ಗಣಿತ ಭಾಗ -II

ಹತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆ

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಭಾಗ 4 ಕ

ನಾಗರಿಕರ ಮೂಲಭೂತ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು

ಅನುಚ್ಛೇದ 51 ಕ

ಮೂಲಭೂತ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು- ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಭಾರತೀಯ ನಾಗರಿಕನ ಈ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು ಇರುತ್ತವೆಯೆಂದರೆ ಅವನು-

(ಕ) ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ನಾಗರಿಕನು ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಪಾಲಿಸಬೇಕು. ಸಂವಿಧಾನದಲ್ಲಿಯ ಆದರ್ಶಗಳು ರಾಷ್ಟ್ರಧ್ವಜ ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆಗಳನ್ನು ಗೌರವಿಸಬೇಕು.

(ಖ) ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ನಡೆದ ಹೋರಾಟಕ್ಕೆ ಸ್ಫೂರ್ತಿ ನೀಡಿದ ಆದರ್ಶಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸಬೇಕು.

(ಗ) ದೇಶದ ಸಾರ್ವಭೌಮತ್ವ, ಐಕ್ಯತೆ ಮತ್ತು ಸಮಗ್ರತೆಯನ್ನು ಸುರಕ್ಷಿತವಾಗಿಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಪ್ರಯತ್ನಶೀಲರಾಗಿರಬೇಕು.

(ಘ) ನಮ್ಮ ದೇಶದ ರಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಬೇಕು. ದೇಶದ ಸೇವೆ ಮಾಡಬೇಕು.

(ಙ) ಎಲ್ಲ ಪ್ರಕಾರದ ಭೇದಭಾವಗಳನ್ನು ಮರೆತು ಒಗ್ಗಟ್ಟನ್ನು ಬೆಳೆಸಬೇಕು ಹಾಗೂ ಸಹೋದರ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಉತ್ತೇಜಿಸಬೇಕು. ಸ್ತ್ರೀಯರ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಚ್ಯುತಿ ತರುವಂತಹ ರೂಢಿಗಳನ್ನು ತ್ಯಜಿಸಬೇಕು.

(ಚ) ನಮ್ಮ ಸಮ್ಮಿಶ್ರ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಪರಂಪರೆಯನ್ನು ಕಾಪಾಡಬೇಕು.

(ಛ) ನೈಸರ್ಗಿಕ ಪರಿಸರವನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಸಜೀವ ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಮೇಲೆ ದಯೆ ತೋರಿಸಿರಿ.

(ಜ) ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಮನೋಭಾವನೆ, ಮಾನವೀಯತೆ ಮತ್ತು ಜಿಜ್ಞಾಸು ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

(ಝ) ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಆಸ್ತಿ-ಪಾಸ್ತಿಗಳನ್ನು ರಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಹಿಂಸಾಚಾರವನ್ನು ತ್ಯಜಿಸಬೇಕು.

(ಞ) ರಾಷ್ಟ್ರದ ಉತ್ತರೋತ್ತರ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ವೈಯಕ್ತಿಕ ಹಾಗೂ ಸಾಮೂಹಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಬೇಕು.

(ಟ) 6 ರಿಂದ 14 ವರ್ಷ ವಯೋಮಾನದಲ್ಲಿಯ ತಮ್ಮ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಪೋಷಕರು ಶಿಕ್ಷಣದ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಡಬೇಕು.

ಸರಕಾರ ನಿರ್ಣಯ ಕ್ರಮಾಂಕ: ಅಭ್ಯಾಸ-2116 /(ಪ್ರ.ಕ್ರ. 43/16) ಎಸ್‌ಡಿ-4 ದಿನಾಂಕ 25.4.2016 ಅನ್ವಯ ಸ್ಥಾಪಿತವಾದ ಸಮನ್ವಯ ಸಮಿತಿಯ ದಿನಾಂಕ 29.12.2017ರಂದು ನಡೆದ ಸಭೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸನ 2018-19 ಈ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷದಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಮಾನ್ಯತೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತ

ಭಾಗ II

ಹತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆ

ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳ, ಪುಣೆ.

QPPVNU

ತಮ್ಮ ಸ್ಮಾರ್ಟಫೋನದ ಮೇಲೆ DIKSHA App ಮೂಲಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಮೊದಲನೆಯ ಪುಟದ ಮೇಲಿರುವ Q.R. Codeದ ಮೂಲಕ ಡಿಜಿಟಲ್ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾಠದಲ್ಲಿರುವ Q.R. Codeದ ಮೂಲಕ ಆ ಪಾಠಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅಧ್ಯಯನ-ಅಧ್ಯಾಪನದ ಸಲುವಾಗಿ ಉಪಯುಕ್ತ ದೃಕ್-ಶ್ರಾವ್ಯ ಸಾಹಿತ್ಯ ಉಪಲಬ್ಧವಾಗುವುದು.

ಪ್ರಥಮಾವೃತ್ತಿ : 2018
ಪುನರ್ಮುದ್ರಣ: 2022

ಗಣಿತ ವಿಷಯ ತಜ್ಞ ಸಮಿತಿ

ಡಾ. ಮಂಗಲಾ ನಾರಳೀಕರ	(ಅಧ್ಯಕ್ಷ)
ಡಾ. ಜಯಶ್ರೀ ಅತ್ರೆ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀ. ವಿನಾಯಕ ಗೋಡಬೋಲೆ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀಮತಿ. ಪ್ರಾಜಕ್ತಿ ಗೋಖಲೆ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀ. ರಮಾಕಾಂತ ಸರೋದೆ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀ. ಸಂದೀಪ ಪಂಚಭಾಯಿ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀಮತಿ. ಪೂಜಾ ಜಾಧವ	(ಸದಸ್ಯ)
ಶ್ರೀಮತಿ. ಉಜ್ವಲಾ ಗೋಡಬೋಲೆ	(ಸದಸ್ಯ-ಸಚಿವೆ)

ಗಣಿತ ವಿಷಯ - ರಾಜ್ಯ ಅಭ್ಯಾಸಗಟ ಸದಸ್ಯರು

ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಶ್ರೀ ಪುರಂದರೆ	ಶ್ರೀಮತಿ ತರುಬೇನ ಪೋಪಟ
ಶ್ರೀ. ರಾಜೇಂದ್ರ ಚೌಧರಿ	ಶ್ರೀ. ಪ್ರಮೋದ ಠೊಂಬರೆ
ಶ್ರೀ. ರಾಮ ವನ್ಯಾಳಕರ	ಡಾ. ಭಾರತಿ ಸಹಸ್ರಬುದ್ದೆ
ಶ್ರೀ. ಅಣ್ಣಪ್ಪ ಪರೀಟ	ಶ್ರೀ. ವಸಂತ ಶೇವಾಳೆ
ಶ್ರೀ. ಅನ್ಸರ ಶೇಖ	ಶ್ರೀ. ಪ್ರತಾಪ ಕಾಶಿದ
ಶ್ರೀ. ಶ್ರೀಪಾದ ದೇಶಪಾಂಡೆ	ಶ್ರೀ. ಮಿಲಿಂದ ಭಾಕರೆ
ಶ್ರೀ. ಸುರೇಶ ದಾತೆ	ಶ್ರೀ. ಜ್ಞಾನೇಶ್ವರ ಮಾಶಾಳಕರ
ಶ್ರೀ. ಉಮೇಶ ರೆಳೆ	ಶ್ರೀ. ಗಣೇಶ ಕೋಲತೆ
ಶ್ರೀ. ಬನ್ಸಿ ಹಾವಳೆ	ಶ್ರೀ. ಸಂದೇಶ ಸೋನಾವಣೆ
ಶ್ರೀಮತಿ. ರೋಹಿಣಿ ಶಿರ್ಕೆ	ಶ್ರೀ. ಸುಧೀರ ಪಾಟೀಲ
ಶ್ರೀ. ಪ್ರಕಾಶ ಝೆಂಡೆ	ಶ್ರೀ. ಪ್ರಕಾಶ ಕಾಪಸೆ
ಶ್ರೀ. ಲಕ್ಷ್ಮಣ ದಾವಣಕರ	ಶ್ರೀ. ರವೀಂದ್ರ ಖಂದಾರೆ
ಶ್ರೀ. ಶ್ರೀಕಾಂತ ರತ್ನಪಾರಖೀ	ಶ್ರೀಮತಿ ಸ್ವಾತಿ ಧರ್ಮಾಧಿಕಾರಿ
ಶ್ರೀ. ಸುನೀಲ ಶ್ರೀವಾಸ್ತವ	ಶ್ರೀ. ಅರವಿಂದ ಕುಮಾರ ತಿವಾರಿ
ಶ್ರೀ. ಅನ್ಸಾರಿ ಅಬ್ದುಲ ಹಮೀದ	ಶ್ರೀ. ಮಲ್ಲೇಶಾಮ ಬೇಥಿ
ಶ್ರೀಮತಿ ಸುವರ್ಣ ದೇಶಪಾಂಡೆ	ಶ್ರೀಮತಿ ಆರ್ಯಾ ಭಿಡೆ

ಮುಖಪುಟ ಮತ್ತು ಸಂಗಣಕದ ಆಲೇಖನ

ಶ್ರೀ. ಸಂದೀಪ ಕೋಳಿ, ಚಿತ್ರಕಾರ, ಮುಂಬಯಿ

ಅಕ್ಷರಜೋಡಣೆ

P C GRAPHIC (ಪಿ. ಸಿ. ಗ್ರಾಫಿಕ್)

ಪ್ರಮುಖ ಸಂಯೋಜಕ

ಡಾ. ಸದಾನಂದ ಎಂ. ಬಿಳ್ಳೂರ
ವಿಶೇಷಾಧಿಕಾರಿ, ಕನ್ನಡ
ಶ್ರೀ ಆರ್. ಎಮ್. ಗಣಾಚಾರಿ
ವಿಷಯ ಸಹಾಯಕ, ಕನ್ನಡ

ಭಾಷಾಂತರಕಾರರು: ಶ್ರೀ ವಾಯ್. ಪಿ ತಿಕೋಟಿ
ಶ್ರೀ ಡಿ. ಎಮ್. ಬಗಲಿ
ಶ್ರೀ ಎಸ್. ಸಿ. ದಸಮಾನೆ
ಸಮೀಕ್ಷೆ: ಶ್ರೀ ಎಸ್. ಬಿ. ಪ್ಯಾಟಿ

ನಿರ್ಮಿತಿ

ಶ್ರೀ. ಸಚ್ಚಿತಾನಂದ ಆಫಳೆ
ಮುಖ್ಯ ನಿರ್ಮಿತಿ ಅಧಿಕಾರಿ
ಶ್ರೀ. ಸಂಜಯ ಕಾಂಬಳೆ
ನಿರ್ಮಿತಿ ಅಧಿಕಾರಿ
ಶ್ರೀ. ಪ್ರಶಾಂತ ಹರಣೆ
ಸಹಾಯಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಅಧಿಕಾರಿ

ಕಾಗದ

70 ಜಿ.ಎಸ್.ಎಮ್ ಕ್ರಿಮವೋವ್ಹ

ಮುದ್ರಣಾದೇಶ

ಮುದ್ರಕ

ಪ್ರಕಾಶಕ

ವಿವೇಕ ಉತ್ತಮ ಗೋಸಾವಿ, ನಿಯಂತ್ರಕ
ಪಾಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮಂಡಳ,
ಪ್ರಭಾದೇವಿ, ಮುಂಬಯಿ - 25

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಪೀಠಿಕೆ

ಭಾರತದ ಪ್ರಜೆಗಳಾದ ನಾವು, ಭಾರತವನ್ನು ಒಂದು ಸಾರ್ವಭೌಮ
ಸಮಾಜವಾದಿ ಧರ್ಮನಿರಪೇಕ್ಷ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ಗಣರಾಜ್ಯವನ್ನಾಗಿ ನಿರ್ಮಿಸಲು
ಹಾಗೂ ಅದರ ಸಮಸ್ತ ನಾಗರಿಕರಿಗೆ :

ಸಾಮಾಜಿಕ, ಆರ್ಥಿಕ ಮತ್ತು ರಾಜಕೀಯ **ನ್ಯಾಯ;**
ವಿಚಾರ, ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ, ವಿಶ್ವಾಸ, ಶ್ರದ್ಧೆ
ಮತ್ತು ಉಪಾಸನಾ **ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ;**
ಸ್ಥಾನಮಾನ ಹಾಗೂ ಅವಕಾಶ **ಸಮಾನತೆಯು;**

ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ದೊರೆಯುವಂತೆ ಮಾಡಲು
ಮತ್ತು ವ್ಯಕ್ತಿಗೌರವವನ್ನು

ಹಾಗೂ ರಾಷ್ಟ್ರದ ಐಕ್ಯತೆ ಮತ್ತು ಏಕಾತ್ಮತೆಯನ್ನು
ಆಶ್ವಾಸನೆ ನೀಡುವ **ಬಂಧುತ್ವವನ್ನು**
ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲು ದೃಢಸಂಕಲ್ಪದ ನಿರ್ಧಾರ ಮಾಡಿ ;

ನಮ್ಮ ಸಂವಿಧಾನ ಸಭೆಯಲ್ಲಿ
ಇಂದು ದಿನಾಂಕ ಇಪ್ಪತ್ತಾರನೆಯ ನವ್ಹೆಂಬರ, ೧೯೪೯ ನೆಯ ಇಸವಿ
ಈ ಮೂಲಕ ಈ ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿ ಮತ್ತು ಅಧಿನಿಯಮಿತ
ಗೊಳಿಸಿ ಸ್ವತ: ಅರ್ಪಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

ಜನಗಣಮನ-ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯ ಹೇ
ಭಾರತ-ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ ।

ಪಂಜಾಬ, ಸಿಂಧು, ಗುಜರಾತ, ಮರಾಠಾ,
ದ್ರಾವಿಡ, ಉತ್ಕಲ, ಬಂಗ,

ವಿಂಧ್ಯ, ಹಿಮಾಚಲ, ಯಮುನಾ, ಗಂಗಾ,
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿತರಂಗ,

ತವ ಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ, ತವ ಶುಭ ಆಶಿಸ ಮಾಗೇ,
ಗಾಹೇ ತವ ಜಯಗಾಥಾ,

ಜನಗಣ ಮಂಗಲದಾಯಕ ಜಯ ಹೇ,
ಭಾರತ-ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ ।

ಜಯ ಹೇ, ಜಯ ಹೇ, ಜಯ ಹೇ,
ಜಯ ಜಯ ಜಯ, ಜಯ ಹೇ ॥

ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

ಭಾರತ ನನ್ನ ದೇಶ. ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ ಬಂಧು-ಭಗಿನಿಯರು.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ನನಗೆ ನನ್ನ ದೇಶದ ಸಮೃದ್ಧವಾದ ಹಾಗೂ ಬಹುವಿಧವಾದ ಪರಂಪರೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಅಭಿಮಾನವಿದೆ. ಈ ಪರಂಪರೆಗೆ ತಕ್ಕವನಾಗಿರಲು ನಾನು ಯಾವಾಗಲೂ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ತಾಯಿ-ತಂದೆ, ಗುರು-ಹಿರಿಯರನ್ನು ಆದರಿಸುತ್ತೇನೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರೊಡನೆ ಸೌಜನ್ಯದಿಂದ ನಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶ ಹಾಗೂ ನನ್ನ ದೇಶ ಬಾಂಧವರಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಠೆ ಇಡುವೆನೆಂದು ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಮಾಡುತ್ತೇನೆ. ಅವರ ಕಲ್ಯಾಣ ಹಾಗೂ ಉತ್ಕರ್ಷ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯೇ ನನ್ನ ಸುಖವುಂಟು.

ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮಿತ್ರರೆ,

ಹತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ಸ್ವಾಗತ!

ಗಣಿತ ಭಾಗ I ಮತ್ತು ಭಾಗ II ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಈ ವರ್ಷ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವದಿದೆ.

ಗಣಿತ ಭಾಗ IIರಲ್ಲಿ ಭೂಮಿತಿ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ, ನಿರ್ದೇಶನ-ಭೂಮಿತಿ ಮತ್ತು ಮಹತ್ವ ಮಾಪನ ಈ ಮುಖ್ಯಕ್ಷೇತ್ರಗಳಿವೆ. ನಿಮಗೆ ಈ ವರ್ಷ ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆ ವರೆಗಿನ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಟ್ಟ ಘಟಕಗಳ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವದಿದೆ. ಅವುಗಳ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಉಪಯೋಗ ಕೊಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟ ಆಗುವದು. ಎಲ್ಲಿ ಹೊಸ ಭಾಗ, ಸೂತ್ರಗಳು ಅಥವಾ ಉಪಯೋಜನೆ ಇದೆ, ಅಲ್ಲಿ ಸುಲಭ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ನಮೂನೆಯ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಉಜಳಣಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಇವೆ ಹೊರತಾಗಿ, ಪ್ರಜ್ಞಾವಂತ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಅಹ್ವಾನಾತ್ಮಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ತಾರಾಂಕಿತ ಮಾಡಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯ ನಂತರ ಗಣಿತ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವದು ಇರದಿದ್ದರೂ ಸಹ ಗಣಿತದಲ್ಲಿಯ ಮೂಲಭೂತ ಸಂಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅವರಿಗೆ ತಿಳಿಯಬೇಕೆಂದು, ಆದರಂತೆ ಇತರ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವಾಗ ಅವಶ್ಯಕತೆಯ ಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರಲೆಂದು, ಇಂತಹ ಜ್ಞಾನ ಆವರಿಗೆ ಈ ಪುಸ್ತಕದಿಂದ ದೊರೆಯಬಹುದು. ಅಧಿಕ ಮಾಹಿತಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಈ ಶೀರ್ಷಿಕೆಯ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಗತಿ, ಯಾವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯ ನಂತರವೂ ಗಣಿತದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಪ್ರಾವೀಣ್ಯ ಪಡೆಯುವ ಇಚ್ಛೆ ಇದೆ, ಅವರಿಗೆ ಉಪಯೋಗವಾಗಬಹುದು, ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂತಹ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅದನ್ನು ಎಲ್ಲ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಯಾದರೂ ವಾಚನ ಮಾಡಿ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಆ್ಯಪದ ಮಾಧ್ಯಮದಿಂದ ಕ್ಯು ಆರ್. ಕೋಡ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾಠ ಸಂಬಂಧಿತ ಅಧಿಕ ಉಪಯುಕ್ತ ದೃಕ್-ಶ್ರಾವ್ಯ ಸಾಹಿತ್ಯ ನಮಗೆ ಉಪಲಬ್ದವಾಗುವುದು. ಅದರ ಅಭ್ಯಾಸ ಸಲುವಾಗಿ ನಿಶ್ಚಿತ ಉಪಯೋಗವಾಗಬಹುದು.

ಹತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯ ಪರೀಕ್ಷೆ ಮಹತ್ವದೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯ ಒತ್ತಡ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳದೇ ಒಳ್ಳೆಯ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿ ಮನಸ್ಸಿನ ಇಚ್ಛೆ ಇರುವಂತೆ ಯಶ ದೊರಕಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ನಿಮಗೆ ಶುಭೇಚ್ಛೆ!

(ಡಾ. ಸುನಿಲ ಮಗರ)
ಸಂಚಾಲಕ
ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಹಾಗೂ
ಅಭ್ಯಾಸ ಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳ, ಪುಣೆ.

ಪುಣೆ
ದಿನಾಂಕ : 18 ಮಾರ್ಚ 2018, ಯುಗಾದಿ
ಭಾರತೀಯ ಸೌರ ದಿನಾಂಕ: 27 ಫಾಲ್ಗುಣ 1939

ಹತ್ತನೆಯ ತರಗತಿ ಗಣಿತ ಭಾಗ ಈ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮದಲ್ಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಕ್ಷಮತೆಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ವಿಕಸಿತ ವಾಗುವವು.

ಕ್ಷೇತ್ರ	ಘಟಕ	ಕ್ಷಮತೆ ವಿಧಾನಗಳು
1. **ಭೂಮಿತಿ**	1.1 ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನ 1.2 ವರ್ತುಳ	• ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮ, ಏಕರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮ ಮತ್ತು ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯ ಇವುಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಉದಾಹರಣೆ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು • ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ರಚನೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು • ವರ್ತುಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಲು ಬರುವದು • ವರ್ತುಳ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಯ ರಚನೆ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.
2. **ನಿರ್ದೇಶಕ ಭೂಮಿತಿ**	2.1 ನಿರ್ದೇಶಕ ಭೂಮಿತಿ	• ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. • ವಿಭಜನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಲು. • ರೇಷೀಯ ಏರು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.
3. **ಮಹತ್ವಮಾಪನ**	3.1 ಪೃಷ್ಠಫಲ ಮತ್ತು ಘನಫಲ	• ವರ್ತುಳಕಂಸದ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು • ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಮತ್ತು ವರ್ತುಳಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಬರುವದು. • ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಆಕಾರಗಳ ಪೃಷ್ಠಫಲ ಮತ್ತು ಘನಫಲ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.
4. **ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ**	4.1 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ	• ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ನಿತ್ಯ ಸಮಾನತೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು • ಗಿಡಗಳ ಎತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವದು ನದಿಯ ಪಾತ್ರದ ಅಗಲ ತೆಗೆಯುವದು ಇಂತಹ ಸ್ವರೂಪದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.

ಶಿಕ್ಷಕರಿಗಾಗಿ ಸೂಚನೆಗಳು

ಪ್ರಥಮ ಪುಸ್ತಕದ ಸಖೋಲ ವಾಚನಮಾಡಿ ಅದನ್ನು ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ವಿವಿಧ ಘಟಕಗಳ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ ಮಾಡುವದು ಮತ್ತು ಸೂತ್ರಗಳ ತಾಳೆ ಹಾಕುವದು. ಈ ಮಹತ್ವದ ಸಂಗತಿಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಕೃತಿಗಳ ಸಹಾಯ ತಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಪಾಠ್ಯಕ್ಷಿಕೆಯಿಂದ ಮೂಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡುವದಿದೆ ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಕೃತಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವದು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ವಿಚಾರಿಸಲು ಉತ್ತೇಜನ ಕೊಡಿರಿ. ಒಂದು ಯಾವುದೇ ಉದಾಹರಣೆ ಬೇರೆ ಆದರೆ ತರ್ಕಶುದ್ಧ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಪ್ರಶಂಸೆ ಮಾಡಿರಿ.

ಭೂಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಜನೆಮಾಡಿ. ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕೌಶಲ್ಯ ವಿಕಸಿತ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಲುವಾಗಿ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿಯ ಕೃತಿಯ ಹೊರತಾಗಿ ಇನ್ನು ಕೃತಿ ತಯಾರಿಸಲು ಬರುವದು.

ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆಗಳ ಮಾದರಿಗಳ ಯಾದಿ

(1) ರಟ್ಟಿನ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ತುಣುಕನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಟೇಬಲದ ಮೇಲೆ ಮೇಣಬತ್ತಿ ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ತ್ರಿಕೋನ ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದರ ನೆರಳಿನ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ. ನೆರಳು ಮತ್ತು ಮೂಲ ತ್ರಿಕೋನ ಸಮರೂಪ ಇವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ. (ಮೂಲ ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಅದರ ನೆರಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮರೂಪ ಇರುವ ಸಲುವಾಗಿ ಯಾವ ಎಚ್ಚರಿಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ?)

(2) ಒಂದೇ ತರಹದ ಅಳತೆಯ ಎರಡು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಕತ್ತರಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಎರಡೂ ಬದಿಗೆಗಳಿಂದ A, B, C ಹೀಗೆ ಹೆಸರು ಕೊಡಿರಿ ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಶಿರೋಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಲಂಬ ಪಾದಕ್ಕೆ D ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬದ ಮೇಲೆ ಕತ್ತರಿಸಿ ಎರಡು ಸಣ್ಣ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ದೊರಕಿಸಿರಿ. ಮೂರು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಯಾವ ಒಂದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಅನುಸಾರ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸಮರೂಪ ಆಗುವವು ಅದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರ ಅಂತರಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಬಾಹ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಹೀಗೆ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಈ ಪತ್ರಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು ಇದರ ತಕ್ತೆ ತಯಾರಿಸಿರಿ. ತಕ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ ತೆಗೆದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(4) "ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಂದ ಅನಂತ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು'' ಎಂಬುದನ್ನು ದರ್ಶಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಎಂದರೆ ಐದು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

(5) ವರ್ತುಳದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ತಾಳೆಹಾಕಿ ನೋಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಉಪಯೋಗವಾಗುವಂತೆ ಆಗುವ ಮಳೆ ಕೂಡ್ರಿಸಿದ ಜೀವೋಬೋರ್ಡ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ ರಬ್ಬರ ಬ್ಯಾಂಡ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದ ಸಲುವಾಗಿ ಜೀವೋ ಬೋರ್ಡದ ಮೇಲೆ ಆಕೃತಿ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

(i) ಅಂತರಲಿಖಿತ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ (ii) ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ -ಛೇದಿಕೆಯ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ

(iii) ವಿರುದ್ಧ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿಯ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ

(6) ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನದ ಪ್ರತಿಕೃತಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿಯ ಅಂತರಖಂಡಿತ ಕಂಸ ತಯಾರಿಸಿರಿ. ಆ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ವಹಿಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(7) ಒಂದು ಕೋನದ ನಾಲ್ಕು ಸಮಾನ ಭಾಗ ಮಾಡಿರಿ. ಕಂಪಾಸ ಮತ್ತು ಪಟ್ಟಿಯ ಉಪಯೋಗಮಾಡಿರಿ.

(8) ಒಂದು ಚುಂಚುಪಾತ್ರೆ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದರ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಅಳೆಯಿರಿ. ಅದನ್ನು ನೀರಿನಿಂದ ತುಂಬಿ ಅದರ ಘನಪರಿಮಾಣ ಅಳತೆ ಪಾತ್ರೆಯಿಂದ ಅಳೆಯಿರಿ. ಎರಡೂ ಉತ್ತರಗಳ ಮೇಲಿಂದ ನಿಷ್ಕರ್ಷ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(9) ಶಂಕುಛೇದದ ಆಕಾರದ ಒಂದು ಕಾಗದದ ಗ್ಲಾಸ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ ಅದರ ತಳ ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ವರ್ತುಳಾಕಾರದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಅಳೆಯಿರಿ. ಗ್ಲಾಸಿನ ಎತ್ತರ ಅಳೆಯಿರಿ. ಆ ಗ್ಲಾಸಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ನೀರು ಹಿಡಿಯುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದು ನೀರಿನಿಂದ ಪೂರ್ತಿತುಂಬಿ ಆ ನೀರಿನ ಘನಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ಸೂತ್ರದಿಂದ ತೆಗೆದ ಘನಫಲ ಇವುಗಳ ತುಲನೆ ಮಾಡಿ ಸೂತ್ರದ ತಾಳೆ ಹಾಕಿರಿ.

(10) ದಪ್ಪ ರಟ್ಟಿನ ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ ಅವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ (i) ಅವುಗಳ ಪರಿಮಿತಿಯ ವರ್ಗದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇದೆಯೇ ಅಥವಾ (ii) ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಗಾಮಿಗಳ ವರ್ಗದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

1 ಸರೂಪತೆ (ಸಮರೂಪತೆ)

ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ

- ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ರೇತ್ರಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ
- ಪ್ರಮಾಣದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯ
- ಪ್ರಮಾಣದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ
- ತ್ರಿಕೋನದ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಗುಣಧರ್ಮ
- ಮೂರು ಸಮಾಂತರ ಕೀಟಗಳ ಮತ್ತು ಛೇದಿಕೆಯಿಂದ ಉಂಟಾದ ಅಂತರ ಛೇದಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ
- ತ್ರಿಕೋನಗಲ ಸಮರೂಪತೆಯ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು
- ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ರೇತ್ರಫಲಗಳ

ಸ್ವಲ್ಪನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ

ನಾವು ಗುಣೋತ್ತರ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣ ಇವುಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ a ಮತ್ತು b ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ $\frac{m}{n}$ ಇದೆ. ಈ ವಿಧಾನ a ಮತ್ತು b ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $m{:}n$ ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ ಹೀಗೆಯು ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಈ ಸಂಕಲ್ಪನೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಧನ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿಚಾರ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದ ಪ್ರಕಾರ ರೇಖಾಖಂಡದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ಆಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಈ ಧನ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ನಮಗೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ರೇತ್ರಫಲದ ಸೂತ್ರ ಗೊತ್ತಿದೆ

ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \frac{1}{2}$ ತಳ $\times$ ಎತ್ತರ

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

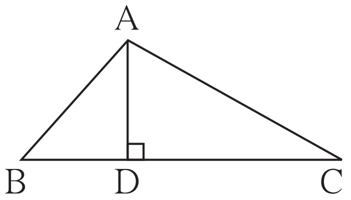
ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ (Ratio of areas of two triangles)

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ರೇತ್ರಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಾ.

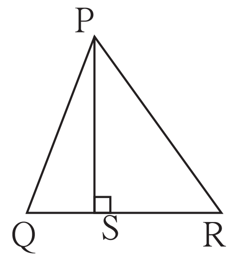
ಉದಾಹರಣೆ. Δ ABCಯ BC ಇದು ತಳಇದೆ ಮತ್ತು AD ಇದು ಎತ್ತರ ಇದೇ.

Δ PQRದ QR ಇದು ತಳ ಇದೆ ಮತ್ತು PS ಇದು ಎತ್ತರ ಇದೆ.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AD}{\frac{1}{2} \times QR \times PS}$$



ಆಕೃತಿ 1.1



ಆಕೃತಿ 1.2

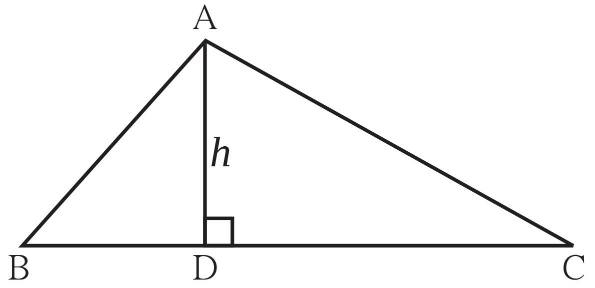
$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times AD}{QR \times PS}$$

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು ಅವುಗಳ ತಳ ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಎತ್ತರಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಗುಣೋತ್ತರದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

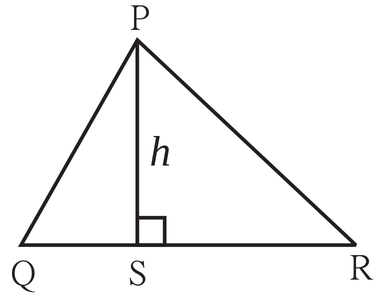
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ತಳ b_1 ಮತ್ತು ಎತ್ತರ h_1 ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ತಳ b_2 ಮತ್ತು ಎತ್ತರ h_2 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ = $\frac{b_1 \times h_1}{b_2 \times h_2}$

ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಬಂಧ ಕೆಲವು ಕರಾರುಗಳನ್ನು ಹಾಕಿ ನೋಡೋಣ.

ಕರಾರು 1. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎತ್ತರ ಸಮಾನ ವಿದ್ದರೆ



ಆಕೃತಿ **1.3**



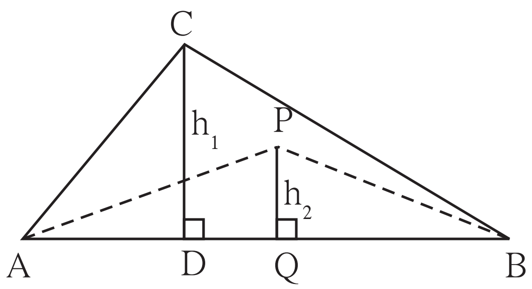
ಆಕೃತಿ **1.4**

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times h}{QR \times h} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{b_1}{b_2}$$

ಗುಣಧರ್ಮ: ಸಮಾನ ಎತ್ತರ ವಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲಗಳ ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ತಳಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

ಕರಾರು 2. ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ತಳ ಸಮಾನ ವಿದ್ದರೆ –



ಆಕೃತಿ **1.5**

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{AB \times h_1}{AB \times h_2}$$

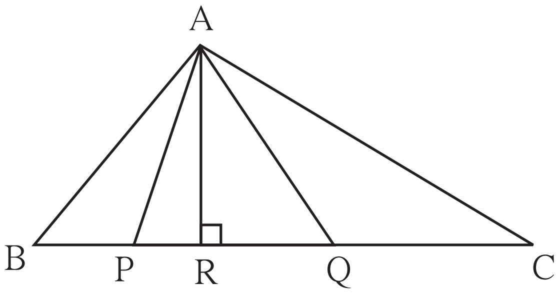
$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{h_1}{h_2}$$

ಗುಣಧರ್ಮ: ಸಮಾನ ಉದ್ದಳತೆಯ ತಳಗಳ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ಎತ್ತರ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

ಕೃತಿ:

ಕೆಳಗಿನ ರಿಕ್ತ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಯೋಗ್ಯ ಪ್ರಕಾರ ತುಂಬಿರಿ

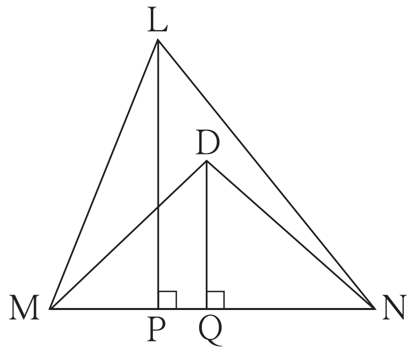
(i)



ಆಕೃತಿ **1.6**

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APQ)} = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

(ii)



ಆಕೃತಿ **1.7**

$$\frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta DMN)} = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

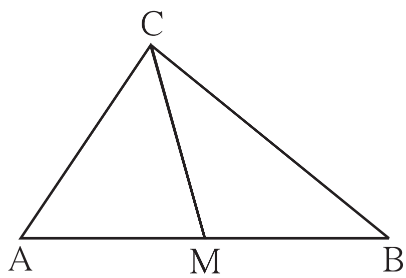
(iii) ಬಿಂದು M ಇದು ABಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ.

ರೇಖೆ CM ಇದು Δ ABCಯ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇದೆ.

$$\therefore \frac{A(\Delta AMC)}{A(\Delta BMC)} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$= \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

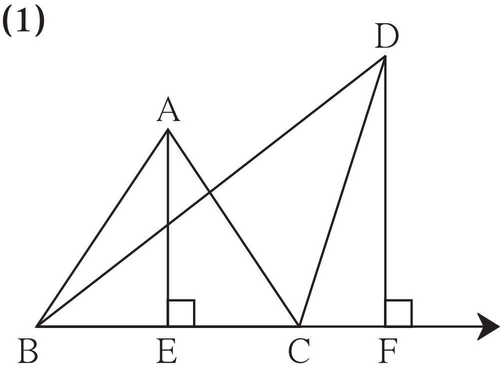
ಕಾರಣ ಬರೆಯಿರಿ



ಆಕೃತಿ **1.8**

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. (1)



ಆಕೃತಿ **1.9**

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ

ರೇಖ AE $\perp$ ರೇಖ BC, ರೇಖ DF $\perp$ ರೇಖ BC

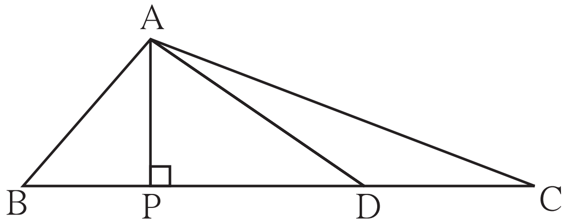
AE = 4, DF = 6 ಇದ್ದರೆ $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)}$ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ: $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)} = \frac{AE}{DF}$ .... ತಳ ಸಮಾನ ಆದ್ದರಿಂದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲಗಳ ಎತ್ತರದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ,

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ಉದಾ. (2) Δ ABCಯ BC ಭುಜದ ಮೇಲೆ D ಬಿಂದುವನ್ನು DC = 6, BC = 15. ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. A(Δ ABD) : A(Δ ABC) ಮತ್ತು A(Δ ABD) : A(Δ ADC) ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : Δ ABD, Δ ADC, Δ ABC ಈ ಮೂರು ತ್ರಿಕೋನಗಳ A ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಶಿರೋಬಿಂದು ಇದೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ತಳಗಳು ಒಂದೇ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಮೂರು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎತ್ತರಗಳು ಸಮಾನ ಇದೆ.



ಆಕೃತಿ **1.10**

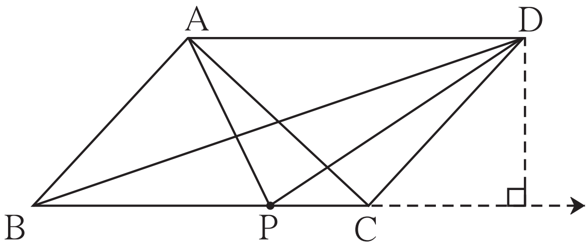
BC = 15, DC = 6 $\therefore$ BD = BC − DC = 15 − 6 = 9

$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{BD}{BC}$$ .... ಎತ್ತರ ಸಮಾನ ಇರುವದರಿಂದ ತಳಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ

$$= \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)} = \frac{BD}{DC}$$ .... ಎತ್ತರ ಸಮಾನ ಇರುವದರಿಂದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ತಳಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$



ಆಕೃತಿ **1.11**

ಉದಾ. (3)

$\square$ ABCD ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇದೆ. P ಇದು ಭುಜ BCಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $\square$ ABCD ಇದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇದೆ.

$\therefore$ AD || BC ಮತ್ತು AB || DC

Δ ABC ಮತ್ತು Δ BDC ಯ ವಿಚಾರ ಮಾಡಲಾಗಿ

ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿ ತಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಆದರಿಂದ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ಇದು ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎತ್ತರ ಆಗುವದು.

