించు మొత్తం

R = విలువ తగ్గింపు ధర = -20 % సం॥నికి N = 2 సం॥లు

A = 2 సంవత్సరాల తర్వాత లభించు మొత్తం విలువ

$$A = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^N$$

$$= 60000 \times \left(1+\frac{-20}{100}\right)^2$$

$$= 60000 \times \left(1-\frac{1}{5}\right)^2$$

$$= 60000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= 60000 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$$

A = 38400 రు.

∴ రెండు సంవత్సరంల తర్వాత రేహానాకు స్కూటరు విలువ 38400 రూపాయలు అగును.

చక్రవడ్డీ పద్ధతిలో వడ్డీ లెక్కింపు సూత్రంలో A, P, N, R ఈ నాలుగు అంశాలలో మూడింటి విలువ ఇచ్చినచో, నాలుగవ దాని విలువను కనుగొనవచ్చును.

ఉదా. (3) కొంత సొమ్మును సం॥ నూ॥కి 10 వడ్డీ రేట చొప్పున 3 సంవత్సరాలకు చక్రవడ్డీ ప్రకారం మొత్తం 6655 రూపాయలు అగును. అయిన అసలును కనుగొనండి.

సాధన : ఇక్కడ A = 6655 రూపాయలు; R = 10 సం॥నూ॥కి; N = 3 సం॥లు

$$A = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^N$$

$$\therefore 6655 = P \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^3 \quad = P \times \left(\frac{110}{100}\right)^3 \quad = P \times \left(\frac{11}{10}\right)^3$$

$$\therefore P = \frac{6655\times10^3}{11\times11\times11} \qquad P = 5 \times 10^3 = 5000$$

∴ అసలు 5000 రూ॥లు అవుతుంది.

ఉదా. (4) సం॥నూ॥కి 10 వడ్డీరేటు చొప్పున 9000 రూపాయలకు ఎన్ని సంవత్సరాలకు చక్రవడ్డీ 1890 రు॥లు అగును?

సాధన : ఇక్కడ R = 10; P = 9000; చక్రవడ్డీ = 1890

ముందు చక్రవడ్డీతో అయ్యే మొత్తం కనుగొందాము.

$$A = P + I \quad = 9000 + 1890 \quad = 10890$$

చక్రవడ్డీతో అయ్యే మొత్తం సూత్రమును రాసి, దానిలో విలువలను ప్రతిక్షేపించుదాం.

$$A = 10890 = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^N = 9000 \left(1+\frac{10}{100}\right)^N = 9000 \left(\frac{11}{10}\right)^N$$

$$\therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{10890}{9000} = \frac{121}{100} \qquad \therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{121}{100} \quad \therefore \quad N = 2$$

∴ 2 సంవత్సరాలకు 1890 రూ.ల చక్రవడ్డీ అగును.

అభ్యాసమాలిక 14.2

1. ఒక వంతెనను నిర్మించటానికి మొదట 320 మంది కార్మికులు ఉండిరి. ప్రతి సం॥ 25% కార్మికులను పెంచినచో, రెండు సం॥ల తర్వాత ఆ పనిపై ఎంతమంది కార్మికులు ఉండవచ్చును?
2. ఒక గొర్రెల కాపరివద్ద మొదట 200 గొర్రెలు ఉండెను మరియు ప్రతి సం॥వాటి సంఖ్యలో 10% చొప్పున పెరిగినచో 2 సం॥ల తర్వాత అతని దగ్గర ఎన్ని గొర్రెలు ఉంటాయి?
3. ఒక అభయారణ్యంలో 40,000 చెట్లు కలవు. ప్రతి సం॥ 5% చొప్పున చెట్లను పెంచాలని లక్ష్యాన్ని నిర్ణయించుకొన్నారు. అయితే 3సం॥ల తర్వాత ఆ అభయారణ్యంలోని చెట్ల సంఖ్య ఎంత అగును?
4. ఈ రోజు ఒక యంత్రంను 2,50,000 రు॥లకు ఖరీదు చేసెను. ప్రతి సంవత్సరం 10% చొప్పున క్షీణించినచో రెండు సంవత్సరాల తర్వాత అమ్మినవెల కొన్నవెల కంటె ఎంత తక్కువ అగును?
5. ఒక అసలుపై సం॥నూ॥కి 16 రేటు చొ॥న చక్రవడ్డీపై రెండు సంవత్సరాలకు మొత్తం 4036.80 రూ॥లు అయ్యింది. అయిన రెండు సంవత్సరాలకు అయ్యే వడ్డీ ఎంత?
6. 15000 రూపాయలను చక్రవడ్డీతో సం॥నూ॥కి 12 వడ్డీరేటు చొప్పున అప్పుగా తీసుకున్నచో 3 సంవత్సరాల తర్వాత అప్పును తిరిగి చెల్లించునప్పుడు ఎన్ని రూపాయలు చెల్లించాలి?
7. సం॥నూ॥కి 18 వడ్డీరేటు చొప్పున చక్రవడ్డీతో కొంత అసలు 2 సంవత్సరాలకు మొత్తము 13,924 రు॥లు అయ్యింది. అయిన అసలు ఎంత?
8. పట్టణములోని ఒక ఉపనగరం యొక్క జనాభా విశిష్టమైన రేటు ప్రకారం పెరిగినది. ప్రస్తుతం మరియు రెండు సంవత్సరాల తర్వాత జనాభా వరుసగా 16000 మరియు 17640 అయినచో, జనాభా పెరుగుదల శాతమెంత?
9. 700 రూపాయలకు సం॥నూ॥కి 10 వడ్డీరేటు చొప్పున ఎన్ని సంవత్సరాలకు 847 రు. మొత్తం అగును?
10. సం॥నూ॥కి 8 వడ్డీరేటు చొప్పున 20,000 రూపాయల అసలుపై బారువడ్డీ మరియు చక్రవడ్డీలో తేడాను కనుగొనండి.

జవాబుల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 14.1 1. (1) 2205, 205 (2) 6298.56, 1298.56 (3) 4622.5, 622.5 2. 17561.60 3. 1768.2

అభ్యాసమాలిక 14.2 1. ₹ 500 2. ₹ 242 3. 46,305 చెట్లు 4. ₹ 47500 5. ₹ 1036.8 6. ₹ 21073.92 7. ₹ 10,000 8. సం॥నూ॥కి 5 9. N = 2 సం॥లు. 10. ₹ 128

EPYXES

15 వైశాల్యం

కొంచెం గుర్తుచేసుకుందాం

సంవృత బహుభుజాకృతుల భుజం సెంటిమీటరు, మీటరు, కిలోమీటరు ఈ ప్రమాణాలలో ఇచ్చినట్లయితే వాటి వైశాల్యాలు వరసగా చ.సెం.మీ. చ.మీ. చ.కి.మీ. ఈ ప్రమాణాలలో ఇవ్వబడుతుంది. ఎందుకంటే వైశాల్యం చదరాలలో లెక్కించబడుతుందని మీకు తెలుసు.

(1) చతురస్ర వైశాల్యం = భుజం^{2}

(2) దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం = పొడవు × వెడల్పు

(3) లంబకోణ త్రిభుజ వైశాల్యం =

$= \frac{1}{2}$ × లంబకోణాన్ని ఏర్పరచు భుజాల లబ్ధం.

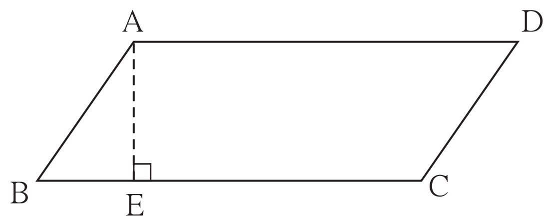
(4) త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × భూమి × ఎత్తు

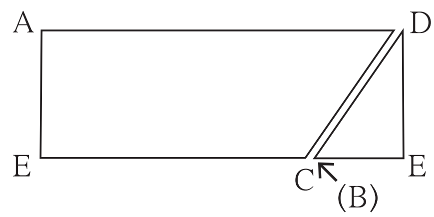
తెలుసుకొందాం

సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం (Area of a parallelogram)

కృత్యం :

- ఒక కాగితంపై తగినంత పెద్దగా సమాంతర చతుర్భుజం ABCD గీయండి. A బిందువు నుండి భుజంBC పైకి లంబాన్ని గీయండి. Δ AEB లంబకోణ త్రిభుజంను కత్తిరించండి. దానిని జరుపుతూ రెండవ పటంలో చూపిన విధంగా □ ABCD మిగిలిన భాగాన్ని కలపండి. తయారైన పటం దీర్ఘచతురస్రం అని గుర్తుంచుకోండి.





- సమాంతర చతుర్భుజం నుండే దీర్ఘచతురస్రం తయారైంది. కనుక రెండింటి వైశాల్యాలు సమానంగా ఉంటాయి.
- సమాంతర చతుర్భుజం భూమి అనగా దీర్ఘ చతురస్రములోని ఒక భుజం (పొడవు) మరియు దాని ఎత్తు అనగా దీర్ఘచతురస్రములోని రెండవ భుజము (వెడల్పు) అగును.

∴ సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = భూమి × ఎత్తు

సమాంతర చతుర్భుజంలోని సమాంతర భుజాలలో ఒక భుజంను భూమి అనుకొనిన సమాంతర భుజాల మధ్య దూరం ఆ చతుర్భుజం యొక్క ఆసన్న ఎత్తు అవుతుంది. అని గుర్తుంచుకోండి.

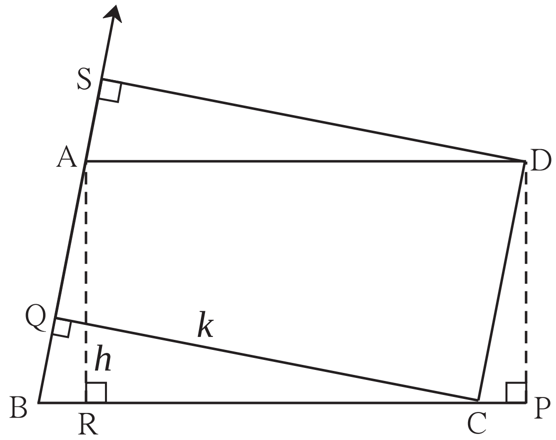
$\square$ ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో

రే.ఖం. DP $\perp$ భుజం BC, రే.ఖం. AR $\perp$ భుజం BC.

భుజం BC ని భూమి అనుకుంటే ఎత్తు$=l(\text{AR})=l(\text{DP})=h$.

ఒకవేళ రే.ఖం. CQ $\perp$ భుజం AB అయితే AB భుజం భూమి అని అనుకున్నచో ఆ భూమి ఆసన్న ఎత్తుగా అనగా $l(\text{QC}) = k$ అవుతుంది.

$\therefore$ A($\square$ABCD) $= l(\text{BC}) \times h = l(\text{AB}) \times k$.



సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ఒక సమాంతర చతుర్భుజ భూమి 8 సెం.మీ., ఎత్తు 5 సెం.మీ. అయితే ఆ సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యంను కనుగొనండి.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = భూమి $\times$ ఎత్తు $= 8 \times 5$

$= 40$

$\therefore$ సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం $= 40$ చ.సెం.మీ.

ఉదా. (2) ఒక సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం 112 చ.సెం.మీ. ఉండి దానియొక్క భూమి 10 సెం.మీ. ఉన్నచో దాని ఎత్తును కనుగొనండి.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = భూమి $\times$ ఎత్తు $\quad \therefore 112 = 10 \times$ ఎత్తు

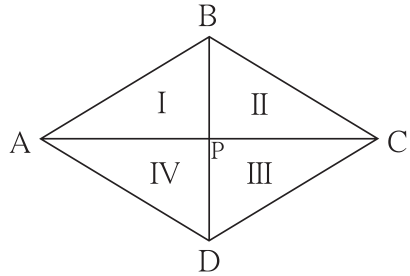
$$\frac{112}{10} = \text{ఎత్తు}$$

$\therefore$ సమాంతర చతుర్భుజ ఎత్తు 11.2 సెం.మీ.

అభ్యాసమాలిక 15.1

1. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలోని భూమి 18 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 11 సెం.మీ. ఉన్నచో, ఆ చతుర్భుజ వైశాల్యంను కనుగొనండి.
2. ఒక సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం 29.6 చ.సెం.మీ. భూమి 8 సెం.మీ. ఉన్నచో చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తును కనుగొనండి.
3. ఒక సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం 83.2 చ.సెం.మీ. దాని యొక్క ఎత్తు 6.4 సెం.మీ. అయితే దానియొక్క భూమి ఎంత పొడవు ఉంటుంది?