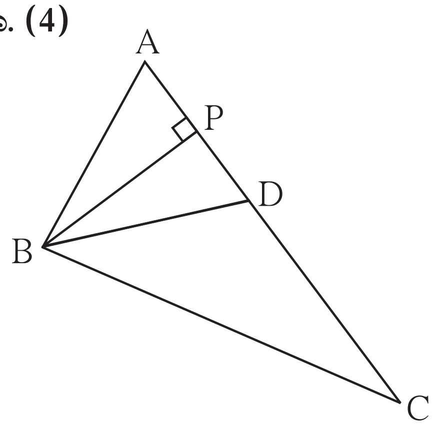
Δ ABC ಮತ್ತು Δ BDC ಯ BC ಇದು ತಳ ಸಮಾನ ಇದ್ದು ಎತ್ತರ ಕೂಡ ಸಮಾನ ಇರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ A(Δ ABC) = A(Δ BDC)

Δ ABC ಮತ್ತು Δ ABDಯ AB ಇದು ಸಮಾನ ತಳ ಇದ್ದು. ಎತ್ತರ ಕೂಡಾ ಸಮಾನ ಇದೆ.

$\therefore$ A(Δ ABC) = A(Δ ABD)

ಉದಾ. (4)



ಆಕೃತಿ **1.12**

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯ Δ ABC ಯ AC ಈ ಭುಜದ ಮೇಲೆ D ಬಿಂದುವನ್ನು AC = 16, DC = 9, BP $\perp$ AC, ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

i) $\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$ ii) $\dfrac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)}$

iii) $\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)}$

ಉತ್ತರ: ΔABCಯ ಭುಜ ACಯ ಮೇಲೆ P ಮತ್ತು D ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ΔABD, ΔBDC, ΔABC ಮತ್ತು ΔAPB ಇವುಗಳ B ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ತಗೆದು ಕೊಂಡರೆ, AD, DC, AC, AP ಈ ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ಇವೆ. ಈ ಎಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎತ್ತರ ಸಮಾನ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲಗಳು ಅವುಗಳ ತಳಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. AC = 16, DC = 9

$\therefore$ AD = 16 − 9 = 7

$\therefore \dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{7}{16}$ . . . . (ಸಮಾನ ಎತ್ತರಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು)

$\dfrac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)} = \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{9}{16}$ . . . . (ಸಮಾನ ಎತ್ತರಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು)

$\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)} = \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{7}{9}$ . . . . (ಸಮಾನ ಎತ್ತರಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು)

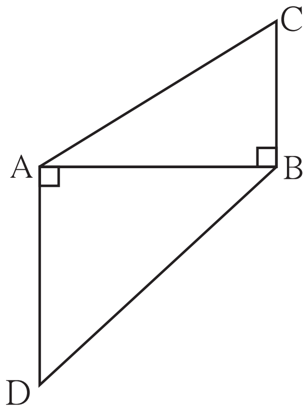
ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ

- ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು ಆ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ತಳ ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಎತ್ತರಗಳ ಗುಣಾಕಾರಗಳ ಗುಣೋತ್ತರದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.
- ಸಮಾನ ಎತ್ತರ ಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ತಳಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.
- ಸಮಾನ ತಳಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ಎತ್ತರಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

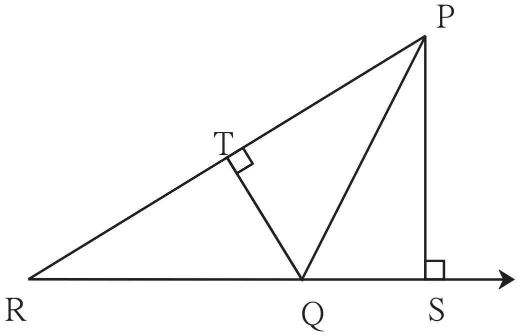
ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.1

1. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ತಳ 9 ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 5 ಇದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ತಳ 10 ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 6 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಬದಿಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಆಕೃತಿ1.13 ಯಲ್ಲಿ $BC \perp AB$, $AD \perp AB$, $BC = 4$, $AD = 8$ ಇದ್ದರೆ $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADB)}$ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



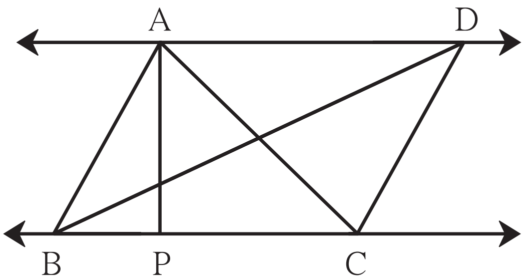
ಆಕೃತಿ **1.13**



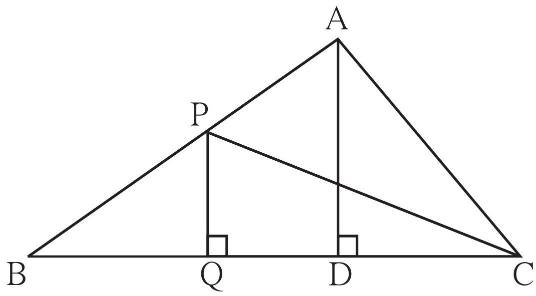
ಆಕೃತಿ **1.14**

3. ಬದಿಗೆಕೊಟ್ಟ ಆಕೃತಿ1.14 ಯಲ್ಲಿ ರೇಖ $PS \perp$ ರೇಖ RQ ರೇಖ $QT \perp$ ರೇಖ PR. $RQ = 6$, $PS = 6$, $PR = 12$ ಇದ್ದರೆ QT ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ $AP \perp BC$, $AD \parallel BC$, ಇದ್ದರೆ $A(\Delta ABC):A(\Delta BCD)$ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ



ಆಕೃತಿ **1.15**



ಆಕೃತಿ **1.16**

5. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ $PQ \perp BC$, $AD \perp BC$ ಇದ್ದರೆ, ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

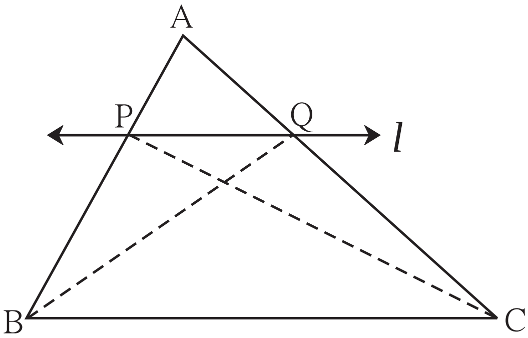
i) $\frac{A(\Delta PQB)}{A(\Delta PBC)}$ ii) $\frac{A(\Delta PBC)}{A(\Delta ABC)}$

iii) $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADC)}$ iv) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta PQC)}$

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಪ್ರಮಾಣದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯ (Basic Proportionality Theorem)

ಪ್ರಮೇಯ : ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ವಿರುವ ರೇಖೆಯ ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಉಳಿದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಎರಡು ಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಆ ರೇಖೆಯು ಆ ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ **1.17**

ಪಕ್ಷ : Δ ABCಯಲ್ಲಿ ರೇಖೆ l || ಭುಜ BC ಮತ್ತು ರೇಖೆ l ಇದು ಭುಜ ABಗೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು AC ಯನ್ನು Q ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿದುತ್ತದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

ರಚನೆ : ರೇಖ PC ಮತ್ತು ರೇಖ BQ ತೆಗೆಯಿರಿ

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ APQ ಮತ್ತು Δ PQB ಇವು ಸಮಾನ ಎತ್ತರಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿವೆ

$\therefore \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \frac{AP}{PB}$ .... (ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ತಳಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ) ..... (I)

ಆದರಂತೆ $\frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)} = \frac{AQ}{QC}$ .... (ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ತಳಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ) ..... (II)

Δ PQB ಮತ್ತು Δ PQC ಇವುಗಳ PQ ಇದು ಸಮಾನ ತಳ ಇದೆ. ರೇಖ PQ || ರೇಖ BC ಆದ್ದರಿಂದ Δ PQB ಮತ್ತು Δ PQC ಇವುಗಳ ಎತ್ತರ ಸಮಾನ ಇದೆ.

$\therefore A(\Delta PQB) = A(\Delta PQC)$ .... (III)

$\therefore \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)}$ .... [(I), (II) ಮತ್ತು (III)]

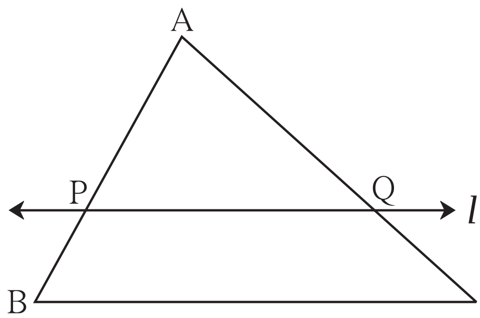
$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ .... [(I) ಮತ್ತು (II)] ರ ಮೇಲಿಂದ

ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ (converse of B.P.T.)

ಪ್ರಮೇಯ : ಒಂದು ರೇಖೆಯು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಎರಡು ಭಿನ್ನಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿ ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ ಆ ರೇಖೆಯು ಉಳಿದ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇರುತ್ತದೆ.

ಆಕೃತಿ 1.18ರಲ್ಲಿ ರೇಖ l Δ ABCಯ ಭುಜ AB ಮತ್ತು ಭುಜ ACಗೆ P ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ ಇದ್ದರೆ ರೇಖೆ l || ರೇಖೆ BC.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಆ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಮಾಡಲು ಬರುವದು.



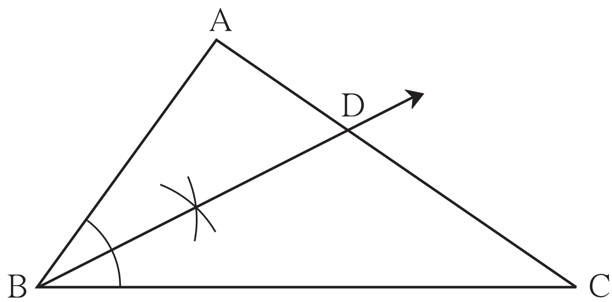
ಆಕೃತಿ **1.18**

ಕೃತಿ:

- ΔABC ಇದು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಇದೆ.
- ತ್ರಿಕೋನದ $\angle B$ ದ್ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ. ಅದು ACಯನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದೋ ಅಲ್ಲಿ D ಎಂದು ಹೆಸರು ಕೊಡಿರಿ.
- ಭುಜವನ್ನು ಅಳೆದು ಬರೆಯಿರಿ.

  $AB = \boxed{}$ ಸೆಮೀ $BC = \boxed{}$ ಸೆಮೀ

  $AD = \boxed{}$ ಸೆಮೀ $DC = \boxed{}$ ಸೆಮೀ



ಆಕೃತಿ **1.19**

- $\frac{AB}{BC}$ ಮತ್ತು $\frac{AD}{DC}$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.
- ಎರಡೂ ಗುಣೋತ್ತರ ಬಹುತೇಕ ಸಮಾನ ಇವೆ. ಇದನ್ನು ಅನುಭವಿಸಿರಿ.
- ಇದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಇತರ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ

ಆ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು ಸಮಾನ ಬರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅನುಭವಿಸಿರಿ

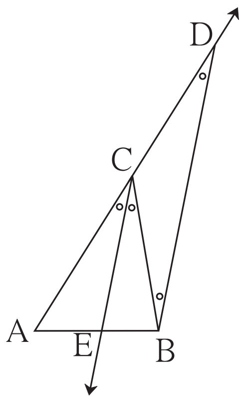

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಪ್ರಮೇಯ (Theorem of an angle bisector of a triangle)

ಪ್ರಮೇಯ : ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕವು ಆ ಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಭುಜಕ್ಕೆ ಉಳಿದರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : Δ ABCಯ $\angle$ Cದ ದ್ವಿಭಾಜಕ ರೇಖೆ AB ಯನ್ನು E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$



ಆಕೃತಿ **1.20**

ರಚನೆ : ಬಿಂದು B ದಲ್ಲಿಂದ ಕಿರಣ CE ಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದನ್ನು ಬೆಳೆಸಲಾಗಿ AC ಯನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಿದ್ಧತೆ : ಕಿರಣ CE || ಕಿರಣ BD ಮತ್ತು ರೇಖೆ AD ಇದು ಛೇದಿಕೆ

$\therefore \angle ACE \cong \angle CDB$ .... (ಸಂಗತ ಕೋನ)...(I)

ಈಗ BC ಇದು ಛೇದಿಕೆ-ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು

$\angle ECB \cong \angle CBD$ .... (ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನ)...(II)

ಆದರೆ $\angle ACE \cong \angle ECB$ .... (ಪಕ್ಷ)...(III)

$\therefore \angle CBD \cong \angle CDB$ .... [ವಿಧಾನ (I), (II) ಮತ್ತು (III) ಮೇಲಿಂದ]

Δ CBD ಯಲ್ಲಿ ಭುಜ CB $\cong$ ಭುಜ CD .... (ಏಕರೂಪ ಕೋನಗಳ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳು)

$\therefore CB = CD$ ...(IV)

ಈಗ Δ ABD ಯಲ್ಲಿ ರೇಖ EC || ಭುಜ BD .... (ರಚನೆ)

$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CD}$ .... (ಪ್ರಮಾಣದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯ...(V)

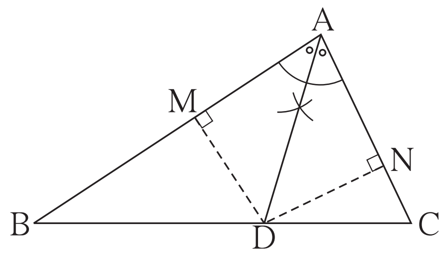
$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB}$ .... [ವಿಧಾನ (IV) ಮತ್ತು (V)ರ ಮೇಲಿಂದ]

ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಯ ಸಲುವಾಗಿ:

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಕಾರದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಆಕೃತಿ 1.21 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ Δ ABC ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು DM $\perp$ AB ಮತ್ತು DN $\perp$ AC ತೆಗೆಯಿರಿ.

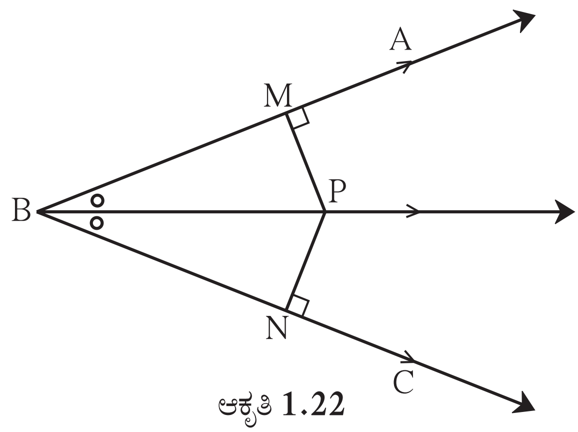
(1) ಸಮಾನ ಎತ್ತರಗಳ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು ಅವುಗಳು ಆವುಗಳ ಸಂಗತ ತಳಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಇದರ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **1.21**

(2) ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು ಇದು ಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಗುಣಧರ್ಮದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿರಿ.

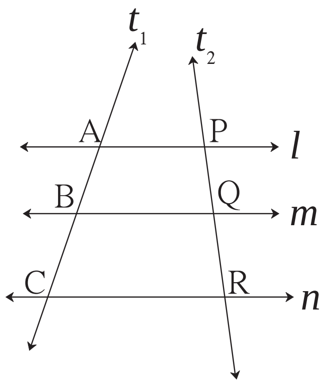


ಆಕೃತಿ **1.22**

ತ್ರಿಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ (Converse of angle bisector of triangle)

Δ ABCಯ ಭುಜ BC ಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು Dಯು $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, ಆಗುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ ಕಿರಣ AD ಇದು $\angle$ BACಯ ದ್ವಿಭಾಜಕ ವಿರುತ್ತದೆ.

ಕೃತಿ:



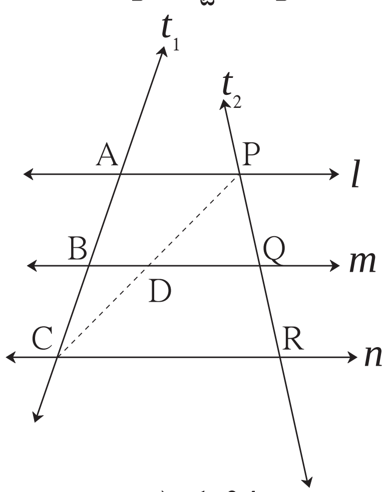
- ಮೂರು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.
- ಅವುಗಳಿಗೆ l, m, n ಹೇಗೆ ಹೆಸರು ಕೊಡಿರಿ
- t_1 ಮತ್ತು t_2 ಈ ಎರಡು ಛೇದಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
- t_1 ಈ ಛೇದಿಕೇಯ ಮೇಲಿನ ಅಂತರ ಛೇದ AB ಮತ್ತು BC ಇವೆ
- t_2 ಈ ವೇದಿಕೆಯ ಮೇಲಿನ ಅಂತರ ಛೇದ PQ ಮತ್ತು QR ಇವೆ.

ಆಕೃತಿ **1.23**

- $\frac{AB}{BC}$ ಮತ್ತು $\frac{PQ}{QR}$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅವು ಸುಮಾರಾಗಿ ಸಮಾನ ಇರುವುದನ್ನು ಅನುಭವಿಸಿರಿ.

ಮೂರು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಛೇದಿಕೆಗಳು ಗುಣಧರ್ಮ (Property of three parallel lines and their transversal)

ಪ್ರಮೇಯ: ಮೂರು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಛೇದಿಕೆಯ ಮೇಲೆ ಮಾಡಿದ ಅಂತರ ಛೇದಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು ಆ ರೇಷೆಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ಯಾವುದೇ ಛೇದಿಕೆಯ ಮೇಲೆ ಮಾಡಿದ ಅಂತರ ಛೇದಗಳ ಗುಣೋತ್ತರದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ



ಪಕ್ಷ : ರೇಖೆ l || ರೇಖೆ m || ರೇಖೆ n
t_1 ಮತ್ತು t_2 ಇವು ಛೇದಿಕೆಗಳಿವೆ. t_1 ಈ ಛೇದಿಕೆ ಆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ A, B, C ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.
t_2 ಈ ಛೇದಿಕೆ ಆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ P, Q, R ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

ಆಕೃತಿ **1.24**

ಸಿದ್ಧತೆ : ರೇಖೆ PC ತೆಗೆಯಿರಿ ಈ ರೇಖಾಖಂಡ ರೇಖೆ mನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

Δ ACP ದಲ್ಲಿ BD || AP

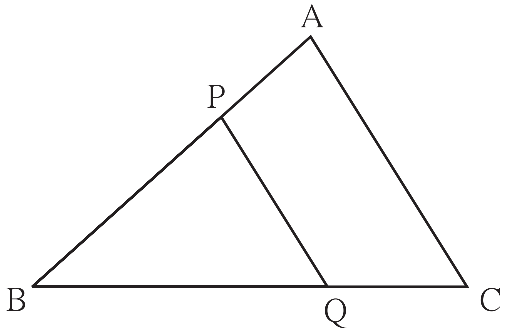
$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC}$. . . . . (I) (ಪ್ರಮಾಣದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯ)

Δ CPR ದಲ್ಲಿ DQ || CR

$\therefore \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . (II) (ಪ್ರಮಾಣದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯ)

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . . (I) ಮತ್ತು (II)ರ ಮೇಲಿಂದ $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ



ಆಕೃತಿ **1.25**

(1) ಪ್ರಮಾಣದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯ

Δ ABC ಯಲ್ಲಿ B-P-A; B-Q-C

ಮತ್ತು ರೇಖ PQ $\parallel$ ರೇಖ AC ಇದ್ದರೆ

ಆಗ $\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$

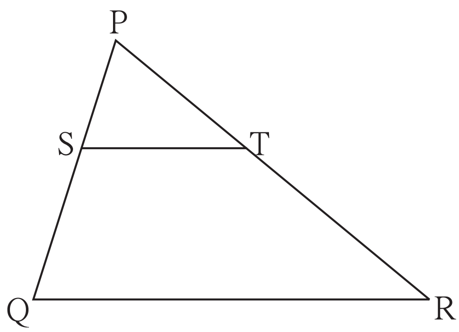
(2) ಪ್ರಮಾಣದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

Δ PQRದಲ್ಲಿ ಒಂದುವೇಳೆ P-S-Q;

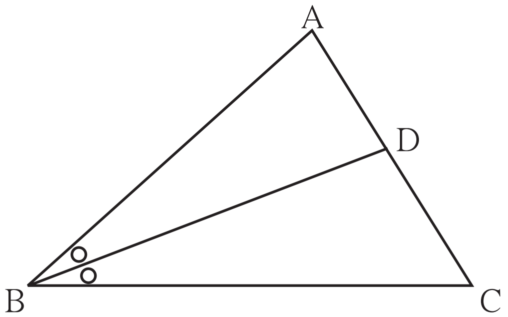
P-T-R

ಮತ್ತು $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

ಇದ್ದರೆ ರೇಖ ST $\parallel$ ರೇಖ QR.



ಆಕೃತಿ **1.26**



ಆಕೃತಿ **1.27**

(3) ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಪ್ರಮೇಯ

Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle$ ABC ಯ BD ಇದು

ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇದ್ದರೆ A-D-C,

ಇದ್ದರೆ $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

(4) ಮೂರು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ

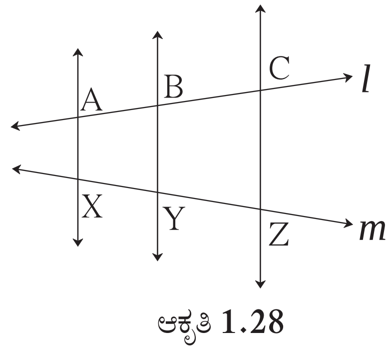
ಛೇದಿಕೆಯ ಗುಣಧರ್ಮ

ಒಂದು ವೇಳೆ AX $\parallel$ ರೇಖೆ BY $\parallel$ ರೇಖೆ

CZ ಮತ್ತು ರೇಖೆ l ಮತ್ತು ರೇಖೆ m ಇವು ಛೇದಿಕೆ

A, B, C ಮತ್ತು X, Y, Z ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ

$\frac{AB}{BC} = \frac{XY}{YZ}$



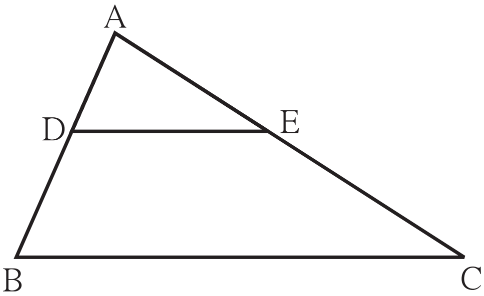
ಆಕೃತಿ **1.28**

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ (1) Δ ABCಯಲ್ಲಿ DE || BC (ಆಕೃತಿ 1.29)

ಒಂದುವೇಳೆ DB=5.4 ಸೆ.ಮೀ AD = 1.8 ಸೆ.ಮೀ

EC = 7.2 ಸೆ.ಮೀ ಇದ್ದರೆ AE ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ



ಆಕೃತಿ 1.29

ಉತ್ತರ : Δ ABC ಯಲ್ಲಿ DE || BC

$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ..... (ಪ್ರಮಾಣದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯ)

$\therefore \frac{1.8}{5.4} = \frac{AE}{7.2}$

$\therefore AE \times 5.4 = 1.8 \times 7.2$

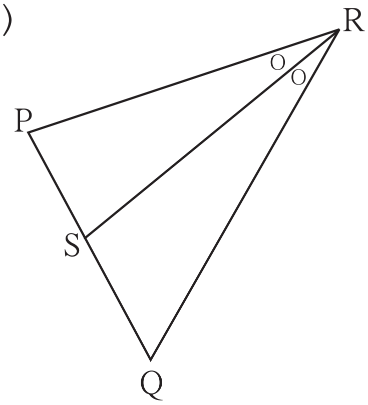
$\therefore AE = \frac{1.8 \times 7.2}{5.4} = 2.4$

AE = 2.4 ಸೆ.ಮೀ

ಉದಾ (2) Δ PQRದಲ್ಲಿ ರೇಖ RS ಇದು $\angle$ Rದ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇದೆ. (ಆಕೃತಿ 1.30)

ಒಂದು ವೇಳೆ PR = 15, RQ = 20, PS = 12

ಇದ್ದರೆ SQ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 1.30

ಉತ್ತರ : Δ PRQ ದಲ್ಲಿ ರೇಖ RS ಇದು $\angle$ Rದ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇದೆ.

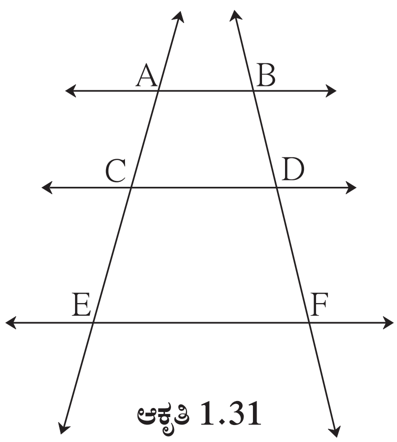
$\frac{PR}{RQ} = \frac{PS}{SQ}$ . . . . . . (ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಗುಣಧರ್ಮ)

$\frac{15}{20} = \frac{12}{SQ}$

$SQ = \frac{12 \times 20}{15} = 16$

$\therefore$ SQ = 16

ಕೃತಿ:



ಆಕೃತಿ 1.31

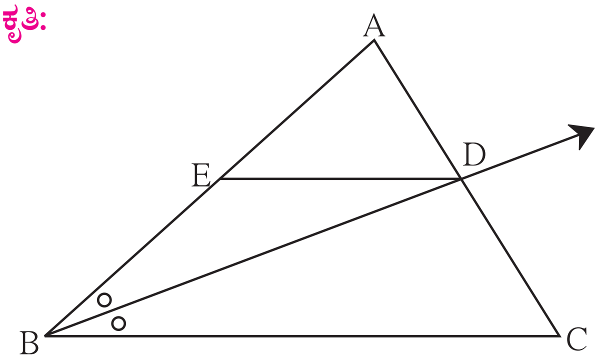
ಕೊಟ್ಟ ಆಕೃತಿ 1.31ಯಲ್ಲಿ AB || CD || EF ಒಂದುವೇಳೆ AC = 5.4, CE = 9, BD = 7.5 ಇದ್ದರೆ ಚೌಕೋನಗಳನ್ನು ಯೋಗ್ಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತುಂಬಿ DF ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : AB || CD || EF

$\frac{AC}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{DF}$ . . . . . ( )

$\frac{5.4}{9} = \frac{\boxed{}}{DF}$ $\therefore DF = \boxed{}$

ಕೃತಿ:



ಆಕೃತಿ **1.32**

Δ ABCಯಲ್ಲಿ ಕಿರಣ BD ಇದು $\angle$ ABC ದ್ವಿಭಾಜಕವಿದೆ. A-D-C ರೇಖ DE || ಭುಜ BC, A-E-B, ಇದ್ದರೆ $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EB}$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ ABCಯಲ್ಲಿ ಕಿರಣ BD ಇದು $\angle$ B ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕ ವಿದೆ

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ .... (ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಪ್ರಮೇಯ) .... (I)

Δ ABC ಯಲ್ಲಿ DE || BC

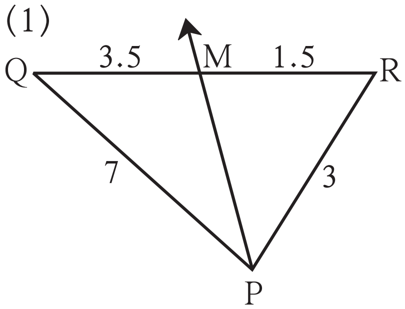
$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ .... (. . . . .) .... (II)

$\frac{AB}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{EB}$ .... (I) ಮತ್ತು (II)ರ ಮೇಲಿಂದ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.2

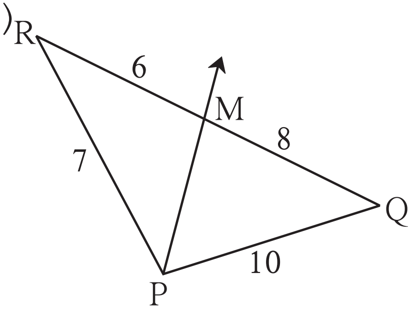
1. ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಉದ್ದ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರ ಮೇಲಿಂದ ಯಾವ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕಿರಣ PM ಇದು $\angle$ QPRದ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

(1)



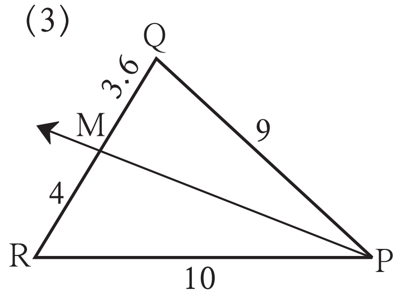
ಆಕೃತಿ **1.33**

(2)



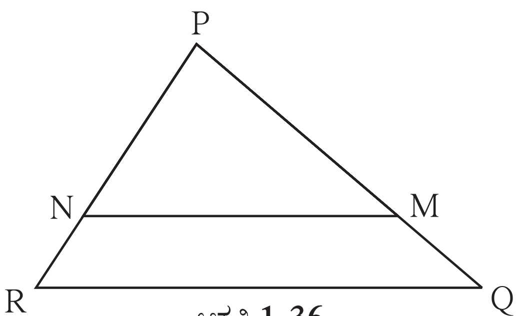
ಆಕೃತಿ **1.34**

(3)



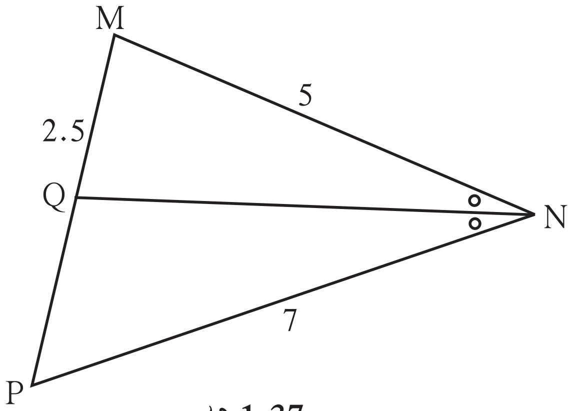
ಆಕೃತಿ **1.35**

2. Δ PQRದಲ್ಲಿ PM=15, PQ= 25, PR = 20, NR = 8 ಇದ್ದರೆ ರೇಖೆ NM ಇದು RQಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇದೆಯೇ? ಕಾರಣ ಸಹಿತ ಬರೆಯಿರಿ.

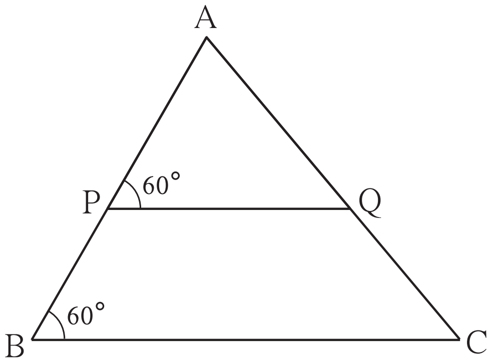


ಆಕೃತಿ **1.36**

3. Δ MNPದ $\angle$ Nದ NQ ಇದು ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ MN = 5, PN = 7, MQ = 2.5 ಇದ್ದರೆ QP ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



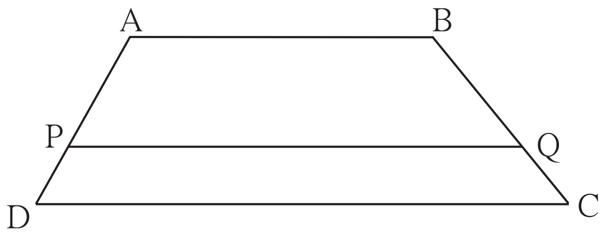
ಆಕೃತಿ 1.37



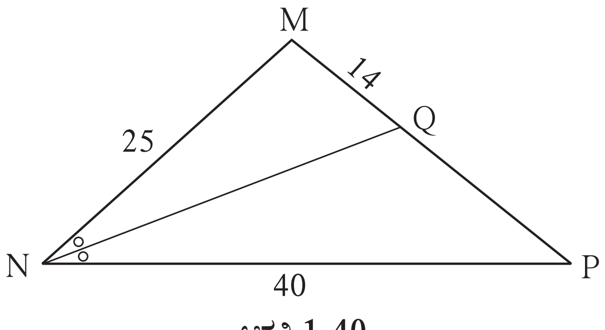
ಆಕೃತಿ 1.38

4. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಆದರ ಮೇಲಿಂದ $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ

5. ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ ABCDಯಲ್ಲಿ ಭುಜ AB || ಭುಜ PQ || ಭುಜ DC, ಒಂದು ವೇಳೆ AP = 15, PD=12, QC=14 ಇದ್ದರೆ BQ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



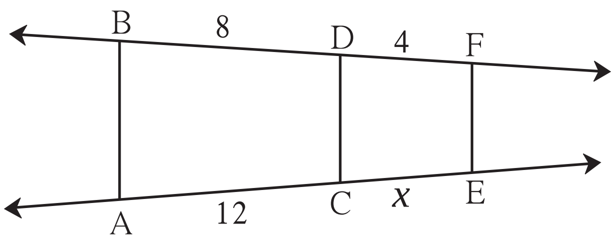
ಆಕೃತಿ 1.39



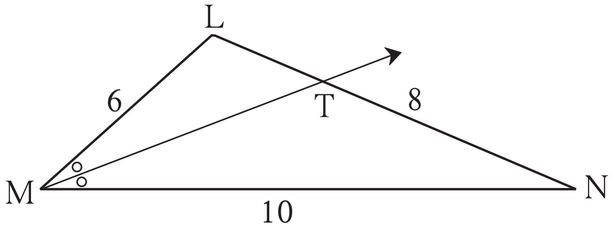
ಆಕೃತಿ 1.40

6. ಆಕೃತಿ 1.40ಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ QP ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಆಕೃತಿ 1.41ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೇಳೆ AB || CD || FE ಇದ್ದರೆ xದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು AE ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

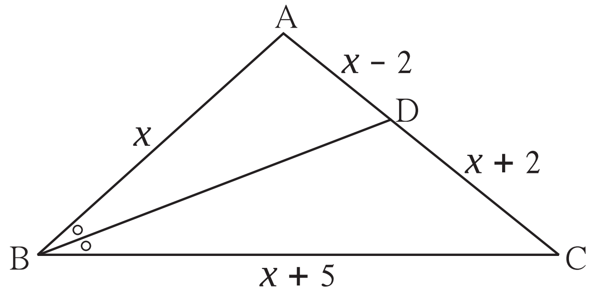


ಆಕೃತಿ 1.41



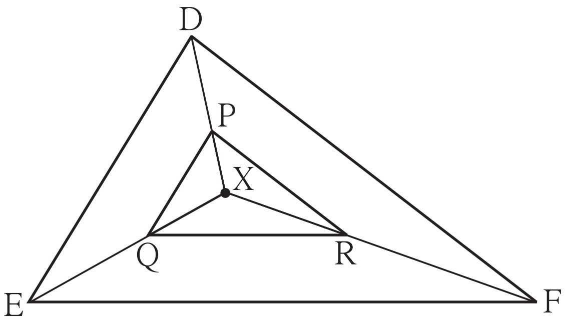
ಆಕೃತಿ 1.42

8. Δ LMNದಲ್ಲಿ ಕಿರಣ MT ಇದು $\angle$ LMNದ ದ್ವಿಭಾಜಕ ವಿದೆ
ಒಂದು ವೇಳೆ LM = 6, MN = 10, TN = 8 ಇದ್ದರೆ LT ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 1.43

9. Δ ABCಯಲ್ಲಿ BD ಇದು $\angle$ ABCಯ ದ್ವಿಭಾಜಕ ವಿದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ AB = x, BC = $x + 5$, AD = $x - 2$, DC = $x + 2$ ಇದ್ದರೆ xದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 1.44

10. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿ 1.44 ದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರಭಾಗದಲ್ಲಿ X ಇದು ಒಂದು ಯಾವುದೆ ಇದೆ. ಬಿಂದು X ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದೆ. ಆದರಂತೆ ರೇಖ PQ || ರೇಖ DE, ರೇಖ QR || ರೇಖ EF ಇದ್ದರೆ ರೇಖ PR || ರೇಖ DF ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಚಾಕಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ XDE ದಲ್ಲಿ PQ || DE .... $\boxed{}$

$\therefore \dfrac{XP}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{QE}$ .... (I) (ಪ್ರಮಾಣದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮುಖ)

Δ XEF ದಲ್ಲಿ QR || EF .... $\boxed{}$

$\therefore \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ ....(II) $\boxed{}$

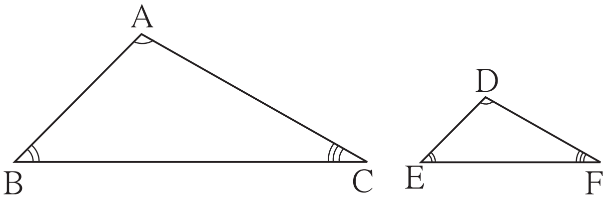
$\therefore \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... ವಿಧಾನ (I) ಮತ್ತು (II)ರ ಮೇಲಿಂದ

$\therefore$ ರೇಖ PR || ರೇಖ DF .... (ಪ್ರಮಾಣದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸದಿಂದ)

11★. Δ ABCಯಲ್ಲಿ AB = AC, $\angle$ B ಮತ್ತು $\angle$ Cಯ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಭುಜ AC ಮತ್ತು ಭುಜ AB ಇವುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಬಿಂದು D ಮತ್ತು E ಗಳಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುತ್ತವೆ ಹಾಗಾದರೆ, ರೇಖ ED || ರೇಖ BC ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳು (Similar triangles)



ಆಕೃತಿ 1.45

Δ ABC ಮತ್ತು Δ DEF ದಲ್ಲಿ $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

ಮತ್ತು $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

ಇದ್ದರೆ Δ ABC ಮತ್ತು Δ DEF ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

Δ ABC ಮತ್ತು Δ DEF ಸಮರೂಪ ಇವೆ ಅಂದರೆ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

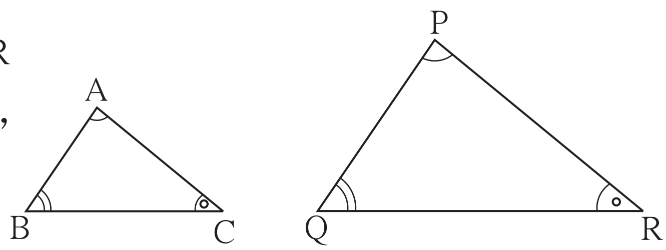
ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮರೂಪತೆಯ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು (Tests for similarity of triangles)

ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮರೂಪ ವಿರುವ ಸಲುವಾಗಿ ಅವುಗಳ ಮೂರು ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು ಮೂರು ಸಂಗತ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುವದು ಆವಶ್ಯಕ ಇದೆ. ಆದರೆ ಈ ಆರು ಕರಾರುಗಳ ಪೈಕಿ ಮೂರು ವಿಶಿಷ್ಟ ಕರಾರುಗಳು ಪೂರ್ಣವಿದ್ದರೆ ಉಳಿದ ಕರಾರುಗಳ ಪೂರ್ತತೆ ತಾನಾಗಿಯೇ ಆಗುವದು ಅಂದರೆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮರೂಪ ಆಗುವ ಸಲುವಾಗಿ. ಮೂರು ವಿಶಿಷ್ಟ ಕರಾರುಗಲು ಸಾಕಾಗುವವು ಈ ಮೂರು ಕರಾರುಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪ ಇವೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುದದು. ಇಂತಹ ಸಾಕಾಗುವಷ್ಟು ಕರಾರುಗಳ ಸಮೂಹ ಎಂದರೆ ಸಮರೂಪತೆಯ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳು ಆಗುವವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪ ಇವೆ ಎಂದು ನಿಶ್ಚಯಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ವಿಶಿಷ್ಟ ಕರಾರುಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಸಾಕಾಗುವಷ್ಟು ಇದೆ.

ಸಮರೂಪತೆಯ ಕೋ-ಕೋ-ಕೋ ಪರೀಕ್ಷೆ (AAA test for similarity of triangles)

ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಶಿರೋಬಿಂದು ವಿನಲ್ಲಿಯ ಕೊಟ್ಟ ಒಂದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಗೆ ಅನುಸಾರ ಆಗುವ ಮೂರು ಸಂಗತ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ವಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

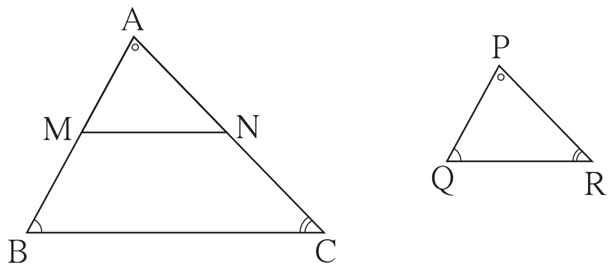
Δ ABCಯಲ್ಲಿ Δ PQRದಲ್ಲಿ $ABC \leftrightarrow PQR$ ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$, ಇದ್ದರೆ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



ಆಕೃತಿ 1.46

ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಯ ಸಲುವಾಗಿ:

ಕೋ-ಕೋ-ಕೋ- ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಸಿದ್ದತೆ



ಆಕೃತಿ 1.47

ಪಕ್ಷ : Δ ABC ಮತ್ತು Δ PQR ದಲ್ಲಿ
$\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$,
$\angle C \cong \angle R$.

ಸಾಧ್ಯ : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ ABC ಇದು Δ PQR ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿದೆ. ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ. ಆದರೆ AB ಯ ಮೇಲೆ. ಬಿಂದು M, AC ಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು N, ಮುಂದಿನಂತ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ AM = PQ ಮತ್ತು AN = PR. ಆದರ ಮೇಲಿಂದ $\Delta AMN \cong \Delta PQR$ ತೋರಿಸಿರಿ. ಈಗ MN || BC ತೋರಿಸಲು ಬರುವದು.

ಈಗ ಪ್ರಮಾಣ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯ ಉಪಯೋಗಿ $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

ಅಂದರೆ $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$ .... (ವ್ಯಸ್ತ ಮಾಡಿ)

$\frac{MB + AM}{AM} = \frac{NC + AN}{AN}$ .... ಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಿ.

$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$. ಅದೇ ರೀತಿ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ ಇದನ್ನು ತೋರಿಸಲು ಬರುವುದು.

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ $\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$

ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋ-ಕೋ ಪರೀಕ್ಷೆ (AA test for similarity of triangles)

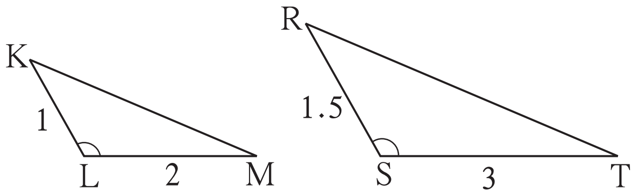
ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳ ಒಂದಕ್ಕೆ ಬಿಂದುಗಳ ಒಂದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಅನುಸಾರ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರೀಕೋನದ ಎರಡು ಸಂಗತ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಏಕರೂಪ ವಿದ್ದರೆ, ಮೊದಲನೆಯ ತ್ರಿಕೋನದ ಉಳಿದ ಕೋನವು, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಉಳಿದ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಅಂದರೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಸಂಗತ ಕೋನಗಳೊಂದಿಗೆ ಏಕರೂಪವಿದ್ದರೂ ಸಹ ಈ ಕರಾರು ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮರೂಪ ಆಗುವ ಸಲುವಾಗಿ. ಸಾಕಾಗುವಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಸಂಗತ ಕೋನಗಳೊಂದಿಗೆ ಏಕರೂಪವಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪತೆಯ ಕೋ ಕೋ ಪರೀಕ್ಷೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಸಮರೂಪತೆಯ ಭು-ಕೋ-ಭು ಪರೀಕ್ಷೆ (SAS test for similarity of triangles)

ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಶಿರೋಬಿಂದು ಒಂದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಗೆ ಅನುಸಾರ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳ ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದು ಮತ್ತು ಆ ಭುಜಗಳಿಂದ ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಮಾಡಿದ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇದ್ದರೆ. ಆಗ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 1.48

ಉದಾಹರಣಾರ್ಥ: Δ KLM ಮತ್ತು Δ RST ದಲ್ಲಿ

$\angle KLM \cong \angle RST$

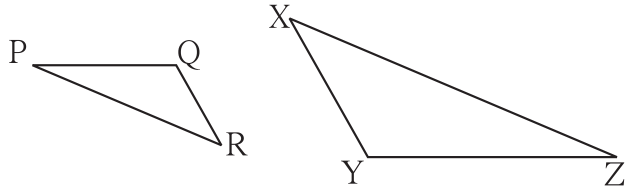
$\frac{KL}{RS} = \frac{LM}{ST}$

ಇದ್ದರೆ $\Delta KLM \sim \Delta RST$

ಸಮರೂಪತೆಯ ಭು-ಭು-ಭು ಪರೀಕ್ಷೆ (SSS test for similarity of triangles)

ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ ಆವಾಗ ಆ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

ಸಮರೂಪತೆಯ ಈ ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಭು-ಭು-ಭು ಪರೀಕ್ಷೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.



ಆಕೃತಿ 1.49

ಉದಾಹರಣಾರ್ಥ: Δ PQR ಮತ್ತು Δ XYZ ದಲ್ಲಿ

$\frac{PQ}{YZ} = \frac{QR}{XY} = \frac{PR}{XZ}$

ಇದ್ದರೆ $\Delta PQR \sim \Delta ZYX$

ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮ:

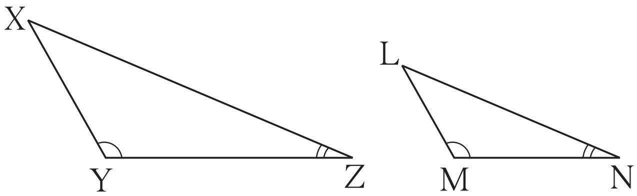
(1) $\Delta ABC \sim \Delta ABC$ – ಪರಾವರ್ತನೀಯತೆ (Reflexivity)

(2) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ಇದ್ದರೆ $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ – ಸಮಮಿತತೆ (Symmetry)

(3) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ಮತ್ತು $\Delta DEF \sim \Delta GHI$ ಇದ್ದರೆ $\Delta ABC \sim \Delta GHI$ – ಸಂಕ್ರಮಕತೆ (Transitivity)

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ: (1) Δ XYZ ದಲ್ಲಿ $\angle Y = 100°$, $\angle Z = 30°$, Δ LMN ದಲ್ಲಿ $\angle M = 100°$, $\angle N = 30°$, ಇದ್ದರೆ ΔXYZ ಮತ್ತು ΔLMN ಸಮರೂಪ ಇದೆಯೋ ಹೇಗೆ? ಇದ್ದರೆ ಯಾವ ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಅನುಸಾರ?



ಆಕೃತಿ 1.50

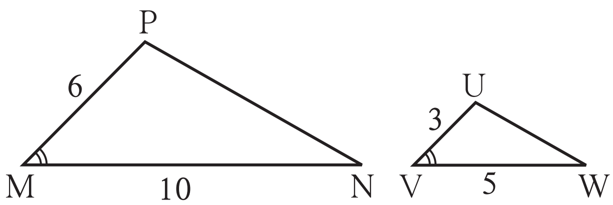
ಉತ್ತರ : Δ XYZ ಮತ್ತು Δ LMN ದಲ್ಲಿ

$\angle Y = 100^\circ, \angle M = 100^\circ \ \therefore \angle Y \cong \angle M$

$\angle Z = 30^\circ, \quad \angle N = 30^\circ \quad \therefore \angle Z \cong \angle N$

$\therefore \Delta XYZ \sim \Delta LMN$ .... (ಕೋ-ಕೋ-ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಅನುಸಾರ)

ಉದಾ: (2) ಆಕೃತಿ 1.51 ದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪ ಇವೇಯೇ? ಇದ್ದರೆ ಯಾವ ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಅನುಸಾರ?



ಆಕೃತಿ 1.51

ಉತ್ತರ : Δ PMN ಮತ್ತು Δ UVW ದಲ್ಲಿ

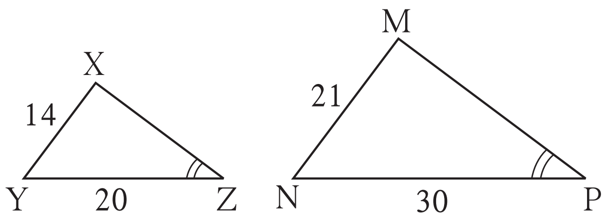
$$\frac{PM}{UV} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}, \frac{MN}{VW} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \frac{PM}{UV} = \frac{MN}{VW}$$

ಮತ್ತು $\angle M \cong \angle V$ .... (ಪಕ್ಷ)

$\therefore \Delta PMN \sim \Delta UVW$ .... (ಸಮರೂಪತೆಯ ಭು-ಕೋ-ಭು ಪರೀಕ್ಷೆ)

ಉದಾ: (3) ಆಕೃತಿ 1.52 ದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರೂಪ ಇವೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುವದೆ? ಹೇಳಲು ಬರುತ್ತಿದ್ದರೆ ಯಾವ ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಅನುಸಾರ?



ಆಕೃತಿ 1.52

ಉತ್ತರ : Δ XYZ ಮತ್ತು Δ MNP ದಲ್ಲಿ

$$\frac{XY}{MN} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3},$$

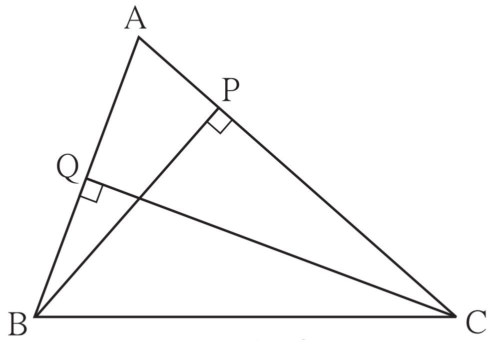
$$\frac{YZ}{NP} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{XY}{MN} = \frac{YZ}{NP}$$

$\angle Z \cong \angle P$ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ $\angle Z$ ಮತ್ತು $\angle P$ ಇವು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವ ಭುಜಗಳಿಂದ ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಮಾಡಿದ ಕೋನಗಳಲ್ಲ.

$\therefore \Delta$ XYZ ಮತ್ತು Δ MNP ಇವು ಸರೂಪ ಇವೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ

ಉದಾ: **(4)** ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ BP $\perp$ AC, CQ $\perp$ AB, A–P–C, A–Q–B, ಇದ್ದರೆ Δ APB ಮತ್ತು Δ AQC ಸಮರೂಪ ಇವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 1.53

ಉತ್ತರ : Δ APB ಮತ್ತು Δ AQCದಲ್ಲಿ

$\angle$ APB = $\boxed{}^\circ$ (I)

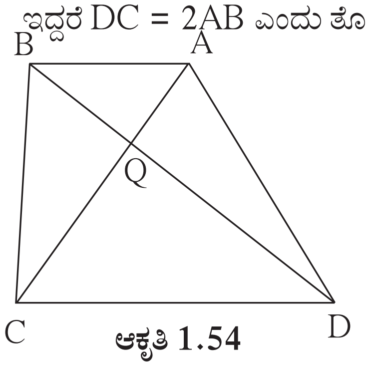
$\angle$ AQC = $\boxed{}^\circ$ (II)

$\therefore \angle$ APB $\cong \angle$ AQC ....(I) ಮತ್ತು (II) ಮೇಲಿಂದ

$\angle$ PAB $\cong \angle$ QAC .... (...............)

$\therefore$ Δ APB ~ Δ AQC ..... (ಕೋ ಕೋ ಪರೀಕ್ಷೆ)

ಉದಾ: **(5)** ಚೌಕೋನ ABCDಯ ಕರ್ಣ Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು 2QA = QC ಮತ್ತು 2QB = QD. ಇದ್ದರೆ DC = 2AB ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 1.54

ಪಕ್ಷ : 2QA = QC

2QB = QD

ಸಾಧ್ಯ : CD = 2AB

ಸಿದ್ಧತೆ : 2QA = QC $\therefore \dfrac{QA}{QC} = \dfrac{1}{2}$ .... (I)

2QB = QD $\therefore \dfrac{QB}{QD} = \dfrac{1}{2}$ .... (II)

$\therefore \dfrac{QA}{QC} = \dfrac{QB}{QD}$ .... (I) ಮತ್ತು (II) ಮೇಲಿಂದ

Δ AQB ಮತ್ತು Δ CQD ದಲ್ಲಿ

$\dfrac{QA}{QC} = \dfrac{QB}{QD}$ .... (ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿದೆವು)

$\angle$ AQB $\cong \angle$ DQC .... (ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳು)

$\therefore$ Δ AQB ~Δ CQD .... (ಸಮರೂಪತೆಯ ಭು–ಕೋ–ಭು ಪರಿಕ್ಷೆ)

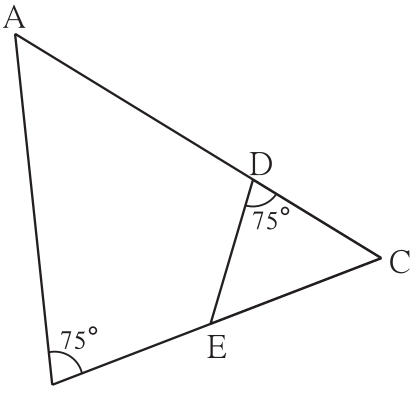
$\therefore \dfrac{AQ}{CQ} = \dfrac{QB}{QD} = \dfrac{AB}{CD}$ .... (ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ)

ಆದರೆ, $\dfrac{AQ}{CQ} = \dfrac{1}{2}$ $\therefore \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 2AB = CD

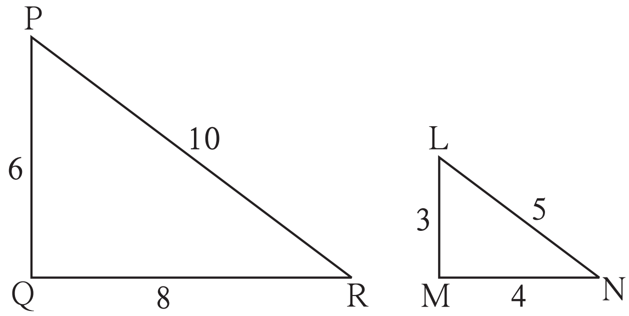
ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.3

1. ಆಕೃತಿ 1.55 ರಲ್ಲಿ $\angle ABC = 75^\circ$, $\angle EDC = 75^\circ$ ಇದ್ದರೆ ಯಾವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಯಾವ ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಅನುಸಾರ ಸಮರೂಪ ಇವೆ? ಆವುಗಳ ಸಮರೂಪತೆ ಯೋಗ್ಯವಾದ ಒಂದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.



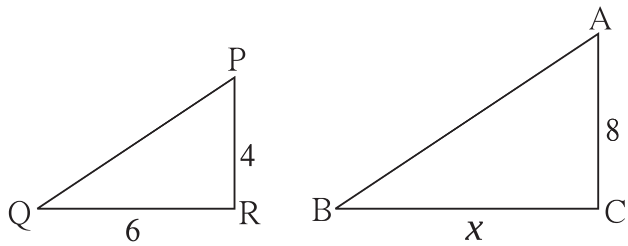
ಆಕೃತಿ 1.55

2. ಆಕೃತಿ 1.56 ರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮರೂಪ ಇವೇಯೆ? ಇದ್ದರೆ. ಯಾವ ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಅನುಸಾರ?



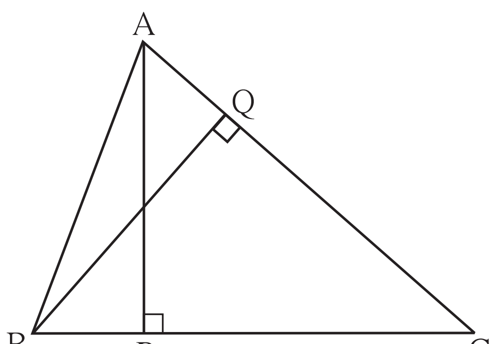
ಆಕೃತಿ 1.56

3. ಆಕೃತಿ 1.57 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಪ್ರಕಾರ 8 ಮೀಟರ ಮತ್ತು 4 ಮೀಟರ ಎತ್ತರದ ಎರಡು ಕಂಬಗಳು ಸಪಾಟಾದ ಭೂಮಿಯ ಮೇಲೆ ಲಂಬ ಇವೆ ಸೂರ್ಯ ಪ್ರಕಾಶದಿಂದ ಚಿಕ್ಕ ಕಂಬದ ನೆರಳು 6 ಮೀಟರ ಬೀಳುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅದೇ ವೇಳೆಗೆ ದೊಡ್ಡ ಕಂಬದ ನೆರಳು ಎಷ್ಟು ಉದ್ದಳತೆಯದು ಇರಬಹುದು?



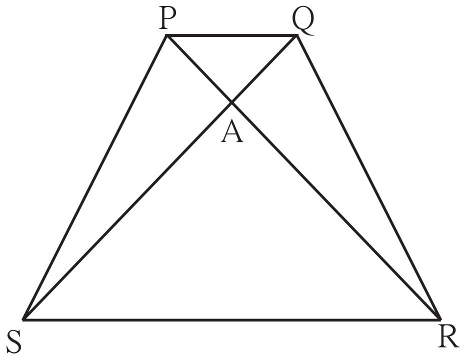
ಆಕೃತಿ 1.57

4. Δ ABC ಯಲ್ಲಿ AP $\perp$ BC, BQ $\perp$ AC
B–P–C, A–Q – C ಇದ್ದರೆ
Δ CPA $\sim \Delta$ CQB ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.
AP = 7, BQ = 8, BC = 12
ಇದ್ದರೆ, AC ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



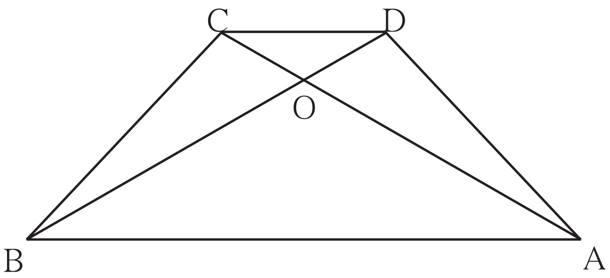
ಆಕೃತಿ 1.58

5. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ PQRS ದಲ್ಲಿ ಭುಜ PQ || ಭುಜ SR, AR = 5AP, AS = 5AQ ಇದ್ದರೆ SR = 5PQ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



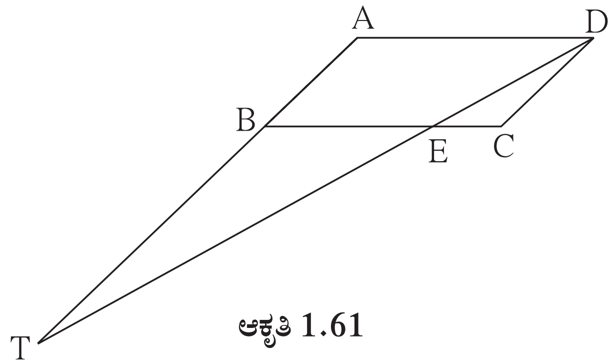
ಆಕೃತಿ 1.59

6. ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ ABCDಯಲ್ಲಿ (ಆಕೃತಿ 1.60) ಭುಜ AB || ಭುಜ DC ಕರ್ಣ AC ಮತ್ತು ಕರ್ಣ BDಗಳು ಪರಸ್ಪರ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. AB = 20, DC = 6, OB = 15 ಇದ್ದರೆ OD ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



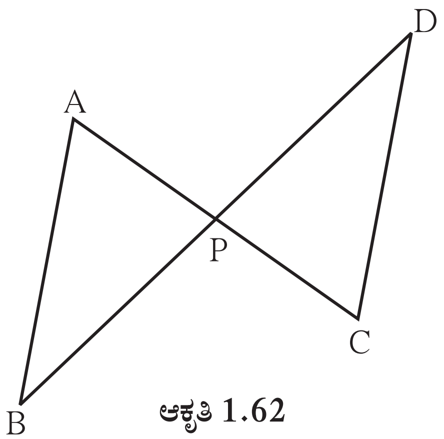
ಆಕೃತಿ 1.60

7. □ABCD ಇದು ಸಮಾಂತರಭುಜ ಚೌಕೋನ ಇದೆ. ಭುಜ BCಯ ಮೇಲೆ E ಇದು ಒಂದು ಬಿಂದು ಇದೆ. DE ಇದು ಕಿರಣ AB ಗೆ T ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ DE × BE = CE × TE ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



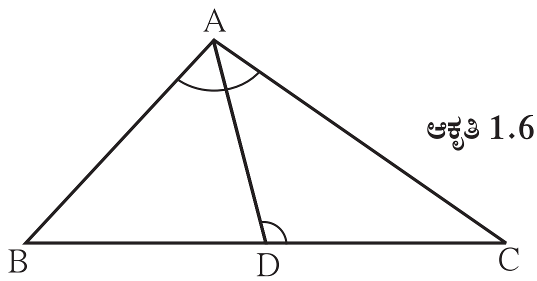
ಆಕೃತಿ 1.61

8. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖೆ AC ಮತ್ತು BD ಪರಸ್ಪರ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$ ಇದ್ದರೆ Δ ABP ~ Δ CDP ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 1.62

9. ಆಕೃತಿ Δ ABC ಯಲ್ಲಿ BC ಯ D ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು $\angle$ BAC = $\angle$ ADC ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ ಹಾಗಾದರೆ $CA^2 = CB \times CD$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

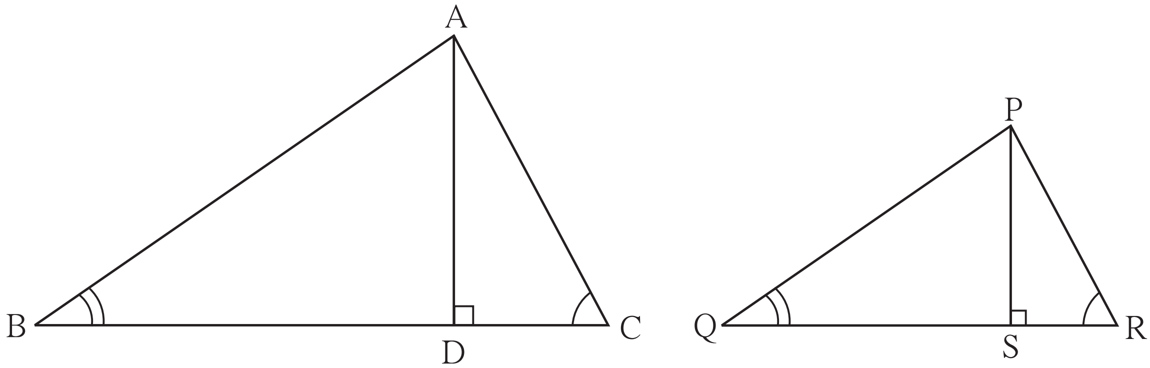


ಆಕೃತಿ 1.63

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಪ್ರಮೇಯ (Theorem of areas of similar triangles)

ಪ್ರಮೇಯ : ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಮರೂಪ ಇದ್ದರೆ ಆವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ 1.64

ಪಕ್ಷ : $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$, $AD \perp BC$, $PS \perp QR$

ಸಾಧ್ಯ : $\dfrac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \dfrac{AB^2}{PQ^2} = \dfrac{BC^2}{QR^2} = \dfrac{AC^2}{PR^2}$

ಸಿದ್ಧತೆ : $\dfrac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \dfrac{BC \times AD}{QR \times PS} = \dfrac{BC}{QR} \times \dfrac{AD}{PS}$ .... (I)

$\Delta\, ABD$ ಮತ್ತು $\Delta\, PQS$ ದಲ್ಲಿ

$\angle B = \angle Q$ .... (ಪಕ್ಷ)

$\angle ADB = \angle PSQ = 90^\circ$

$\therefore$ ಕೋ-ಕೋ ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಅನುಸಾರ $\Delta\, ABD \sim \Delta\, PQS$

$\therefore \dfrac{AD}{PS} = \dfrac{AB}{PQ}$ .... (II)

ಆದರೆ $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$

$\therefore \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$ .... (III)

(II) ಮತ್ತು (III)ರ ಮೇಲಿಂದ

$$\frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} \times \frac{BC}{QR} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2}$$

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ: (1) : Δ ABC ~ Δ PQR , A (Δ ABC) = 16 , A (Δ PQR) = 25 ಇದ್ದರೆ $\frac{AB}{PQ}$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ΔABC ~ Δ PQR

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ ....(ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ)

$\therefore \frac{16}{25} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ $\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{4}{5}$ .... (ವರ್ಗ ಮೂಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು)

ಉದಾ. (2) ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳ ಗುಣೋತ್ತರವು 2:5 ಇದೆ. ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 64 ಚ.ಸೆ.ಮೀ ಇದ್ದರೆ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : Δ ABC ~ Δ PQR ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ

Δ ABC ಇದು ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು Δ PQR ಇದು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{(2)^2}{(5)^2} = \frac{4}{25}$ .... (ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು)

$\therefore \frac{64}{A(\Delta PQR)} = \frac{4}{25}$

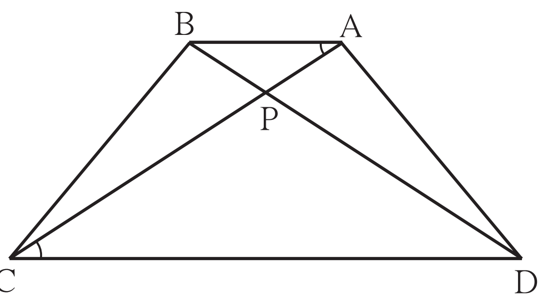
$4 \times A(\Delta PQR) = 64 \times 25$

$A(\Delta PQR) = \frac{64 \times 25}{4} = 400$

$\therefore$ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = 400 ಚೌ. ಸೆ. ಮೀ.

ಉದಾ. (3) ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ ABCDಯಲ್ಲಿ ಭುಜ AB || ಭುಜ CD, ಕರ್ಣ AC ಮತ್ತು ಕರ್ಣ BD ಇವು ಒಂದನ್ನೊಂದು P ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ ಹಾಗಾದರೆ

$\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 1.65

ಉತ್ತರ : ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ ABCDಯಲ್ಲಿ ಭುಜ AB || ಭುಜ CD

Δ APB ಮತ್ತು ΔCPDಗಳಲ್ಲಿ

$\angle PAB \cong \angle PCD$ ..... (ವ್ಯತ್ಕ್ರಮ ಕೋನ)

$\angle APB \cong \angle CPD$ ..... (ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನ)

$\therefore \Delta APB \sim \Delta CPD$ ..... (ಕೋ-ಕೋ ಪರೀಕ್ಷೆ)

$\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$ .... (ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲಗಳ ಪ್ರಮೇಯ)

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.4

1. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 3.5 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿರಿ.

2. Δ ABC ~ Δ PQR ಮತ್ತು AB : PQ = 2:3, ಇದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{\boxed{}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

3. Δ ABC~Δ PQR, A (Δ ABC) = 16, A (Δ PQR)=25, ಇದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta \ldots .)} = \frac{16}{25} \qquad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

4. Δ LMN~Δ PQR, 9×A (ΔPQR)=16×A (ΔLMN) ಒಂದು ವೇಳೆ QR=20 ಇದ್ದರೆ MN ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

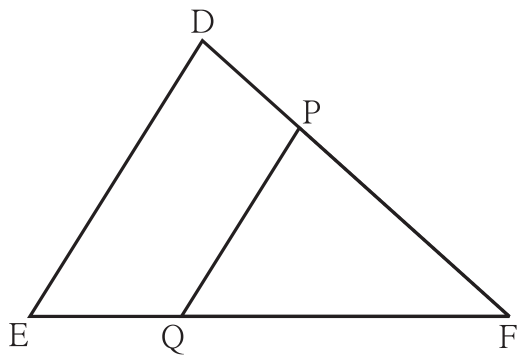
5. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲಗಳು 225 ಚೌಸೆಮೀ ಮತ್ತು 81 ಚೌಸೆಮೀ ಇವೆ ಒಂದು ವೇಳೆ ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜವು 12 ಸೆ.ಮೀ ಇದ್ದರೆ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಂಗತ ಭುಜ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. Δ ABC ಮತ್ತು Δ DEF ಇವು ಎರಡು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿವೆ A (ΔABC) : A (Δ DEF) = 4 : 7 ಇದ್ದು AB = 4 ಇದ್ದರೆ DE ದ ಉದ್ದಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಆಕೃತಿ 1.66 ರಲ್ಲಿ ರೇಖ PQ || ರೇಖ DE, A (Δ PQF) = 20 ಮೂಲಮಾನ PF = 2DP, ಇದ್ದರೆ A($\square$ DPQE) ತೆಗೆಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

A(Δ PQF) = 20 ಮೂಲಮಾನ, PF = 2 DP, DP = x ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ $\therefore$ PF = 2x

DF = DP + $\boxed{}$ = $\boxed{}$ + $\boxed{}$ = 3x



ಆಕೃತಿ 1.66

Δ FDE ಮತ್ತು Δ FPQ ದಲ್ಲಿ

$\angle$ FDE $\cong$ $\angle$ $\boxed{}$ (ಸಂಗತ ಕೋನ)

$\angle$ FED $\cong$ $\angle$ $\boxed{}$ (ಸಂಗತ ಕೋನ)

$\therefore$ Δ FDE ~ Δ FPQ .... (ಕೋ-ಕೋ ಪರೀಕ್ಷೆ)

$$\therefore \frac{A(\Delta FDE)}{A(\Delta FPQ)} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \frac{9}{4}$$

$$A(\Delta FDE) = \frac{9}{4} A(\Delta FPQ) = \frac{9}{4} \times \boxed{} = \boxed{}$$

$$A(\square DPQE) = A(\Delta FDE) - A(\Delta FPQ)$$
$$= \boxed{} - \boxed{}$$
$$= \boxed{}$$

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ 1

1. ಕೆಳಗಿನ ಉಪ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಪರ್ಯಾಯ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಸರಿಯಾದ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ.

(1) Δ ABC ಮತ್ತು Δ PQRಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$$ ಇದ್ದರೆ

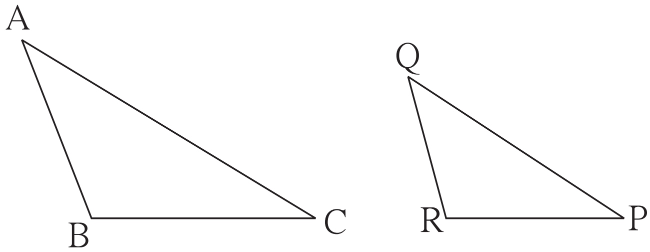
ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಸತ್ಯ ವಿಧಾನ ಯಾವದು?

(A) $\Delta PQR \sim \Delta ABC$

(B) $\Delta PQR \sim \Delta CAB$

(C) $\Delta CBA \sim \Delta PQR$

(D) $\Delta BCA \sim \Delta PQR$

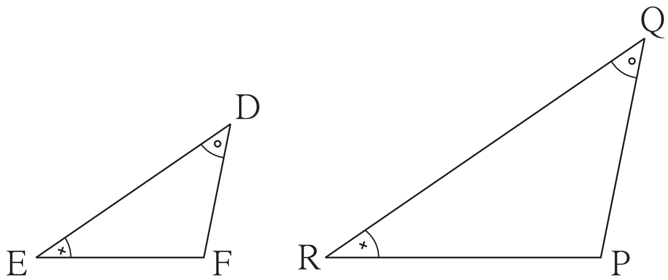


ಆಕೃತಿ 1.67

(2) ಒಂದುವೇಳೆ Δ DEF ಮತ್ತು Δ PQR ದಲ್ಲಿ $\angle D \cong \angle Q$, $\angle R \cong \angle E$, ಇದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಅಸತ್ಯ ವಿಧಾನ ಯಾವದು?

(A) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (B) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$

(C) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (D) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$



ಆಕೃತಿ 1.68

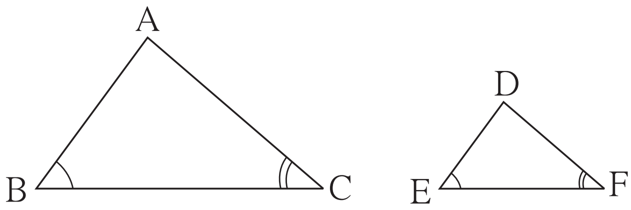
(3) Δ ABC ಮತ್ತು Δ DEFದಲ್ಲಿ $\angle B = \angle E$, $\angle F = \angle C$ ಮತ್ತು AB = 3 DE, ಇದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಸತ್ಯ ವಿಧಾನ ಯಾವುದು?

(A)ಅವು ಏಕರೂಪ ಇಲ್ಲ ಮತ್ತು ಸಮರೂಪವೂ ಇಲ್ಲ.

(B) ಅವು ಸಮರೂಪ ಇವೆ. ಆದರೆ ಏಕರೂಪ ಇಲ್ಲ.

(C) ಅವು ಏಕರೂಪ ಇವೆ ಮತ್ತು ಸಮರೂಪ ಕೂಡ ಇದೆ.

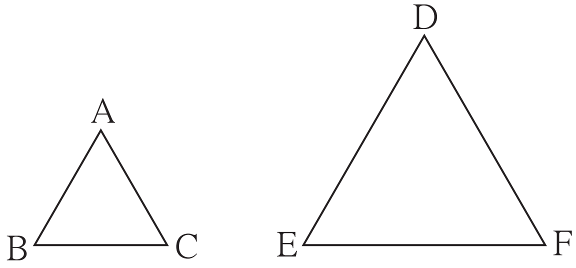
(D) ಮೇಲಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೂ ವಿಧಾನ ಸತ್ಯ ಇಲ್ಲ.



ಆಕೃತಿ 1.69

(4) Δ ABC ಮತ್ತು Δ DEF ಇವು ಎರಡೂ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿವೆ. A (Δ ABC):A (Δ DEF) = 1:2 ಇದ್ದು AB = 4 ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ DE ದ ಉದ್ದಳತೆ ಎಷ್ಟು?

(A) $2\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 8 (D) $4\sqrt{2}$

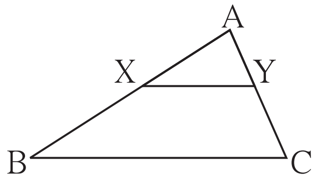


ಆಕೃತಿ 1.70

(5) ಆಕೃತಿ 1.71 ರಲ್ಲಿ XY $\parallel$ ರೇಖ BC ಇದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಿಧಾನ ಸತ್ಯವಿದೆ.

(i) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AX}{AY}$ (ii) $\dfrac{AX}{XB} = \dfrac{AY}{AC}$

(iii) $\dfrac{AX}{YC} = \dfrac{AY}{XB}$ (iv) $\dfrac{AB}{YC} = \dfrac{AC}{XB}$



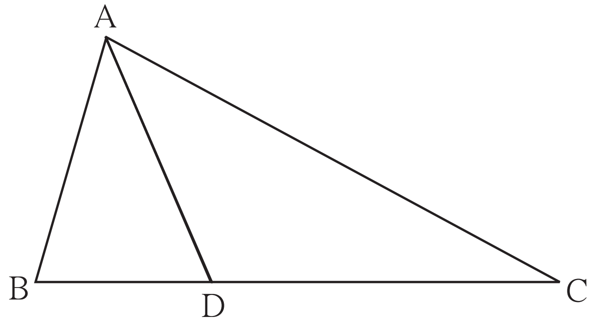
ಆಕೃತಿ 1.71

2. Δ ABCಯಲ್ಲಿ B – D – C ಮತ್ತು BD = 7, BC=20ಇದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)}$

(2) $\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$

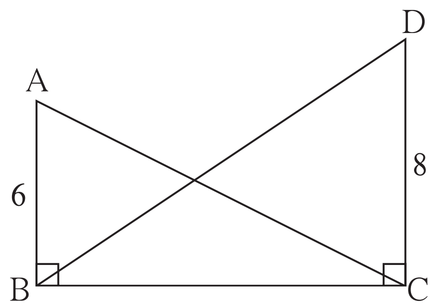
(3) $\dfrac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ABC)}$



ಆಕೃತಿ 1.72

3. ಸಮಾನ ಎತ್ತರಗಳಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 2:3 ಇದೆ. ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ತಳ 6 ಸೆ.ಮೀ. ಇದ್ದರೆ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಂಗತ ತಳ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

4.