సమభుజ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం. (Area of a rhombus)



కృత్యం: పటంలో చూపిన విధంగా ఒక సమభుజ చతుర్భుజం గీయండి. సమభుజ చతుర్భుజంలో కర్ణాలు పరస్పరం లంబసమద్విఖండన చేసుకుంటాయని మీకు తెలుసు.

$l(AC) = d_1$ మరియు $l(BD) = d_2$ అనుకొందాం.

$\square$ ABCD ఒక సమభుజచతుర్భుజం, దాని కర్ణము P బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది. దీని వలన మనకు నాలుగు సర్వసమాన లంబకోణ త్రిభుజాలు ఏర్పడుతాయి. ప్రతి లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క భుజం $\frac{1}{2}\ l(AC)$, $\frac{1}{2}\ l(BD)$ అవుతాయి. నాలుగు త్రిభుజాల యొక్క వైశాల్యాలు సమానంగా ఉంటాయి.

$l(AP) = l(PC) = \frac{1}{2}\ l(AC) = \frac{d_1}{2}$,

అదే విధంగా $l(BP) = l(PD) = \frac{1}{2}\ l(BD) = \frac{d_2}{2}$

$\therefore$ సమభుజ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం $= 4 \times A(\Delta\ APB)$

$= 4 \times \frac{1}{2} \times l(AP) \times l(BP)$

$= 2 \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2}$

$= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

$\therefore$ సమభుజ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ కర్ణముల పొడవుల లబ్ధం.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా.(1) ఒక సమభుజ చతుర్భుజం యొక్క రెండు కర్ణాల పొడవులు వరుసగా 11.2 సెం.మీ. మరియు 7.5 సెం.మీ. అయినచో ఆ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనుండి.

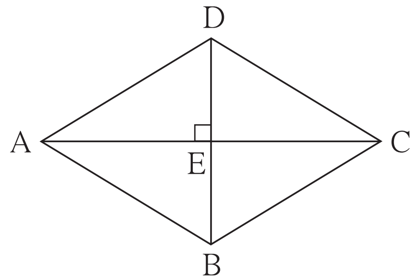
సాధన : సమభుజ చతుర్భుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ కర్ణాల పొడవుల లబ్ధం.

$= \frac{1}{2} \times \frac{11.2}{1} \times \frac{7.5}{1} \qquad = 5.6 \times 7.5$

$= 42$ చ.సెం.మీ.

ఉదా.(2) ఒక సమభుజ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం 96 చ.సెం.మీ. దాని ఒక కర్ణం 12 సెం.మీ. అయినచో ఆ చతుర్భుజ భుజం పొడవును కనుగొనండి.

సాధన : $\square$ ABCD సమభుజ చతుర్భుజం అనుకొందాం. దాని కర్ణము BD పొడవు 12 సెం.మీ. ఆ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యము 96 చ.సెం.మీ. దీనినిబట్టి ముందుగా కర్ణం AC పొడవును కనుగొందాం.



సమభుజ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × కర్ణాల పొడవుల లబ్దం.

$$\therefore\ 96 = \frac{1}{2} \times 12 \times l(AC) = 6 \times l(AC)$$

$$\therefore\ l(AC) = 16$$

కర్ణాల ఖండన బిందువు E అని అనుకొందాం. సమభుజ చతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం లంబకోణంలో సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

$\therefore\ \Delta$ ADE లో, $m\angle E = 90^\circ$,

$l(DE) = \frac{1}{2} l(DB) = \frac{1}{2} \times 12 = 6;$ | $l(AE) = \frac{1}{2} l(AC) = \frac{1}{2} \times 16 = 8$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారము,

$$l(AD)^2 = l(AE)^2 + l(DE)^2 = 8^2 + 6^2$$

$$= 64 + 36 = 100$$

$\therefore\ l(AD) = 10$

$\therefore$ సమభుజ చతుర్భుజంలోని భుజం 10 సెం.మీ..

అభ్యాసమాలిక 15.2

1. ఒక సమభుజ చతుర్భుజం యొక్క రెండు కర్ణాల పొడవులు 15 మరియు 24 సెం.మీ. అయినచో దాని వైశాల్యంను కనుగొనండి.

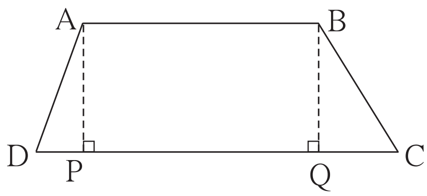
2. ఒక సమభుజ చతుర్భుజం యొక్క రెండు కర్ణాల పొడవులు వరుసగా 16.5 సెం.మీ. మరియు 14.2 సెం.మీ. అయినచో దాని ఆ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి.

3. ఒక సమభుజ చతుర్భుజం యొక్క చుట్టుకొలత 100 సెం.మీ. దాని ఒక కర్ణం పొడవు 48 సెం.మీ. ఉన్నచో ఆ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం ఎంత ఉంటుంది?

4. ఒక సమభుజ చతుర్భుజంలో ఒక కర్ణం 30 సెం.మీ., దాని యొక్క వైశాల్యం 240 చ.సెం.మీ. అయితే ఆ చతుర్భుజం యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.

సమలంబ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం (Area of a trapezium)

కృత్యం :రే.ఖం. AB || రే.ఖం. DC ఉండునట్లు □ABCD సమలంబ చతుర్భుజంను ఒక కాగితంపై గీయండి.



రే.ఖం. AP ⊥ భుజం DC మరియు

రే.ఖం. BQ ⊥ భుజం DC గీయండి.

l(AP) = l(BQ) = h అనుకొందాం.

సమలంబ చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు h, అనగా సమాంతర రేఖల మధ్య దూరం, లంబాన్ని గీయడం వలన ABCD ఈ చతుర్భుజం (క్షేత్రం) 3 భాగాలు అయింది. అందులో Δ DPA, Δ BQC ఇవి లంబకోణ త్రిభుజాలు. ABQP ఒక దీర్ఘచతురస్రం బిందువు P మరియు Q లు రేఖాఖండం DC పై కలవు.

సమలంబ చతుర్భుజం ABCD యొక్క వైశాల్యం

$$= A(\Delta\ APD) + A(\square APQB) + A(\Delta BQC)$$

$$= \frac{1}{2} \times l(DP) \times h + l(PQ) \times h + \frac{1}{2}\ l(QC) \times h$$

$$= h\ [\frac{1}{2}\ DP + PQ + \frac{1}{2}\ QC]$$

$$= \frac{1}{2} \times h\ [l(DP) + 2l(PQ) + l(QC)]$$

$$= \frac{1}{2} \times h\ [l(DP) + l(PQ) + l(AB) + l(QC)] \ldots \therefore\ l(PQ) = l(AB)$$

$$= \frac{1}{2} \times h\ [l(DP) + l(PQ) + l(QC) + l(AB)]$$

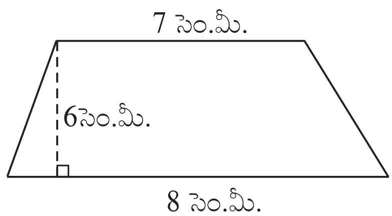
$$= \frac{1}{2} \times h\ [l(DC) + l(AB)]$$

A(□ABCD)= $\frac{1}{2}$ (సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం) × h

∴ సమలంబ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం × ఎత్తు.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా.(1) ఒక సమలంబ చతుర్భుజం యొక్క అభిముఖ భుజాల జత ఒకటి పరస్పరం సమాంతరంగా ఉన్నాయి. ఆ భుజాల మధ్య దూరం 6 సెం.మీ. గలదు, సమాంతర భుజాల యొక్క పొడవులు వరుసగా 7 సెం.మీ., 8 సెం.మీ. అయితే ఆ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి.



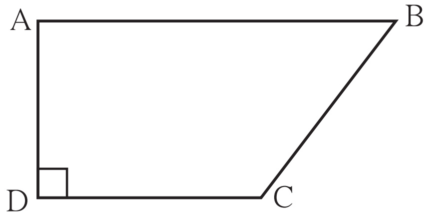
సాధన : సమాంతర భుజాల మధ్యదూరం = సమలంబ చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు = 6 సెం.మీ.

సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ (సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం) × ఎత్తు

$= \frac{1}{2}(7 + 8) \times 6 = 45$ చ.సెం.మీ.

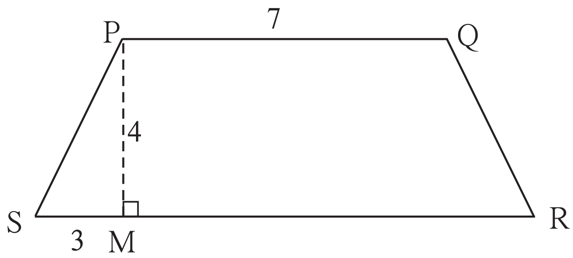
అభ్యాసమాలిక 15.3

1. చతుర్భుజం ABCD లో l(AB) = 13 సెం.మీ., l(DC) = 9 సెం.మీ., l(AD) = 8 సెం.మీ., అయితే □ ABCD యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి.



2. ఒక సమలంబ చతుర్భుజం యొక్క సమాంతర భుజాల పొడవులు వరుసగా 8.5 సెం.మీ. మరియు 11.5 సెం.మీ. కలవు, దాని ఎత్తు 4.2 సెం.మీ. ఉన్నచో ఆ చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి.

3★. □ PQRS సమద్విభుజ సమలంబ చతుర్భుజం కలదు. l(PQ) = 7 సెం.మీ., రే.ఖం. PM ⊥ భుజం SR, l(SM) = 3 సెం.మీ., సమాంతర భుజాల మధ్య దూరం 4 సెం.మీ. అయిన □ PQRS యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి.

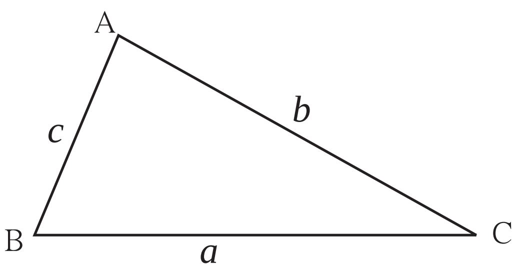


తెలుసుకొందాం

త్రిభుజ వైశాల్యం (Area of a Triangle)

త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ భూమి × ఎత్తు అని మనకు తెలుసు.

ఇప్పుడు త్రిభుజం ఎత్తు ఇవ్వలేదు కాని త్రిభుజం మూడు భుజాల పొడవులను ఇచ్చారు అయితే ఆ త్రిభుజ వైశాల్యం ఎలా కనుగొంటారో చూద్దాం.



Δ ABC యొక్క భుజాల పొడవులు a, b, c ఈ త్రిభుజం యొక్క సగం చుట్టు కొలతను కనుగొందాం.

సగం చుట్టుకొలత = $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

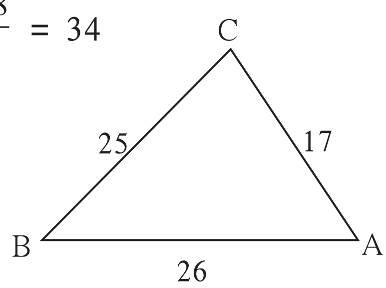
త్రిభుజ వైశాల్యం = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ఈ సూత్రమును **హెరాన్ సూత్రం** (Heron's Formula) అని అంటారు.

ఉదా. (1) ఒక త్రిభుజం యొక్క భుజాలు 17 సెం.మీ., 25 సెం.మీ. మరియు 26 సెం.మీ. గలవు. అయితే ఆ త్రిభుజ వైశాల్యంను కనుగొనండి.

సాధన : $a = 17,\ b = 25,\ c = 26$

సగం చుట్టుకొలత $= s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{17+25+26}{2} = \dfrac{68}{2} = 34$



త్రిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{34(34-17)(34-25)(34-26)}$

$= \sqrt{34\times17\times9\times8}$

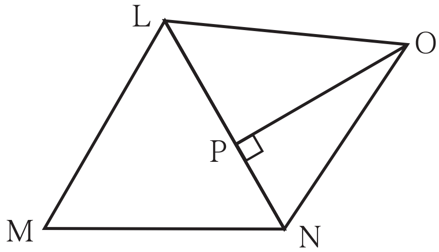
$= \sqrt{17\times2\times17\times3\times3\times2\times2\times2}$

$= \sqrt{17^2\times2^2\times2^2\times3^2}$

$= 17 \times 2 \times 2 \times 3 = 204$ చ.సెం.మీ.