ಆಕೃತಿ 1.73

ಆಕೃತಿ 1.73 ಯಲ್ಲಿ $\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$

AB = 6, DC = 8

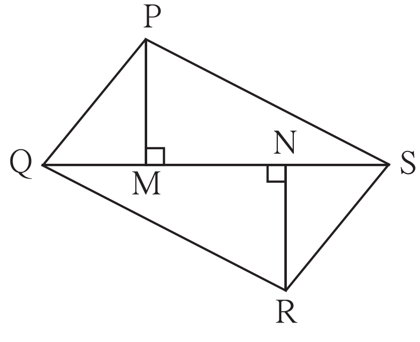
ಇದ್ದರೆ $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)}$ = ಎಷ್ಟು?

5. ಆಕೃತಿ 1.74 ಯಲ್ಲಿ PM = 10 ಸೆಮೀ

A(Δ PQS) = 100 ಚೌಸೆಮೀ

A(ΔQRS) = 110 ಚೌಸೆಮೀ

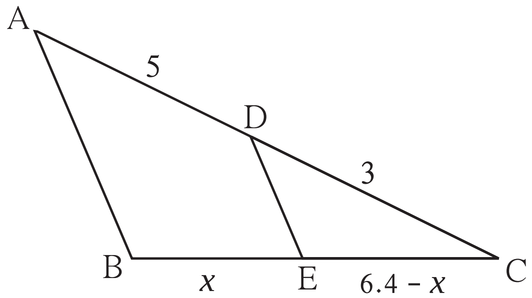
ಹಾಗಾದರೆ NR ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



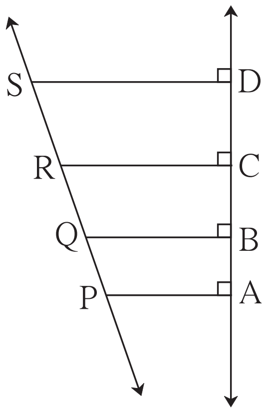
ಆಕೃತಿ 1.74

6. Δ MNT ~ Δ QRS ಬಿಂದು T ದಿಂದ ತೆಗೆದ ಶಿರೋಲಂಬ ಉದ್ದ 5 ಇದ್ದು S ದಿಂದ ತೆಗೆದು ಶಿರೋಲಂಬದ ಉದ್ದ 9 ಇದ್ದರೆ $\dfrac{A(\Delta MNT)}{A(\Delta QRS)}$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಆಕೃತಿ 1.75 ರಲ್ಲಿ A – D – C ಮತ್ತು B – E – C . ರೇಖ DE || ಭುಜ AB. ಇದ್ದರೆ AD = 5, DC = 3, BC = 6.4 ಇದ್ದರೆ BE ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ



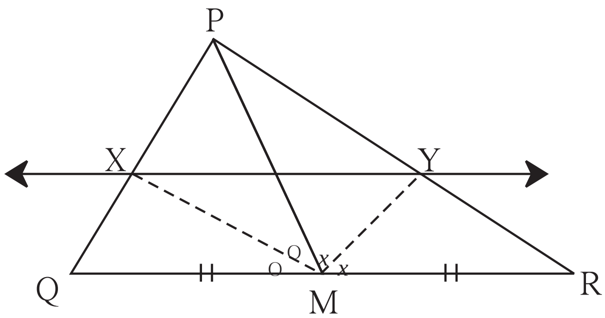
ಆಕೃತಿ 1.75



ಆಕೃತಿ 1.76

8. ಆಕೃತಿ 1.76 ರಲ್ಲಿ ರೇಖ PA, ರೇಖ QB, ರೇಖ RC ಮತ್ತು ರೇಖ SD ಇವು ರೇಖ ADಗೆ ಲಂಬವಿದೆ AB = 60, BC = 70, CD = 80, PS = 280, ಇದ್ದರೆ PQ, QR, RS ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. Δ PQRಯಲ್ಲಿ ರೇಖ PM ಇದು ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇದೆ. $\angle$PMQ ಮತ್ತು $\angle$PMR ಈ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಭುಜ PQ ಮತ್ತು ಭುಜ PR ಇವುಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ X ಮತ್ತು Y ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ XY || QR ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 1.77

ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿಯ ಬಿಟ್ಟ ರಿಕ್ತ ಸ್ಥಳ ತುಂಬಿ ಸಿದ್ಧತೆ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

Δ PMQದಲ್ಲಿ ಕಿರಣ MX ಇದು $\angle$PMQಯು ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇದೆ.

$\therefore \quad \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... (I) (ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಪ್ರಮೇಯೆ)

Δ PMR ದಲ್ಲಿ ಕಿರಣ MY ಇದು $\angle$PMRಯು ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇದೆ.

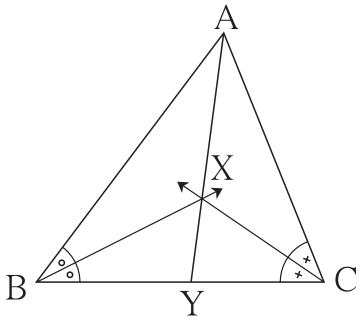
$\therefore \quad \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... (II) (ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಪ್ರಮೇಯೆ)

ಆದರೆ $\dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MP}{MR}$ .... (M ಇದು QR ದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಎಂದರೆ MQ = MR)

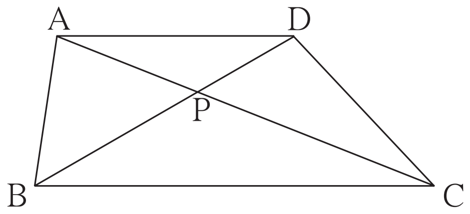
$\therefore \quad \dfrac{PX}{XQ} = \dfrac{PY}{YR}$

$\therefore$ XY || QR .... ಪ್ರಮಾಣದ ಮೂಲ ಭೂತ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

10. ಆಕೃತಿ 1.78 ಯಲ್ಲಿ Δ ABCಯ $\angle$ B ಮತ್ತು $\angle$Cಗಳು ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ Xದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ರೇಷೆ AX ಇದು ಭುಜ BC ಗೆ Yದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು, AB = 5, AC = 4, BC = 6 ಇದ್ದರೆ $\frac{AX}{XY}$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



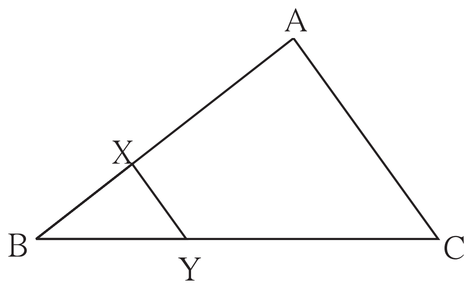
ಆಕೃತಿ 1.78



ಆಕೃತಿ 1.79

11. $\square$ ABCD ರಲ್ಲಿ ರೇಖ AD $\parallel$ ರೇಖ BC. ಕರ್ಣ AC ಮತ್ತು ಕರ್ಣ BD ಪರಸ್ಪರ ಬಿಂದು P ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ, ಹಾಗಾದರೆ $\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{BP}$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ

12. ಆಕೃತಿ 1.80ರಲ್ಲಿ XY $\parallel$ ಭುಜ AC.
2AX = 3BX ಮತ್ತು XY = 9 ಇದ್ದರೆ
AC ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿಯನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 1.80

ಕೃತಿ : 2AX = 3BX $\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

$\frac{AX + BX}{BX} = \frac{\boxed{} + \boxed{}}{\boxed{}}$ .... (ಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಿ)

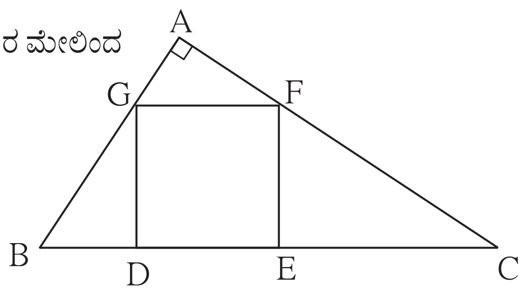
$\frac{AB}{BX} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... (I)

Δ BCA ~ Δ BYX .... (ಸಮರೂಪತೆಯ $\boxed{}$ ಪರೀಕ್ಷೆ)

$\therefore \frac{BA}{BX} = \frac{AC}{XY}$ .... (ಸಮರೂಪತೆಯ ಸಂಗತಭುಜ)

$\therefore \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{AC}{9}$ $\therefore$ AC = $\boxed{}$ ....(I) ರ ಮೇಲಿಂದ

13★. Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle$ A = 90°. $\square$ DEFG ಈ ಚೌರಸದ D ಮತ್ತು E ಈ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳು ಭುಜ BCಯ ಮೇಲೆ ಇದು. ಬಿಂದು F ಇದು ಭುಜ ACಯ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಬಿಂದು G ಇದು ಭುಜ ABಯ ಮೇಲೆ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ $DE^2 = BD \times EC$ (Δ GBD ಮತ್ತು Δ CFE ಇವು ಸಮರೂಪ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. GD = FE = DE ಇದರ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿರಿ).



ಆಕೃತಿ 1.81

2 ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯ

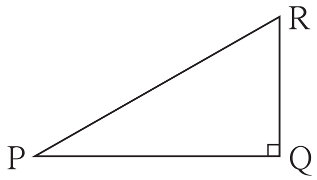
ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ

- ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ತ್ರಿಕೂಟ
- ಭೂಮಿತಿ ಮಧ್ಯದ ಪ್ರಮೇಯ
- ಪಾಯಥಾಗೋರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ ಉಪಯೋಜನೆ
- ಸಮರೂಪತೆ ಮತ್ತು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ
- ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯ
- ಅಪೋಲೊನಿಯಸನ ಪ್ರಮೇಯ

ಸ್ವಲ್ಪನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ

ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯ

ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣದ ವರ್ಗವು ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ 2.1

Δ PQR ದಲ್ಲಿ $\angle$ PQR = 90°

$l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$

ಇದನ್ನು ನಾವು $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯೋಣ

Δ PQR ದ PQ, QR ಮತ್ತು PR ಈ ಭುಜದ ಉದ್ದಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ r, p ಮತ್ತು q ಈ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ತೋರಿಸುವ ಸಂಕೇತ ಇದೆ ಅದರ ಅನುಸಾರ ಆಕೃತಿ 2.1 ರ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯ $q^2 = p^2 + r^2$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು.

ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ತ್ರಿಕೂಟ

ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯಗಳ ತ್ರಿಕೋಟದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ ಇದು ಉಳಿದ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಪಾಯಥಾಗೋರಸ್‌ನ ತ್ರಿಕೂಟ ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾಹರಣೆ: (11, 60, 61) ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ತ್ರಿಕೂಟದಲ್ಲಿ

$11^2 = 121$, $60^2 = 3600$, $61^2 = 3721$ ಮತ್ತು $121 + 3600 = 3721$

ಇಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ ಉಳಿದ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇದೆ.

$\therefore$ 11, 60, 61 ಇವು ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ತ್ರಿಕೂಟ ಇದೆ.

ಅದರಂತೆ (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (24, 25, 7) ಇವು ಸಹ ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ತ್ರಿಕೊಟ ಇರುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ಪರಿಕ್ಷಿಸಿರಿ.

ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ತ್ರಿಕೂಟದಲ್ಲಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಯಾವುದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಯ ಸಲುವಾಗಿ:

ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ದೊರೆಕಿಸುವ ಸೂತ್ರ:

a, b, c ಇವು ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $a > b$, ಇದ್ದರೆ $[(a^2 + b^2),(a^2 - b^2),(2ab)]$ ಇದು ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ತ್ರಿಕೂಟ ಇರುತ್ತದೆ.

$$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \quad .... \text{(I)}$$

$$(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \quad .... \text{(II)}$$

$$(2ab)^2 = 4a^2b^2 \quad .... \text{(III)}$$

$\therefore$ (I), (II) ಹಾಗೂ (III)ರ ಮೇಲಿಂದ $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$

$\therefore [(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), (2ab)]$ ಇದು ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ತ್ರಿಕೂಟ ಇದೆ.

ಈ ತ್ರಿಕೂಟ, ಪಾಥಾಗೋರಸನ ವಿವಿಧ ತ್ರಿಕೂಟ ದೊರೆಕಿಸಲು ಸೂತ್ರ ಎಂದು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವದು

ಉದಾಹರಣಾರ್ಥ $a = 5$ ಮತ್ತು $b = 3$ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡಾಗಿ

$a^2 + b^2 = 34$, $a^2 - b^2 = 16$ ಮತ್ತು $2ab = 30$.

(34, 16, 30) ಇದು ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ತ್ರಿಕೂಟ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

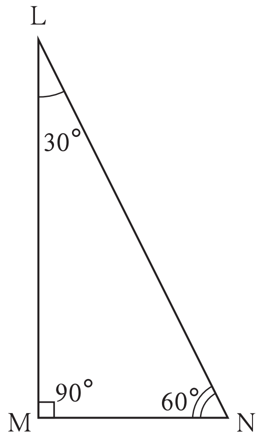
a ಮತ್ತು bದ ಸಲುವಾಗಿ ವಿವಿಧ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯ ದಿಂದ ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ 5 ತ್ರಿಕೂಟಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ.

ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ನಾವು $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ ಮತ್ತು $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ ಈ ಕೋನಗಳಿರುವ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

(I) ಕೋನದ ಅಳತೆಗಳು $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಗುಣಧರ್ಮ

ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಘುಕೋನ 30° ಹಾಗೂ 60° ಇದ್ದರೆ 30° ಅಳತೆಯ ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜ ಕರ್ಣದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ 60° ಅಳತೆಯ ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜ ಕರ್ಣದ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ಪಟ್ಟಿನಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಆಕೃತಿ 2.2 ನೋಡಿರಿ Δ LMNದಲ್ಲಿ $\angle L = 30^\circ$, $\angle N = 60^\circ$, $\angle M = 90^\circ$



ಆಕೃತಿ **2.2**

$\therefore$ 30° ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜ $= MN = \frac{1}{2} \times LN$

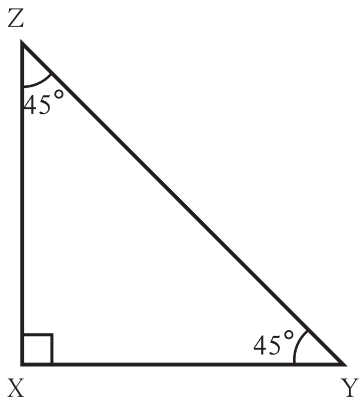
60° ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜ $= LM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times LN$

LN = 6 ಸೆಮೀ MN ಮತ್ತು LM ತೆಗೆಯಿರಿ.

$MN = \frac{1}{2} \times LN$	$LM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times LN$
$= \frac{1}{2} \times 6$	$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$
$= 3$ ಸೆಮೀ	$= 3\sqrt{3}$ ಸೆಮೀ

(II) ಕೋನದ ಅಳತೆಗಳು $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಗುಣಧರ್ಮ

ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಘುಕೋನಗಳು 45° ಹಾಗೂ 45° ಅಳತೆಯವು ಇದ್ದರೆ ಕಾಟಕೋನ ಮಾಡುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವು ಕರ್ಣದ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ಪಟ್ಟಿನಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ **2.3**

ಆಕೃತಿ 2.3 ನೋಡಿರಿ. Δ XYZ ದಲ್ಲಿ

$$XY = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

$$XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

$ZY = 3\sqrt{2}$ ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ XY ಮತ್ತು XZ ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$XY = XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$$

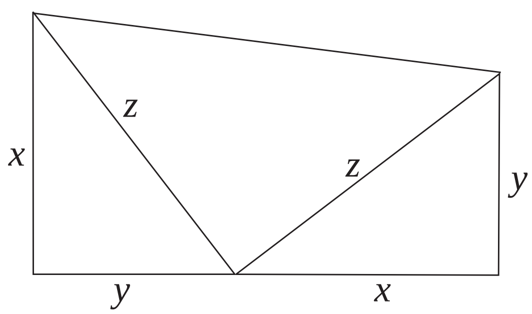
$\therefore$ XY = XZ = 3 ಸೇಮೀ

ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಇಯತ್ತೆ 7 ರಲ್ಲಿ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೀದ್ದಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ ನಾವು ನಾಲ್ಕು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಹಾಗೂ ಒಂದು ಚೌರಸ ಇವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡೀದ್ದಿರಿ. ಅದೇ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ನಮಗೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರಕಾರದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲು ಬರುವುದು.

ಕೃತಿ :

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಎರಡು ಏಕರೂಪ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅವುಗಳ ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದಳತೆಯದ್ದು ಎರಡು ಭುಜವಿರುವ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಈ ಮೂರು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = $\frac{1}{2}$ $\times$ (ಸಮಾಂತರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು) $\times$ ಎತ್ತರ. ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗದಿಂದ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಮೂರು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಬರೆದು ಪಾಯಥೊಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.



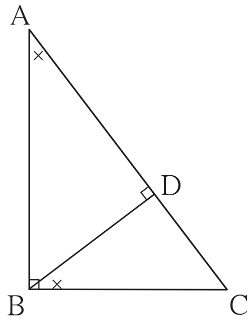
ಆಕೃತಿ **2.4**

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಈಗ ನಾವು ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಾಡೋಣ. ಈ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಆವಶ್ಯಕವಿರುವ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಮರೂಪದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು ಅಭ್ಯಸಿಸೋಣ.

ಸಮರೂಪತೆ ಮತ್ತು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ (Similarity and right angled triangle)

ಪ್ರಮೇಯ : **ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಎಳೆಯಲಾದ ಶಿರೋಲಂಬದಿಂದ ತಯಾರಾದ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮೂಲ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಹಾಗೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಮರೂಪ ವಾಗಿರುತ್ತದೆ.**



ಆಕೃತಿ **2.5**

ಪಕ್ಷ : Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle$ ABC = 90°,

ರೇಖ BD $\perp$ ರೇಖ AC, A-D-C

ಸಾಧ್ಯ : Δ ADB $\sim$ Δ ABC

Δ BDC $\sim$ Δ ABC

Δ ADB $\sim$ Δ BDC

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ ADB ಮತ್ತು Δ ABC ಯಲ್ಲಿ

$\angle$ DAB $\cong$ $\angle$ BAC ...(ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

$\angle$ ADB $\cong$ $\angle$ ABC ...(90° ಕೋನ)

Δ ADB $\sim\Delta$ABC...(ಕೋ. ಕೋ. ಪರೀಕ್ಷೆ)...(I)

ಆದರಂತೆ Δ BDC ಮತ್ತು Δ ABC ಯಲ್ಲಿ

$\angle$ BCD $\cong$ $\angle$ ACB ...(ಸಾಮಾನ್ಯಕೋನ)

$\angle$ BDC $\cong$ $\angle$ ABC ...(90° ಕೋನ)

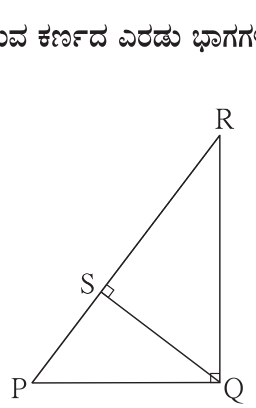
Δ BDC$\sim\Delta$ ABC ...(ಕೋ. ಕೋ. ಪರೀಕ್ಷೆ)..(II)

$\therefore$ Δ ADB $\sim$ Δ BDC ವಿಧಾನ (I) ಮತ್ತು (II)ರ ಮೇಲಿಂದ ...(III)

$\therefore$ Δ ADB $\sim$ Δ BDC $\sim$ Δ ABC ವಿಧಾನ (I), (II) ಹಾಗೂ (III)ರ ಮೇಲಿಂದ ...... ಸಂಕ್ರಮಕತೆ

ಭೂಮಿತಿ ಮಧ್ಯದ ಪ್ರಮೇಯ (Theorem of geometric mean)

ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ, ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಶಿರೋಲಂಬ, ಆ ಶಿರೋಲಂಬದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಕರ್ಣದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳ ಭೂಮಿತಿ ಮಧ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ **2.6**

ಸಿದ್ಧತೆ : ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ PQRದಲ್ಲಿ ರೇಖ QS $\perp$ ಕರ್ಣ PR

Δ QSR $\sim$ Δ PSQ .... (ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಮರೂಪತೆ)

$$\therefore \quad \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{SQ}$$

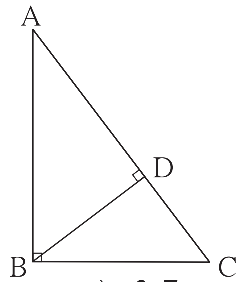
$$\therefore \quad \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{QS}$$

$$QS^2 = PS \times SR$$

$\therefore$ ಶಿರೋಲಂಬ QS ಇದು ರೇಖ PS ಮತ್ತು SR ಇವುಗಳ 'ಭೂಮಿತಿ ಮಧ್ಯ' ಇರುತ್ತದೆ.

ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ (Theorem of Pythagoras)

ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣದ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ **2.7**

ಪಕ್ಷ : Δ ABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle ABC = 90^\circ$

ಸಾಧ್ಯ : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ರಚನ : B ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಭುಜ AC ಮೇಲೆ ರೇಖ BD ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ A–D–C

ಸಿದ್ಧತೆ : ಕಾಟಕೋನ Δ ABC ಯಲ್ಲಿ ರೇಖ BD $\perp$ ಕರ್ಣ AC ..... (ರಚನೆ)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC$ ..... (ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಮರೂಪತೆ)

$\Delta ABC \sim \Delta ADB$

$\therefore \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DB} = \dfrac{AC}{AB}$ – ಸಂಗತಭುಜಗಳು

$\therefore \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AB}$

$AB^2 = AD \times AC$ .... (I)

$\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$\therefore \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{AC}{BC}$ – ಸಂಗತಭುಜಗಳು

$\therefore \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{AC}{BC}$

$BC^2 = DC \times AC$ .... (II)

(I) ಹಾಗೂ (II) ರ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಲಾಗಿ

$$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$$

$$= AC\,(AD + DC)$$

$$= AC \times AC \text{ .... (A–D–C)}$$

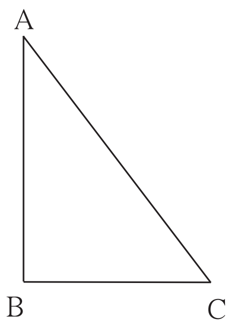
$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

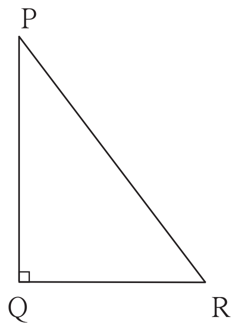
ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ (Converse of Pythagoras' theorem)

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವರ್ಗವು ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಕೋನವು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $AC^2 = AB^2 + BC^2$



ಆಕೃತಿ 2.8



ಆಕೃತಿ 2.9

ಸಾಧ್ಯ : $\angle ABC = 90^\circ$

ರಚನ : ΔPQR $AB=PQ$, $BC = QR$, $\angle PQR = 90^\circ$ ಆಗುವಂತೆ ರಚಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ : ΔPQR ಮತ್ತು $\angle Q = 90^\circ$

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ .... (ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯ

$= AB^2 + BC^2$ .... (ರಚನ)

$= AC^2$ .... (ಪಕ್ಷ)

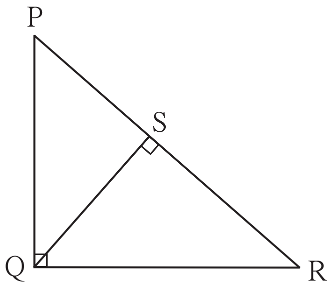
$\therefore PR^2 = AC^2$,

$\therefore PR = AC$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ .... (ಭು-ಭು-ಭು ಪರೀಕ್ಷೆ)

$\therefore \angle ABC = \angle PQR = 90^\circ$

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ



ಆಕೃತಿ **2.10**

(1) (a) ಸಮರೂಪತೆ ಮತ್ತು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ

ΔPQR ದಲ್ಲಿ $\angle Q = 90^\circ$, ರೇಖ $QS \perp$ ರೇಖ PR ಇಲ್ಲಿ $\Delta PQR \sim \Delta PSQ \sim \Delta QSR$ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತಯಾರಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

(b) ಭೂಮಿತಿಯ ಮಧ್ಯ ಪ್ರಮೇಯ

ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ $\Delta PSQ \sim \Delta QSR$

$\therefore QS^2 = PS \times SR$

$\therefore$ ರೇಖ QS ಇದು ರೇಖ PS ಹಾಗೂ ರೇಖ SR ಈ ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳ ಭೂಮಿತಿ ಮಧ್ಯ ಇದೆ.

(2) ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯ

ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣದ ವರ್ಗವು ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

(3) ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ:

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭುಜದ ವರ್ಗವು ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಕೋನವು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

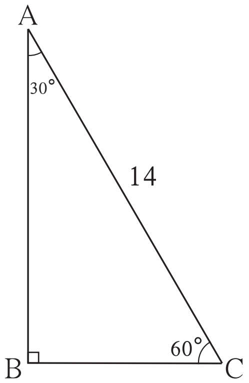
ಇದರ ಹೊರತಾಗಿ ಇನ್ನು ಒಂದು ಗುಣಧರ್ಮ ಬಹಳ ಉಪಯುಕ್ತ ಇದೆ. ಅದನ್ನು ಸಹ ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡೋಣ.

(4) ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭುಜ ಕರ್ಣದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ ಆ ಭುಜದ ಎದುರಿನ ಕೋನ 30° ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಗುಣಧರ್ಮ $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇದೆ.

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ: (1) ಆಕೃತಿ 2.11 ನೋಡಿರಿ Δ ABCಯಲ್ಲಿ $\angle B = 90°$, $\angle A = 30°$, AC=14 ಇದ್ದರೆ AB ಹಾಗೂ BC ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ :



ಆಕೃತಿ 2.11

Δ ABC ಯಲ್ಲಿ,

$\angle B = 90°$, $\angle A = 30°$, $\therefore \angle C = 60°$

30° – 60° – 90° ದ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆನುಸಾರವಾಗಿ

$BC = \frac{1}{2} \times AC$

$BC = \frac{1}{2} \times 14$

$BC = 7$

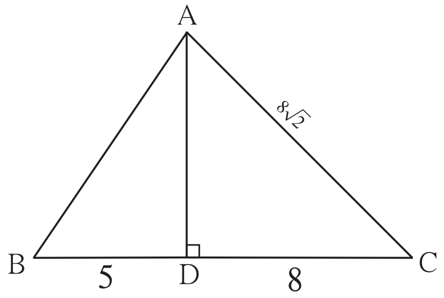
$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC$

$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14$

$AB = 7\sqrt{3}$

ಉದಾ: (2) ಆಕೃತಿ 2.12 ನೋಡಿರಿ Δ ABC ಯಲ್ಲಿ ರೇಖ AD $\perp$ ರೇಖ BC, $\angle C = 45°$, BD = 5 ಮತ್ತು $AC = 8\sqrt{2}$, ಇದ್ದರೆ AD ಮತ್ತು BC ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ :



ಆಕೃತಿ 2.12

Δ ADC ಯಲ್ಲಿ,

$\angle ADC = 90°$, $\angle C = 45°$, $\therefore \angle DAC = 45°$

$AD = DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2}$ ...(45°–45°–90° ಈ ಪ್ರಮೇಯನುಸಾರ

$\therefore DC = 8 \quad \therefore AD = 8$

$BC = BD + DC$

$= 5 + 8$

$= 13$

ಉದಾ: (3) ಆಕೃತಿ 2.13ಯಲ್ಲಿ $\angle PQR = 90°$, ರೇಖ QN $\perp$ ರೇಖ PR, PN = 9, NR = 16 ಇದ್ದರೆ QN ತೆಗೆಯಿರಿ

ಉತ್ತರ : Δ PQRದಲ್ಲಿ QN $\perp$ ರೇಖ PR

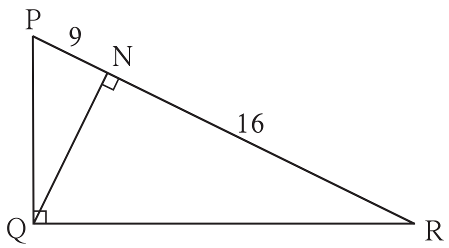
$\therefore QN^2 = PN \times NR$... (ಭೂಮಿತಿ ಮಧ್ಯದ ಪ್ರಮೇಯ)

$\therefore QN = \sqrt{PN \times NR}$

$= \sqrt{9 \times 16}$

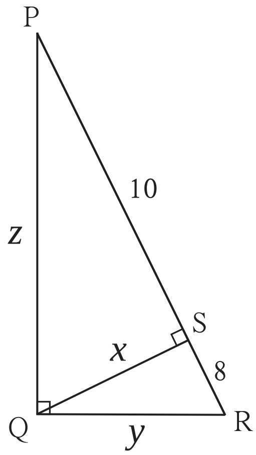
$= 3 \times 4$

$= 12$



ಆಕೃತಿ 2.13

ಉದಾ. (4) ಆಕೃತಿ 2.14 ನೋಡಿರಿ Δ PQRಯಲ್ಲಿ $\angle PQR = 90^\circ$, ರೇಖ QS $\perp$ ರೇಖ PR ಇದ್ದರೆ x, y, z ಗಳ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 2.14

ಉತ್ತರ : Δ PQRದಲ್ಲಿ, $\angle PQR = 90^\circ$, ರೇಖ QS $\perp$ ರೇಖ PR

$$QS = \sqrt{PS \times SR} \quad \text{..........} \text{ (ಭೂಮಿತಿ ಮಧ್ಯದ ಪ್ರಮೇಯ)}$$
$$= \sqrt{10 \times 8}$$
$$= \sqrt{5 \times 2 \times 8}$$
$$= \sqrt{5 \times 16}$$
$$= 4\sqrt{5}$$
$$\therefore \ x = 4\sqrt{5}$$

Δ QSR ದಲ್ಲಿ, $\angle QSR = 90^\circ$

$$\therefore \ QR^2 = QS^2 + SR^2$$
$$= \left(4\sqrt{5}\right)^2 + 8^2$$
$$= 16 \times 5 + 64$$
$$= 80 + 64$$
$$= 144$$
$$\therefore \ QR = 12$$

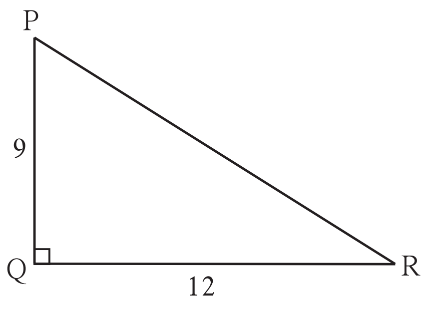
Δ PSQ ದಲ್ಲಿ, $\angle QSP = 90^\circ$

$$\therefore \ PQ^2 = QS^2 + PS^2$$
$$= \left(4\sqrt{5}\right)^2 + 10^2$$
$$= 16 \times 5 + 100$$
$$= 80 + 100$$
$$= 180$$
$$= 36 \times 5$$
$$\therefore \ PQ = 6\sqrt{5}$$

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ $x = 4\sqrt{5}$, $y = 12$, $z = 6\sqrt{5}$

ಉದಾ. (5) ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕಾಟಕೋನ ಮಾಡುವ ಭುಜಗಳು 9 ಸೆ.ಮೀ. ಹಾಗೂ 12 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : Δ PQRದಲ್ಲಿ, $\angle Q = 90^\circ$



ಆಕೃತಿ 2.15

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 \text{ (ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯನುಸಾರ)}$$
$$= 9^2 + 12^2$$
$$= 81 + 144$$
$$\therefore \ PR^2 = 225$$
$$\therefore \ PR = 15$$

ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ = 15 ಸೆಮೀ

ಉದಾ. (6) Δ LMN ಯಲ್ಲಿ, $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$ ಇದ್ದರೆ Δ LMN ಇದು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಇದೆ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೂ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ. (l, m, n, ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle$ L, $\angle$ M ಮತ್ತು $\angle$ N ಇವುಗಳ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳಿವೆ)

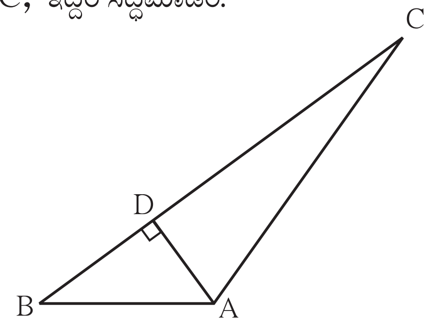
ಉತ್ತರ : $l = 5, \quad m = 13, \quad n = 12$

$l^2 = 25, \quad m^2 = 169, \quad n^2 = 144$

$\therefore\ m^2 = l^2 + n^2$

$\therefore$ ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅನುಸಾರ Δ LMN ಇದು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಇದೆ.

ಉದಾ. (7) ಆಕೃತಿ 2.16 ನೋಡಿರಿ. Δ ABC ಯಲ್ಲಿ,ರೇಖ AD $\perp$ ರೇಖ BC, ಇದ್ದರೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ:
$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$



ಆಕೃತಿ 2.16

ಉತ್ತರ : ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯನುಸಾರ Δ ADCಯಲ್ಲಿ,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$\therefore\ AD^2 = AC^2 - CD^2$ ... (I)

Δ ADB ಯಲ್ಲಿ,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$\therefore\ AD^2 = AB^2 - BD^2$ ... (II)

$\therefore\ AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ .... [(I) ಮತ್ತು (II) ಮೇಲಿಂದ]

$\therefore\ AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

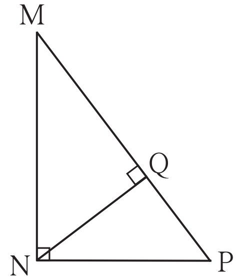
ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.1

1. ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೂಟಗಳಲ್ಲಿ, ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ತ್ರಿಕೂಟಗಳು ಯಾವವು ಇವೆ. ಕಾರಣ ಸಹಿತ ಬರೆಯಿರಿ.

(1) (3, 5, 4) (2) (4, 9, 12) (3) (5, 12, 13)

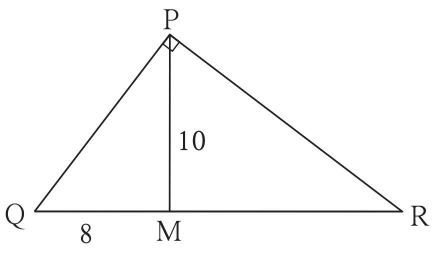
(4) (24, 70, 74) (5) (10, 24, 27) (6) (11, 60, 61)

2. ಆಕೃತಿ 2.17ರಲ್ಲಿ $\angle$ MNP = 90°,
ರೇಖ NQ $\perp$ ರೇಖ MP, MQ = 9,
QP = 4 ಇದ್ದರೆ NQ ತೆಗೆಯಿರಿ.



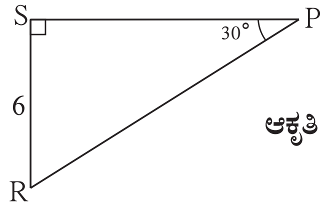
ಆಕೃತಿ 2.17

3. ಆಕೃತಿ 2.18 ರಲ್ಲಿ $\angle$ QPR = 90°,
ರೇಖ PM $\perp$ ರೇಖ QR ಮತ್ತು Q-M-R,
PM = 10, QM =8 ಇದರ ಮೇಲಿಂದ QR ತೆಗೆಯಿರಿ.

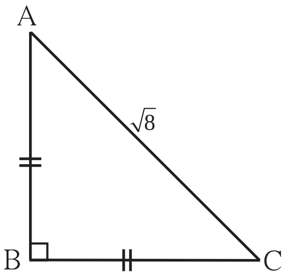


ಆಕೃತಿ 2.18

4. ಆಕೃತಿ 2.19ರಲ್ಲಿ Δ PSRದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ RP ಮತ್ತು PS ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 2.19



ಆಕೃತಿ 2.20

5. ಆಕೃತಿ 2.20 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ AB ಮತ್ತು BC ತೆಗೆಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

AB = BC .... $\boxed{\quad\quad}$

$\therefore \angle BAC = \boxed{\quad\quad}$

$\therefore AB = BC = \boxed{\quad\quad} \times AC$

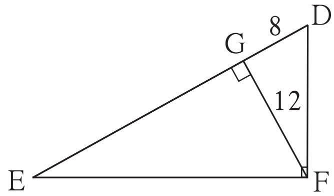
$= \boxed{\quad\quad} \times \sqrt{8}$

$= \boxed{\quad\quad} \times 2\sqrt{2}$

$= \boxed{\quad\quad}$

6. ಒಂದು ಚೌರಸದ ಕರ್ಣ 10 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಹಾಗೂ ಪರಿಮಿತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.

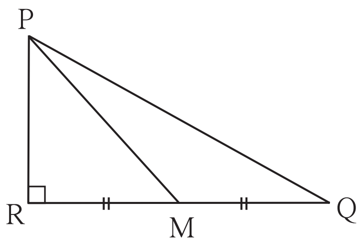
7. ಆಕೃತಿ 2.21ರಲ್ಲಿ $\angle DFE = 90^\circ$, ರೇಖ FG $\perp$ ರೇಖ ED. ಇದ್ದರೆ GD = 8, FG = 12, ಇದ್ದಾಗ (1) EG (2) FD ಮತ್ತು (3) EF ತೆಗೆಯಿರಿ



ಆಕೃತಿ 2.21

8. ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದ 35 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ ಅಗಲ 12 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ಆಯತದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

9★. ಆಕೃತಿ 2.22 ರಲ್ಲಿ M ಇದು ಭುಜ QR ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ. $\angle PRQ = 90^\circ$ ಇದ್ದರೆ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ $PQ^2 = 4PM^2 - 3PR^2$



ಆಕೃತಿ 2.22

10★. ರಸ್ತೆಯ ಎರಡು ಬದಿಗಿರುವ ಕಟ್ಟಡಗಳ ಗೋಡೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರ ಇರುತ್ತವೆ. 5.8ಮೀ ಉದ್ದದ ಏಣಿಯ ಒಂದು ತುದಿ ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲೆ ಇಟ್ಟರೆ ಅದರ ಮೇಲಿನ ತುದಿ ಮೊದಲನೆಯ ಕಟಡದ 4 ಮೀ ಎತ್ತರ ಇರುವ ಕಿಟಕಿಯವರೆಗೆ ತಲುಪುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಏಣಿಯನ್ನು ಇರಿಸಿ ರಸ್ತೆಯ ಎರಡನೆಯ ಬದಿಗೆ ಹೊರಳಿಸಿದರೆ ಅದರ ಮೇಲಿನ ತುದಿ ಎರಡನೆಯ ಕಟ್ಟಡದ 4.2ಮೀ ಎತ್ತರ ಇರುವ ಕಿಟಕಿಯ ವರಗೆ ತಲುಪುವುದು, ಹಾಗಾದರೆ ರಸ್ತೆಯ ಅಗಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ಉಪಯೋಜನೆ

ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಕಾಟಕೋನ ಮಾಡುವ ಭುಜ ಇವುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ಅಂದರೆ ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜ ಮತ್ತು ಉಳಿತ ಎರಡು ಭುಜ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಬಂಧ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ.

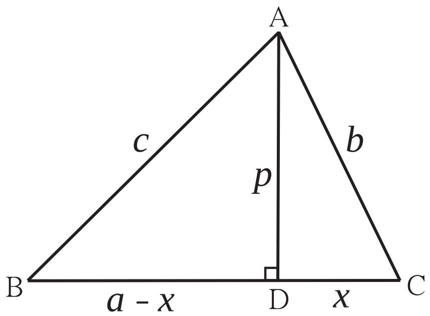
ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಲಘುಕೋನ ಎದುರಿನ ಭಜದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧ ಅದರಂತೆ ವಿಶಾಲಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧ ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುವದು. ಈ ಸಂಬಂಧ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಉದಾ.(1) Δ ABCಯಲ್ಲಿ, $\angle$ C ಇದು ಲಘುಕೋನವಿದೆ, ರೇಖ AD $\perp$ ರೇಖ BC ಇದ್ದರೆ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

ಕೊಟ್ಟ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ AB = c, AC = b, AD = p, BC = a, DC = x ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

$\therefore$ BD = $a - x$



ಆಕೃತಿ 2.23

Δ ADB ಯಲ್ಲಿ, ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯನುಸಾರ

$c^2 = (a-x)^2 + \boxed{\quad}$

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \boxed{\quad}$ .... (I)

Δ ADC ಯಲ್ಲಿ, ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದನುಸಾರ

$b^2 = p^2 + \boxed{\quad}$

$p^2 = b^2 - \boxed{\quad}$ .... (II)

(II) ರಲ್ಲಿ, p^2ದ ಬೆಲೆ, (I) ರಲ್ಲಿ ಇಡಲಾಗಿ

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$

$\therefore\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$

$\therefore\ AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

ಉದಾ.(2) Δ ABCಯಲ್ಲಿ, $\angle$ ACB ಇದು ವಿಶಾಲಕೋನ ವಿದ್ದರೆ AD $\perp$ ರೇಖ BC, ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖ AD = p, AC = b, AB = c,

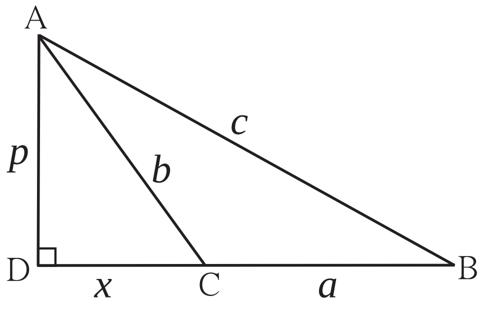
BC = a, DC = x ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

DB = $a + x$

Δ ADB ಯಲ್ಲಿ, ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯನುಸಾರ

$c^2 = (a + x)^2 + p^2$

$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + p^2$ .... (I)



ಆಕೃತಿ 2.24

ಅದರಂತೆ Δ ADC ಯಲ್ಲಿ

$$b^2 = x^2 + p^2$$

$$\therefore \quad p^2 = b^2 - x^2 \qquad \text{..........} \quad (II)$$

$\therefore$ (I) ರಲ್ಲಿ (II) ರಲ್ಲಿಯ p^2ದ ಬೇಲೆ ಇಡಲಾಗಿ

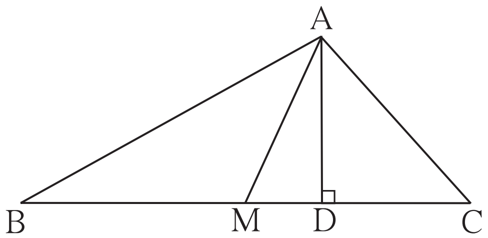
$$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$= a^2 + 2ax + b^2$$

$\therefore$ $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

ಅಪೋಲೊನಿಯಸನ ಪ್ರಮೇಯ (Appollonius' Theorem)

Δ ABCಯಲ್ಲಿ, ಬಿಂದು M ಇದು ಭುಜ BCದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದ್ದರೆ $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$



ಆಕೃತಿ 2.25

ಪಕ್ಷ : Δ ABC ಯಲ್ಲಿ M ಇದು ಭುಜ BCದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

ರಚನೆ : ರೇಖ AD $\perp$ ರೇಖ BC ತೆಗೆದೆವು

ಸಿದ್ಧತೆ : ರೇಖ AM ಇದು ರೇಖ BCಗೆ ಲಂಬ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ $\angle$AMB ಮತ್ತು $\angle$ AMC ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ವಿಶಾಲಕೋನ ಮತ್ತು ಮತ್ತೊಂದು ಲಘುಕೋನ ಇರುತ್ತದೆ.

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ $\angle$ AMB ವಿಶಾಲಕೋನ ಮತ್ತು $\angle$ AMC ಇದು ಲಘುಕೋನವಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ (1) ಹಾಗೂ (2)ರ ಮೇಲಿಂದ

$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \times MD$ ..... (I)

ಮತ್ತು $AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \times MD$

$\therefore$ $AC^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM \times MD$ ($\because$ BM = MC) ....(II)

$\therefore$ (I) ಹಾಗೂ (II) ರ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಲಾಗಿ

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

ರೇಖ AM $\perp$ ಭುಜ BC ಇದ್ದರೆ ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆ ನೀವು ಬರೆಯಿರಿ.

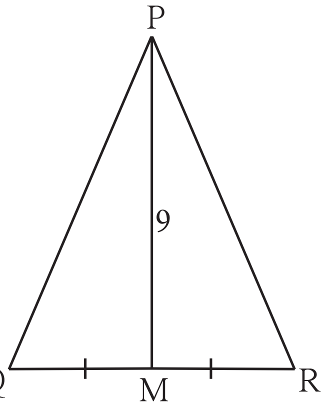
ಈ ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೇಲಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇವುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ತಿಳಿಯುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ 'ಅಪೋಲೊ ನಿಯಸ ಪ್ರಮೇಯ' ಎನ್ನುವರು.

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ.(1) Δ PQRದಲ್ಲಿ, ರೇಖ PM ಇದು ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇದೆ. PM = 9 ಮತ್ತು $PQ^2 + PR^2 = 290$, ಇದ್ದರೆ QR ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ PQR ದಲ್ಲಿ, ರೇಖ PM ಇದು ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇದೆ.

M ಇದು ರೇಖ QR ದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ.



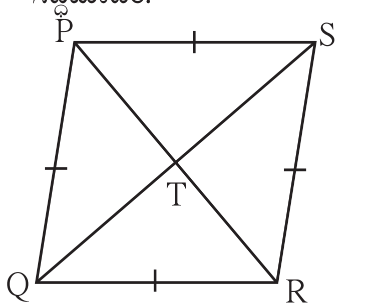
ಆಕೃತಿ 2.26

$$QM = MR = \frac{1}{2} QR$$

$PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2$ (ಅಪೋಲೋನಿಯಸನ ಪ್ರಮೇಯನುಸಾರ)

$$290 = 2 \times 9^2 + 2QM^2$$
$$290 = 2 \times 81 + 2QM^2$$
$$290 = 162 + 2QM^2$$
$$2QM^2 = 290 - 162$$
$$2QM^2 = 128$$
$$QM^2 = 64$$
$$QM = 8$$
$$\therefore \quad QR = 2 \times QM$$
$$= 2 \times 8$$
$$= 16$$

ಉದಾ.(2) ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಅದರ ಕರ್ಣಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 2.27

ಪಕ್ಷ : $\square$ PQRS ಇದು ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದ್ದು ಅದರ ಕರ್ಣಗಳು PR ಮತ್ತು SQ ಒಂದನ್ನೊಂದು T ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

ಸಾಧ್ಯ : $PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = PR^2 + QS^2$

ಸಿದ್ಧತೆ : ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತವೆ.

$\therefore$ ಅಪೋಲೋನಿಯಸನ ಪ್ರಮೇಯನುಸಾರ

$PQ^2 + PS^2 = 2PT^2 + 2QT^2$ .... (I)

$QR^2 + SR^2 = 2RT^2 + 2QT^2$ .... (II)

$\therefore$ (I) ಹಾಗೂ (II) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಲಿಗೆ,

$$PQ^2 + PS^2 + QR^2 + SR^2 = 2(PT^2 + RT^2) + 4QT^2$$

$\therefore PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = 2(PT^2 + PT^2) + 4QT^2$ .... $(RT = PT)$

$$= 4PT^2 + 4QT^2$$
$$= (2PT)^2 + (2QT)^2$$
$$= PR^2 + QS^2$$

(ಈ ಉದಾಹರಣೆ ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ಉಪಯೋಗದಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದು)

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.2

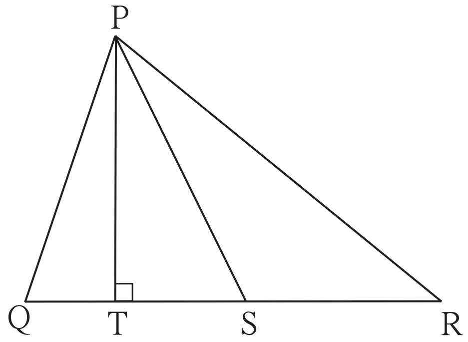
1. Δ PQRದಲ್ಲಿ ಬಿಂದು S ಇದು ಭುಜ QRದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದ್ದು, PQ = 11, PR = 17, PS = 13 ಇದ್ದರೆ QRದ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

2. Δ ABC ಯಲ್ಲಿ AB = 10, AC = 7, BC = 9 ಇದ್ದರೆ C ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಭುಜ AB ಯ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿಯ ಉದ್ದಳತೆ ಎಷ್ಟು?

3. ಆಕೃತಿ 2.28ರಲ್ಲಿ ರೆಖ PS ಇದು Δ PQRದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇದೆ ಮತ್ತು PT $\perp$ QR ಇದ್ದರೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ

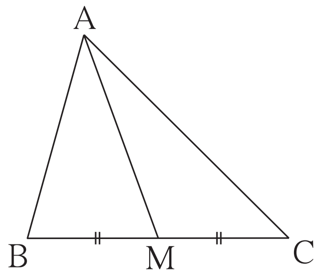
(1) $PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$

(2) $PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$



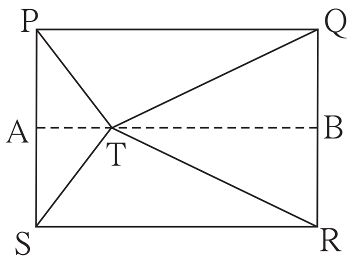
ಆಕೃತಿ 2.28

4. ಆಕೃತಿ 2.29ರಲ್ಲಿ, Δ ABC ಯ ಭುಜ BCಯ ಬಿಂದು M ಇದು ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ, $AB^2 + AC^2$ = 290 ಸೆಮೀ, AM = 8 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ BC ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 2.29

5★. ಆಕೃತಿ 2.30 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ T ಈ ಬಿಂದು ಆಯತ PQRSದ ಅಂತರಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ. $TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 2.30

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ 2

1. ಕೆಳಗಿನ ಬಹು ಪರ್ಯಾಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಕೊಟ್ಟ ಉತ್ತರಗಳಲ್ಲಿಯ ಸರಿಯಾದ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ.

(1) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ತ್ರಿಕೂಟ ಇದೆ?

(A) (1, 5, 10) (B) (3, 4, 5) (C) (2, 2, 2) (D) (5, 5, 2)

(2) ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕಾಟಕೋನ ಮಾಡುವ ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು 169 ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಳತೆ ಎಷ್ಟು?

(A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

(3) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ದಿನಾಂಕದಲ್ಲಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ತ್ರಿಕೂಟ ಇದೆ?

(A) 15/08/17 (B) 16/08/16 (C) 3/5/17 (D) 4/9/15

(4) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆ a, b, c ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $a^2 + b^2 = c^2$ ಇದ್ದರೆ ಅದು ಯಾವ ಪ್ರಕಾರದ ತ್ರಿಕೋನ ಇರುವುದು?

(A) ವಿಶಾಲಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ (B) ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನ (C) ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ (D)ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ

(5) ಒಂದು ಚೌರಸದ ಕರ್ಣ $10\sqrt{2}$ ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆದರ ಪರಿಮಿತಿ .... ಇರುವುದು.

(A) 10 ಸೆಮೀ (B) $40\sqrt{2}$ ಸೆಮೀ (C) 20 ಸೆಮೀ (D) 40 ಸೆಮೀ

(6) ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ಶಿರೋ ಲಂಬದಿಂದ ಕರ್ಣದ 4 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ 9 ಸೆಮೀ ಉದ್ದಳತೆಯ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾದ್ದರೆ ಆ ಶಿರೋಲಂಬದ ಉದ್ದಳತೆ ಎಷ್ಟು?

(A) 9 ಸೆಮೀ (B) 4 ಸೆಮೀ (C) 6 ಸೆಮೀ (D) $2\sqrt{6}$ ಸೆಮೀ

(7) ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕಾಟಕೋನ ಮಾಡುವ ಭುಜಗಳು 24 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ 18 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಳತೆ ಇರುವದು.

(A) 24 ಸೆಮೀ (B) 30 ಸೆಮೀ (C) 15 ಸೆಮೀ (D) 18 ಸೆಮೀ

(8) Δ ABCಯಲ್ಲಿ, AB = $6\sqrt{3}$ ಸೆಮೀ, AC=12 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು BC = 6 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ $\angle$ A ದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

(A) 30° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

2. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(1) ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜವಿರುವ $2a$ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು?

(2) 7 ಸೆಮೀ, 24 ಸೆಮೀ, 25 ಸೆಮೀ ಭುಜವಿರುವ ತ್ರಿಕೋನ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಆಗುವದೆ? ಕಾರಣ ಸಹಿತ ಬರೆಯಿರಿ.

(3) ಆಯತದ ಭುಜಗಳ 11 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ 60 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ?

(4) ಒಂದು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕಾಟಕೋನ ಮಾಡುವ ಭುಜಗಳು 9 ಸೆಮೀ, 12 ಸೆಮೀ ಇವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5) ಸಮದ್ವಿಭುಜ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜ x ಇದ್ದರ, ಆದರ ಕರ್ಣದ ಉದ್ಧಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(6) Δ PQR ದಲ್ಲಿ, PQ = $\sqrt{8}$, QR = $\sqrt{5}$, PR = $\sqrt{3}$; ಇದ್ದರೆ, Δ PQR ಇದು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಇದೆಯೇ? ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಯಾವ ಕೋನ ಕಾಟಕೋನವಿದೆ?

3. Δ RSTದಲ್ಲಿ $\angle S = 90^\circ$, $\angle T = 30^\circ$, RT = 12 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ RS ಹಾಗೂ ST ತೆಗೆಯಿರಿ.

4. ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 192 ಚೌ ಸೆಮೀ, ಇದ್ದು ಅದರ ಉದ್ದ 16 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಅಯತದ ಕರ್ಣದಳ ಉದ್ಧಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

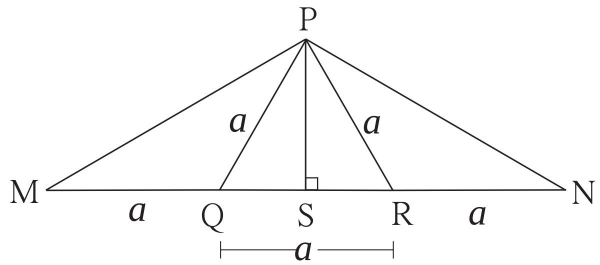
5★. ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರ $\sqrt{3}$ ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಮತ್ತು ಪರಿಮಿತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.

6. Δ ABCಯಲ್ಲಿ ರೇಖ AP ಇದು ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇದೆ. BC = 18, $AB^2 + AC^2 = 260$ ಇದ್ದರೆ AP ತೆಗೆಯಿರಿ.

7★. Δ ABC ಇದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ ಇದೆ. ತಳ BCಯ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದು PC = $\frac{1}{3}$ BC, ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದ AB = 6 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ AP ತೆಗೆಯಿರಿ.

8. ಆಕೃತಿ 2.31ದಲ್ಲಿ M-Q-R-N. ಇದ್ದರೆ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

PM = PN = $\sqrt{3} \times a$

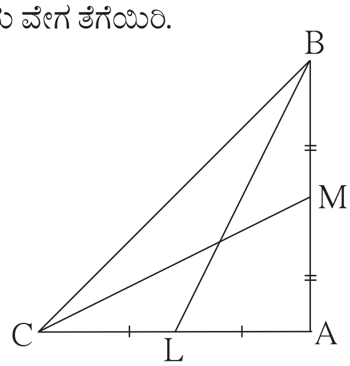


ಆಕೃತಿ 2.31

9. ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ: ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಕರ್ಣದ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು ಇದು ಆ ಚೌಕೋನದ ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

10. ಪ್ರಣಾಲಿ ಮತ್ತು ಪ್ರಸಾದ ಇವರು ಒಂದೇ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಪೂರ್ವ ಹಾಗೂ ಉತ್ತರ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಒಂದೇ ವೇಗದಿಂದ ಹೊರಟರು. ಎರಡು ಗಂಟೆಗಳ ನಂತರ ಅವರ ನಡುವಿನ ಅಂತರ $15\sqrt{2}$ ಕಿ.ಮೀ ಇದ್ದರೆ ಅವರ ಪ್ರತಿಗಂಟೆಯ ವೇಗ ತೆಗೆಯಿರಿ.

11★. Δ ABC ಯಲ್ಲಿ $\angle$ BAC = 90°, ರೇಖ BL ಹಾಗೂ ರೇಖ CM ಇವು Δ ABCಯ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇರುತ್ತವೆ ಹಾಗಾದರೆ $4(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

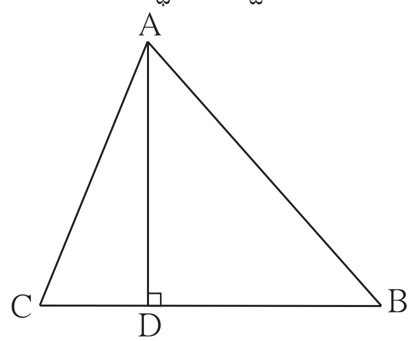


ಆಕೃತಿ 2.32

12. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಹೊಂದಿಕೊಂಡ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು 130 ಚೌಸೆಮೀ ಇದ್ದು ಅದರ ಒಂದು ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಳತೆ 14 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಎರಡನೆಯ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಳತೆ ಏಷ್ಟು?

13. Δ ABC ಯಲ್ಲಿ ರೇಖ AD $\perp$ ರೇಖ BC ಮತ್ತು DB = 3CD, ಇದ್ದರೆ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ:

$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$



ಆಕೃತಿ 2.33

14★. ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಏಕರೂಪ ಭುಜಗಳ ಉದ್ಧಳತೆ 13 ಸೆಮೀ ಇದ್ದು ಅದರ ತಳ 10 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ, ಆತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಸಂಪಾದ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತಳದ ಎದುರಿನ ಶಿರೋಬಿಂದುವಿನ ವರೆಗಿನ ಅಂತರ ತೆಗೆಯಿರಿ.

15. ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ ABCD ಯಲ್ಲಿ

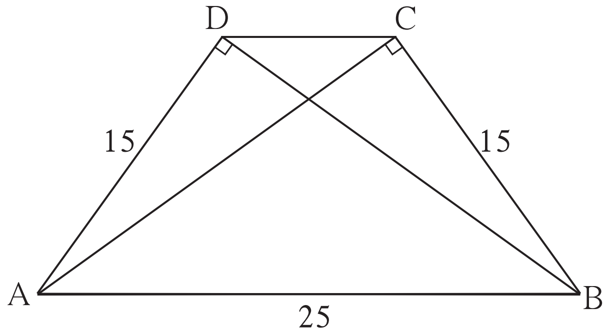
ರೇಖ AB || ರೇಖ DC

ರೇಖ BD ⊥ ರೇಖ AD,

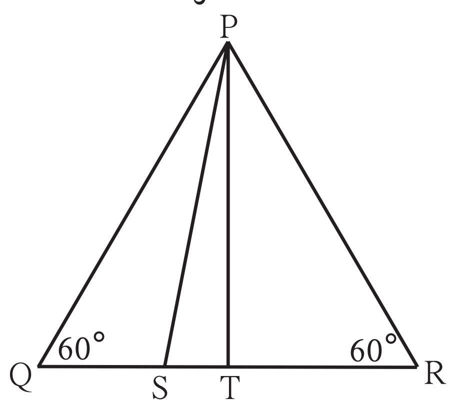
ರೇಖ AC ⊥ ರೇಖ BC,

AD = 15, BC = 15 ಮತ್ತು AB = 25

ಇದ್ದರೆ, A(□ ABCD) ಎಷ್ಟು?



ಆಕೃತಿ 2.34



ಆಕೃತಿ 2.35

16★. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ Δ PQR ಇದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ ಎದ್ದು S ಬಿಂದು ಇದ್ದು ರೇಖ QRದ ಮೇಲೆ $QS = \frac{1}{3}QR$ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ, $9\,PS^2 = 7\,PQ^2$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

17★. ರೇಖ PM ಇದು Δ PQR ಇದು ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇದೆ. PQ = 40, PR = 42 ಮತ್ತು PM = 29, ಇದ್ದರೆ QR ತೆಗೆಯಿರಿ.

18. ರೇಖ AM ಇದು Δ ABCಯ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇದೆ AB = 22, AC = 34, BC = 24, ಇದ್ದರೆ, ಭುಜ AM ದ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ICT Tools or Links

ಇಂಟರ್‌ನೆಟ್ ಮೇಲಿಂದ Story on the life of Pythagoras ರ ಮಾಹಿತಿ ಪಡೆಯಿರಿ ಸ್ಲಾಯಿಡ್ ಶೊ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

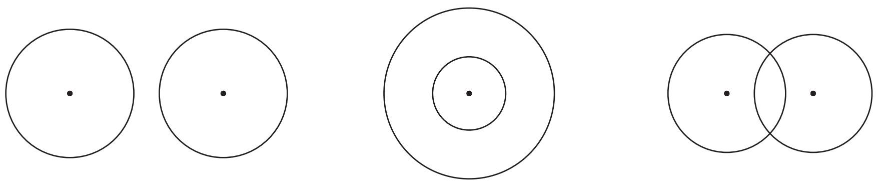
3 ವರ್ತುಳ

ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ

- ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳಗಳು
- ಸ್ಪರ್ಶ ವರ್ತುಳಗಳು
- ಅಂತರ್ಲಿಖಿತ ಕೋನ ಹಾಗೂ ಅಂತರ್ ಖಂಡಿತಕಂಸ
- ಸ್ಪರ್ಶಿಕ್ ಛೇದಿಕೆ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ
- ವೃತ್ತ ಛೇದಿಕೆ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ
- ವರ್ತುಳ ಕಂಸ
- ಚಕ್ರೀಯ ಚೌಕೋನ
- ಜ್ಯಾಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರಮೇಯ

ಸ್ವಲ್ಪನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ

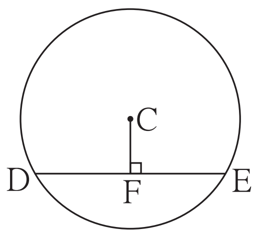
ವರ್ತುಳ ಈ ಆಕೃತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೇಂದ್ರ, ತ್ರಿಜ್ಯ, ವ್ಯಾಸ, ಜ್ಯಾ, ಅಂತರ್ಭಾಗ ಬಾಹ್ಯಭಾಗ ಈ ಸಂಜ್ಞೆಗಳ ಪರಿಚಯ ನಿಮಗೆ ಆಗಿದೆ. ಏಕರೂಪ ವರ್ತುಳಗಳು, ಸಮಕೇಂದ್ರಿ ವರ್ತುಳಗಳು ಮತ್ತು ಛೇದಿಸುವ ವರ್ತುಳಗಳು ಈ ಸಂಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ.



ಏಕರೂಪ ವರ್ತುಳಗಳು ಸಮ ಕೇಂದ್ರ ವರ್ತುಳಗಳು ಛೇದಿಸುವ ವರ್ತುಳಗಳು

ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಿದ ಜ್ಯಾಗಳ ಗುಣಧರ್ಮ ಮುಂದಿನ ಕೃತಿಯಿಂದ ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಿರಿ

ಕೃತಿ I : ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರ C ಇರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ರೇಖ DE ಇದು ಜ್ಯಾ ಇದೆ. ರೇಖ CF $\perp$ ಜ್ಯಾ DE. ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸ 20 ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು DE = 16 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ CF = ಎಷ್ಟು?



ಆಕೃತಿ 3.1

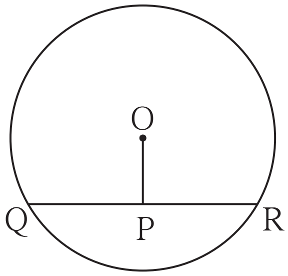
ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಬಿಡಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಉಪಯೋಗವಾಗುವ ಪ್ರಮೇಯ ಮತ್ತು ಗುಣಧರ್ಮ ನೆನಪಿಸಿಕೊಂಡು ಬರೆಯಿರಿ.

(1) ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಲಂಬ ______________

(2) ______________

(3) ______________

ಈ ಗುಣಧರ್ಮ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರಶ್ನೆ ಬಿಡಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.2**

ಕೃತಿ II : ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರ O ಇರುವ ವರ್ತುಳದ ರೇಖ QR ಇದು ಜ್ಯಾ ಇದೆ. ಬಿಂದು P ಇದು ಜ್ಯಾ QRದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ. QR = 24, OP = 10 ಇದ್ದರೆ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಬಿಡಿಸಲು ಉಪಯೋಗವಾಗುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ

(1) ______________________

(2) ______________________

ಈ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಉಪಯೋಗಮಾಡಿ ಉದಾಹರಣೆ ಬಿಡಿಸಿರಿ

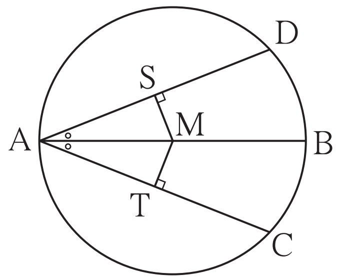
ಕೃತಿ III : ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರ M ಮತ್ತು ರೇಖ AB ವ್ಯಾಸ ಇದೆ.

ರೇಖ MS $\perp$ ಜ್ಯಾ AD

ರೇಖ MT $\perp$ ಜ್ಯಾ AC

$\angle DAB \cong \angle CAB$.

ಹಾಗಾದರೆ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ; ಜ್ಯಾ AD $\cong$ ಜ್ಯಾ AC.



ಆಕೃತಿ **3.3**

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಬಿಡಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ಪ್ರಮೇಯ ಉಪಯೋಗಿಸುವಿರಿ?

(1) ವರ್ತುಳದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಸಮಾನ ಉದ್ದತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವವು.

(2) ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾಗಳು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

ಇದರ ಹೊರತಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಏಕರೂಪತೆಯ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ಪರೀಕ್ಷೆ ಉಪಯೋಗ ಆಗುವದು.

1) ಭು ಕೋ ಭು 2) ಕೋ ಭು ಕೋ 3) ಭು, ಭು, ಭು 4) ಕೋಕೋ ಭು 5) ಕರ್ಣ ಭುಜ

ಯೋಗ್ಯವಾದ ಪರೀಕ್ಷೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಿದ್ಧತೆ ಬರೆಯಿರಿ

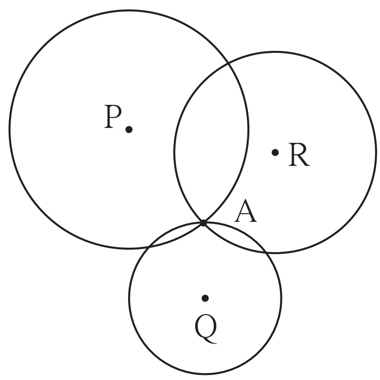
ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು, ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳಗಳು

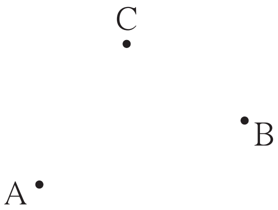
ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಬಿಂದು A ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು P, Q, R ಇರುವ ಮೂರು ವರ್ತುಳಗಳು A ಈ ಬಿಂದು ವಿನಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವವು. ಬಿಂದು A ದಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಇನ್ನೂ ಎಷ್ಟು ವರ್ತುಳಗಳು ಇರಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಅನಿಸುವುದು?

ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರ ಬೇಕಾದಷ್ಟು ಅಥವಾ 'ಅಸಂಖ್ಯೆ' ಹೀಗೆ ಇದ್ದು, ಅದು ಸರಿ ಇದೆ.

ಒಂದೇ ಬಿಂದುವುನಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಅಸಂಖ್ಯೆ ವರ್ತುಳಗಳಿರುವವು



ಆಕೃತಿ **3.4**



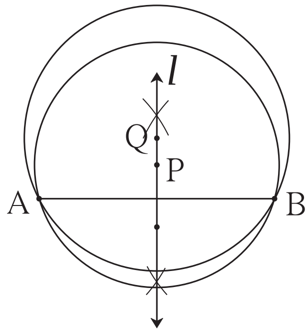
ಆಕೃತಿ **3.5**

ಬಿದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಈ ಎರಡು ಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಎಷ್ಟು ವರ್ತುಳ ಇರುವವು?

A, B, C ಈ ಮೂರು ಬಿಂದು ವಿನಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಎಷ್ಟು ವರ್ತುಳಗಳು ಇರುವವು?

ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೃತಿಯಿಂದ ನಿಮಗೆ ಏನಾದರೂ ಉತ್ತರ ದೊರೆಯುತ್ತದೆಯೆ? ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಕೃತಿ I : ಬಿಂದು A ಮತ್ತು B ಬಿಂದು ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖ AB ತೆಗೆಯಿರಿ, ಈ ರೇಷಾಖಂಡದ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ರೇಷೆ l ತೆಗೆಯಿರಿ, ರೇಷೆ l ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು ಇದನ್ನು P ಇದು ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ PA ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ವರ್ತುಳ ರಚಿಸಿರಿ. ಈ ವರ್ತುಳ ಬಿಂದು B ದಿಂದಲೂ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವುದು ಇದನ್ನು ನೋಡಿರಿ, ಇದರ ಕಾರಣ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ರೇಷೆಯ ಗುಣಧರ್ಮ ನೆಸಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಿರಿ)

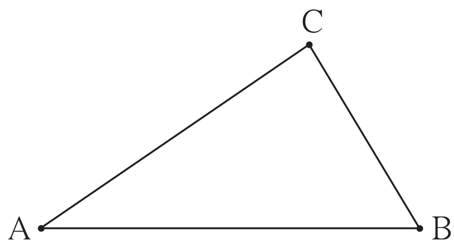


ಆಕೃತಿ **3.6**

ರೇಷೆ l ಮೇಲಿನ Q ಈ ಇನ್ನೊಂದು ಒಂದು ಬಿಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು. Q ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತೆಗೆದು ತ್ರಿಜ್ಯ QA ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ರಚಿಸಿದ ವರ್ತುಳ ಇದು ಬಿಂದು B ದಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವದೆ? ಯೋಚನೆ ಮಾಡಿರಿ.

ಬಿಂದು A ಹಾಗೂ ಬಿಂದು B ದಲ್ಲಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಇನ್ನು ಎಷ್ಟು ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು? ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನಗಳು ಎಲ್ಲಿ ಇರುವವು?

ಕೃತಿ II : ನೈಕ ರೇಷೀಯ ಬಿಂದು A, B, C ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಲು ನಿಮಗೆ ಏನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು? ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಇದೇ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಹೋಗುವ ಇನ್ನು ಒಂದು ವರ್ತುಳ ರಚಿಸಲು ಬರುವದೆ? ವಿಚಾರ ಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.7**

ಕೃತಿ III : ಏಕ ರೇಷೀಯ ಇರುವ D, E, F ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳ ರಚಸಲು ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಿರಿ. ಇಂತಹ ವರ್ತುಳ ರಚಿಸಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲದಾದರೆ, ಏಕೆ ರಚಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ? ಇದ್ದರ ಬಗ್ಗೆ ಯೋಚನೆ ಮಾಡಿರಿ.

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ ಬನ್ನಿ

(1) ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಅಸಂಖ್ಯೆ ವರ್ತುಳಗಳಿರುವವು.

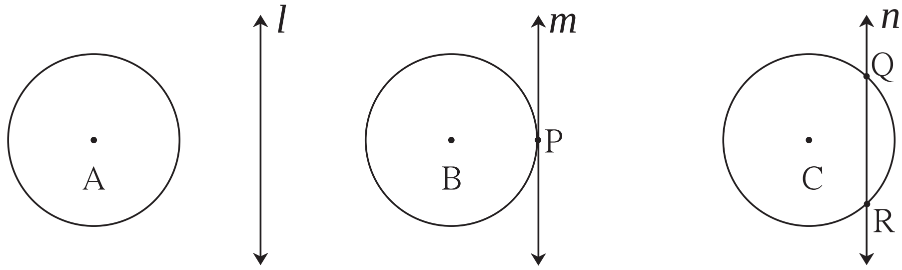
(2) ಎರಡು ಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಅಸಂಖ್ಯೆ ವರ್ತುಳ ಇರುವವು.

(3) ಮೂರು ನೈಕ ರೇಷಿಯ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳ ಇರುವುದು.

(4) ಮೂರು ಏಕ ರೇಷೀಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಒಂದೂ ವರ್ತುಳ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ವೃತ್ತಭೇದಿಕೆ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆ (Secant and tangent)



ಆಕೃತಿ 3.8

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಷೆ l ಮತ್ತು ವರ್ತುಳ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ಇಲ್ಲ

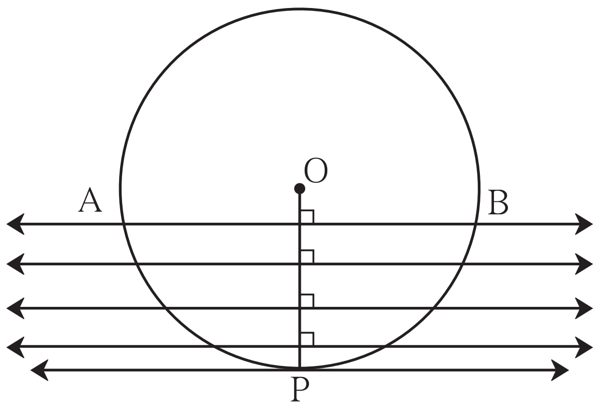
ರೇಷೆ m ಮತ್ತು ವರ್ತುಳ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಂದು P ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ಇದೆ, ಇದರಲ್ಲಿ m ಇದು ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆ ಇದೆ ಮತ್ತು ಬಿಂದು P ಇದಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಷ ಬಿಂದು ಎನ್ನುವರು.

ರೇಷೆ n ಮತ್ತು ವರ್ತುಳ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಬಿಂದು Q ಮತ್ತು R ಇವು ರೇಷೆ ಮತ್ತು ವರ್ತುಳ ಇವೂಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಇವೆ ಮತ್ತು ರೇಷೆ n ಇದು ವೃತ್ತ ಛೇದಿಕೆ ಆಗಿದೆ. ರೇಷಾಖಂಡ QR ಇದು ವರ್ತುಳದ ಅಂತರ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇದೆ. QR ಇದು ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾ ಇದೆ.

ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆಯ ಒಂದು ಮಹತ್ವದ ಗುಣಧರ್ಮ ಒಂದು ಕೃತಿಯಿಂದ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಕೃತಿ :

ಕೇಂದ್ರ O ಇರುವ ಒಂದು ದೊಡ್ಡದಾದ ವರ್ತುಳ ರಚಿಸಿರಿ ಆ ವರ್ತುಳದ ರೇಖ OP ಇದು ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಿರುವ ಒಂದು ರೇಷೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ರೇಷೆ ಮತ್ತು ವರ್ತುಳ ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ A ಮತ್ತು B ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ. ಕಲ್ಪನೆಮಾಡಿ ರೇಷೆ AB ಇದು ಬಿಂದು O ದಿಂದ ಬಿಂದು Pದ ಕಡೆಗೆ ಮೊದಲನೇ ಸ್ಥಿತಿಯು ಹೊಸ ಸ್ಥಿತಿಗೆ ಸಮಾಂತರ ಇರುವಂತೆ ಸರಿಯುತ್ತ ಹೋರಟಿದೆ, ಅಂದರೆ ಸರಿಯುತ್ತ ನಡೆದ ರೇಷೆ AB ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೋನ ಯಾವಾಗಲೂ ಕಾಟಕೋನ ಆಗಿರುವದು.