ఉదా. (2) ఒక భూస్థలం పటం మరియు కొలతలు యివ్వబడినవి.
l(LM) = 60 మీ. l(MN) = 60 మీ.
l(LN) = 96 మీ. l(OP) = 70 మీ.

అయితే ఆ స్థలం యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి.



సాధన : ఈ పటంలో Δ LMN, Δ LON లు ఏర్పడినట్లు కనిపిస్తుంది. Δ LMN యొక్క అన్ని భుజాల పొడవులు తెలుసు, కనుక హెరాన్ సూత్రం ఉపయోగించి దాని వైశాల్యంను కనుగొందాము. Δ LON లో భుజం LN భూమి మరియు l(OP) ఎత్తుగా తీసుకొని Δ LON యొక్క వైశాల్యంను కనుగొందాం?

Δ LMN సగం చుట్టుకొలత, s $= \dfrac{60+60+96}{2} = \dfrac{216}{2} = 108$

$\therefore$ Δ LMN యొక్క వైశాల్యం $= \sqrt{108(108-60)(108-60)(108-96)}$

$= \sqrt{108\times48\times48\times12}$

$= \sqrt{12\times9\times48\times48\times12}$

A(Δ LMN) $= 12 \times 3 \times 48 = 1728$ చ.మీ.

A(Δ LNO) $= \dfrac{1}{2}$ భూమి $\times$ ఎత్తు

$= \dfrac{1}{2} \times 96 \times 70$

$= 96 \times 35 \qquad = 3360$ చ.మీ.

భూస్థలం LMNO యొక్క వైశాల్యం = A(Δ LMN) + A(Δ LNO)

$= 1728 + 3360$

$= 5088$ చ.మీ.

ఇది నాకర్థమయింది

సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = భూమి × ఎత్తు

సమభుజ చతుర్భుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ × కర్ణముల పొడవుల లబ్ధము.

సమలంబ చతుర్భుజం వైశాల్యం= $\frac{1}{2}$ × (సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం) × ఎత్తు

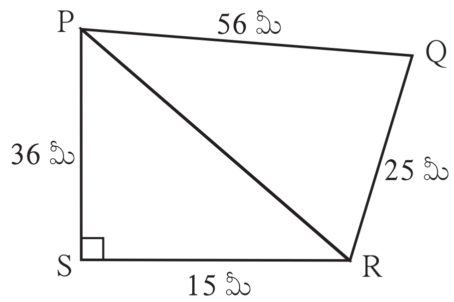
ABC త్రిభుజం యొక్క భుజాలు a, b, c అయినట్లయితే ఆ త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం కనుగొను హెరాన్ సూత్రం

$$A(\Delta\ ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad ; \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

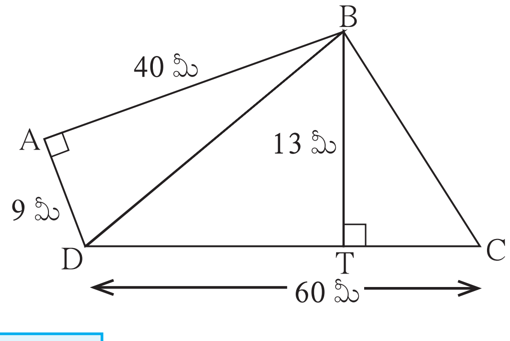
అభ్యాసమాలిక 15.4

1. ఒక త్రిభుజం యొక్క భుజాలు 45 సెం.మీ., 39 సెం.మీ. మరియు 42 సెం.మీ. అయితే ఆ త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి.

2.. పటంలో చూపబడిన కొలతలను దృష్టిలో పెట్టుకొని □ PQRS యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి.



3. పక్కనిచ్చిన పటంలో కొన్ని కొలతలు చూపబడినవి. దానిని బట్టి □ABCD యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి.

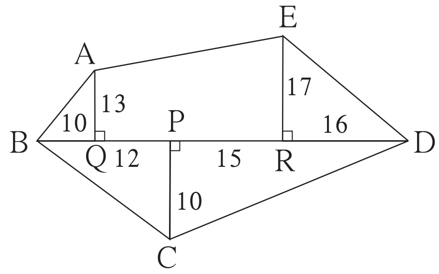


తెలుసుకొందాం

అనియమిత ఆకారముల స్థలం యొక్క వైశాల్యం

భూభాగము, పొలాలు మొదలగునవి సాధారణంగా అనియమిత బహుభుజి ఆకారంలో ఉంటాయి. ఈ ఆకృతుల విభజన త్రిభుజం లేక ఒక ప్రత్యేక చతుర్భుజంలో చేయవచ్చు. ఇలా విభజించిన పటాల వైశాల్యం ఎలా కనుగొనాలో చూద్దాం.

ఉదా. పక్కనున్న పటంలో ABCDE ఒక బహు భుజాకృతి. పటంలోని కొలతలన్నియు మీటర్లలో కలవు. ఈ పటం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి.



సాధన : ఇక్కడ Δ AQB, Δ ERD లు లంబకోణ త్రిభుజాలు. $\square$ AQRE సమలంబ చతుర్భుజం. Δ BCD లో భూమి BD, ఎత్తు PC ని ఇచ్చారు. ప్రతి పటం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొందాం.

$$A(\Delta\ AQB) = \frac{1}{2} \times l(BQ) \times l(AQ) = \frac{1}{2} \times 10 \times 13 = 65 \text{ చ.మీ.}$$

$$A(\Delta\ ERD) = \frac{1}{2} \times l(RD) \times l(ER) = \frac{1}{2} \times 16 \times 17 = 136 \text{ చ.మీ.}$$

$$A(\square\ AQRE) = \frac{1}{2}\ [l(AQ) + l(ER)] \times l(QR)$$

$$= \frac{1}{2}\ [13 + 17] \times (12 + 15)$$

$$= \frac{1}{2} \times 30 \times 27 = 15 \times 27 = 405 \text{ చ.మీ.}$$

$$l(BD) = l(BP) + l(PD) = 10 + 12 + 15 + 16 = 53 \text{ మీ.}$$

$$A(\Delta\ BCD) = \frac{1}{2} \times l(BD) \times l(PC) = \frac{1}{2} \times 53 \times 10 = 265 \text{ చ.మీ.}$$

$\therefore$ బహు భుజాల ఆకృతి ABCDE యొక్క వైశాల్యం

$= A(\Delta\ AQB) + A(\square AQRE) + A(\Delta\ ERD) + A(\Delta\ BCD)$

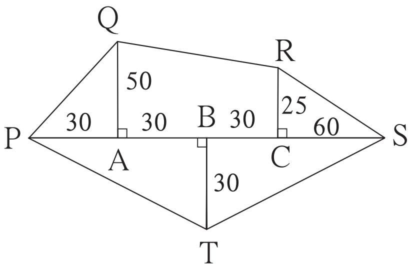
$= 65 + 405 + 136 + 265$

$= 871$ చ.మీ.

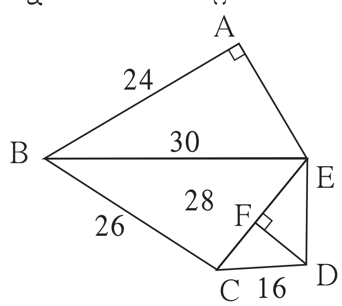
అభ్యాసమాలిక 15.5

1. కింది స్థలాల నమూనాలను బట్టి వాటి వైశాల్యాలు కనుగొనండి. (అన్ని కొలతలు మీటర్లలో గలవు.)

(1)

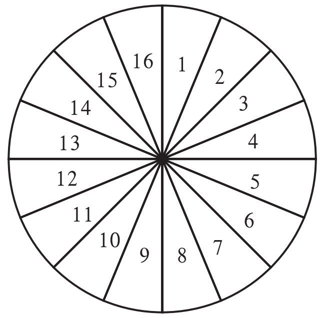


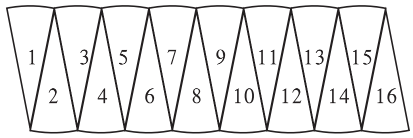
(2)



వృత్తం యొక్క వైశాల్యం (Area of a circle)

కృత్యం : ఒక దళసరి కాగితంపై ఒక వృత్తంను గీయండి. వృత్తాకారపు భాగమును కత్తిరించి వేరుచేయండి. మడత పెట్టి దానిని 16 లేక 32 సమాన భాగాలుగా విభజించండి. లేక $360°$ లను సమాన భాగాలుగా చేసి వృత్తంను 18 లేక 20 సమాన భాగాలుగా చేయండి ఆ తర్వాత ఆ భాగాలను వ్యాసార్థాలపై కత్తిరించి వేర్వేరు ముక్కలను కలపండి. పటంలో చూపినవిధంగా వాటిని జోడించండి. మనకు దాదాపు దీర్ఘచతురస్రము ఏర్పడినట్లుగా కనిపిస్తుంది. వృత్తంలో ఎన్ని సమాన భాగాలు ఎక్కువైనచో, అన్ని పటంలో అధికంగా దీర్ఘచతురస్రంలు ఏర్పడును.





వృత్త పరిది $= 2\pi r$

$\therefore$ దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు πr, అనగా అర్థవృత్త పరిధి అంత మరియు వెడల్పు r యంత ఉంటుంది.

$\therefore$ వృత్త వైశాల్యం = దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యం = పొడవు $\times$ వెడల్పు $= \pi r \times r = \pi r^2$

$\therefore$ వృత్త వైశాల్యం $= \pi r^2$

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా.(1) ఒక వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థము 21 సెం.మీ. అయినో ఆ వృత్త వైశాల్యంను కనుగొనండి.

సాధన : వృత్త వైశాల్యం $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 21^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{1} \times \frac{21}{1} \quad = 66 \times 21 \quad = 1386$$ చ.సెం.మీ.

ఉదా.(2) ఒక వృత్తాకార మైదానం యొక్క వైశాల్యం 3850 చ.మీ. ఉన్నచో ఆ మైదానం యొక్క వ్యాసార్థంను కనుగొనండి

సాధన : వృత్తవైశాల్యం $= \pi r^2$

$$3850 = \frac{22}{7} \times r^2$$

$$r^2 = \frac{3850 \times 7}{22} \qquad r^2 = 1225 \qquad r = 35$$ మీ.

$\therefore$ మైదానం యొక్క వ్యాసార్థం 35 మీ. కలదు.

అభ్యాసమాలిక 15.6

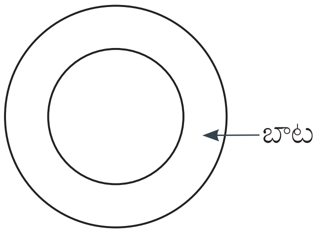
1. కింద వృత్తల వ్యాసార్థాలు ఇవ్వబడినవి. ఆ వృత్త వైశాల్యాలను కనుగొనండి.

(1) 28 సెం.మీ. (2) 10.5 సెం.మీ. (3) 17.5 సెం.మీ.

2. కింద కొన్ని వృత్తల వైశ్యాలు ఇవ్వబడినవి, ఆ వృత్తాల వ్యాసాలను కనుగొనండి.

(1) 176 చ.సెం.మీ. (2) 394.24 చ.సెం.మీ. (3) 12474 చ.సెం.మీ.

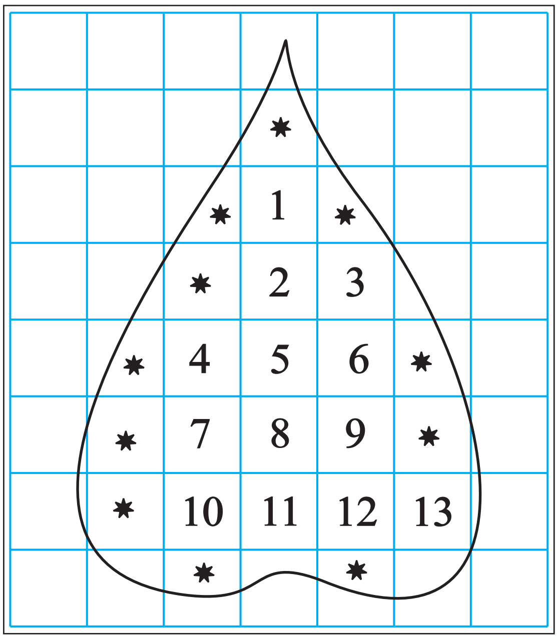
3. ఒక వృత్తాకారపు తోట వ్యాసం 42 మీ. ఆ తోట చుట్టు 3.5మీ. వెడల్పు గల బాట కలదు, అయిన ఆ బాట యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి.



4. ఒక వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత 88 సెం.మీ. కలదు అయితే ఆ వృత్తం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి.

అనియమిత ఆకారముల యొక్క పటముల సుమారు వైశాల్యంను కనుగొనుట.

గ్రాఫ్ పేపరు సహాయముతో ఏదైనా సంవృత పటము యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనవచ్చును. ఇచ్చిన పటం లేదా వస్తువు యొక్క ఏదేని తలంను గ్రాఫ్ పేపరు పైన పెట్టి దాని చుట్టు పెన్సిల్‌తో గీయండి. గ్రాఫ్ పేపరుపై పటం యొక్క వైశాల్యం కనుగనుటకు చదరాల సంఖ్యలను ఎలా లెక్కించాలి మరియు వృత్త వైశాల్యంను ఎల్లా కనుగొనాలో కింది కృత్యం ద్వారా అర్థం చేసుకోండి.



(1) 1 చ.సెం.మీ. వైశాల్యం గల పూర్తి చదరాల సంఖ్య = 13

∴ వాటి వైశాల్యం 13 చ.సెం.మీ..

(2) పటంలోని $\frac{1}{2}$ చ.సెం.మీ. కంటే ఎక్కువ కానీ, 1 చ.సెం.మీ. కంటే తక్కువ వైశాల్యం గల భాగాల సంఖ్య = 11

∴ వాటి వైశాల్యం = సుమారు 11 చ.సెం.మీ.

(3) పటంలో $\frac{1}{2}$ చ.సెం.మీ. వైశాల్యం గల భాగాల సంఖ్య = 0

∴ దాని వైశాల్యం = 0 చ.సెం.మీ.

(4) పటంలో $\frac{1}{2}$ చ.సెం.మీ. కంటె తక్కువ వైశాల్యం గల భాగాల యొక్క వైశాల్యం గురించి ఆలోచించవద్దు.

$\therefore$ వాటి మొత్తం వైశాల్యం = 0 చ.సెం.మీ.

$\therefore$ ఇచ్చిన పటాల సుమారు వైశాల్యం

= 13 + 11 + 0 + 0 = 24 చ.సెం.మీ.

కృత్యం : గ్రాఫ్ పేపర్ పైన 28 మి.మీ. వ్యాసార్థం గల ఒక వృత్తంను, ఒక త్రిభుజంను, మరియు ఒక సమలంబ చతుర్భుజంను గీయండి. ఈ మూడు పటముల యొక్క వైశాల్యములను గ్రాఫ్ పేపరు పైనున్న చిన్న చదరములను లెక్కించి కనుగొనండి. ఇది సూత్రం ద్వారా లభించు వైశాల్యాలకు సమానమా పరీక్షించి చూడండి.

లెక్కించుటకై ఉపయోగించిన చదరములు ఎంత చిన్నవి అయితే అంత సుమారు అధికంగా వైశాల్యంను వ్యక్తపరచవచ్చు.

అధిక వివరాలకై

మన దేశంలో కొలతల కొరకై దశాంశమాన పద్ధతిని స్వీకరించారు. ప్రభుత్వ దస్తావేజులలో భూముల వైశాల్యంను ఏర్, హెక్టార్, అను దశామాన ప్రమాణంలో నమోదు చేయబడతాయి.

100 చ.మీ. = 1 ఏర్, 100 ఏర్లు = 1 హెక్టార్ = 10,000 చ.మీ.

భూమి యొక్క వ్యవహారంలో వైశాల్యంను గుంఠా, ఎకరంల ప్రమాణంలో కొలిచే పద్ధతి ఇంకను కలదు. 1 గుంఠ వైశాల్యం అనగా సుమారు 100 చ.మీ. లు 1 ఎకరం వైశాల్యం సుమారు 0.4 హెక్టారు ఉంటుంది.

జవాబుల సూచిక

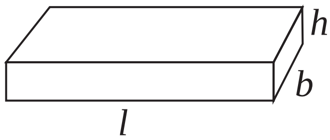
అభ్యాసమాలిక 15.1	1. 198 చ.సెం.మీ.	2. 3.7 సెం.మీ.	3. 13 సెం.మీ.	
అభ్యాసమాలిక 15.2	1. 180 చ.సెం.మీ.	2. 117.15 చ.సెం.మీ.	3. 336 చ.సెం.మీ.	4. 68 సెం.మీ.
అభ్యాసమాలిక 15.3	1. 88 చ.సెం.మీ.	2. 42 సెం.మీ.	3. 40 చ.సెం.మీ.	
అభ్యాసమాలిక 15.4	1. 756 చ.సెం.మీ.	2. 690 చ.సెం.మీ.	3. 570 చ.సెం.మీ.	
అభ్యాసమాలిక 15.5	1. 6000 చ.మీ. 2. 776 చ.మీ.			
అభ్యాసమాలిక 15.6	1. (1) 2464 చ.సెం.మీ. (2) 346.5 చ.సెం.మీ. (3) 962.5 చ.సెం.మీ.			
	2. (1) $2\sqrt{56}$ సెం.మీ. (2) 22.4 సెం.మీ. (3) 126 సెం.మీ.			
	3. 500.5 చ.మీ.	4. 616 చ.సెం.మీ.		

EQ8TFS

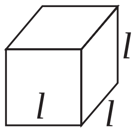
16 ఉపరితల వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణం

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

దీర్ఘఘన సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 2(l \times b + b \times h + l \times h)$



ఘన సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 6l^2$



1 మీ = 100 సెం.మీ.   1 చ.మీ. $= 100 \times 100$ చ.సెం.మీ. $= 10000$ చ.సెం.మీ. $= 10^4$ చ.సెం.మీ.

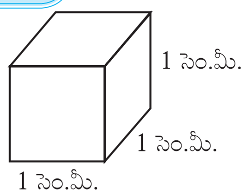
1 సెం.మీ. = 10 మి.మీ. 1 చ.సెం.మీ.$= 10 \times 10$ చ.మి.మీ. $= 100$ చ.మి.మీ. $= 10^2$ చ.మి.మీ.

తెలుసుకొందాం

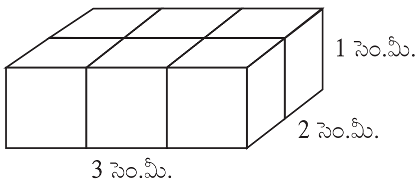
దీర్ఘఘనము, ఘనము మరియు క్రమ వృత్త స్థూపములు త్రిమితీయ ఆకారములు ఘనాకృతిలో ఉంటాయి. ఆ ఘనాకృతి ప్రదేశంలోని స్థలంను ఆక్రమిస్తాయి. **ఏదేని ఘనాకృతిచే ప్రదేశంలో ఆక్రమించిన స్థలం కొలత అనగా ఘనాకృతి యొక్క ఘన పరిమాణము అవుతుంది.**

ఘనపరిమాణము యొక్క ప్రామాణిక ప్రమాణం (Standard unit of Volume)

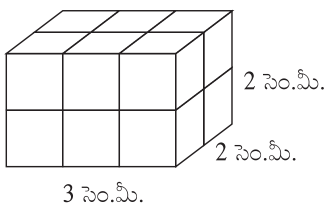
పక్కనున్న పటంలో ఘనం యొక్క ప్రతి భుజం 1 సెం.మీ. గలదు ఈ ఘనము ఆక్రమించిన స్థల ఘనపరిమాణము యొక్క ప్రామాణిక ప్రమాణం. 1 ఘనపు సెం.మీ. సంక్షిప్తంగా, 1 ఘ.సెం.మీ. లేదా 1 సెం.మీ. ^{3} అని రాస్తారు.



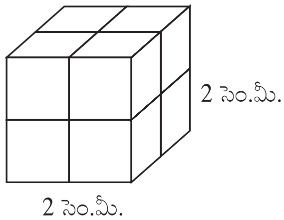
కృత్యం I : ప్రతి ఒక భుజం 1 సెం.మీ. గల అనేక ఘనములను సేకరించండి. పటంలో చూపబడిన ప్రకారము 6 ఘనములను ఒకదానికొకటి అంటించుము. ఒక దీర్ఘఘనం తయారగును. ఈ దీర్ఘ ఘనం యొక్క పొడవు 3 సెం.మీ. వెడల్పు 2 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 1 సెం.మీ. కలదు. 1 సెం.మీ. భుజంగల 6 ఘనాలు కలిసి ఈ దీర్ఘఘనం తయారైంది. ఈ దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణం $3 \times 2 \times 1 = 6$ ఘ.సెం.మీ. అవుతుంది, అని గుర్తుంచుకోండి.



కృత్యం II : పక్కనున్న దీర్ఘఘనం పొడవు 3 సెం.మీ., వెడల్పు 2 సెం.మీ., ఎత్తు 2 సెం.మీ. గలదు. ఈ దీర్ఘఘనంలో 1 ఘ.సెం.మీ. ఘనపరిమాణం గల $3 \times 2 \times 2 = 12$ ఘనాలున్నాయి. కాబట్టి దీర్ఘఘనం ఘనపరిమాణం 12 ఘ.సెం.మీ. అవుతుంది. దీనిని బట్టి దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణం = పొడవు $\times$ వెడల్పు $\times$ ఎత్తు అను సూత్రం లభిస్తుంది. పొడవుకై l, వెడల్పుకై b మరియు ఎత్తుకై h ఈ అక్షరాలను తీసుకొనిన : **దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణం** $= \boldsymbol{l \times b \times h}$



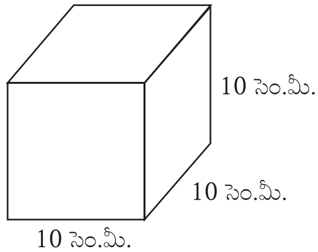
కృత్యం III :



పక్కనున్న పటంలో 1 ఘ.సెం.మీ. ఘనపరిమాణంగల 8 ఘనములు ఒకదానికొకటి అంటించి ఉన్నాయి. దాని వలన ఏర్పడే ఘనాకృతి భుజం 2 సెం.మీ. గల ఘనము. 8 ఘనముల ఘనపరిమాణం = $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ అని గుర్తుంచుకోండి.

దీనిని బట్టి సమ ఘనం యొక్క భుజం l ఉన్నచో సమఘన ఘనపరిమాణం = $l \times l \times l = l^3$ అవుతుంది.

ద్రవాల ఘనపరిమాణం : ద్రవాల పరిమాణమే ద్రవాల ఘనపరిమాణం అవుతుంది. ద్రవాల పరిమాణం కొలవడానికి మిల్లి మీటర్లు మరియు లీటర్లు ఈ ప్రమాణాలనుపయోగిస్తారని మీకు తెలుసు.



పక్కనున్న పటంలో 10 సెం.మీ.ల భుజం గల ఒక బోలుఘనం ఉంది. దీని ఘనపరిమాణం $10 \times 10 \times 10 = 1000$ ఘ.సెం.మీ. ఈ ఘనమును నీటితో నింపినచో అందులోని నీటియొక్క పరిమాణం అనగా ఘనపరిమాణము 1000 ఘ.సెం.మీ. అవుతుంది. ఈ పరిమాణమును 1 లీటరు అని అంటారు.

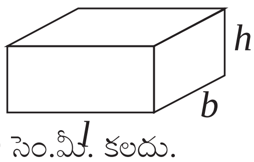
$\therefore$ 1 లీటరు = 1000 మి.లీ., అని మీకు తెలుసు.

$\therefore$ 1 లీటరు = 1000 ఘ.సెం.మీ. = 1000 మి.లీ. దీనిని బట్టి 1 ఘ.సెం.మీ. = 1 మి.లీ. అని దృష్టిలో పెట్టుకోండి.