ಆಕೃತಿ 3.9

ಈ ರೀತಿ ಆಗುವಾಗ ಬಿಂದು A ಮತ್ತು ಬಿಂದು B ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಪರಸ್ಪರ ಸಮೀಪ ಸಮೀಪ ಬರುವವು. ಸರಿಯುತ್ತ ಕೊನೆಗೆ P ಬಿಂದು ವಿನಲ್ಲಿ ಕೊಡಿಕೊಳ್ಳುವವು.

ಈ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಷೆ AB ಇದರ ಹೊಸ ಸ್ಥಿತಿ ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಆಗುವುದು. ಆದರೆ ತ್ರಿಜ್ಯ OP ಮತ್ತು ರೇಷೆ AB ಇದರ ಹೊಸ ಸ್ಥಿತಿ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೋನ ಮಾತ್ರ ಕಾಟಕೋನವೇ ಇರುವುದು.

ಇದರಿಂದ ವರ್ತುಳದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೋಗುವ ಸ್ವರ್ಶಿಕೆ ಇದು. ಆ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ತ್ರಿಜಕ್ಕೆ ಲಂಬ ಇರುತ್ತದೆ ಏಂದು ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವುದು. ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಸ್ವರ್ಶಿಕೆ –ತ್ರಿಜ್ಯ ಪ್ರಮೇಯ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಸ್ಪರ್ಶಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯ ಪ್ರಮೇಯ (Tangent theorem)

ಪ್ರಮೇಯ : **ವರ್ತುಳದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವುನಿಂದ ಹೋಗುವ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಯು ಆ ಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಜೋಡಿಸುವ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬ ಇರುತ್ತದೆ.**

ಈ ಪ್ರಮೇಯ ಅಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು.

ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಗಾಗಿ

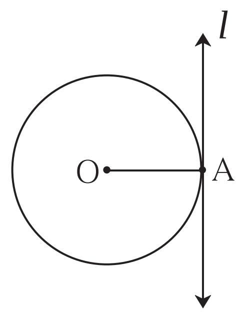
ಪಕ್ಷ : O ಕೇಂದ್ರ ಇರುವ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ರೇಷೆ l ಇದು ಬಿಂದ A ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಷ ಮಾಡುವುದು. ರೇಖ OA ಇದು ತ್ರಿಜ್ಯಇದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : ರೇಷೆ $l \perp$ ತ್ರಿಜ್ಯ OA.

ಸಿದ್ಧತೆ : ರೇಷೆ l ಇದು ರೇಖ OAಗೆ ಲಂಬ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ ಬಿಂದು O ದಿಂದ ಹೋಗುವ ಮತ್ತು ರೇಷೆ lಗೆ ಲಂಬ ಇರುವ ಇನ್ನೊಂದು ರೇಷೆ ಇದು l ಈ ರೇಷೆಗೆ ಬಿಂದು B ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು.

ಆಂದರೆ ಬಿಂದು B ಇದು ಬಿಂದು A ಗಿಂತ ಭಿನ್ನ ಇರಬಹುದು. (ಆಕೃತಿ 3.11 ನೋಡಿರಿ)

ರೇಷೆ lದ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು C ಯನ್ನು A–B–C ಮತ್ತು BA = BC ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.



ಆಕೃತಿ **3.10**

ಈಗ Δ OBC ಮತ್ತು Δ OBA ಇವುಗಳಲ್ಲಿ

ರೇಖ BC $\cong$ ರೇಖ BA .... (ರಚನೆ)

$\angle$ OBC $\cong$ $\angle$OBA .... ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಾಟಕೋನ

ರೇಖ OB $\cong$ ರೇಖ OB

$\therefore$ Δ OBC $\cong$ Δ OBA .... (ಭು ಕೋ ಭು ಪರೀಕ್ಷೆ)

$\therefore$ OC = OA

ಆದರೆ ರೇಖೆ OA ಇದು ತ್ರಿಜ್ಯ ಇದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ

ರೇಖೆ OC ಕೂಡಾ ತ್ರಿಜ್ಯ ಆಗುವುದು

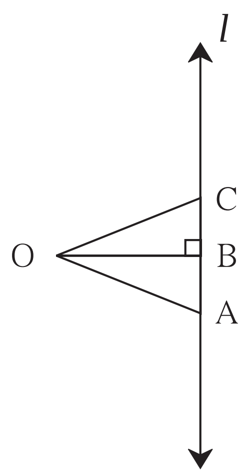
$\therefore$ ಬಿಂದು C ಇದು ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಇರುವುದು.

ಅಂದರೆ ರೇಷೆ l ಇದು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ A ಮತ್ತು C ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು ಈ ವಿಧಾನವು ಪಕ್ಷಕ್ಕೆ ವಿಸಂಗತ ವಿದೆ. ಕಾರಣ ರೇಷೆ l ಇದು ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇದೆ.

ಅಂದರೆ ರೇಷೆ l ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ....... ಪಕ್ಷ

$\therefore$ ರೇಷೆ l ಇದು ತ್ರಿಜ್ಯ OA ಗೆ ಲಂಬ ಇರುವುದಿಲ್ಲ, ಈ ವಿಧಾನ ಅಸತ್ಯವಿದೆ

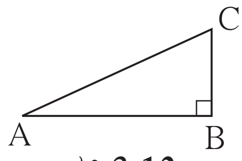
$\therefore$ ರೇಷೆ $l \perp$ ತ್ರಿಜ್ಯ OA.



ಆಕೃತಿ **3.11**

ಸ್ವಲ್ಪನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ

ನಾವು ಕಲಿತಂತಹ ಯಾವ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕರ್ಣ ಇದು ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ದೊಡ್ಡ ಭುಜ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವುದು?

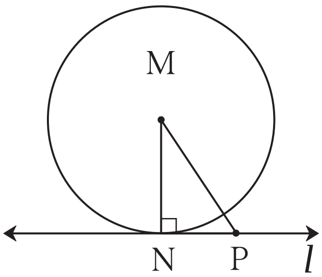


ಆಕೃತಿ **3.12**

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತ್ರಿಜ್ಯ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ (Converse of Tangent theorem)

ಪ್ರಮೇಯ : ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಆ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ರೇಷೆಯು ಆ ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇರುವುದು.



ಆಕೃತಿ **3.13**

ಪಕ್ಷ : ರೇಖ MN ಇದು ಕೇಂದ್ರ M ಇರುವ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಇದೆ ಬಿಂದು N ದಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಷೆ l ಇದು MNಗೆ ಲಂಬವಿದೆ

ಸಾಧ್ಯ : ರೇಷೆ l ಇದು ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇರುವುದು

ಸಿದ್ಧತೆ : ರೇಷೆ l ದ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದು ವಿನ ಹೊರತಾಗಿ N ಬಿಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ರೇಖ MP ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈಗೆ, Δ MNP ದಲ್ಲಿ $\angle$N ಇದು ಕಾಟಕೋನವಿದೆ.

$\therefore$ ರೇಖ MP ಇದು ಕರ್ಣ ಇದೆ.

$\therefore$ ರೇಖ MP > ರೇಖ MN.

$\therefore$ ಬಿಂದು P ಇದು ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ

ಅಂದರೆ ರೇಷೆ l ದ ಮೇಲೆ N ದ ಹೊರತಾಗಿ ಇತರ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲ ವೆಂದಾಯಿತು

$\therefore$ ರೇಷೆ l ಇದು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ N ಈ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸತ್ತದೆ

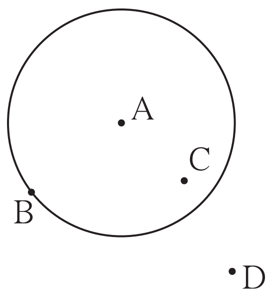
$\therefore$ ರೇಷೆ l ಇದು ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇರುವುದು.

ಚರ್ಚೆ ಮಾಡೋಣ ಬನ್ನಿ

A ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ B ಈ ಬಿಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಈ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಬಿಂದು B ದಿಂದ ಹೋಗುವ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯುವುದಿದೆ.

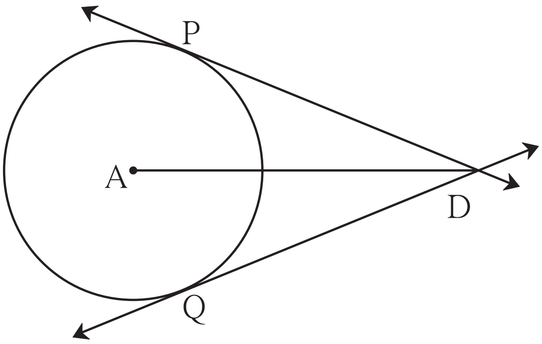
B ಈ ಬಿಂದು ವಿನಿಂದ ಹೋಗುವ ಅಸಂಖ್ಯೆ ರೇಷೆಗಳಿರುವವು. ಆವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ರೇಷೆಯು ಅವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇರುವುದು? ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವುದು?

ಬಿಂದು B ದಿಂದ ಹೋಗುವ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳು ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವೆ?



ಆಕೃತಿ **3.14**

ವರ್ತುಳದ ಅಂತರ್ಭಾಗದಲ್ಲಿಯ C ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವುದೆ?



ಆಕೃತಿ **3.15**

ವರ್ತುಳದ ಬಾಹ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ D ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಷೆಗಳು ಆ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳು ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಎಷ್ಟು ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳು ಇರುವವು?

ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ನಿಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬಂದಿರಬಹುದೇನೆಂದರೆ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ವರ್ತುಳದ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬರುವುದು.

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಷೆ DP ಮತ್ತು ರೇಷೆ DQ ಈ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳು A ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಬಿಂದು P ಮತ್ತು Q ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವವು

ರೇಖ DP ಮತ್ತು ರೇಖ DQ ಇವುಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಕಾಖಂಡ ಎನ್ನುವರು.

ಸ್ಪರ್ಶಿಕಾಖಂಡದ ಪ್ರಮೇಯ (Tangent Segment Theorem)

ಪ್ರಮೇಯ : **ವರ್ತುಳದ ಬಾಹ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕಾಖಂಡಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತದೆ.**

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯ ಆಧಾರದಿಂದ ಪಕ್ಷ ಮತ್ತು ಸಾಧ್ಯ ಬರೆಯಿರಿ.

ತ್ರಿಜ್ಯ AP ಮತ್ತು AQ ರಚನೆ ಮಾಡಿ ಈ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಿದ್ಧತೆಯ ರಿಕ್ತ ಸ್ಥಾನ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ PAD ಮತ್ತು Δ QAD ಗಳಲ್ಲಿ,

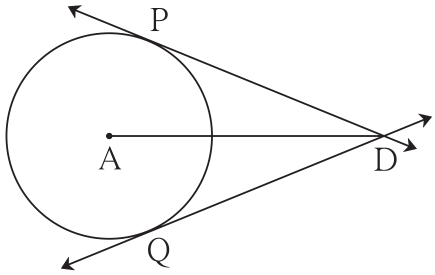
ಭುಜ PA $\cong$ ________ (ಬಂದೇ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

ಭುಜ AD $\cong$ ಭುಜ AD ________________

$\angle APD \cong \angle AQD = 90^\circ$ ...... (ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಪ್ರಮೇಯ)

$\therefore$ Δ PAD $\cong$ Δ QAD ________________

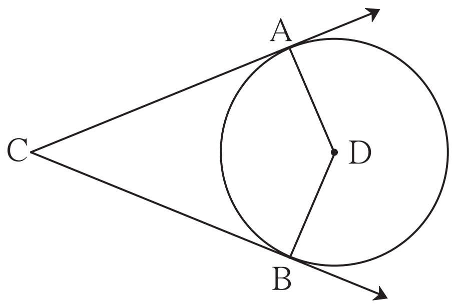
$\therefore$ ಭುಜ DP $\cong$ ಭುಜ DQ ________________



ಆಕೃತಿ **3.16**

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. (1) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ, D ಕೇಂದ್ರ ಇರುವ ವರ್ತುಳ $\angle$ACBಯ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಬಿಂದು A ಮತ್ತು ಬಿಂದು B ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಷಿಸುವವು $\angle ACB = 52^\circ$, ಇದ್ದರೆ $\angle$ADBಯ ಅಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.17**

ಉತ್ತರ : ಚೌಕೋನದ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು 360° ಇರುವುದು.

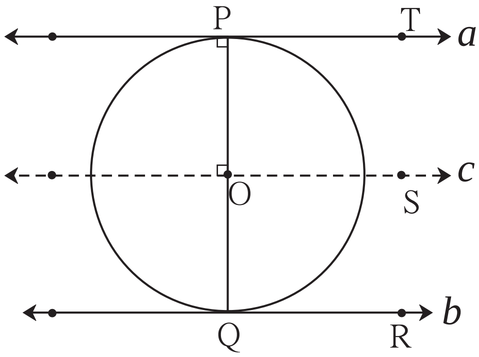
$\therefore \angle ACB + \angle CAD + \angle CBD + \angle ADB = 360^\circ$

$\therefore 52^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle ADB = 360^\circ$ .... ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆ ತ್ರಿಜ್ಯಪ್ರಮೇಯ

$\therefore \angle ADB + 232^\circ = 360^\circ$

$\therefore \angle ADB = 360^\circ - 232^\circ = 128^\circ$

ಉದಾ. (2) ರೇಷೆ a ಮತ್ತು ರೇಷೆ b ಇವುಗಳು O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಸಮಾಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳಿದ್ದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಷ ಮಾಡುವವು ಹಾಗಾದರೆ ರೇಖ PQ ಇದು ಆ ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸ ಇರುವವು ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.18**

ಸಿದ್ಧತೆ : ಬಿಂದು O ದಿಂದ ರೇಷೆ aಗೆ ಸಮಾಂತರ ಇರುವ ರೇಷೆ c ತೆಗೆಯಿರಿ.

ತ್ರಿಜ್ಯ OP ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ OQ ರಚಿಸಿರಿ.

ಈಗ $\angle OPT = 90^\circ$ ..... ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತ್ರಿಜ್ಯ ಪ್ರಮೇಯ

$\therefore$ $\angle SOP = 90^\circ$...ಅಂತರ್ಕೋನದ ಗುಣಧರ್ಮ... (I)

ಈಗ ರೆಷೆ a || ರೇಷೆ c ..... (ರಚನೆ)

ರೇಷೆ a || ರೇಷೆ b ..... (ಪಕ್ಷ)

ರೇಷೆ b || ರೇಷೆ c

ಈಗ, $\angle OQR = 90^\circ$ ..... ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತ್ರಿಜ್ಯ ಪ್ರಮೇಯ

$\therefore \angle SOQ = 90^\circ$....ಅಂತರ್ಕೋನದ ಗುಣಧರ್ಮ... (II)

$\therefore$ (I) ಮತ್ತು (II) ರಿಂದ

$\angle SOP + \angle SOQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore$ ಕಿರಣ OP ಮತ್ತು ಕಿರಣ OQ ಇವು ವಿರುದ್ಧ ಕಿರಣಗಳಿವೆ

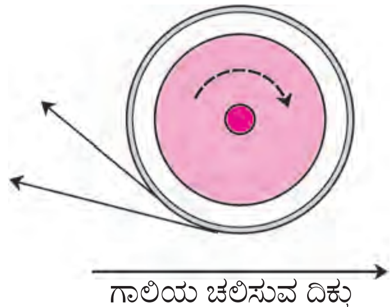
$\therefore$ ಬಿಂದು P, O, Q ಏಕ ರೇಷೀಯ ಇರುತ್ತವೆ

$\therefore$ ರೇಖ PQ ಇದು ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸ ಇದೆ.

ಮಳೆಗಾಲದ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ನೀರು ಸಂಗ್ರಹವಾದ ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಮೋಟಾರ ಸೈಕಲ್ಲು ಹೋಗುವಾಗ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಗಾಲಿಯಿಂದ ನಿಡಿಯುವ ನೀರಿನ ಧಾರೆ ನೀವು ನೋಡಿರಬಹುದು ಆಧಾರೆಗಳು ವರ್ತುಳ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳಂತೆ ಕಾಣುತ್ತವೆ. ಎಂದು ನಿಮ್ಮಗಮನಕ್ಕೆ ಬಂದಿರ ಬಹುದು ಆಧಾರೆಗಳು ಹಾಗೆ ಏಕೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಎಂಬುದರ ಮಾಹಿತಿ ನಿಮ್ಮ ವಿಜ್ಞಾನ ಶಿಕ್ಷಕರಿಂದ ಪಡೆಯಿರಿ.

ತಿರುಗುವ ಭೂ ಚಕ್ರದಿಂದ ಸಿಡಿಯುವ ಕಿಡಿಗಳು, ಚಾಕುವಿಗೆ ಸಾಣೆ ಹಚ್ಚುವಾಗ ಹಾರುವ ಕಿಡಿಗಳು ಇವುಗಳ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ ಅವು ಸಹ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಯಂತೆಯೇ ಕಾಣಿಸುತ್ತವೆಯೇ?

ಮಳೆಗಾಲದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ವಾಹನಗಳ ಗಾಲಿಗಳ ಟಾಯರ್‌ಗಳಿಂದ ಸಿಡಿಯುವ ನೀರಿನ ಚಿತ್ರ ತೆಗೆದು ಆ ಬಗ್ಗೆ ಬರೆಯಿರಿ.


ಗಾಲಿಯ ಚಲಿಸುವ ದಿಕ್ಕು

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ

(1) ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತ್ರಿಜ್ಯ ಪ್ರಮೇಯ: ವರ್ತುಳದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ನಿಂದ ಹೋಗುವ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಯು ಆ ಸ್ಪರ್ಷಬಿಂದುವಿ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬ ಇರುವುದು.

(2) ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತ್ರಿಜ್ಯ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ: ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಆ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬ ವಾಗಿರುವ ರೇಷೆಯು ಆ ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇರುವದು.

(3) ವರ್ತುಳದ ಬಾಹ್ಯವಿನಿಂದ ಆ ವರ್ತುಳಕ್ಕ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕಾಖಂಡಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.1

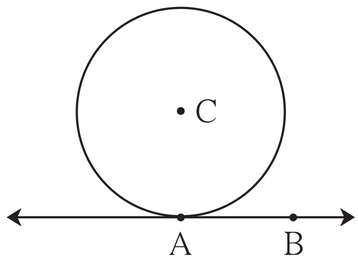
1. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ C ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 6 ಸೆ.ಮೀ ಇದೆ AB ಇದು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಬಿಂದು A ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಷಮಾಡುವುದು, ಈ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.

(1) $\angle$CABಯ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು ಅಂಶ ಇರುವುದು? ಏಕೆ?

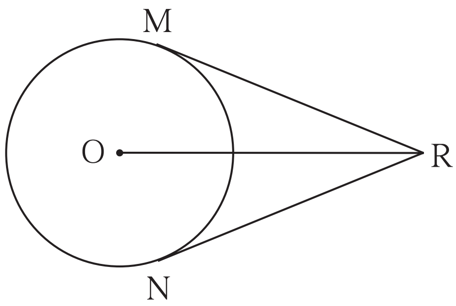
(2) ಬಿಂದು C ಇದು ರೇಷೆ AB ಯಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇದೆ? ಏಕೆ?

(3) d(A,B)= 6 ಸೆಮೀ, ಹಾಗಾದರೆ d(B,C) ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) $\angle$ABCಯ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು ಅಂಶ ಇದೆ? ಏಕೆ?



ಆಕೃತಿ **3.19**



ಆಕೃತಿ **3.20**

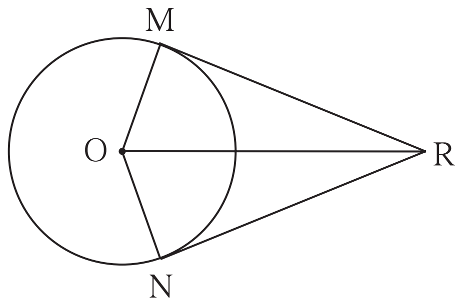
2. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ O ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಬಾಹ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯ Rಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತೆಗೆದ ಸ್ಪರ್ಷಿಕಾಖಂಡ RM ಮತ್ತು RN ಇವು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ M ಮತ್ತು N ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವವು.
OR = 10 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ.

(1) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ಪರ್ಷಿಕಾ ಖಂಡದ ಉದ್ದಳತೆ ಎಷ್ಟು?

(2) $\angle$MROದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

(3) $\angle$MRN ದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

3. ರೇಖ RM ಮತ್ತು ರೇಖ RN ಇವು O ಕೇಂದ್ರ ಇರುವ ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಷಿಕಾ ಖಂಡಗಳಿವೆ ಹಾಗಾದರೆ ರೇಖ OR ಇದು $\angle$MRN ಮತ್ತು $\angle$MON ದ ದ್ವಿಭಾಜಕವಿದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.21**

4. ತ್ರಿಜ್ಯ 4.5 ಸೆಮೀ ಇರುವ ವರ್ತುಳದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರ ಇರುತ್ತವೆ ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ಎಷ್ಟು: ಅದನ್ನು ಕಾರಣ ಸಹಿತ ಬರೆಯಿರಿ.

ICT Tools or Links

ಸಂಗಣಕದಿಂದ ಜಿವೋಜಿಬ್ರಾ ಈ ಸಾಫ್ಟ್‌ವೇರ್‌ದ ಸಹಾಯದಿಂದ ವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ವರ್ತುಳದ ಬಾಹ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು. ಸ್ಪರ್ಶಿಕಾಖಂಡಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದರ ತಾಳೆ ಹಾಕಿರಿ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಸ್ಪರ್ಶ ವರ್ತುಳಗಳು (Touching Circles)

ಕೃತಿ I :

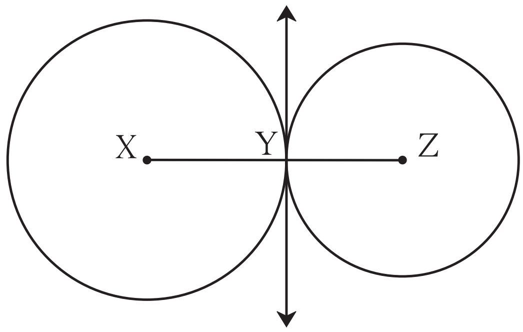
ಆಕೃತಿ 3.22 ದಲ್ಲಿ ತೊರಿಸಿದಂತ X-Y-Z ಏಕ ರೇಷೀಯ ಒಂದು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಕೇಂದ್ರ X ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ XY ಇರುವ ವರ್ತುಳ ರಚಿಸಿರಿ.

ಕೆಂದ್ರ Z ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ YZ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಈ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು Y ಈ ಒಂದೆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ ಇದನ್ನು ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಬಿಂದು Y ದಿಂದ XZಗೆ ಲಂಬವಿರುವ ರೇಷೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ರೇಷೆಯು ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆ ಇರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.22

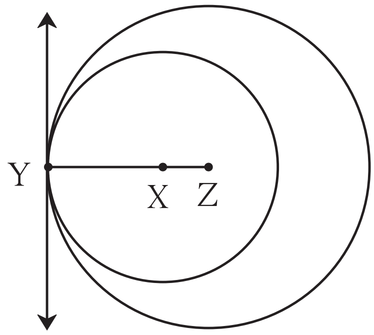
ಕೃತಿ II : ಆಕೃತಿ 3.23 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ Y-X-Z ಈ ಏಕ ರೇಷೀಯ ಬಿಂದು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಕೇಂದ್ರ Z ಮತ್ತು ZY ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ವರ್ತುಳ ರಚಿಸಿರಿ.

ಕೇಂದ್ರ X ಮತ್ತು XY ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ವರ್ತುಳ ರಚಿಸಿರಿ.

ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು Y ಈ ಒಂದೇ ಬಿಂದು ವಿನಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸುವವು ಇದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಬಿಂದು Y ದಿಂದ YZ ಗೆ ಲಂಬವಿರುವ ರೇಷೆ YZ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ರೇಷೆಯು ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇರುವುದು ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.



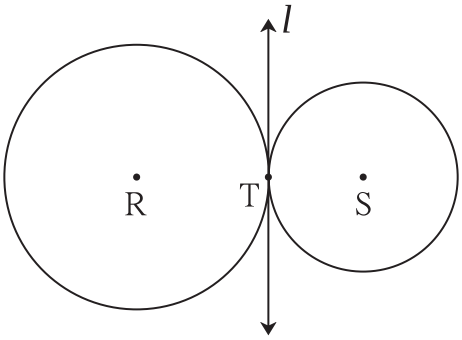
ಆಕೃತಿ 3.23

ಮೇಲಿನ ಕೃತಿಯಿಂದ ನಿಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬಂದಿರಬಹುದು ಎರಡೂ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿಯ ವರ್ತುಳಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿದ್ದು ಮತ್ತು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು.ಇಂತಹ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ವರ್ತುಳಗಳು ಅಥವಾ **ಸ್ಪರ್ಶ ವರ್ತುಳಗಳು** ಎನ್ನುವರು.

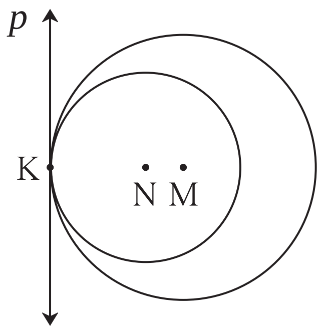
ಸ್ಪರ್ಶ ವರ್ತುಳಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು.

ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ವರ್ತುಗಳು ಅದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಒಂದೇ ರೇಷೆಗೆ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ವರ್ತುಳಗಳೆನ್ನುವರು. ಆ ರೇಖೆಯು ಎರಡೂ ವರ್ತುಳಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇರುವುದು.

ಎರಡೂ ವರ್ತುಳಗಳು ಮತ್ತು ರೇಷೆ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು ಎನ್ನುವರು



ಆಕೃತಿ **3.24**



ಆಕೃತಿ **3.25**

ಆಕೃತಿ 3.24 ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರ R ಮತ್ತು S ಇರುವ ವರ್ತುಳಗಳು ರೇಷೆ l ಗೆ T ಈ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವರ್ತುಳಗಳು ಸ್ಪರ್ಷ ವರ್ತುಳಗಳಾಗಿದ್ದು ರೇಖೆ l ಇದು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಿಕ ಇದೆ. ಈ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿಯ ವರ್ತುಳಗಳು ಬಾಹ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶ ಇವೆ.

ಆಕೃತಿ 3.25 ರಲ್ಲಿಯ ವರ್ತುಳಗಳು **ಅಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಗಳಿದ್ದು ರೆಖೇ** p ಇದು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆ ಇದೆ.

ಯೋಚಿಸೋಣ ಬನ್ನಿ

(1) ಆಕೃತಿ 3.24 ರಲ್ಲಿಯ ವರ್ತುಳಗಳಂತೆ ಪರಸ್ಪರ ಒಂದನ್ನೊಂದುಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ಬಾಹ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಿ ವರ್ತುಳಗಳು ಏಕೆ ಎನ್ನುವರು?

(2) ಆಕೃತಿ 3.25 ರಲ್ಲಿಯ ವರ್ತುಳಗಳಂತೆ ಪರಸ್ಪರ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ಅಂತರ ಸ್ಪರ್ಶ ವರ್ತುಳಗಳು ಏಕೆ ಎನ್ನುವರು?

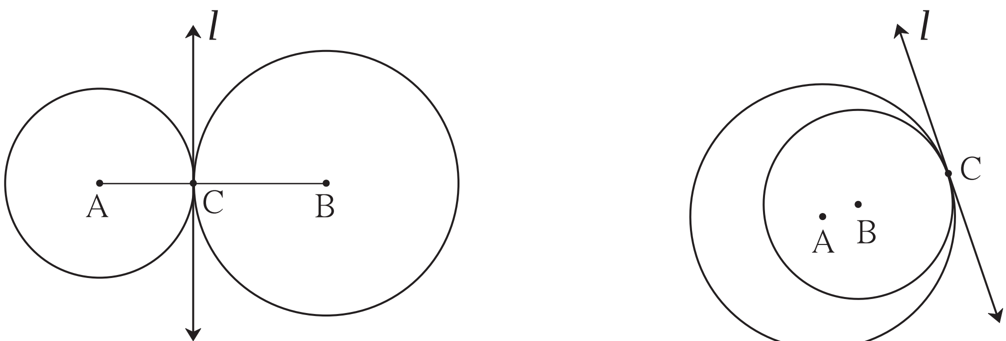
(3) ಆಕೃತಿ 3.26 ದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರ A ಮತ್ತು B ಇರುವ ವರ್ತುಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 3 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು 4 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ.

(i) ಆಕೃತಿ 3.26 (a) ಇದರಲ್ಲಿ $d(A,B)$ ಎಷ್ಟು ಇರುವುದು?

(ii) ಆಕೃತಿ 3.26 (b) ಇದರಲ್ಲಿ $d(A,B)$ ಎಷ್ಟು ಇರುವುದು?

ಸ್ಪರ್ಷ ವರ್ತುಳಗಳ ಪ್ರಮೇಯ (Theorem of touching circles)

ಪ್ರಮೇಯ : ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಷಿಸುವ ವರ್ತುಳ ಸ್ಪರ್ಷಬಿಂದು ಆ ವರ್ತುಳಗಳ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಷೇಯ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ



(a) (b)

ಆಕೃತಿ **3.26**

ಪಕ್ಷ : A ಮತ್ತು B ಕೇಂದ್ರಗಳಿರುವ ವರ್ತುಳಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು C ಇದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : ಬಿಂದು C ಇದು ರೇಷೆ AB ಯ ಮೇಲೆ ಇದೆ.

ಸಿದ್ಧತೆ : ರೇಷೆ l ಇದು ಸ್ಪರ್ಷ ವರ್ತುಳಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆ ಇದೆ. ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ರೇಷೆ $l \perp$ರೇಖ AC, ರೆಷೆ $l \perp$ ರೇಖ BC. $\therefore$ ರೇಖ AC ಮತ್ತು ರೇಖ BC ಈ ರೇಷೆಗಳು lಗೆ ಲಂಬ ಇರುತ್ತದೆ.

ಬಿಂದು C ದಿಂದ ರೆಷೆ l ಗೆ ಒಂದೆ ಲಂಬವಿರುವ ರೇಷೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. $\therefore$ C, A, B ಏಕರೇಷಿಯ ಇವೆ.

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ

(1) ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಷಿಸುವ ವರ್ತುಳಗಳ ಸ್ಪರ್ಷಬಿಂದು ಆ ವರ್ತುಳಗಳ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.

(2) ಬಾಹ್ಯಸ್ಪರ್ಷಿ ವರ್ತುಳಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

(3) ಅಂತರಸ್ಪರ್ಷಿ ವರ್ತುಳಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರವು ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.2

1. ಎರಡು ಅಂತರಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಅನುಕ್ರಮ ವಾಗಿ 3.5 ಸೆ ಮೀ. ಮತ್ತು 4.8 ಸೆಮೀ ಇವೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

2. ಬಾಹ್ಯ ಸ್ಪರ್ಷಿ ಇರುವ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 5.5 ಸೆ ಮೀ. ಮತ್ತು 4.2 ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

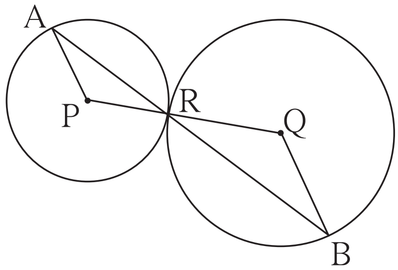
3. ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 4 ಸೆಮೀ, ಮತ್ತು 2.8 ಸೆಮೀ ಇರುವ (i) ಬಾಹ್ಯಸ್ಪರ್ಷಿ (ii) ಅಂತರಸ್ಪರ್ಷಿ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

4. ಆಕೃತಿ 3.27 ರಲ್ಲಿ P ಮತ್ತು Q ಇರುವ ವರ್ತುಳಗಳು ಪರಸ್ಪರ R ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಷಿಸುವವು. ಬಿಂದು R ದಿಂದು ಹೋಗುವ ರೇಷೆ ಆ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಹಾಗಾದರೆ.

(1) ರೇಖ AP || ರೇಖ BQ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

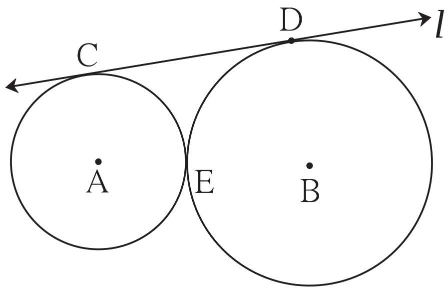
(2) Δ APR ~ Δ RQB ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

(3) $\angle$ PARದ ಅಳತೆ 35° ಇದ್ದರೆ $\angle$ RQB ದ ಅಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.27**

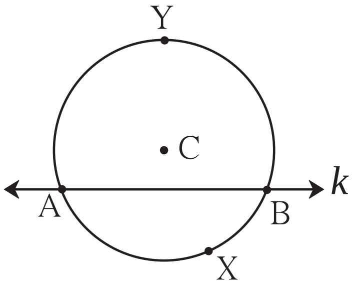
5. ಆಕೃತಿ 3.28 ರಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳಗಳು ಪರಸ್ಪರ E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುತ್ತವೆ. ರೇಷೆ l ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ C ಮತ್ತು D ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ವರ್ತುಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 4 ಸೆಮೀ, ಮತ್ತು 6 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ, ರೇಖ CDಯ ಉದ್ದಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.28**

ಸ್ವಲ್ಪನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ವರ್ತುಳ ಕಂಸ (Arc of a circle)



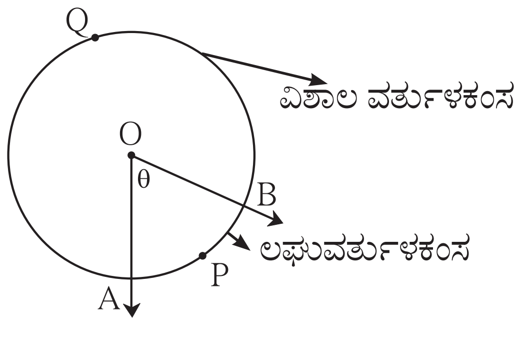
ಆಕೃತಿ 3.29

ವೃತ್ತ ಛೇದಿಕೆಯಿಂದ ವರ್ತುಳದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಆಗುವುದು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಭಾಗ ಮತ್ತು ವೃತ್ತ ಛೇದಿಕೆಯ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು ಇವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಆಕೃತಿಗೆ **ವರ್ತುಳಕಂಸ** ಎನ್ನುವರು.

ವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ವೃತ್ತ ಛೇದಿಕೆ ಇವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಕಂಸದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದು ಅಥವಾ ಕಂಸದ ತುದಿಯ ಬಿಂದುಗಳೆನ್ನುವರು ಆಕೃತಿ 3.29 ರಲ್ಲಿ ವೃತ್ತ ಛೇದಿಕೆ k ದಿಂದ C ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳದ AYB ಮತ್ತು AXB ಈ ಎರಡು ಕಂಸಗಳು ತಯಾರಾಗಿವೆ.

ವೃತ್ತ ಛೇದಿಕೆಯ ಯಾವ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರ ಇರುವುದೋ ಆ ಭಾಗಕ್ಕೆ **ವಿಶಾಲಕಂಸ** ಮತ್ತು ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ಬದಿಯ ಕಂಸಕ್ಕೆ **ಲಘುಕಂಸ** ಎನ್ನುವರು. ಆಕೃತಿ 3.29 ದಲ್ಲಿ ಕಂಸ AYB ಇದು ವಿಶಾಲಕಂಸ ಮತ್ತು ಲಘುಕಂಸ AXB ಇದೆ. ಯಾವುದೊಂದು ವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ಹೆಸರು ಮೂರು ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆದರೆ ಅದು ಸಹಜವಾಗಿ ತಿಳಿಯುವದು ಅದರೆಯಾವದೇ ಸಂಧಿಗ್ದತೆ ನಿರ್ಮಾಣ ವಾಗದಿದ್ದರೆ. ಲಘು ಕಂಸದ ಹೆಸರನ್ನು ಅವುಗಳ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಎರಡು ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಬರೆಯುವರು.ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ 3.29 ರಲ್ಲಿಯ AXB ಈ ಕಂಸ AB ಹೀಗಿಯೂ ಬರೆಯುವುದು.

ನಾವು ಕಂಸದ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ ಇದೇ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವವರಿದ್ದೇವೆ.



ಆಕೃತಿ 3.30

ಕೇಂದ್ರಿಯ ಕೋನ (Central angle)

ಯಾವ ಕೋನದ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದ ಮೇಲೆ ಇರುವುದು ಆ ಕೋನಕ್ಕೆ **ಕೇಂದ್ರಿಯ ಕೋನ** ಎನ್ನುವರು.

ಆಕೃತಿ 3.30 ರಲ್ಲಿ O ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳವಿದ್ದು $\angle$ AOB ಇದು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವಿದೆ.

ವೃತ್ತಛೇದಿಕೆಯಂತೆ ಕೇಂದ್ರಿಯ ಕೋನದಿಂದಲೂ ವರ್ತುಳದ ಎರಡು ಕಂಸಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆಯಾಗುವುದು.

ಕಂಸದ ಅಳತೆ (Measure of an arc)

ಕೆಲವೊಂದು ಸಲ ಎರಡು ಕಂಸಗಳ ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡುವದು ಅಗತ್ಯ ಇರುವುದು ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಆ ಕಂಸಗಳ ಅಳತೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮುಂದಿನಂತೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ.

(1) ಲಘುಕಂಸದ ಅಳತೆಯು ಅದರ ಸಂಗತ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಅಳತೆಯಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಆಕೃತಿ3.30 ರಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರಿಯ $\angle$ AOB ಯ ಅಳತೆ θ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಲಘುಕಂಸ APB ಯ ಅಳತೆ θ ಇರುವುದು.

(2) ವಿಶಾಲ ಕಂಸದ ಅಳತೆ = 360° − ಸಂಗತ ಲಘು ಕಂಸದ ಅಳತೆ

ಆಕೃತಿ 3.30 ರಲ್ಲಿ ವಿಶಾಲಕಂಸ AQB ದ ಅಳತೆ = 360° − ಕಂಸ APB ಯ ಅಳತೆ = $360^\circ - \theta$

(3) ಅರ್ಧವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ಎಂದರೆ ಅರ್ಧವರ್ತುಳದ ಅಳತೆ, ಇದು 180° ಇರುವುದು.

(4) ಪೂರ್ಣ ವರ್ತುಳದ ಅಳತೆ, ಇದು 360° ಇರುವುದು.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಕಂಸದ ಏಕರೂಪತೆ (Congruence of arcs)

ಎರಡು ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಆಕೃತಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಿಸಮಾನವಾಗಿ ಹೋಲುತ್ತವೆ ಆಗ ಅವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಏಕರೂಪತೆಯ ಈ ಸಂಕಲ್ಪನೆಯಂತೆ ಸಮಾನ ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತಯೇ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದು ಬರುವುದು.

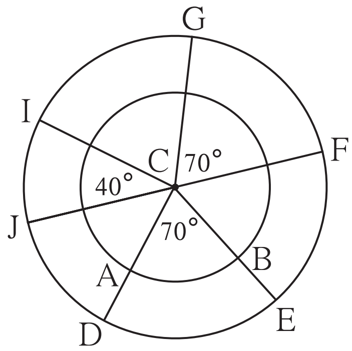
ಅದರಂತೆ ಎರಡು ಕಂಸಗಳು ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ಕಂಸಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತಯೇ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

ಅದರಂತೆ ಎರಡು ಕಂಸಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ಕಂಸಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆಯೆ?

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಉತ್ತರ ಮುಂದಿನ ಕೃತಿ ಮಾಡಿ ಶೋಧಿಸಿರಿ.

ಕೃತಿ :

ಆಕೃತಿ 3.31 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಹಾಗೆ ಕೇಂದ್ರ C ಇರುವ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. $\angle$ DCE ಮತ್ತು $\angle$ FCG ಈ ಸಮಾನ ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಿಂತ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯ $\angle$ ICJ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.31**

$\angle$ DCEಯ ಭುಜಗಳು ಒಳಗಿನ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಕಂಸಕ್ಕೆ AB ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.

ಕಂಸದ ಅಳತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗನುಸಾರ ಕಂಸ AB ಮತ್ತು DE ಇವುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನ ಇರುತ್ತವೆ. ಪರಸ್ಪರ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಸಮಾನ ಹೋಲುತ್ತವೆಯೇ? ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿಯೂ ಇಲ್ಲ.

ಈಗ C-DE; C-FG, ಮತ್ತು C-IJ ಈ ವರ್ತುಳಾಂಶಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಬೇರೆ ಮಾಡಿರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಜೋಡಿಸಿ DE, FG ಮತ್ತು IJ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಕಂಸ ಪರಸ್ಪರ ಹೋಲುತ್ತವೆ ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

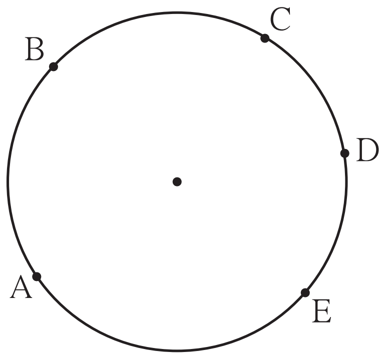
ಈ ಕೃತಿಯಿಂದ, ಎರಡು ಕಂಸ ಏಕರೂಪವಾಗಲು 'ಅವುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವುದು' ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಇದು ನಿಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬಂದಿದೆಯೇ? ಎರಡು ಕಂಸಗಳು ಏಕರೂಪವಾಗಲು ಇನ್ನೂಯಾವ ಶರ್ಯತ್ತುಗಳು ಆಗತ್ಯ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಅನ್ನಿಸುತ್ತದೆ?

ಮೇಲಿನ ಕೃತಿಯಿಂದ ನಿಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವುದೆನಂದರೆ –

ಎರಡು ಕಂಸಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನ ಇರುತ್ತವೆ, ಆಗ ಆ ಕಂಸಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

'ಕಂಸ DE ಮತ್ತು ಕಂಸ GF ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ' ಈ ಚಿಹ್ನ ಕಂಸ DE $\cong$ ಕಂಸ GF ಎಂದು ತೋರಿಸುವರು

ಕಂಸಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಗುಣಧರ್ಮ (Property of sum of measures of arcs)



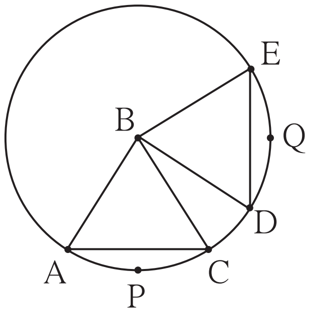
ಆಕೃತಿ **3.32**

ಆಕೃತಿ 3.32ರಲ್ಲಿ A, B, C, D, E ಇವುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಅನೇಕ ಕಂಸಗಳು ತಯಾರಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಸ ABC ಮತ್ತು ಕಂಸ CDE ಇವುಗಳಲ್ಲಿ C ಇದು ಒಂದು ಹಾಗೂ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ಇದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ ಕಂಸ ABC ಮತ್ತು ಕಂಸ CDE ಇವುಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಕಂಸ ACEದ ಅಳತೆಯಷ್ಟು ಆಗುವುದು.

m(ಕಂಸ ABC) + m(ಕಂಸ CDE) = m(ಕಂಸ ACE)

ಅದರೆ ABC ಮತ್ತು ಕಂಸ BCE ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಂದು [ಕಂಸ BCಯ ಎಲ್ಲವೂ] ಸಾಮಾನ್ಯ ಇವೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಕಂಸ ABC ಮತ್ತು ಕಂಸ BCE ಇವುಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಕಂಸ ABE ಅಳತೆಯಷ್ಟು ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಪ್ರಮೇಯ : ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ (ಅಥವಾ ಏಕರೂಪ ವರ್ತುಳಗಳ) ಏಕರೂಪ ಕಂಸಗಳ ಸಂಗತ ಜ್ಯಾಗಲು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ **3.33**

ಪಕ್ಷ : ಕೇಂದ್ರ B ಇರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಕಂಸ APC $\cong$ ಕಂಸ DQE

ಸಾಧ್ಯ : ಜ್ಯಾ AC $\cong$ ಜ್ಯಾ DE

ಸಿದ್ಧತೆ : (ರಿಕ್ತ ಸ್ಥಾನ ತುಂಬಿ ಸಿದ್ಧತೆ ಪೂರ್ಣಮಾಡಿರಿ)

ΔABC ಮತ್ತು Δ DBE ಇವುಗಳಲ್ಲಿ

ಭುಜ AB $\cong$ ಭುಜ DB .....

ಭುಜ .... $\cong$ ಭುಜ .....

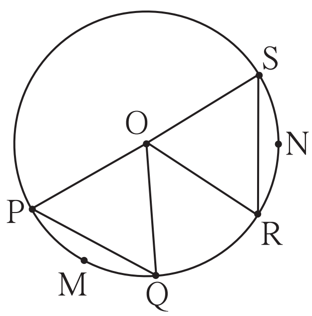
$\angle$ ABC $\cong$ $\angle$ DBE .....(ಏಕರೂಪ ಕಂಸಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ)

$\therefore$ Δ ABC $\cong$ Δ DBE .....

$\therefore$ ಜ್ಯಾ AC $\cong$ ಜ್ಯಾ DE .....

ಪ್ರಮೇಯ : ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ (ಅಥವಾ ಏಕರೂಪ ವರ್ತುಳಗಳ) ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾಗಳ ಸಂಗತ ಕಂಸಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

ಪಕ್ಷ : ರೇಖ PQ ಮತ್ತು ರೇಖ RS ಇವುಗಳು O ಕೇಂದ್ರ. ಇರುವ ವರ್ತುಳಗಳ ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ **3.34**

ಸಾಧ್ಯ : ಕಂಸ PMQ $\cong$ ಕಂಸ RNS ಮುಂದಿನ ವಿಚಾರ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಷ್ಟು ಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧತೆ ಬರೆಯಿರಿ. ಎರಡು ಕಂಸಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರಲು ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನ ಇರಬೇಕಾಗುವುದು. ಕಂಸ PMQ ಮತ್ತು ಕಂಸ RNS ಇವುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಕಂಸ ಇರುವುದರಂದ ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯ ಸಮಾನ ಇರುವವು. ಕಂಸಗಳ ಅಳತೆಗಳು

ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೊನಗಳ ಅಳತೆ ಇರುವುದು. ಈ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ದೊರೆಯಲು ತ್ರಿಜ್ಯ OP, OQ, OR ಮತ್ತು OS ತೆಗೆಯ ಬೇಕಾಗುವುದು. ಅವುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ ಅದನ್ನು ತೆಗೆದು ತಯಾರಾದ Δ OPQ ಮತ್ತು Δ ORS ಇವು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆಯೇ?

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ನೀವು ಏಕರೂಪ ವರ್ತುಳಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

ಯೋಚಿಸೋಣ ಬನ್ನಿ

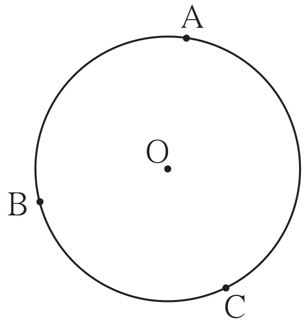
- ಮೇಲಿನ ಎರಡರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ಕಂಸ APC ಮತ್ತು DQE ಈ ಲಘುಕಂಸಗಳು ಏಕರೂಪ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ವಿಶಾಲಕಂಸ ಏಕರೂಪ ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೂಡಾ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವುದೇ?
- ಎರಡನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾಗಳ ಸಂಗತ ವಿಶಾಲ ಕಂಸಗಳೂ ಸಹ ಏಕರೂಪ ವಾಗುತ್ತದೆಯೇ? PQ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ RS ಇವುಗಳು ವ್ಯಾಸ ಇರುವಾಗಲೂ ಈ ಪ್ರಮೇಯ ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದೆ?

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ.(1) O ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ A, B, C ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಿವೆ.

(i) ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ತಯಾರಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಕಂಸಗಳ ಹೆಸರು ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) ಕಂಸ BC ಮತ್ತು ಕಂಸ AB ಇವುಗಳ 110° ಮತ್ತು 125° ಇರುವವು ಹಾಗಾದರೆ ಉಳಿದ ಕಂಸಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.35**

ಉತ್ತರ : (i) ಕಂಸದ ಹೆಸರು –

ಕಂಸ AB, ಕಂಸ BC, ಕಂಸ AC, ಕಂಸ ABC, ಕಂಸ ACB, ಕಂಸ BAC

(ii) ಕಂಸ ABCಯ ಅಳತೆ = ಕಂಸ ABಯ ಅಳತೆ + ಕಂಸ BCಯ ಅಳತೆ

$= 125^\circ + 110^\circ = 235^\circ$

ಕಂಸ ACಯ ಅಳತೆ = 360° – ಕಂಸ ABCಯ ಅಳತೆ

$= 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$

ಅದೇ ರೀತಿ ಕಂಸ ACBಯ ಅಳತೆ = $360^\circ - 125^\circ = 235^\circ$

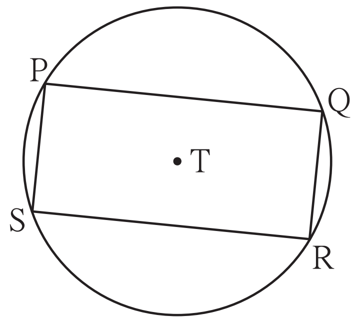
ಮತ್ತು ಕಂಸ BACಯ ಅಳತೆ = $360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$

ಉದಾ.(2) ಆಕೃತಿ 3.36 ರಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರ T ಇರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಆಯತ PQRS ಅಂತರ ಲಿಖಿತ ಇದೆ.

ಹಾಗಾದರೆ –

(i) ಕಂಸ PQ $\cong$ ಕಂಸ SR

(ii) ಕಂಸ SPQ $\cong$ ಕಂಸ PQR ಎಂದು ತೋರಿಸಿ



ಆಕೃತಿ **3.36**

ಉತ್ತರ : $\square$ PQRS ಇದು ಆಯತ ವಿದೆ.

$\therefore$ ಜ್ಯಾ PQ $\cong$ ಜ್ಯಾ SR .... (ಆಯತದ ಸಂಮುಖ ಭುಜ)

$\therefore$ ಕಂಸ PQ $\cong$ ಕಂಸ SR ...... (ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾಗಳ ಸಂಗತ ಕಂಸ)

ಜ್ಯಾ PS $\cong$ ಜ್ಯಾ QR ..... (ಆಯತದ ಸಂಮುಖ ಭುಜ)

$\therefore$ ಕಂಸ SP $\cong$ ಕಂಸ QR ..... (ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾಗಳ ಸಂಗತ ಕಂಸ)

$\therefore$ ಕಂಸ SP ಮತ್ತು ಕಂಸ QR ಇವುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವುದು.

ಈಗ, ಕಂಸ SP ಮತ್ತು ಕಂಸ PQ ಇವುಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು

= ಕಂಸ PQ ಮತ್ತು ಕಂಸ QR ಇವುಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು

$\therefore$ ಕಂಸ SPQಯ ಅಳತೆ = ಕಂಸ PQRಯ ಅಳತೆ

$\therefore$ ಕಂಸ SPQ $\cong$ ಕಂಸ PQR

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ

(1) ಯಾವ ಕೋನದ ಶಿರೋ ಬಿಂದು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದ ಮೇಲೆ ಇರುವುದು ಆ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಕೇಂದ್ರಿಯ ಕೋನಗಳು ಎನ್ನುವರು.

(2) ಕಂಸದ ಅಳತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ – (i) ಲಘು ಕಂಸದ ಅಳತೆಯ ಸಂಗತ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಅಳತೆಯಷ್ಟು ಇರುವುದು

(ii) ವಿಶಾಲ ಕಂಸದ ಅಳತೆ = 360° – ಸಂಗತ ಲಘು ಕಂಸದ ಅಳತೆ (iii) ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ಅಳತೆ 180° ಇರುವುದು

(3) ಎರಡು ವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಅಳತೆ ಸಮಾನ ಇರುವವು ಆಗ ಕಂಸಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತದೆ

(4) ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಕಂಸ ABC ಮತ್ತು ಕಂಸ CDE ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಂದು C ಇದು ಒಂದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಇರುವುದು ಆಗ

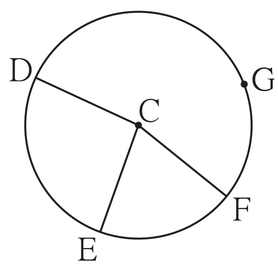
m(ಕಂಸ ABC) + m(ಕಂಸ CDE) = m(ಕಂಸ ACE)

(5) ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ (ಅಥವಾ ಏಕರೂಪ ವರ್ತುಳಗಳ) ಏಕರೂಪ ಕಂಸಗಳ ಸಂಗತ ಜ್ಯಾಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

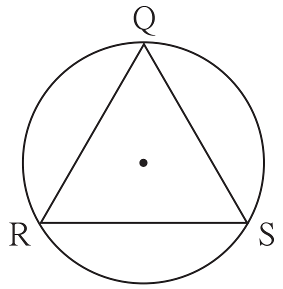
(6) ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ (ಅಥವಾ ಏಕರೂಪ ವರ್ತುಳಗಳ) ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾಗಳ ಸಂಗತ ಕಂಸ ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತದೆ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.3

1. ಆಕೃತಿ 3.37 ರಲ್ಲಿ C ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ G, D, E ಮತ್ತು F ಬಿಂದುಗಳಿವೆ $\angle$ ECFದ ಅಳತೆ 70° ಮತ್ತು ಕಂಸ DGFದ ಅಳತೆ 200° ಇದ್ದರೆ ಕಂಸ DE ಮತ್ತು ಕಂಸ DEF ದ ಅಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.37**



ಆಕೃತಿ **3.38**

2★. ಆಕೃತಿ 3.38ರಲ್ಲಿ Δ QRS ಸಮಭುಜ ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಹಾಗಾದರೆ

(1) ಕಂಸ RS $\cong$ ಕಂಸ QS $\cong$ ಕಂಸ QR

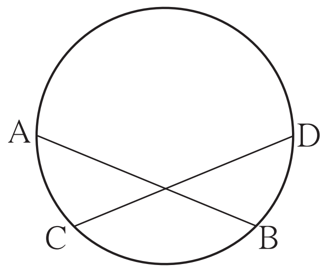
(2) ಕಂಸ QRSದ ಅಳತೆ 240° ಇರುವುದು

3. ಆಕೃತಿ 3.39 ರಲ್ಲಿ

ಜ್ಯಾ AB $\cong$ ಜ್ಯಾ CD,

ಹಾಗಾದರೆ. –

ಕಂಸ AC $\cong$ ಕಂಸ BD

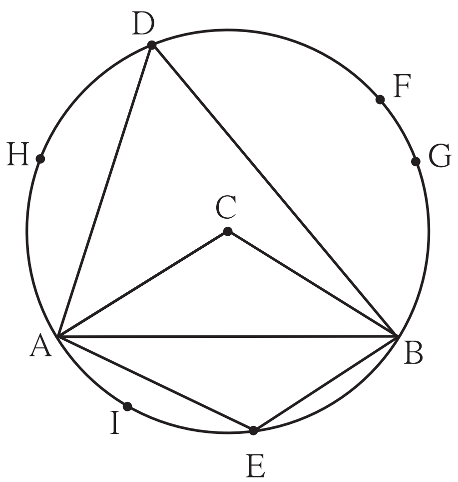


ಆಕೃತಿ **3.39**

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ಬಿಂದು, ವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ರೇಷೆ (ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆ) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ ಇರುವು ಕೆಲವು ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ ಈಗ ವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ಕೋನ ಈ ಸಂಬಂಧದ ಕೆಲವು ಗುಣಧರ್ಮ ಈಗ ನೋಡೋಣ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೆಲವು ಗುಣಧರ್ಮ. ಬಗ್ಗೆ ಕೃತಿಯಿಂದೆ ಮಾಹಿತಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೊಣ.

ಕೃತಿ I :



ಆಕೃತಿ **3.40**

ಕೇಂದ್ರ C ಇರುವ ದೊಡ್ಡದಾದ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆಕೃತಿ 3.40 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ ಅದರ ಜ್ಯಾ AB ತೆಗೆಯಿರಿ. ಕೇಂದ್ರಿಯ ಕೋನ ACB ರಚಿಸಿರಿ. ಜ್ಯಾ AB ಯಿಂದ ತಯಾರಾದ ವಿಶಾಲ ಕಂಸದ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು D ಮತ್ತು ಲಘು ಕಂಸದ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು E ಇದು ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

(1) $\angle$ADB ಮತ್ತು $\angle$ACB ಅಳೆಯಿರಿ, ಅವುಗಳ ಅಳತೆಗಳ ತುಲನೆ ಮಾಡಿರಿ.

(2) $\angle$ADB ಮತ್ತು $\angle$AEB ಅಳೆಯಿರಿ, ಬಂದಿರುವ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

(3) ಕಂಸ ADBಯ ಮೇಲೆ F, G, H ಹೀಗೆ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಬಿಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ $\angle AFB$, $\angle AGB$, $\angle AHB$, ... ಇವುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಈ ಅಳತೆಗಳನ್ನು $\angle ADB$ ಯ ಅಳತೆಯೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ ತುಲನೆ ಮಾಡಿರಿ.

(4) ಕಂಸ AEBಯ ಮೇಲೆ I ಈ ಯಾವುದೊಂದು ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ $\angle$ AIB ಅಳೆಯಿರಿ. ಆ ಅಳತೆಯ $\angle$ AEB ಯ ಅಳತೆಯ ಜೊತೆ ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡರಿ.

ಈ ಕೃತಿಯಿಂದ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದ ಸಂಗತಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇರಬಹುದು.

(1) $\angle$ ACBಯ ಅಳತೆ $\angle$ ADBಯ ಅಳತೆಯ ಇಮ್ಮಡಿ ಇದೆ.

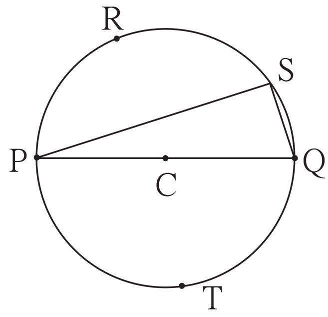
(2) $\angle$ ADB ಮತ್ತು $\angle$ AEB ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು 180° ಇದೆ.

(3) $\angle$ AHB, $\angle$ ADB, $\angle$ AFB, $\angle$ AGB ಎಲ್ಲವುಗಳ ಅಳತೆ ಸಮಾನ ಇರುವುದು

(4) $\angle$ AEB ಮತ್ತು $\angle$ AIB ಇವುಗಳ ಅಳತೆ ಸಮಾನ ಇರುವುವು.

ಕೃತಿ II :

ಆಕೃತಿ 3.41 ಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕೇಂದ್ರ C ಇರುವ ದೊಡ್ಡದಾದ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ರೇಷೆ PQ ಇದು ಅದರ ಯಾವುದೊಂದು ವ್ಯಾಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆ ವ್ಯಾಸದಿಂದ ತಯಾರಾದ ಎರಡು ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳಗಳ ಮೇಲೆ R,S,T ಈ ಕೆಲವು ಬಿಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. $\angle$ PRQ, $\angle$ PSQ, $\angle$ PTQ ಅಳೆಯಿರಿ ಇದರಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನ ಕಾಟಕೋನ ಇರುವುದು ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.



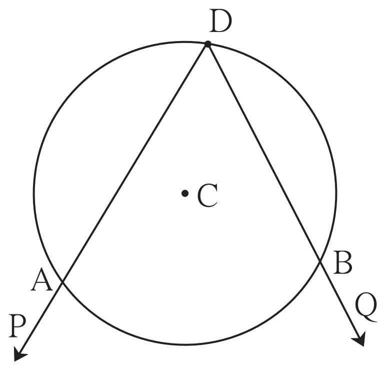
ಆಕೃತಿ **3.41**

ಮೇಲಿನ ಕೃತಿಯಿಂದ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದು ಬಂದಿರುವ ಗುಣಧರ್ಮ ಇದು ವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ಕೋನ ಈ ಸಂಬಂಧದ ಪ್ರಮೇಯವು ಇದೆ. ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಈಗ ನಾವು ನೋಡೋಣ, ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಮೊದಲು ಕೆಲವು ಸಂಜ್ಞೆಗಳ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳ ಬೇಕಾಗುವದು

ಅಂತರ ಲಿಖಿತ ಕೋನ (Inscribed angle)

ಆಕೃತಿ 3.42 ರಲ್ಲಿ C ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳವಿದೆ. $\angle$ PDQ ಇದರ ಶಿರೋಬಿಂದು D ಇದು ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಇದೆ. ಕೊನದ ಭುಜಗಳು DP ಮತ್ತು DQ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು ಇಂತಹ ಕೋನಕ್ಕೆ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಕಂಸದಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ಲಿಖಿತ ಕೋನ ಎನ್ನುವರು.

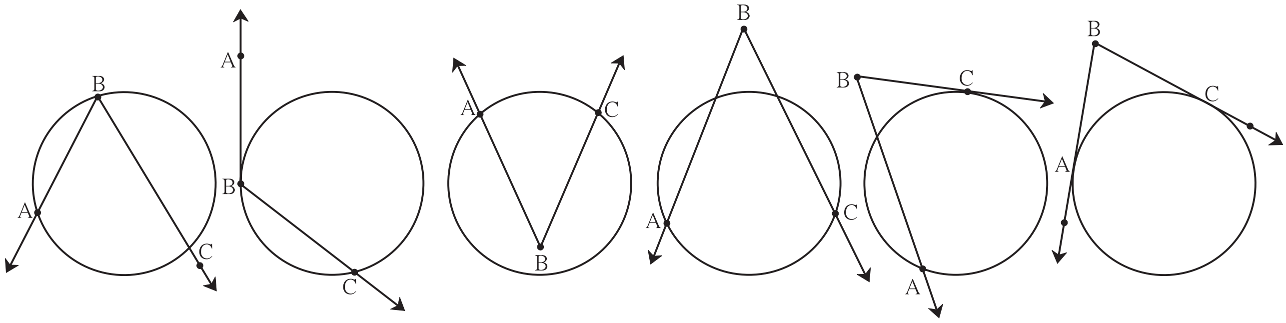
ಆಕೃತಿ 3.42 ರಲ್ಲಿ $\angle$ ADB ಈ ಕಂಸ ADB ದಲ್ಲಿ ಅಂತರ ಲಿಖಿತವಿದೆ.



ಆಕೃತಿ **3.42**

ಅಂತರ್ಖಂಡಿತ ಕಂಸ (Intercepted arc)

ಮುಂದಿನ ಆಕೃತಿ 3.43 ರಲ್ಲಿ (i) ರಿಂದ (vi) ಈ ಎಲ್ಲ ಆಕೃತಿಗಳ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ.



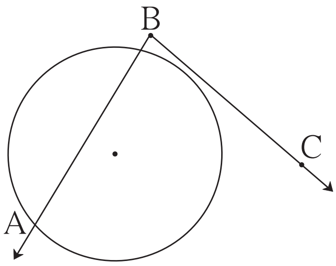
ಆಕೃತಿ **3.43**

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿಯ $\angle$ ABC ಯ ಅಂತರಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬರುವ ವರ್ತುಳ ಕಂಸಕ್ಕೆ $\angle$ ABC ದಿಂದ ಅಂತರ್ಖಂಡಿತ ಮಾಡಿದ ಕಂಸ ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಅಂತರ್ಖಡಿಯ ಕಂಸದ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳು ವರ್ತುಳ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಇರುವುದು. ಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಮೇಲೆ ಕಂಸದ ಒಂದು ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದು ಇರುವುದು ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ.

ಆಕೃತಿ 3.43 ರಲ್ಲಿ (i), (ii) ಮತ್ತು (iii) ಈ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಕಂಸ ಅಂತರಖಂಡಿತವಾಗಿದೆ ಆದರೆ ಆಕೃತಿ (iv), (v) ಮತ್ತು (vi) ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಕೊನಗಳು ಎರಡು ಕಂಸಗಳನ್ನು ಅಂತರ ಖಂಡಿತಮಾಡಿವೆ.

ಆಕೃತಿ (ii) ಮತ್ತು (v) ರಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು (vi) ರಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಷ ಮಾಡುವವು ಇದನ್ನು ಕೂಡಾ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

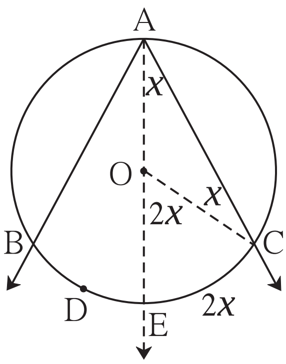
ಆಕೃತಿ 3.44 ರಲ್ಲಿ ಕಂಸ ಇದು ಅಂತರ್ಖಂಡಿತ ಕಂಸವಿಲ್ಲ ಕಾರಣ ಕೋನದ BC ಈ ಭುಜದ ಮೇಲೆ ಕಂಸದ ಒಂದೂ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಇಲ್ಲ



ಆಕೃತಿ **3.44**

ಅಂತರಲಿಖಿತ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ (Inscribed angle theorem)

ಪ್ರಮೇಯ : ವರ್ತುಳದ ಅಂತರಲಿಖಿತ ಮಾಡಿದ ಕೋನದ ಅಳತೆಯ ಅದು ಅಂತರಖಂಡಿತ ಮಾಡಿದ ಕಂಸದ ಅರ್ಥದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ **3.45**

ಪಕ್ಷ : ಕೇಂದ್ರ O ವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ $\angle$BAC ಇದು ಕಂಸ BACದಲ್ಲಿ ಅಂತರಲಿಖಿತ ಮಾಡಿದೆ. ಈ ಕೋನಗಳಿಂದ ಕಂಸ BDC ಅಂತರ್ಖಂಡಿತ ವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : $\angle BAC = \frac{1}{2}\ m$(ಕಂಸ BDC)

ರಚನೆ : ಕಿರಣ AO ತೆಗೆದೆನು, ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅದು ಬಿಂದು E ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು. ತ್ರಿಜ್ಯ OC ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು.

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ AOCಯಲ್ಲಿ

ಭುಜ OA $\cong$ ಭುಜ OC ...... (ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

$\therefore \angle OAC = \angle OCA$ ..... (ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ)

$\angle OAC = \angle OCA = x$ ತಿಳಿಯುವಾ. ...... (I)

ಈಗ $\angle EOC = \angle OAC + \angle OCA$ .... ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಹ್ಯಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ

$= x^\circ + x^\circ = 2x^\circ$

ಆದರೆ $\angle EOC$ ಇದು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಇದೆ

$\therefore m$(ಕಂಸ EC) $= 2x^\circ$ .... ಕಂಸದ ಅಳತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ..... (II)

$\therefore$ (I) ಮತ್ತು (II) ರಿಂದ

$\angle OAC = \angle EAC = \frac{1}{2}\ m$(ಕಂಸ EC) ..... (III)

ಇದೇ ರೀತಿ ತ್ರಿಜ್ಯ OB ರಚಿಸಿ $\angle EAB = \frac{1}{2}\ m$(ಕಂಸ BE) ಇದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಲು ಬರುವದು...... (IV)

$\therefore \angle EAC + \angle EAB = \frac{1}{2}\ m$(ಕಂಸ EC) $+ \frac{1}{2}\ m$(ಕಂಸ BE) .... (III) ಮತ್ತು (IV)ರ ಮೇಲಿಂದ

$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2}\ [m$(ಕಂಸ EC) $+ m$(ಕಂಸ BE)$]$

$= \frac{1}{2}\ [m$(ಕಂಸ BEC)$] = \frac{1}{2}\ [m$(ಕಂಸ BDC)$]$ ..... (V)

ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಿರಿ, ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಂತರ ಲಿಖಿತ ಮಾಡಿದ ಕೋನ ಮತ್ತು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಸಂಭವಿಸುವವು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರ ಕೋನದ ಭುಜದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಅಂತರ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ ಅಥವಾ ಬಾಹ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆ (III) ಮತ್ತು (V)ರಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧವಾದವು. ಈಗ ಉಳಿದ ಮೂರು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ.

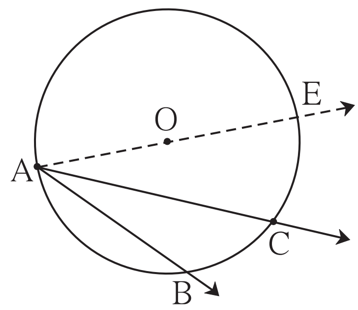
ಆಕೃತಿ 3.46 ರಲ್ಲಿ

$\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE$

$= \frac{1}{2}\ m$(ಕಂಸ BCE) $- \frac{1}{2}\ m$(ಕಂಸ CE) ...... (III)

$= \frac{1}{2}\ [m$(ಕಂಸ BCE) $- m$(ಕಂಸ CE)$]$

$= \frac{1}{2}\ [m$(ಕಂಸ BC)$]$ ...... (VI)



ಆಕೃತಿ **3.46**

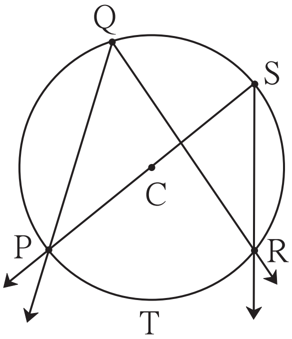
ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಧಾನ ಮುಂದಿನಂತೆಯೂ ಬರೆಯುವರು

ವರ್ತುಳ ಕಂಸವು ವರ್ತುಳದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅಂತರಿತವಾದ (subtended) ಕೋನದ ಅಳತೆ ಅದೇ ಕಂಸದಿಂದ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಅಂತರಿತ ಮಾಡಿದ ಕೋನದ ಅಳತೆಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಮುಂದಿನ ಉಪ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ವಿಧಾನಗಳು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು

ಅಂತರಲಿಖಿತ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯದ ಉಪಪ್ರಮೇಯ (Corollaries of inscribed angle theorem)

1. ಒಂದೇ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಅಂತರಲಿಖಿತವಾದ ಎಲ್ಲಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ **3.47**

ಆಕೃತಿ 3.47ದ ಆಧಾರದಿಂದ ಪಕ್ಷ ಮತ್ತು ಸಾಧ್ಯ ಬರೆಯಿರಿ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಯೋಚನೆ ಮಾಡಿ ಸಿದ್ಧತೆ ಬರೆಯಿರಿ.

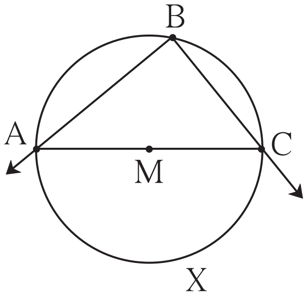
(1) $\angle$ PQRದಿಂದ ಯಾವ ಕಂಸವು ಅಂತರ್ಖಂಡಿತ ವಾಗಿದೆ?

(2) $\angle$ PSR ದಿಂದ ಯಾವ ಕಂಸವು ಅಂತರ್ಖಂಡಿತ ವಾಗಿದೆ?

(3) ಅಂತರಲಿಖಿತ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ಆದರಿಂದ ಅಂತರ್ಖಂಡಿತವಾದ ಕಂಸದ ಅಳತೆ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಬಂಧ ಹೇಗೆ ಇರುವುದು?

2. ಅರ್ಧವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಂತರಲಿಖಿತವಾದ ಕೋನವು ಕಾಟಕೋನ ಇರುವುದು

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿ 3.48ರ ಆಧಾರದಿಂದ ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಪಕ್ಷ, ಸಾಧ್ಯ ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧತೆ ಬರೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.48**

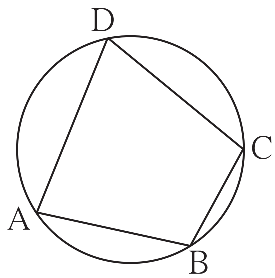
ಚಕ್ರೀಯ ಚೌಕೋನ (Cyclic quadrilateral)

ಚೌಕೋನದ ನಾಲ್ಕೂ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ ಆ ಚೌಕೋನಕ್ಕೆ ಚಕ್ರೀಯ ಚೌಕೋನ ಎನ್ನುವರು.

ಚಕ್ರೀಯ ಚೌಕೋನ ಪ್ರಮೇಯ (Theorem of cyclic quadrilateral)

ಪ್ರಮೇಯ : ಚಕ್ರೀಯ ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪೂರಕ ಇರುತ್ತವೆ.

ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿಯ ರಿಕ್ತ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಗೋಳಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.49**

ಪಕ್ಷ : □ ______ ಇದು ಚಕ್ರೀಯ ಏದೆ

ಸಾಧ್ಯ : $\angle B + \angle D =$ ______

______ $+ \angle C = 180^\circ$

ಸಿದ್ಧತೆ : $\angle$ ADC ಇದು ಅಂತರಲಿಖಿತ ಕೋನವಿದ್ದು ಆದರಿಂದ ಕಂಸ ABC ಅಂತರ್ಖಂಡಿತ ವಾಗಿದೆ

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}$ ______ .... (I)

ಆದರಂತೆ ______ ಇದು ಅಂತರ ಲಿಖಿತ ಕೋನ ವಿದ್ದು ಆದರಿಂದ ಕಂಸ ADC ಅಂತರ್ಖಂಡಿತ ವಾಗಿದೆ.

$\therefore \boxed{} = \frac{1}{2}$ m (ಕಂಸ ADC) ..... (II)

$\therefore \angle ADC + \boxed{} = \frac{1}{2} \boxed{} + \frac{1}{2}$ m(ಕಂಸ ADC)..... [(I) ಮತ್ತು (II) ಮೇಲಿಂದ]

$= \frac{1}{2} [\boxed{} + \frac{1}{2}$ m(ಕಂಸ ADC)]

$= \frac{1}{2} \times 360^\circ$ .... [ಕಂಸ ABC ಮತ್ತು ಕಂಸ ADC ಕೂಡಿ ಪೂರ್ಣ ವರ್ತುಳವಾಗುವುದು.

$= \boxed{}$

ಇದೇ ರೀತಿ $\angle A + \angle C = \boxed{}$ ಇದನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು.

ಚಕ್ರೀಯ ಚೌಕೋನ ಪ್ರಮೇಯದ ಉಪಪ್ರಮೇಯ (Corollary of cyclic quadrilateral theorem)

ಪ್ರಮೇಯ : ಚಕ್ರೀಯ ಚೌಕೋನದ ಬಾಹ್ಯಕೋನ ಆದರ ಸಂಲಗ್ನ ಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಕೋನಕ್ಕೆ ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ನೀವು ಬರೆಯಿರಿ.

ಯೋಚಿಸೋಣ ಬನ್ನಿ

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ಇದನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿದಾಗ ಉಳಿದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು 180° ಇರುವುದು. ಇದನ್ನು ಬೇರೆ ಪ್ರಕಾರದಿಂದ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಲು ಬರುವುದೆ?

ಚಕ್ರೀಯ ಚೌಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ (Converse of cyclic quadrilateral theorem)

ಪ್ರಮೇಯ : ಚೌಕೊನದ ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳು ಪೂರಕವಿದ್ದರೆ ಆ ಚೌಕೋನವು ಚಕ್ರೀಯ ಇರುವದು.

ಈ ಪ್ರಮೇಯನ್ನು ಅಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವುದು. ನೀವು ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಿರಿ.