అనగా 1 సెం.మీ. భుజం గల ఘనంలో పట్టే నీటి పరిమాణము = 1 మి.లీ. ఉంటుంది.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) దీర్ఘఘనం ఆకారం గల చేపలను పెట్టె గాజు పెట్టెపొడవు 1 మీటరు, వెడల్పు 40 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 50 సెం.మీ. ల ఉన్నచో ఆ పెట్టెలో ఎన్ని లీటర్ల నీరు పట్టునో కనుగొనండి.



సాధన : పెట్టెలో పట్టే నీటి ఘనపరిమాణం ఆ పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణమంత ఉంటుంది.

పెట్టె పొడవు 1 మీటరు = 100 సెం.మీ., వెడల్పు 40 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 50 సెం.మీ. కలదు.

పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణము = $l \times b \times h = 100 \times 40 \times 50 = 200000$ ఘ.సెం.మీ.,

200000 ఘ.సెం.మీ. = $\frac{200000}{1000}$ = 200 లీ. ($\because$ 1000 ఘ.సెం.మీ. = 1 లీ)

$\therefore$ పెట్టెలో 200 లీటర్ల నీరు పట్టును.

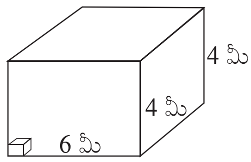
ఉదా. (2) ఒక దీర్ఘఘనం ఆకారం గల గోదాము (గిడ్డంగి) పొడవు 6 మీ, వెడల్పు 4 మీ మరియు ఎత్తు 4 మీ గలదు. ఆ గోదాములో 40 సెం.మీ. భుజము కలిగిన ఘనాకారం గల పెట్టెలు ఎక్కువలో ఎక్కువ ఎన్ని పట్టును?

సాధన : అమర్చిన పెట్టెలతో గోదాము (గిడ్డంగి) పూర్తిగా నిండినపుడు పెట్టెలన్నింటి మొత్తం ఘనపరిమాణం ఆ గోదాము యొక్క ఘనపరిమాణమంత ఉంటుంది. ఉదాహరణ సాధించటానికి కింది మెట్లను గూర్చి ఆలోచిద్దాం.

(1) గోదాము యొక్క ఘనపరిమాణం కనుగొందాం.

(2) ఒక పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణం కనుగొందాం.

(3) పెట్టెల సంఖ్యలను కనుగొందాం.



1వ మెట్టు : గోదాము పొడవు 6 మీ = 600 సెం.మీ., వెడల్పు=ఎత్తు= 4 మీ = 400 సెం.మీ.

గోదాము యొక్క ఘనపరిమాణము=పొడవు×వెడల్పు×ఎత్తు=600×400×400 ఘ.సెం.మీ.

2వ మెట్టు : ఒక పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణము = భుజం^{3} = $(40)^3 = 40 \times 40 \times 40$ ఘ.సెం.మీ.

3వ మెట్టు : పెట్టెల సంఖ్య = $\dfrac{\text{గోదాం ఘనపరిమాణం}}{\text{ఒక పెట్టె ఘనపరిమాణం}} = \dfrac{600 \times 400 \times 400}{40 \times 40 \times 40} = 1500$

$\therefore$ ఆ గోదాములో ఎక్కువలో ఎక్కువ 1500 పెట్టెలు పట్టును.

ఉదా. (3) మంచు దిమ్మె తయారు చేయటానికై పాలకోవా మరియు చక్కెర కరిగించిన 5 లీటర్ల మిశ్రమమును దీర్ఘఘనం ఆకారం గల ట్రేలో పోసినచో అంచుల వరకు నిండుతుంది. ట్రే వెడల్పు 40 సెం.మీ., ఎత్తు 2.5 సెం.మీ. అయినచో దాని యొక్క పొడవును కనుగొనండి.

సాధన: ఉదాహరణ సాధించటానికి కింది గడిలలో సరియైన సంఖ్యలను నింపండి.

1వ మెట్టు : ట్రే యొక్క సామర్థ్యము=5 లీటర్లు = $\boxed{}$ ఘ.సెం.మీ. ($\because$ 1 లీ = 1000 ఘ.సెం.మీ.)

2వ మెట్టు : మిశ్రమము యొక్క ఘనపరిమాణము = $\boxed{}$ ఘ.సెం.మీ.

3వ మెట్టు : దీర్ఘఘనాకార ట్రే యొక్క ఘనపరిమాణం = మిశ్రమముయొక్క ఘనపరిమాణము.

పొడవు × వెడల్పు × ఎత్తు = $\boxed{}$ ఘ.సెం.మీ.

పొడవు × 40 × 2.5 = $\boxed{}$ ఘ.సెం.మీ., $\therefore$ ట్రే పొడవు = $\dfrac{\boxed{}}{100}$ = 50 సెం.మీ.

ఇది నాకర్థమైంది.

- దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణము = పొడవు × వెడల్పు × ఎత్తు = $l \times b \times h$
- సమ ఘన ఘనపరిమాణము = భుజం^{3} = l^3

అభ్యాసమాలిక 16.1

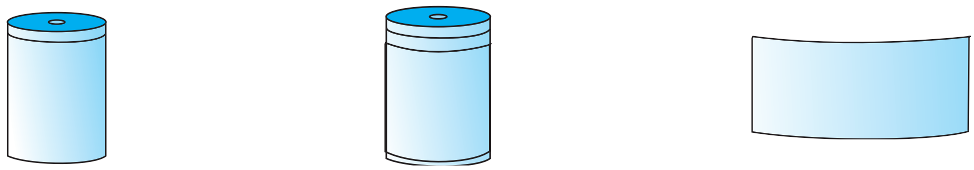
1. ఒక పట్టె యొక్క పొడవు 20 సెం.మీ., వెడల్పు 10.5 సెం.మీ., ఎత్తు 8 సెం.మీ. అయినచో దాని ఘనపరిమాణంను కనుగొనండి.
2. ఒక దీర్ఘఘనాకారం గల సబ్బు బిళ్ళ యొక్క ఘనపరిమాణము 150 ఘ.సెం.మీ. కలదు. దాని పొడవు 10 సెం.మీ., వెడల్పు 5 సెం.మీ. ఉన్నచో దాని మందము ఎంత ఉండవచ్చును?
3. 6 మీటర్ల పొడవు, 2.5 మీ. ఎత్తు 0.5 మీ. వెడల్పు. గల గోడను కట్టడానికి 25 సెం.మీ. పొడవు 15 సెం.మీ. వెడల్పు, 10 సెం.మీ. ల ఎత్తుగల ఇటుకలు ఎన్ని కావలెను?

4. ఒక ప్రాంతంలో వర్షపు నీటిని, నిల్వ చేయుటకై 10 మీ పొడవు, 6 మీ వెడల్పు మరియు 3 మీ లోతు కొలతలు గల ఒక తొట్టిని కట్టుకొనిరి. అయిన ఆ తోట్టి యొక్క సామర్థ్యము ఎంత? ఆ తొట్టిలో ఎన్ని లీటర్ల నీళ్ళు పట్టును?

తెలుసుకొందాం

క్రమవృత్త స్థూప ఉపరితల వైశాల్యం (Surface area of a cylinder)

క్రమ వృత్తాకారముగల డబ్బాను తీసుకోండి. దాని ఎత్తు అంతా వెడల్పుగల ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు కాగితమును తీసుకోండి. దానిని ఆ డబ్బా చుట్టు వక్రతల భాగాన్ని కప్పివేయునట్లు చుట్టుము. మిగిలిన కాగితమును కత్తిరించి వేరు చేయండి.



డబ్బా   కాగితం చుట్టిన డబ్బా   వృత్తం పరిధి = పొడవు

చుట్టిన కాగితమును విప్పండి. అది దీర్ఘచతురస్రాకారంలో ఉన్నట్లుగా అగుపించును, ఈ దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వైశాల్యము అనగా క్రమ వృత్తాకార స్థూపం యొక్క పక్కతలభాగ వైశాల్య అనగా క్రమ వృత్తాకార స్థూపం యొక్క వక్రతల వైశాల్యము.

దీర్ఘచతురస్రం పొడవు అనగా వృత్త పరిధి దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వెడల్పు అనగా క్రమ వృత్తాకార స్థూపం యొక్క ఎత్తు అగును.

క్రమ వృత్త స్థూపము యొక్క పక్కతల వైశాల్యము = దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము = పొడవు × వెడల్పు

= క్రమ వృత్త స్థూపం యొక్క భూపరిధి × స్థూపం యొక్క ఎత్తు

క్రమ వృత్త స్థూపము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యం = $2\pi r \times h = 2\pi rh$

సంవృత క్రమ వృత్త స్థూపము యొక్క పై భాగము, తల భాగము వృత్తకారంలో ఉంటుంది.

∴ సంవృత క్రమ వృత్త స్థూపం సంపూర్ణతల వైశాల్యం = పక్కతల వైశాల్యం + పై భాగపు వైశాల్యం + భూ వైశాల్యం

∴ క్రమ వృత్త స్థూపం సంపూర్ణతల వైశాల్యం = క్రమవృత్త స్థూప వక్రతల వైశాల్యం + 2 × వృత్త వైశాల్యం

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h + r)$$

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ఒక క్రమవృత్త స్థూపాకారము గల నీటి తొట్టి యొక్క వ్యాసము 1 మీటరు మరియు ఎత్తు 2 మీటర్లు గలదు. తొట్టి పైన మూతను పెట్టారు. ఆ మూతలో సహాతొట్టికి లోపల మరియు బయట రంగు వేయవలసి యున్నది. రంగు ఖర్చు ప్రతి చ.మీ.కు 80 రూపాయలు. అయితే ఆ తొట్టికి రంగువేయటానికై ఎంత ఖర్చు అగును? ($\pi = 3.14$)

సాధన : తొట్టికి లోపల మరియు బయట రంగు వేయవలసి యున్నది. అనగా రంగు వేయవలసిన భాగం వైశాల్యాలు తొట్టి యొక్క మొత్తం బాహ్యతల వైశాల్యమునకు రెండింతలు కలదు.

క్రమ వృత్తాకార స్థూపం తలవ్యాసము 1 మీటరు.

$\therefore$ వ్యాసార్థము 0.5 మీ మరియు క్రమవృత్త స్థూపం యొక్క ఎత్తు 2 మీ.

$\therefore$ క్రమ వృత్త స్థూపం సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 2\pi r\ (h + r) = 2 \times 3.14 \times 0.5\ (2.0 + 0.5)$

$= 2 \times 3.14 \times 0.5 \times 2.5 = 7.85$ చ.మీ.

$\therefore$ రంగువేసే భాగం వైశాల్యం $= 2 \times 7.85 = 15.70$ చ.మీ.

$\therefore$ తొట్టికి రంగు వేయడానికి మొత్తం ఖర్చు $= 15.70 \times 80 = 1256$ రూపాయలు.

ఉదా. (2) తుత్తు నాగం(Zinc) దీర్ఘచతురస్రాకారపు రేకు పొడవు 3.3 మీ, వెడల్పు 3 మీ కలదు. ఈ రేకు నుండి 3.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థం గల మరియు 30 సెం.మీ. పొడవుగల గొట్టాలు. ఎక్కువలో ఎక్కువ ఎన్ని తయారు చేయవచ్చు?

సాధన: దీర్ఘచతురస్రాకార రేకు వైశాల్యం = పొడవు $\times$ వెడల్పు

$= 3.3 \times 3$ చ.మీ. $= 330 \times 300$ చ.సెం.మీ.

ఒక గొట్టం పొడవు అనగా క్రమ వృత్త స్థూపంయొక్క ఎత్తు $= h = 30$ సెం.మీ.

$\therefore$ గొట్టం వ్యాసార్థం = క్రమ వృత్త స్థూపం యొక్క తలం వ్యాసార్థం $= r = 3.5$ సెం.మీ.,

ఒక గొట్టం తయారు చేయటానికై పట్టిన రేకు = ఒక గొట్టం ఉపరి తలవైశాల్యం

$$= 2\pi rh = 2\times\frac{22}{7}\times\frac{35}{10}\times\frac{30}{1}$$

$= 2 \times 22 \times 15 \quad = 660$ చ.సెం.మీ..

రేకు నుండి తయారైన కుళాయిలు $= \dfrac{\text{రేకు యొక్క వైశాల్యం}}{\text{ఒక గొట్టం తలం వైశాల్యం}} = \dfrac{330\times300}{660} = 150$

అభ్యాసమాలిక 16.2

1. కింది ప్రతి ఉదాహరణలో క్రమ వృత్త స్థూపం యొక్క భూవ్యాసార్థం$= r$, ఎత్తు h ఇచ్చారు. దానిని బట్టి ప్రతి క్రమ వృత్త స్థూపం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం మరియు ప్రక్కతల వైశాల్యంను కనుగొనండి.

   (1) $r = 7$ సెం.మీ., $h = 10$ సెం.మీ. (2) $r = 1.4$ సెం.మీ., $h = 2.1$ సెం.మీ. (3) $r = 2.5$ సెం.మీ., $h = 7$ సెం.మీ.

   (4) $r = 70$ సెం.మీ., $h = 1.4$ సెం.మీ. (5) $r = 4.2$ సెం.మీ., $h = 14$ సెం.మీ.

2. రెండు వైపులా మూసి వేసిన, 50 సెం.మీ. వ్యాసం 45 సెం.మీ.ల ఎత్తుగల టాకీ యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యంను కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$)

3. ఒక క్రమవృత్త స్థూపం యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యం 660 చ.సెం.మీ., ఎత్తు 21 సెం.మీ., ఉన్నచో, దాని వ్యాసార్థం భూతల వైశాల్యంను కనుగొనండి.

4. ఒక క్రమ వృత్త స్థూపాకారం గల రేకు డబ్బా వ్యాసం 28 సెం.మీ., దాని ఎత్తు 20 సెం.మీ. కలదు. అది ఒకవైపు తెరుచుకొని యున్నచో దానికై ఉపయోగించిన రేకు యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి. ఆ డబ్బాకు 2 సెం.మీ. ఎత్తుగల మూత తయారు చేయటానికై సుమారు ఎన్ని చ.సెం.మీ. రేకు పడుతుందో కనుగొనండి.

తెలుసుకొందాం

క్రమవృత్త స్థూపం యొక్క ఘనపరిమాణం (Volume of a cylinder)

క్రమ వృత్త స్థూపాకార నీటి టాకిలో ఎన్ని నీళ్ళు పట్టునో కనుగొనాలంటే ఆ టాకి యొక్క ఘన పరిమాణమును కనుగొనాలి.

ఏదైన స్థూప ఘనపరిమాణం = భూతల వైశాల్యం × ఎత్తు, ఇది సాధారణ సూత్రం

క్రమ వృత్త స్థూపము తలం వృత్తాకారంలో ఉంటుంది. క్రమ వృత్త స్థూప ఘన పరిమాణము = $\pi r^2 h$

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా.(1) ఒక క్రమవృత్త స్థూపాకార తలం యొక్క వ్యాసార్థము 5 సెం.మీ. ఉంటే దాని ఎత్తు 10 సెం.మీ. గలదు. అయిన ఆ క్రమ వత్త స్థూపం యొక్క ఘనపరిమాణం కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$)

సాధన : వృత్త స్థూపం యొక్క వ్యాసార్థము $r = 5$ సెం.మీ., ఎత్తు $h = 10$ సెం.మీ.

క్రమ వృత్త స్థూపం యొక్క ఘనపరిమాణం$=\pi r^2 h = 3.14 \times 5^2 \times 10 = 3.14 \times 25 \times 10 = 785$ ఘ.సెం.మీ.

ఉదా. (2) ఒక క్రమ వృత్తస్థూపాకారం గల టాకీ యొక్క ఎత్తు 56 సెం.మీ. కలదు. ఆ టాకీ యొక్క సామర్థ్యము 70.4 లీటర్లు కలదు. అయిన ఆ టాకీ యొక్క వ్యాసార్థమును కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన : క్రమ వృత్త స్థూపాకార టాకీ తలం యొక్క వ్యాసార్థం = r అనుకొందాం.

టాకీ యొక్క సామర్థ్యం=టాకీ యొక్క ఘనపరిమాణం$=70.4 \times 1000$ ఘ.సెం.మీ.$=704 \times 100$ ఘ.సెం.మీ.

1 లీ = 1000 మి.లీ. $\therefore$ 70.4 లీ = 70400 మి.లీ.

$\therefore$ టాకీ ఘనపరిమాణం $= \pi r^2 h = 70400$

$$\therefore r^2 = \frac{70400}{\pi h} = \frac{70400 \times 7}{22 \times 56} = \frac{70400}{22 \times 8} = \frac{8800}{22} = 400$$

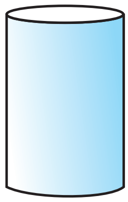
$\therefore r = 20$, $\qquad \therefore$ టాకీ యొక్క వ్యాసార్థం 20 సెం.మీ. కలదు.

ఉదా. (3) క్రమ వృత్త స్థూపాకార దృఢమైన రాగి కడ్డీ యొక్క భూ వ్యాసార్ధం 4.2 సెం.మీ. ఉండి దాని ఎత్తు 16 సెం.మీ. గలదు దానిని కరిగించగా 1.4 సెం.మీ. ల వ్యాసం మరియు 0.2 సెం.మీ.ల మందంగల ఎన్ని బిళ్ళలు తయారగును?

సాధన : క్రమవృత్త స్థూపాకార భూ వ్యాసార్ధం = R = 4.2 సెం.మీ. ఎత్తు = H = 16 సెం.మీ.

క్రమ వృత్త స్థూపాకార ఘనపరిమాణం = $\pi R^2H = \pi \times 4.2 \times 4.2 \times 16.0$

బిళ్ళ యొక్క భూవ్యాసార్ధం = $1.4 \div 2 = 0.7$ సెం.మీ.



బిళ్ళ యొక్క మందము = క్రమవృత్త స్థూపం యొక్క ఎత్తు = 0.2 సెం.మీ.

బిళ్ళ ఘనపరిమాణము = $\pi r^2h = \pi \times 0.7 \times 0.7 \times 0.2$

కరిగించిన క్రమవృత్త స్థూపాకారం నుండి n బిళ్ళలు తయారగును, అని అనుకొందాం.

$\therefore$ $n \times$ ఒక బిళ్ళ యొక్క ఘనపరిమాణం = క్రమవృత్త స్థూపాకార ఘనపరిమాణము.

$$n = \frac{\text{క్రమవృత్తస్థూప ఘనపరిమాణము}}{\text{ఒక బిళ్ళ యొక్క ఘనపరిమాణము}} = \frac{\pi R^2H}{\pi r^2h} = \frac{R^2H}{r^2h} = \frac{4.2\times4.2\times16}{0.7\times0.7\times0.2}$$

$$= \frac{42\times42\times160}{7\times7\times2} = 6 \times 6 \times 80 = 2880$$

$\therefore$ 2880 బిళ్ళలు తయారుగును.

ఇది నాకర్థమైంది.

క్రమవృత్త స్థూప ప్రక్కతల వైశాల్యం = $2\pi rh$ క్రమ వృత్తస్థూప సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $2\pi r(h + r)$

క్రమవృత్త స్థూప ఘనపరిమాణము = πr^2h

అభ్యాసమాలిక 16.3

1. కింద క్రమ వృత్తస్థూపాకార భూ వ్యాసార్ధం (r) మరియు ఎత్తు (h) ఇవ్వడం జరిగింది. దానిని బట్టి క్రమ వృత్తస్థూప ఘనపరిమాణంను కనుగొనండి.

(1) r =10.5 సెం.మీ., h = 8 సెం.మీ.   (2) r = 2.5 మీ, h = 7 మీ

(3) r = 4.2 సెం.మీ., h = 5 సెం.మీ.   (4) r = 5.6 సెం.మీ., h = 5 సెం.మీ.

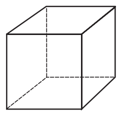
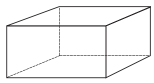
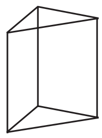
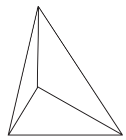
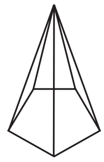
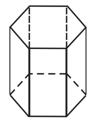
2. పొడవు 90 సెం.మీ., వ్యాసం 1.4 సెం.మీ. గల ఇనుప కడ్డీని తయారు చేయుటకు ఎంత ఇనుము పడుతుంది?

3. క్రమ వృత్త స్థూపాకారముగల ఒక నీటి తొట్టి యొక్క లోపలి వ్యాసం 1.6 మీ. దానిలోతు 0.7 మీ. గలదు అయిన ఆ నీటి తొట్టిలో ఎక్కువలోఎక్కువ ఎన్ని నీళ్ళు పట్టును?

4. ఒక క్రమ వృత్త స్థూపాకారం యొక్క భూపరిధి 132 సెం.మీ. దాని ఎత్తు 25 సెం.మీ. ఉన్నచో ఆ క్రమవృత్త స్థూపాకారం యొక్క ఘనపరిమాణము ఎంత?

ఆయిలర్ సూత్రం :

తలము (F), శీర్షబిందువు (V), అంచులు (E) కలిగిన ఘనాకృతి సంబంధం గల ఒక మనోరంజకమైన సూత్రాన్ని లీయోనార్డ్ ఆయిలర్ అను గొప్ప గణిత శాస్త్రవేత్త కనిపెట్టారు. కింది పట్టికలోని ఘనాకృతి తలము, మూలలు అంచులను లెక్కించి పట్టికను పూరించి, అయిలర్ సూత్రాన్ని V+F = E + 2 గురించి తెలుసుకొండి.

పేరు	ఘనం	దీర్ఘఘనం	త్రిభుజ స్థూపం	త్రిభుజ పిరమిడ్	పంచభుజ పిరమిడ్	షడ్భుజి స్థూపం
ఆకృతులు						
తలము (F)	6					8
శీర్షము (V)	8					12
అంచు (E)		12			10	

జవాబుల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 16.1

1. 1680 ఘ.సెం.మీ. **2.** 3 సెం.మీ. **3.** 2000 ఇటుకలు **4.** 1,80,000 లీ.

అభ్యాసమాలిక 16.2

1. (1) 440 చ.సెం.మీ., 748 చ.సెం.మీ. (2) 18.48 చ.సెం.మీ., 30.80 చ.సెం.మీ.

(3) 110 చ.సెం.మీ., 149.29 చ.సెం.మీ. (4) 616 చ.సెం.మీ., 31416 చ.సెం.మీ.

(5) 369.60 చ.సెం.మీ., 480.48 చ.సెం.మీ.

2. 10,990 చ.సెం.మీ. **3.** 5 సెం.మీ., 78.50 చ.సెం.మీ.

4. 2376 చ.సెం.మీ., సుమారు మూతకై 792 చ.సెం.మీ. రేకు కావాలి.

అభ్యాసమాలిక 16.3

1. (1) 2772 ఘ.సెం.మీ. (2) 137.5 ఘ. మీ (3) 277.2 ఘ.సెం.మీ. (4) 492.8 ఘ.సెం.మీ.

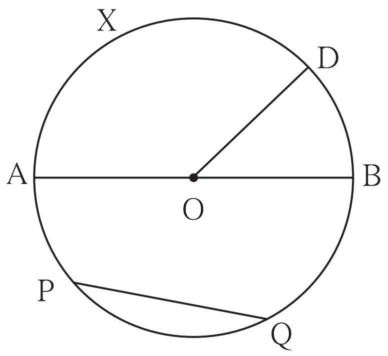
2. 138.6 ఘ.సెం.మీ. **3.** 1408 లీ. **4.** 34650 ఘ.సెం.మీ.

17 వృత్తం-జ్యా మరియు చాపం

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

పక్కనున్న పటంలో బిందువు 'O' వృత్త కేంద్రం.

పటంను పరిశీలించి క్రింది వాక్యాలలోని ఖాళీలను పూరించండి.



- రే.ఖం. OD వృత్తం యొక్క .... అవుతుంది.
- రే.ఖం. AB వృత్తం యొక్క .... అవుతుంది.
- రే.ఖం. PQ వృత్తం యొక్క .... అవుతుంది.
- .... అనేది కేంద్రీయ కోణం
- అల్పచాపము : చాపము AXD, చాపము BD, ..., ..., ...
- అధిక చాపము: చాపము PAB, చాపము PDQ, ...
- అర్ధ వృత్తచాపము : చాపము ADB, ...
- m(చాపము DB) = m∠........
- m(చాపము DAB) = 360°−m∠........

తెలుసుకొందాం

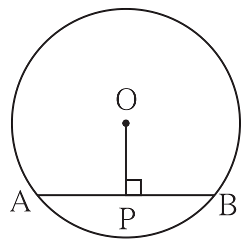
వృత్త జ్యా యొక్క ధర్మాలు (Properties of chord of a circle)

కృత్యం I :

O కేంద్రంగా గల వృత్తానికి రే.ఖం. AB అను జ్యాను గీయండి.

కేంద్రం O నుండి జ్యా AB పై రే.ఖం. OP లంబాన్ని గీయండి.

రే.ఖం. AP, రే.ఖం. PB ల పొడవులను కొలవండి.



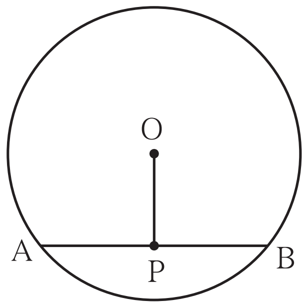
ఈ విధంగా వేర్వేరు వ్యాసార్థాలు గల ఐదు వృత్తాలను కాగితంపై గీయండి. ప్రతి వృత్తంలో ఒక జ్యాను, గీసి ఆ జ్యా పైకి కేంద్రం నుండి లంబాన్ని గీయండి. జ్యాలో అయిన రెండు భాగాలు సమానంగా ఉన్నాయా విభాగిని సహాయంతో పరీక్షించి చూడండి.

మీకు క్రింది ధర్మం లభించును.

వృత్త కేంద్రం నుండి ఏదేని జ్యా పైకి గీసిన లంబం - జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుంది.

కృత్యం II :

ఒక కాగితంపై వేర్వేరు వ్యాసార్థాలు గల 5 వృత్తాలను గీయండి ప్రతి వృత్తంలో ఒక చాపం గీయండి. ఆ జ్యా మధ్య బిందువును పొందండి. వృత్త కేంద్రం O జ్యా మధ్య బిందువును కలపండి. పక్కనున్న పటంలో చూపిన విధంగా ప్రతి జ్యా AB మరియు జ్యా యొక్క మధ్య బిందువుకు P అనే పేరు పెట్టండి. $\angle$ APO మరియు $\angle$ BPO లంబకోణాలని వీటిని మూలమట్టం లేదా కోణమానినితో పరీక్షించి చూడండి.

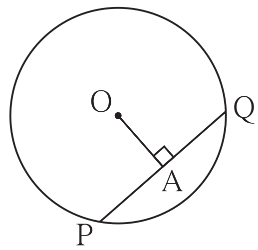


ప్రతి వృత్తంలోని జ్యాకు సంబంధించి ఇదే అనుభవం ఏర్పడుతుందేమో చూడండి.

''వృత్త కేంద్రంను ఆ వృత్తంలోని జ్యా మధ్య బిందువును కలిపే రేఖాఖండం ఆ జ్యాకు లంబంగా ఉంటుంది.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) O కేంద్రంగా గల వృత్తంలో జ్యా PQ పొడవు 7 సెం.మీ. కలదు. రే.ఖం. OA $\perp$ జ్యా PQ, అయితే l(AP) కనుగొనండి.



సాధన : రే.ఖం. OA $\perp$ జ్యా PQ,

$\therefore$ A బిందువు జ్యా PQ యొక్క మధ్యబిందువు

$\therefore\ l(PA) = \frac{1}{2}\ l(PQ) = \frac{1}{2} \times 7 = 3.5$ సెం.మీ.

ఉదా. (2) O కేంద్రంగాగల ఒక వృత్తం వ్యాసార్థం 10 సెం.మీ. ఆ వృత్తం యొక్క ఒక జ్యా కేంద్రం నుండి 6 సెం.మీ. దూరంలో ఉన్నది. అయితే ఆ జ్యా యొక్క పొడవును కనుగొనండి.

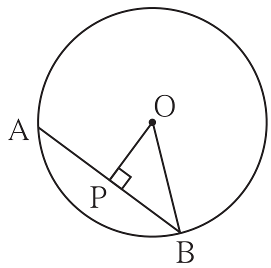
సాధన : కేంద్రం నుండి వృత్తం యొక్క జ్యా వరకు గల దూరం అనగా కేంద్రం నుండి ఆ జ్యా పైకి గీయబడిన లంబ రేఖాఖండం పొడవు అవుతుంది.

O కేంద్రంగా గల వృత్తం యొక్క రే.ఖం. AB ఒక జ్యా

రే.ఖం. OP $\perp$ చాపం AB.

వృత్త వ్యాసార్థం = l(OB) = 10 సెం.మీ..

l(OP) = 6 సెం.మీ. ఇక్కడ Δ OPB లంబకోణ త్రిభుజం ఏర్పడింది.



పైథాగరస్ సిద్ధాంతమునననుసరించి

$[l(OP)]^2 + [l(PB)]^2 = [l(OB)]^2$

$\therefore\ 6^2 + [l(PB)]^2 = 10^2$

$\therefore\ [l(PB)]^2 = 10^2 - 6^2$

$\therefore\ [l(PB)]^2 = (10 + 6)\ (10 - 6) = 16 \times 4 = 64$

$\therefore \quad l(PB) = 8$ సెం.మీ.

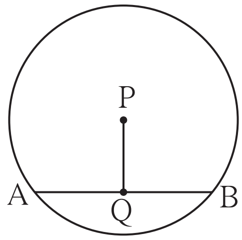
వృత్త కేంద్రం నుండి, జ్యా పైకి గీయబడిన లంబం జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుంది. అని మనకు తెలుసు,

$\therefore\ l(AB) = 2l(PB) = 2 \times 8 = 16$

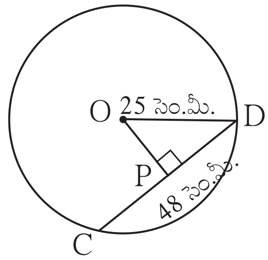
$\therefore$ జ్యా AB యొక్క పొడవు 16 సెం.మీ.

అభ్యాసమాలిక 17.1

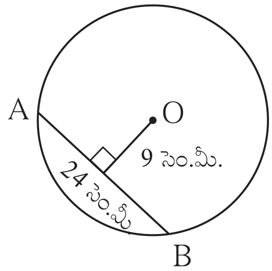
1. P కేంద్రం గాగల వృత్తం యొక్క జ్యా AB పొడవు 13 సెం.మీ. అయితే రే.ఖం. PQ $\perp$ జ్యా AB అయిన $l(QB)$ కనుగొనండి.



2. కేంద్రం O గాగల వృత్త వ్యాసార్థం 25 సెం.మీ. ఈ వృత్తంలో 48 సెం.మీ. పొడవుగల ఒక జ్యా గీసినచో, అది వృత్త కేంద్రం నుండి ఎంత దూరంలో ఉంటుంది?



3. O కేంద్రం గాగల వృత్తంలో 24 సెం.మీ. పొడవు గల జ్యా వృత్త కేంద్రం నుండి 9 సెం.మీ. దూరంలో ఉన్నది అయితే ఆ వృత్త వ్యాసార్థంను కనుగొనండి.

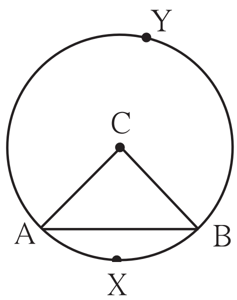


4. ఒక వృత్త కేంద్రం C అయితే దాని వ్యాసార్థం 10 సెం.మీ. కలదు. ఆ వృత్తం యొక్క ఒక జ్యా పొడవు 12 సెం.మీ. ఉన్నచో ఆ జ్యా కేంద్రం నుండి ఎంత దూరంలో ఉంటుంది?

తెలుసుకొందాం

వృత్తం యొక్క జ్యా సదృశ చాపములు (Arcs corresponding to chord of a circle)

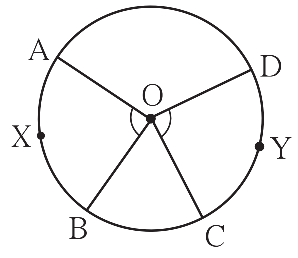
ప్రక్కనున్న పటంలో రే.ఖం. AB, కేంద్రం O గల వృత్తం యొక్క జ్యా, చాపం AXB ఒక అల్పచాపం, చాపం AYB అధిక చాపం. ఈ రెండు చాపాలను జ్యా AB యొక్క సదృశ చాపాలు అంటారు. దీనికి విపర్యయంగా జ్యా AB ని చాపము AXB, చాపము AYB లకు సదృశ జ్యా అవుతుంది.



సర్వసమాన చాపాలు (Congruent arcs)

ఒకవేళ ఒకే వృత్తంలో రెండు చాపాల కొలతలు సమానంగా ఉన్నచో ఆ రెండు చాపాలు సర్వసమాన చాపాలు అవుతాయి.

O కేంద్రం గల వృత్తంలో



$\therefore\ m\angle AOB = m\angle COD$

$\therefore\ m$(చాపము AXB) $= m$(చాపము CYD)

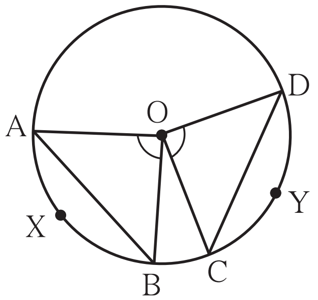
$\therefore$ చాపము AXB $\cong$ చాపము CYD దీనిని ఉల్లిపొర కాగితం సహాయంతో పరీక్షించి చూడండి.

వృత్త జ్యా మరియు సదృశ చాపాల ధర్మాలను కింది కృత్యం ద్వారా వెతికి, గుర్తు పెట్టుకోండి.

కృత్యం I :

(1) O కేంద్రంగల వృత్తాన్ని గీయండి.

(2) వృత్తంలో $\angle COD$, $\angle AOB$ అను సమాన కొలతలు గల కోణాలను గీయండి. దీనిని బట్టి చాపం AXB మరియు AYB అను సర్వసమాన చాపాలు లభించును.



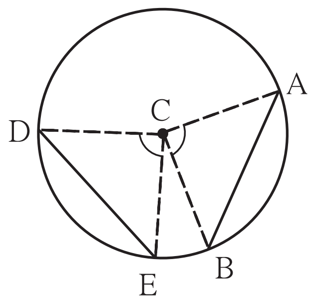
(3) జ్యా AB, జ్యా CD లను గీయండి.

(4) విభాగిని సహాయంతో జ్యా AB, జ్యా CD ల పొడవులు సమానంగా ఉన్నాయా స్వయంగా చేసి తెలుసుకోండి.

కృత్యం II :

(1) C కేంద్రంగల వృత్తాన్ని గీయండి.

(2) వృత్తం యొక్క రే.ఖం. AB, రే.ఖం. DE సర్వసమాన జ్యాలను గీయండి. రే.ఖం. CA, రే.ఖం. CB, రే.ఖం. CD, రే.ఖం. CE లు వ్యాసార్థాలను గీయండి.



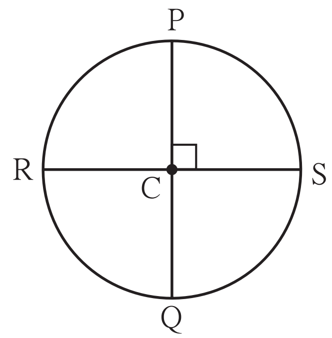
(3) $\angle ACB$, $\angle DCE$ సర్వసమానమని చూపండి.

(4) దానిని బట్టి చాపం AB, చాపం DE వీటి కొలతలు సమానంగా ఉన్నాయి, అనగా ఈ చాపాలు సర్వసమానంగా ఉన్నాయని చూపండి.

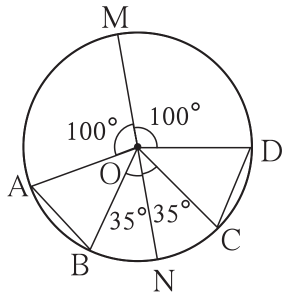
ఇది నాకర్థమైంది.

ఒక వృత్తంలోని సర్వసమాన చాపాలకు సదృశ జ్యాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి. ఒక వృత్తంలో రెండు జ్యాలు సర్వసమానంగా ఉంటే దాని సదృశ అల్పచాపం, సదృశ అధిక చాపాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

అభ్యాసమాలిక 17.2



1. C కేంద్రంగల వృత్తం యొక్క రే.ఖం. PQ, రే.ఖం. RS లు వ్యాసాన్ని లంబకోణంలో ఖండిస్తుంది. అయితే చాపం PS, చాపము SQ లు ఎందుకు సర్వసమానమో చెప్పండి. చాపం PS కు సర్వసమానంగల ఇతర చాపాల పేర్లను రాయండి.



2. పటంలో O కేంద్రం గల వృత్తం యొక్క రే.ఖం. MN వ్యాసం, కొన్ని కేంద్రీయ కోణాల కొలతలు ఇవ్వబడినవి.

దానిని బట్టి (1) ∠AOB, ∠ COD ల కొలతలను కనుగొనండి.

(2) చాపము AB ≅ చాపము CD చూపండి.

(3) జ్యా AB ≅ జ్యా CD ని చూపండి.

౧౧౧

జవాబుల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 17.1

1. 6.5 సెం.మీ. **2.** 7 సెం.మీ. **3.** 15 సెం.మీ. **4.** 8 సెం.మీ.

అభ్యాసమాలిక 17.2

1. (1) ఎందుకంటే చాపాలకు సంబంధించిన కోణాలు సమాన కొలతలలో అనగా ప్రతికోణం 90° ఉంటుంది. (2) చాపము PS ≅ చాపము PR ≅ చాపము RQ

2. (1) $m\angle AOB = m\angle COD = 45^\circ$

(2) చాపం AB ≅ చాపం CD ఎందుకంటే చాపాలకు సదృశ కోణాలు సమాన కొలతలలో అనగా ప్రతికోణం 45° ఉంటాయి.

(3) జ్యా AB ≅ జ్యా CD ఎందుకంటే సర్వసమాన చాపాలకు సదృశ జ్యాలు సర్వసమానం ఉండును.

EQRKJ3

2వ సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహం

1. కింది ప్రశ్నలకు పర్యాయ సమాధానాలివ్వబడినవి అందులో సరియైన పర్యాయాన్ని ఎన్నుకోండి.

(1) ఒక వృత్త వైశాల్యం 1386 చ.సెం.మీ. ఉన్నచో దానియొక్క చుట్టుకొలత ఎంత?

(A) 132 చ.సెం.మీ. (B) 132 సెం.మీ. (C) 42 సెం.మీ. (D) 21 చ.సెం.మీ.

(2) ఒక ఘనం యొక్క భుజం 4 మీ అయితే దానిని రెట్టింపు చేసినచో ఘన పరిమాణం ఎన్ని రెట్లు పెరుగును.

(A) రెండు రెట్లు (B) మూడు రెట్లు (C) నాల్గు రెట్లు (D) ఎనిమిది రెట్లు

2. ప్రణాలీ 100 మీటర్ల పరుగు పందెం సాధన చేయుచుండెను దానికై ఆమె 100 మీటర్ల దూరంను 20 సార్లు పరుగెత్తెను. ప్రతీసారి దానికి పట్టిన సమయం సెకండ్లలో కింది ప్రకారంగా ఉన్నది.

18 , 17 , 17 , 16 , 15 , 16 , 15 , 14 , 16 , 15 ,

15 , 17 , 15 , 16 , 15 , 17 , 16 , 15 , 14 , 15 పరుగెత్తడానికి ఆమెకు పట్టిన సమయం సగటును కనుగొనండి.

3. Δ DEF మరియు Δ LMN లు త్రిభుజాలు EDF $\leftrightarrow$ LMN ఇలా ఒకదానికొకటి సదృశంగా సర్వసమానంగా ఉన్నాయి. అయితే సదృశంగా ఏర్పడు సర్వసమాన భుజాలను, సర్వసమాన కోణల యొక్క జతలను రాయండి.

4. ఒక యంత్రం ఖరీదు రు. 2,50,000 అయిన ప్రతి సంవత్సరం 4% చొప్పున క్షీణించినచో యంత్రం తీసుకున్నప్పటి నుండి మూడు సంవత్సారాల తర్వాత ఆ యంత్రం యొక్క విలువ ఎంత అవుతుంది?

5. $\square$ ABCD లో భుజం AB || భుజం DC, రే.ఖం. AE $\perp$ భుజం DC అయితే l (AB) = 9 సెం.మీ., l (AE) = 10 సెం.మీ., A($\square$ ABCD) = 115 సెం.మీ., అయితే l (DC) కనుగొనండి.

6. క్రమ వృత్త స్థూపాకారం గల ఒక టాకీ యొక్క భూవ్యాసం 1.75 మీ మరియు ఎత్తు 3.2 మీ కలదు. అయిన ఆ టాకీ సామర్థ్యము ఎన్నీ లీటర్లు. ($\pi = \frac{22}{7}$)

7. 9.1 సెం.మీ. ల వ్యాసార్థం గల వృత్తము యొక్క జ్యా యొక్క పొడవు 16.8 సెం.మీ. ఉన్నచో ఆ జ్యా వృత్త కేంద్రం నుండి ఎంతదూరంలో కలదు?

8. ఉపాది హామీ పథకం కింద A, B, C, D అను గ్రామాలలో ప్రారంభించిన పనికై పురుష, స్త్రీ కార్మికుల సంఖ్య కిందనున్న పట్టికలో ఇవ్వబడినది.

గ్రామాలు	A	B	C	D
స్త్రీలు	150	240	90	140
పురుషులు	225	160	210	110

(1) ఈ వివరణను ఉప విభాగ కమ్మీ రేఖాచిత్రంలో చూపండి.

(2) ఈ వివరణను శతమాన కమ్మీరేఖా చిత్రంలో చూపండి.

9. కింది సమీకరణాలను సాధించండి.

(1) $17(x+4)+8(x+6)=11(x+5)+15(x+3)$

(2) $\frac{3y}{2}+\frac{y+4}{4}=5-\frac{y-2}{4}$ (3) $5(1-2x)=9(1-x)$

10. ఇచ్చిన సోపానాల ప్రకారం కృత్యంను చేయండి.

(1) సమభుజ $\square$ ABCD మరియు దాని కర్ణం AC ని గీయండి.

(2) సర్వసమాన భాగాలను సమాన చిహ్నంతో చూపండి.

(3) Δ ADC, Δ ABC లు ఏ సదృశానుసారం ఏ నియమం ప్రకారం సర్వసమానం అవుతాయో రాయండి.

(4) $\angle DCA \cong \angle BCA$, అలాగే $\angle DAC \cong \angle BAC$ అని చూపుటకు, కారణంను రాయండి.

(5) పై సోపానాలను బట్టి గుర్తుకు వచ్చే సమభుజ చతుర్భుజం యొక్క ధర్మాన్ని రాయండి.

11. ఒక పొలం యొక్క స్థలం చతురస్రాకారంలో కలదు. దాని నాలుగు మూలలకు P, Q, R, S అను పేర్లు పెట్టి, తీసుకొన్న కొలతలు కింది విధంగా వచ్చాయి.

l(PQ) = 170 మీ, l(QR) = 250 మీ, l(RS) = 100 మీ,

l(PS) = 240 మీ, l(PR) = 260 మీ

ఈ పొలం యొక్క వైశాల్యంను హెక్టార్‌లలో కనుగొనండి. (1 హెక్టారు =10,000 చ.మీ.)

12. ఒక గ్రంథాలయంలో మొత్తం పుస్తకాలలో 50% మరాఠీ పుస్తకాలు కలవు. మరాఠి పుస్తకాలలో $\frac{1}{3}$ ఇంగ్లీషు పుస్తకాలు, ఇంగ్లీషు పుస్తకాలలో 25% గణిత పుస్తకాలు కలవు. మిగిలినవి 560 పుస్తకాలు ఇతర విషయాలవి. అయిన ఆ గ్రంథాలయంలో మొత్తం ఎన్ని పుస్తకాలున్నాయి?

13. $(2x+1)$ ద్విపదిచే $(6x^3+11x^2-10x-7)$ అను బహుపదిని భాగించండి. భాగఫలం, శేషంను రాయండి.

జవాబుల సూచిక

1. (1) B (2) D **2.** 15.7 సెకండ్లు

3. భుజం ED $\cong$ భుజం LM, భుజం DF $\cong$ భుజం MN, భుజం EF $\cong$ భుజం LN,

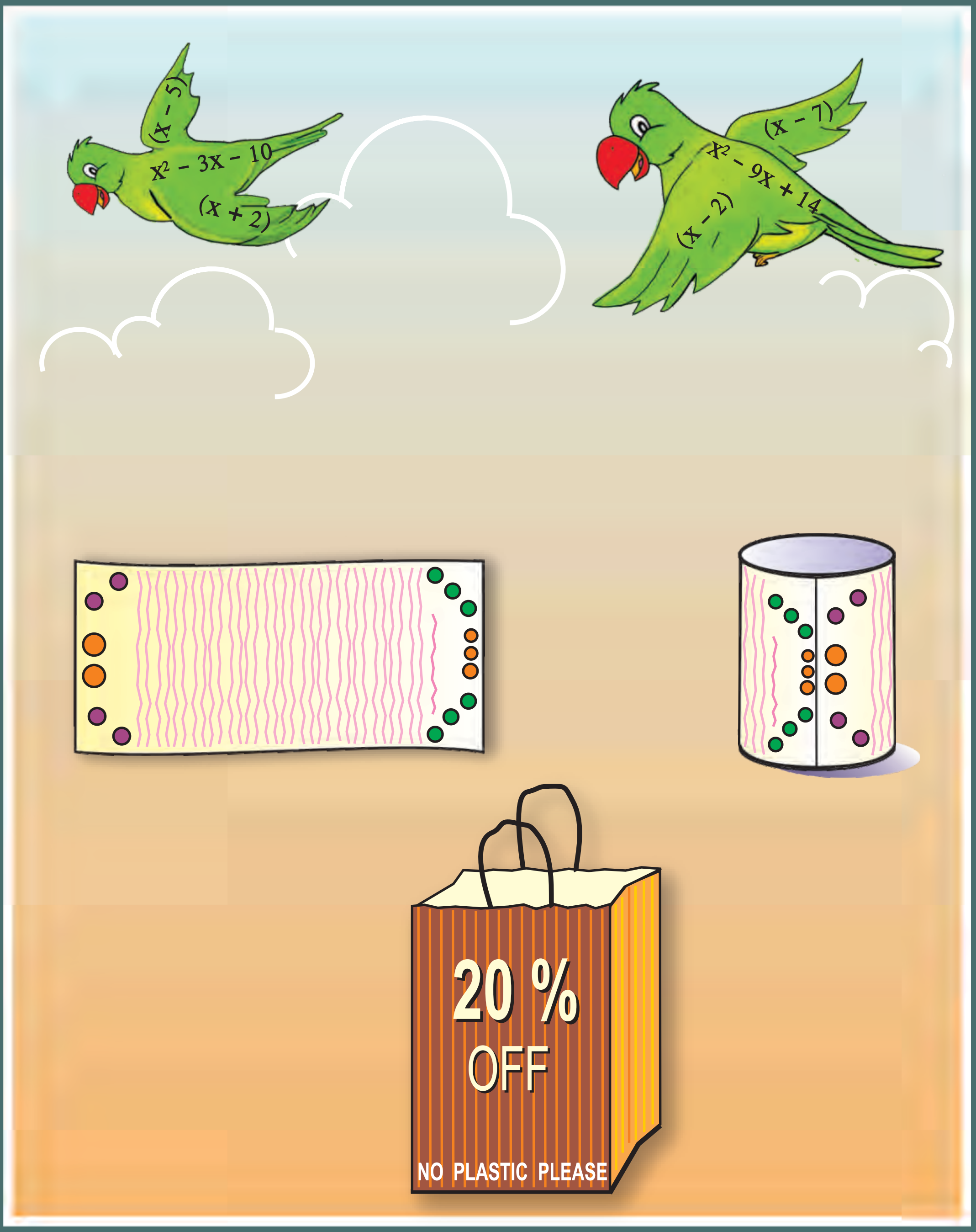
$\angle E \cong \angle L$, $\angle D \cong \angle M$, $\angle F \cong \angle N$

4. ₹ 2,21,184 **5.** 14 సెం.మీ.

6. 7700 **7.** 3.5 సెం.మీ.

9. (1) $x = 16$, (2) $y = \frac{9}{4}$ (3) $x = -4$ **11.** 3.24 హెక్టారు.

12. 1920 **13.** భాగఫలం = $3x^2+4x-7$, శేషం = 0



మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె

तेलुगु गणित इ.८वी

₹ 48.00