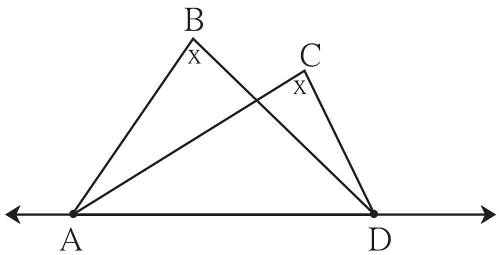
ಮೇಲಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಮೇಲಿಂದ ನಮಗೆ ಹೀಗೆ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವುದು, ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳು ಪೂರಕವಿದ್ದರೆ ಆ ಚೌಕೊನದ ಪರಿವರ್ತುಳ ಇರುವುದು.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತುಳ ಇರುವುದು, ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ, ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚೌಕೋನದ ಪರಿವರ್ತುಳ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಯಾವುದೊಂದು ಶರ್ಯತ್ತು ಪೂರ್ಣವಾದಾಗ ಚೌಕೋನದ ಪರಿವರ್ತುಳ ಇರುವುದು, ಅಂದರೆ ಆಗ ಚೌಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆ ಆದು ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ತಿಳಿದು ಬರುವುದು.

ಇನ್ನೂ ಬೇರೊಂದು ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ನೈಕ ರೇಷೀಯ ಬಿಂದುಗಳು ಚಕ್ರೀಯ ಇರುತ್ತವೆ ಅದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ : ರೇಷೇಯ ಎರಡು ಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳು, ಆ ರೇಷೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಗೆ ಇರುವ ಎರಡು ಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳೊಂದಿಗೆ ಏಕರೂಪ ಕೋನಗಳನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರೆ ಆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ **3.50**

ಪಕ್ಷ : ಬಿಂದು B ಮತ್ತು C ಇದು ರೇಷೆ AD ಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಇವೆ $\angle ABD \cong \angle ACD$

ಸಾಧ್ಯ : ಬಿಂದು A, B, C, D ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಇವೆ (ಅಂದರೆ $\square$ ABCD ಚಕ್ರೀಯ ಇವೆ)

ಆದರ ಅಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಸಿದ್ಧತೆ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು.

ಯೋಚಿಸೋಣ ಬನ್ನಿ

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯವು ಯಾವುದರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ?

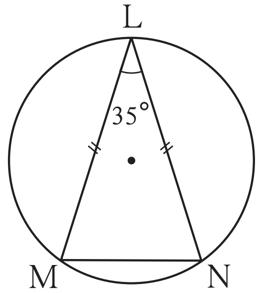
ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. (1) ಆಕೃತಿ 3.51ರಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ LM $\cong$ ಜ್ಯಾ LN

$\angle L = 35^\circ$ ಹಾಗಾದರೆ

(i) m(ಕಂಸ MN) = ಎಷ್ಟು?

(ii) m(ಕಂಸ LN) = ಎಷ್ಟು?



ಆಕೃತಿ **3.51**

ಉತ್ತರ : (i) $\angle L = \frac{1}{2}\, m$(ಕಂಸ MN) ......(ಅಂತರ ಲಿಖಿತ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ)

$\therefore\ 35 = \frac{1}{2}\, m$(ಕಂಸ MN)

$\therefore\ 2 \times 35 = m$(ಕಂಸ MN) $= 70^\circ$

(ii) m(ಕಂಸ MLN) $= 360^\circ - m$(ಕಂಸ MN) ...... (ಕಂಸದ ಅಳತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ)

$= 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$

ಈಗ, ಜ್ಯಾ LM $\cong$ ಜ್ಯಾ LN

$\therefore$ ಕಂಸ LM $\cong$ ಕಂಸ LN

ಆದರೆ m(ಕಂಸ LM) + m(ಕಂಸ LN) = m(ಕಂಸ MLN) $= 290^\circ$ ..... (ಕಂಸದ ಬೇರೀಜಿನ ಗುಣಧರ್ಮ)

m(ಕಂಸ LM) = m(ಕಂಸ LN) $= \frac{290^\circ}{2} = 145^\circ$

ಅಥವಾ (ii) ಜ್ಯಾ LM $\cong$ ಜ್ಯಾ LN

$\therefore\ \angle M = \angle N$ ...... (ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ)

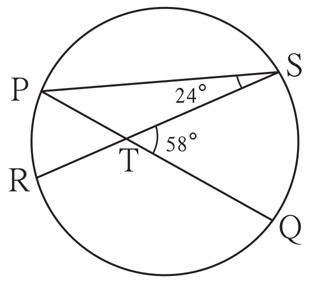
$\therefore\ 2\angle M = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$

$\therefore\ \angle M = \frac{145^\circ}{2}$

ಈಗ $\therefore\ m$(ಕಂಸ LN) $= 2 \times \angle M$ (ಅಂತರ ಲಿಖಿತ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ)

$$= 2 \times \frac{145^\circ}{2}$$
$$= 145^\circ$$

ಉದಾ. (2) ಆಕೃತಿ 3.52ರಲ್ಲಿ, ಜ್ಯಾ PQ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ RS ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಬಿಂದು T ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ **3.52**

(i) $\angle STQ = 58^\circ$ ಇದ್ದರೆ, ಮತ್ತು $\angle PSR = 24^\circ$, ಇದ್ದರೆ m(ಕಂಸ SQ) ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) $\angle STQ = \frac{1}{2}$ [m(ಕಂಸ PR) + m(ಕಂಸ SQ)] ಇದನ್ನು ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ಕೋಡಿರಿ.

(iii) ಜ್ಯಾ PQ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ RS ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೋನ ಅಳತೆ ಯಾವದೇ ಇದ್ದರೂ ಸಹ.

$m\angle STQ = \frac{1}{2}$ [m(ಕಂಸ PR) + m(ಕಂಸ SQ)] ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

(iv) ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾಗುವ ಗುಣಧರ್ಮ ಶಬ್ದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : (i) $\angle SPQ = \angle SPT = 58^\circ - 24^\circ = 34^\circ$ .... (ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಹ್ಯ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ)

m(ಕಂಸ QS) $= 2\ \angle SPQ = 2 \times 34^\circ = 68^\circ$

(ii) m(ಕಂಸ PR) $= 2\ \angle PSR = 2 \times 24^\circ = 48^\circ$

ಈಗ $\frac{1}{2}$ [m(ಕಂಸ PR) + m(ಕಂಸ SQ)] $= \frac{1}{2}\ [48 + 68]$

$$= \frac{1}{2} \times 116 = 58^\circ$$
$$= \angle STQ$$

(iii) ಈ ಗುಣಧರ್ಮದ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿಯ ಬಿಟ್ಟ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

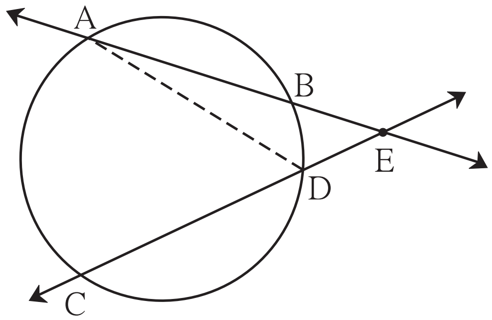
$\angle STQ = \angle SPQ + \boxed{\qquad}$ .... (ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಹ್ಯಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ)

$= \frac{1}{2}\ m$(ಕಂಸ SQ) $+ \boxed{\qquad}$ .... (ಅಂತರ ಲಿಖಿತ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ)

$$= \frac{1}{2}\ [\boxed{\qquad} + \boxed{\qquad}]$$

(iv) ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳ ಅಂತರಭಾಗದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಆ ಜ್ಯಾಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ, ಆ ಕೋನಗಳಿಂದ ಅಂತರಖಂಡಿತ ಮಾಡಿದ ಕಂಸ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳಿಂದ ಅಂತರ ಖಂಡಿತ ಮಾಡಿದ ಕಂಸ, ಅವುಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ. (3) ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾಗಳಿಂದ ಸಮಾವಿಷ್ಟವಾಗುವ ರೇಷೆಗಳು ವರ್ತುಳದ ಬಾಹ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಆ ರೇಷೆಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನದ ಅಳತೆಯ, ಆ ಕೋನದಿಂದ ಅಂತರ ಖಂಡಿತ ಮಾಡಿದ ಕಂಸಗಳ ಅಳತೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ, ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 3.53

ಪಕ್ಷ : ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾ AB ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ CD ಇವುಗಳು ವರ್ತುಳದ ಬಾಹ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದು E ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

ಸಾಧ್ಯ : $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{ಕಂಸ } AC) - m(\text{ಕಂಸ } BD)]$

ರಚನೆ : ರೇಖ AD ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ

ಸಿದ್ಧತೆ : ಈ ಗುಣದರ್ಮದ ಸಿದ್ಧತೆ, ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ (2) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಲು ಬರುವುದು. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ Δ AEDಯ ಕೋನ, ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಹ್ಯಕೋನ ಇತ್ಯಾದಿ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ

(1) ವರ್ತುಳದ ಅಂತರಲಿಖಿತ ಮಾಡಿದ ಕೋನದ ಅಳತೆಯು, ಅದರಿಂದ ಅಂತರಖಂಡಿತ ವಾಗುವ ಕಂಸದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

(2) ವರ್ತುಳದ ಒಂದೇ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಅಂತರಲಿಖಿತವಾದ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ.

(3) ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಂತರಲಿಖಿತವಾದ ಕೋನ ಕಾಟಕೋನ ಇರುತ್ತದೆ

(4) ಚೌಕೋನದ ನಾಲ್ಕು ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಚೌಕೋನಕ್ಕೆ ಚಕ್ರೀಯ ಚೌಕೋನ ಎನ್ನುವರು.

(5) ಚಕ್ರೀಯ ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಕೋನಗಳು ಪೂರಕ ಇರುತ್ತವೆ.

(6) ಚಕ್ರೀಯ ಚೌಕೋನದ ಬಾಹ್ಯಕೋನ ಅದರ ಸಂಲಗ್ನ. ಸಂಮುಖ ಕೋನಕ್ಕೆ ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತದೆ.

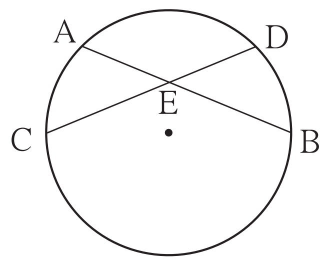
(7) ಚೌಕೋನದ ಸಂಮುಖ ಕೋನ ಪರಸ್ಪರ ಪೂರಕವಿದ್ದರೆ ಆ ಚೌಕೋನವು ಚಕ್ರೀಯ ಇರುತ್ತದೆ.

(8) ರೇಷೀಯ ಎರಡು ಬಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳು, ಆರೇಷೀಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ಎರಡು ಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಏಕರೂಪ ಕೋನಗಳನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಆ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.

(9) ಬದಿಯ ಆಕೃತಿ 3.54 ರಲ್ಲಿ

(i) $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{ಕಂಸ } AC) + m(\text{ಕಂಸ } DB)]$

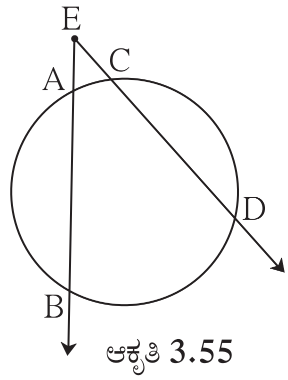
(ii) $\angle CEB = \frac{1}{2}[m(\text{ಕಂಸ } AD) + m(\text{ಕಂಸ } CB)]$



ಆಕೃತಿ 3.54

(10) ಬದಿಯ ಆಕೃತಿ 3.55 ರಲ್ಲಿ

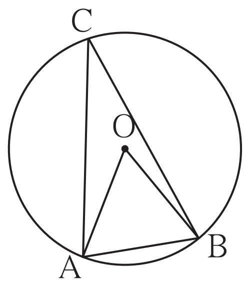
$$\angle BED = \frac{1}{2}\ [m(\text{ಕಂಸ } BD) - m(\text{ಕಂಸ } AC)]$$



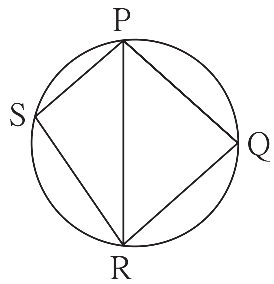
ಆಕೃತಿ **3.55**

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.4

1. ಆಕೃತಿ 3.56 ರಲ್ಲಿ, ಕೇಂದ್ರ O ಇರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ AB ಯ ಉದ್ದಳತೆ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟು ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ (1) $\angle AOB$ (2) $\angle ACB$ (3) ಕಂಸ AB ಮತ್ತು (4) ಕಂಸ ACBಯ ಆಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.56**



ಆಕೃತಿ **3.57**

2. ಆಕೃತಿ 3.57 ರಲ್ಲಿ, $\square$ PQRS ಇದು ಚಕ್ರೀಯ ಇದೆ. ಭುಜ PQ $\cong$ ಭುಜ RQ. $\angle PSR = 110°$, ಇದ್ದರೆ

(1) $\angle PQR$ = ಎಷ್ಟು?

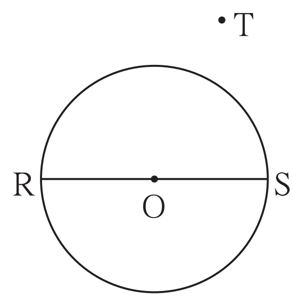
(2) m(ಕಂಸ PQR) = ಎಷ್ಟು?

(3) m(ಕಂಸ QR) = ಎಷ್ಟು?

(4) $\angle PRQ$ = ಎಷ್ಟು?

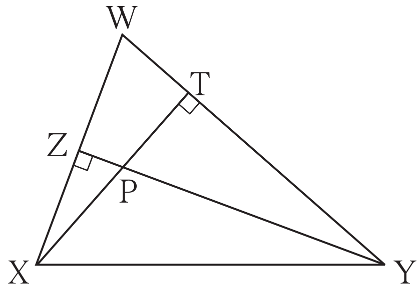
3. ಚಕ್ರೀಯ $\square$MRPN ದಲ್ಲಿ $\angle R = (5x - 13)°$ ಮತ್ತು $\angle N = (4x + 4)°$, ಹಾಗಾದರೆ $\angle R$ ಮತ್ತು $\angle N$ ಇವುಗಳ ಆಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಆಕೃತಿ 3.58 ಯಲ್ಲಿ ರೇಖ RS ಇದು ಕೇಂದ್ರ O ಇರುವ ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸವಿದೆ. T ಬಿಂದು ವರ್ತುಳದ ಬಾಹ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯ ಬಿಂದು ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ $\angle RTS$ ಇದು ಲಘುಕೋನ ವಿದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.58**

5. ಯಾವುದೇ ಆಯತ ಇದು ಚಕ್ರೀಯ ಚೌಕೋನ ಇರುತ್ತದೆ, ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.



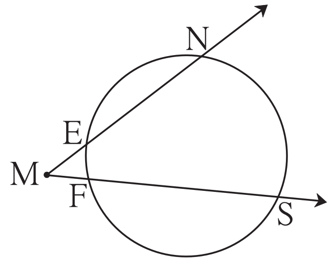
ಆಕೃತಿ **3.59**

6. ಆಕೃತಿ 3.59 ರಲ್ಲಿ ರೇಖ YZ ಮತ್ತು XT ಇದು Δ WXYದ ಶಿರೋಬಿಂದು Pದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು ಹಾಗಾದರೆ.

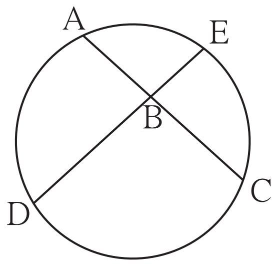
(1) $\square$ WZPT ಇದು ಚಕ್ರೀಯ ಇದೆ.

(2) ಬಿಂದು X, Z, T, Y, ಇವುಗಳು ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಇವೆ.

7. ಆಕೃತಿ 3.60ರಲ್ಲಿ m(ಕಂಸ NS) = $125°$, m(ಕಂಸ EF) = $37°$, ಹಾಗಾದರೆ $\angle$NMS ಇದರ ಅಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.60**



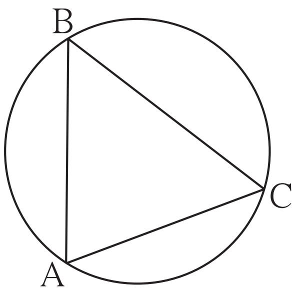
ಆಕೃತಿ **3.61**

8. ಆಕೃತಿ 3.61ರಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ AC ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ DE ಪರಸ್ಪರ B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ, $\angle$ABE = $108°$ ಮತ್ತು m(ಕಂಸAE) = $95°$ ಇದ್ದರೆ m(ಕಂಸ DC) ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

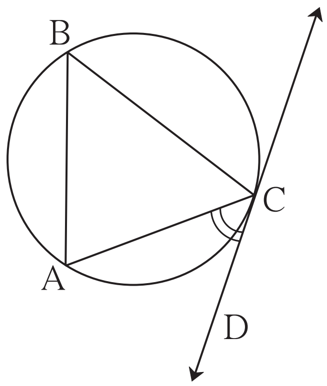
ಕೃತಿ :

ದೊಡ್ಡದಾದ ಒಂದು ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ ಆಕೃತಿ 3.62 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಆ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ರೇಖ AC ತೆಗೆಯಿರಿ, ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ B ಯಾವುದೊಂದು ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. $\angle$ABC ಈ ಅಂತರಲಿಖಿತ ಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ. $\angle$ABC ಅಳತೆ ಮಾಡಿ, ಬರೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.62**

ಈಗ, ಆಕೃತಿ 3.63 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅದೇ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ರೇಷೆ CD ಈ ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. $\angle$ACDಯ ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ಬರೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.63**

$\angle$ACD ಯ ಅಳತೆ, $\angle$ABC ಯ ಅಳತೆ ಯಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬರುವುದು.

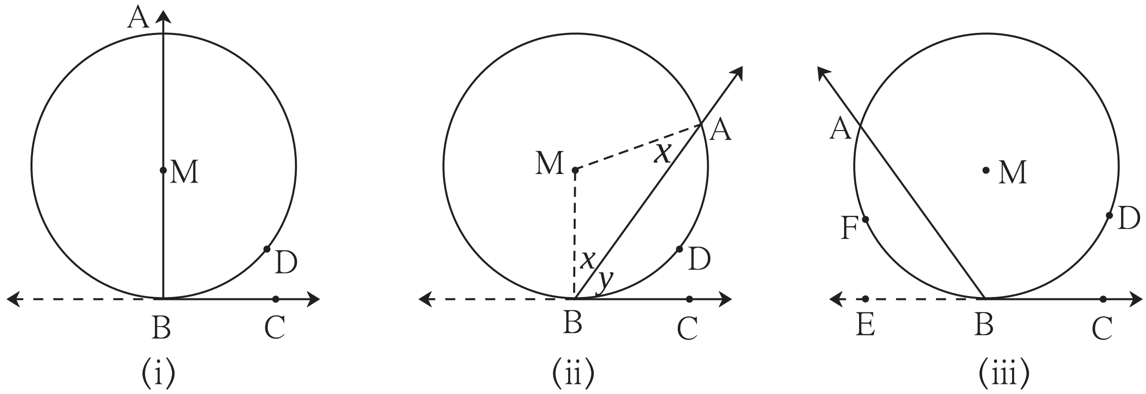
$\angle ABC = \frac{1}{2}\ m($ಕಂಸ AC$)$ ದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಇದರಿಂದ $\angle$ACDಯ ಅಳತೆಯು ಕೂಡಾ ಕಂಸ ACಯ ಅಳತೆಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುವುದು ಎಂಬ ನಿಷ್ಕರ್ಷ ದೊರೆಯುವುದು.

ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆಯ ಇದೊಂದು ಮಹತ್ವದ ಗುಣಧರ್ಮ ಇದೆ. ಅದನ್ನು ನಾವು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡೋಣ

ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆ-ಛೇದಿಕೆ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ (Theorem of angle between tangent and secant)

ಪ್ರಮೇಯ : ಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದುವು ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿದ್ದು, ಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜವು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಷಿಸುತ್ತದ್ದು, ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜವು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಆ ಕೋನದ ಅಳತೆಯು ಆದರಿಂದ ಅಂತರ ಖಂಡಿತ ವಾಗುವ ಕಂಸದ ಅಳತೆಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ **3.64**

ಪಕ್ಷ : $\angle$ ABCಯ ಶಿರೋಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರ M ಇರುವ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಇದೆ, ಆದರ ಒಂದು ಭುಜ BC ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಷಿಸುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಭುಜ BA ಇದು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಬಿಂದು A ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ, ಕಂಸ ADB ಇದು $\angle$ ABC ಯಲ್ಲಿ ಅಂತರ ಖಂಡಿತ ವಾಗಿದೆ.

ಸಾಧ್ಯ : $\angle ABC = \frac{1}{2}\ m($ಕಂಸ ADB$)$

ಸಿದ್ಧತೆ : ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಿದ್ಧತೆ, ಮೂರು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೂಡಬೇಕಾಗುವುದು.

(1) ಆಕೃತಿ 3.64 (i) ರಂತೆ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರ M ಇದು $\angle$ ABCಯ ಒಂದು ಭುಜದ ಮೇಲೆ ಇದ್ದಾಗ

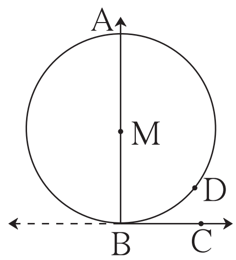
$\angle ABC = \angle MBC = 90^\circ$ ..... (ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆಯ ಪ್ರಮೇಯ).....(I)

ಕಂಸ ADB ಇದು ಅರ್ಧವರ್ತುಳ ಇದೆ.

$\therefore\ m($ಕಂಸ ADB$) = 180^\circ$ ..... (ಕಂಸದ ಅಳತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ).....(II)

(I) ಮತ್ತು (II) ರಿಂದ

$\angle ABC = \frac{1}{2}\ m($ಕಂಸADB$)$



ಆಕೃತಿ **3.64(i)**

(2) ಆಕೃತಿ 3.64 (ii) ರಂತೆ ಕೇಂದ್ರ M ಇದು $\angle$ ABCಯ ಬಾಹ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ,

ತ್ರಿಜ್ಯ MA ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ MB ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಈಗ, $\angle MBA = \angle MAB$ ..... (ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ)

ಅದರಂತೆ $\angle MBC = 90^\circ$ ..... (ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆಯ ಪ್ರಮೇಯ) ..... (I)

$\angle$ MBA = $\angle$ MAB = x, $\angle$ ABC = y ತಿಳಿಯುವಾ

$\angle$ AMB = 180 − (x + x) = 180 − 2x

$\angle$ MBC = $\angle$ MBA + $\angle$ ABC = $x + y$

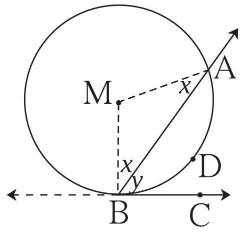
$\therefore x + y = 90^\circ$ $\therefore 2x + 2y = 180^\circ$

Δ AMB ಯಲ್ಲಿ $2x + \angle$ AMB = 180°

$\therefore 2x + 2y = 2x + \angle$ AMB

$\therefore 2y = \angle$ AMB

$\therefore y = \angle ABC = \frac{1}{2}\angle AMB$



ಆಕೃತಿ **3.64(ii)**

(3) ಮೂರನೇ ಸಾಧ್ಯತೆಗನುಸಾರ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಿದ್ಧತೆ ಆಕೃತಿ 3.64 (iii)ರ ಆಧಾರದಿಂದ ಬಿಟ್ಟ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಕಿರಣ $\boxed{}$ ಇದು ಕಿರಣ BC ಯ ವಿರುದ್ಧ ಕಿರಣ ತೆಗೆಯಲಾಗಿ

ಈಗ, $\angle ABE = \frac{1}{2}\, m(\boxed{})$ ...... (2) ರಲ್ಲಿಯ ಸಿದ್ಧತೆಯಂತೆ

$180 - \boxed{} = \angle ABE$ ..... (ರೇಷೀಯ ಜೋಡಿ ಕೋನ)

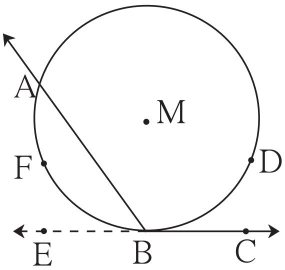
$\therefore 180 - \boxed{} = \frac{1}{2}\, m($ಕಂಸ AFB$)$

$= \frac{1}{2}\, [360 - m(\boxed{})]$

$\therefore 180 - \angle ABC = 180 - \frac{1}{2}\, m($ಕಂಸ ADB$)$

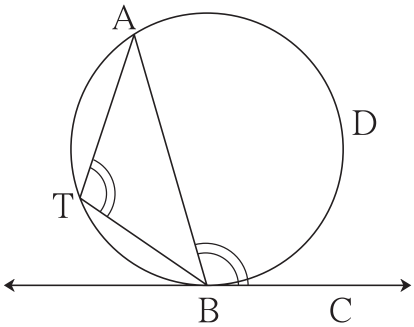
$\therefore -\angle ABC = -\frac{1}{2}\, m(\boxed{})$

$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2}\, m($ಕಂಸ ADB$)$



ಆಕೃತಿ **3.64(iii)**

ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಛೇದಿಕೆ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯದ ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ



ಆಕೃತಿ **3.65**

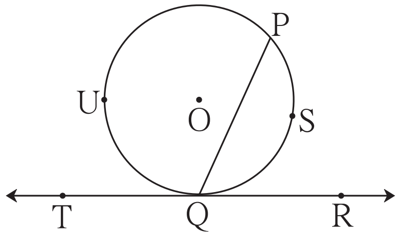
ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ AB ದು ವೃತ್ತ ಛೇದಿಕೆ ಮತ್ತು BC ಇದು ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇದೇ, ಕಂಸ ADB ಇದು $\angle$ ABC ಯಲ್ಲಿ ಅಂತರಖಂಡಿತವಾಗಿದೆ ಕಂಸವಿದೆ. ಜ್ಯಾ AB ಇದು ವರ್ತುಳವನ್ನು ಎರಡು ಕಂಸಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ಕಂಸಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ಕಂಸಗಳಿವೆ. ಈಗ ಕಂಸ ADBಯ ವಿರುದ್ಧ ಕಂಸದ ಮೇಲೆ T ಈ ಬಿಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ, ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$\angle ABC = \frac{1}{2}\, m$ (ಕಂಸ ADB) $= \angle ATB$.

$\therefore$ ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ ಎಳೆದ ಜ್ಯಾ, ಅದರಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನ, ಅದು ಅಂತರ ಖಂಡಿತ ಮಾಡಿದ ಕಂಸದ ವಿರುದ್ಧ ಕಂಸದಲ್ಲಿಯ ಅಂತರಲಿಖಿತ ಕೋನದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ - ಛೇದಿಕೆ ಕೋನಗಳ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾದ ಒಂದು ಅಂತ್ಯಬಿಂದು ವಿನಿಂದ ಹೋಗುವ ಒಂದು ರೇಷೆ ಎಳೆಯಲಾಗಿ, ಆ ರೇಷೆಯ ಆ ಜ್ಯಾದಲ್ಲಿ ಉಂಟು ಮಾಡದ ಕೋನದ ಅಳತೆಯ, ಅದೇ ಕೋನವು ಅಂತರಖಂಡಿತ ಮಾಡಿದ ಕಂಸದ ಅಳತೆಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ, ಆ ರೇಷೆಯು ಆ ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇರುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ **3.66**

ಆಕೃತಿ 3.66 ರಲಿ,

$\angle$ PQR = $\frac{1}{2}$ m(ಕಂಸ PSQ) ಇದ್ದರೆ

[ಅಥವಾ $\angle$ PQT = $\frac{1}{2}$ m(ಕಂಸ PUQ) ಇದ್ದರೆ,]

ಹಾಗಾದರೆ TR ಇದು ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇರುವುದು, ಆದರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಪ್ರಮೇಯದ ಉಪಯೋಗ, ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯುವ ಒಂದು ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಆಗುವುದು. ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಅ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಸಿದ್ಧತೆ ಕೊಡಲು ಬರುವದು

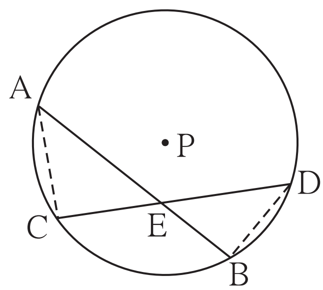
ಜ್ಯಾಗಳ ಅಂತರ ಛೇದಗಳ ಪ್ರಮೇಯ (Theorem of internal division of chords)

ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ವರ್ತುಳದ ಅಂತರ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಒಂದು ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳ ಉದ್ಧಳತೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಇದು ಎರಡನೆಯ ಜ್ಯಾ ಎರಡು ಭಾಗಗಳ ಉದ್ಧಳತೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ : P ಕೆಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ AB ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ CD, ಪರಸ್ಪರ ವರ್ತುಳದ ಅಂತರ ಭಾಗದಲ್ಲಿ E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

ಸಾಧ್ಯ : AE × EB = CE × ED

ರಚನ : ರೇಖ AC ಮತ್ತು ರೇಖ DB ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಆಕೃತಿ **3.67**

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ CAE ಮತ್ತು Δ BDE ದಲ್ಲಿ.

$\angle$ AEC $\cong$ $\angle$ DEB ..... (ವಿರುದ್ಧ ಕೋನ)

$\angle$ CAE $\cong$ $\angle$ BDE ..... (ಒಂದೇ ವರ್ತುಳ ಕಂಸದಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ಲಿಖಿತ ಕೋನ)

$\therefore$ Δ CAE ~ Δ BDE ..... (ಕೊ-ಕೊ ಸಮರೂಪ ಪರೀಕ್ಷೆ)

$\therefore$ $\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$ ..... (ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು)

$\therefore$ AE × EB = CE × ED

ಯೋಚಿಸೋಣ ಬನ್ನಿ

ಆಕೃತಿ 3.67ರಲ್ಲಿ ರೇಖ AC ಮತ್ತು ರೇಖ DB ರಚಿಸಿ ನಾವು ಪ್ರಮೇಯ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಅದರ ಬದಲಾಗಿ ರೇಖ AD ಮತ್ತು ರೇಖ CB ರಚಿಸಿ ಈ ಪ್ರಮೇಯ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಲು ಬರುವುದೆ?

ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಗಾಗಿ,

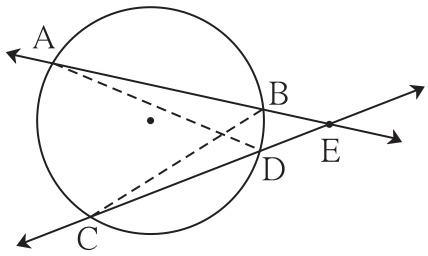
ಆಕೃತಿ 3.67 ರಲ್ಲಿ AB ಈ ಜ್ಯಾದ ಬಿಂದು E ದಿಂದ AE ಮತ್ತು EB ಹೀಗೆ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿವೆ. ರೇಖ AE ಮತ್ತು ರೇಖ EB ಈ ಹೊಂದಿದೆ ಭುಜಿ ವುಳ್ಳ ಆಯತ ತೆಗೆಯಲಾಗಿ AE × EB ಇದು ಆ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಇರುವುದು, ಆದರಂತೆ CE × ED ಇದು ಜ್ಯಾ CD ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಇರುವುದು. ನಾವು AE × EB = CE × ED ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಮಂಡಿಸುವರು

ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ವರ್ತುಳದ ಅಂತರಭಾಗದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದ್ದರೆ, ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಇದು ಎರಡನೇ ಜ್ಯಾದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಆಯದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ.

ಜ್ಯಾಗಳ ಬಾಹ್ಯ ಛೇದನದ ಪ್ರಮೇಯ (Theorem of external division of chords)

ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ AB ಮತ್ತು CD ಈ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳಿಂದ ಸಮಾವಿಷ್ಟವಾಗುವ ವೃತ್ತಿ ಛೇದಿಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವರ್ತುಳದ ಬಾಹ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬಿಂದು E ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ AE × EB = CE × ED ಇರುವುದು.



ಆಕೃತಿ **3.68**

ಪ್ರಮೇಯದ ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಆಕೃತಿಯ ಆಧಾರದಿಂದ ಪಕ್ಷ ಮತ್ತು ಸಾಧ್ಯ ನೀವು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

ರಚನೆ : ರೇಖ AD ಮತ್ತು BC ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ರಿಕ್ತ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ತುಂಬಿ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ ADE ಮತ್ತು Δ CBE ಯಲ್ಲಿ,

$\angle$ AED ≅ $\boxed{}$ .... (ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

$\angle$ DAE ≅ $\angle$ BCE .... ($\boxed{}$)

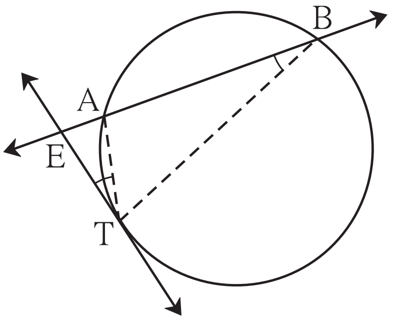
$\therefore \Delta$ ADE ~ $\boxed{}$ .... ($\boxed{}$)

$\therefore \dfrac{(AE)}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... (ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜ)

$\therefore$ $\boxed{}$ = CE × ED

ಸ್ಪರ್ಶಕ ಛೇದಿಕ ರೇಖಾಖಂಡದ ಪ್ರಮೇಯ (Tangent secant segments theorem)

ವರ್ತುಳದ ಬಾಹ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ E ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ ತೆಗೆದ ವೃತ್ತಛೇದಿಕೆಗಳು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಬಿಂದು A ಮತ್ತು B ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೋಗುವ ಸ್ಪರ್ಶಿಕ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಬಿಂದು T ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಷಿಸುತ್ತಿದ್ದಾಗ $EA \times EB = ET^2$ ಆಗುವುದು.



ಆಕೃತಿ **3.69**

ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ವಿಧಾನದ ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಪಕ್ಷ ಮತ್ತು ಸಾಧ್ಯ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

ರಚನೆ : ರೇಖೆ TA ಮತ್ತು ರೇಖೆ TB ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಸಿದ್ಧತೆ : Δ EAT ಮತ್ತು Δ ETB ಯಲ್ಲಿ

$\angle AET \cong \angle TEB$ .... (ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

$\angle ETA \cong \angle EBT$.. (ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ-ಛೇದಿಕೆ ಪ್ರಮೇಯ)

$\therefore \Delta EAT \sim \Delta ETB$ ..... (ಕೋ-ಕೋ ಸಮರೂಪತೆ)

$\therefore \frac{ET}{EB} = \frac{EA}{ET}$ .....(ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಂಗತ ಭಜ)

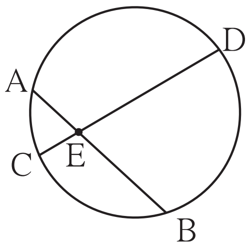
$\therefore EA \times EB = ET^2$

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ

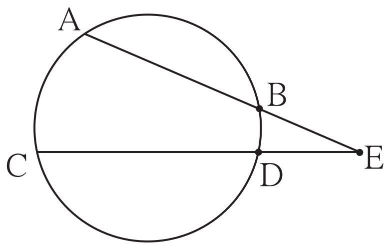
(1) ಆಕೃತಿ 3.70 ಅನುಸಾರ

$AE \times EB = CE \times ED$

ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಜ್ಯಾಗಳ ಅಂತರ ಛೇದನದ ಪ್ರಮೇಯ ಎನ್ನುವರು



ಆಕೃತಿ **3.70**



ಆಕೃತಿ **3.71**

(2) ಆಕೃತಿ 3.71 ಅನುಸಾರ,

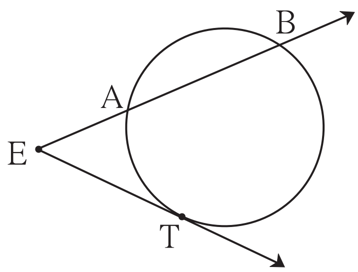
$AE \times EB = CE \times ED$

ಈ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಜ್ಯಾಗಳ ಬಾಹ್ಯ ಛೇದನದ ಪ್ರಮೇಯ ಎನ್ನುವರು

(3) ಆಕೃತಿ 3.72 ಅನುಸಾರ

$EA \times EB = ET^2$

ಈಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ-ಛೇದಿಕೆ ರೇಖಾಖಂಡದ ಪ್ರಮೇಯ ಎನ್ನುವರು

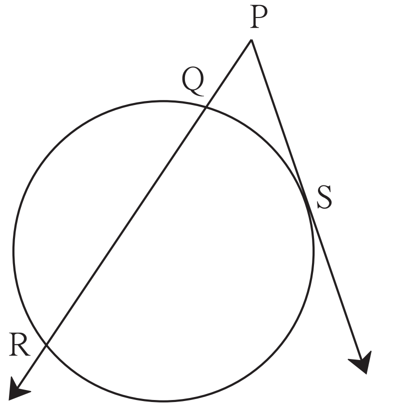


ಆಕೃತಿ **3.72**

ಉದಾ. (1) ಆಕೃತಿ 3.73 ರಲ್ಲಿ ರೇಖ PS ಇದು ಸ್ಪರ್ಷಿಕಾಖಂಡವಿದೆ. ರೇಷೆ PR ಇದು ವೃತ್ತ ಛೇದಿಕೆ ಇದೆ.

PQ = 3.6, ಮತ್ತು

QR = 6.4 ಇದ್ದರೆ PSದ ಅಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.73**

ಉತ್ತರ : $PS^2 = PQ \times PR$.... (ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆ ಛೇದಿಕೆ ರೇಖಾ ಖಂಡದ ಪ್ರಮೇಯ)

$= PQ \times (PQ + QR)$

$= 3.6 \times [3.6 + 6.4]$

$= 3.6 \times 10$

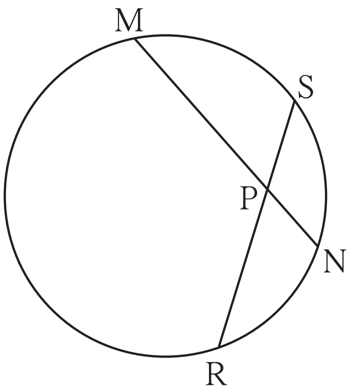
$= 36$

$\therefore PS = 6$

ಉದಾ. (2) ಆಕೃತಿ 3.74 ರಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ MN ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ RS ಪರಸ್ಪರ P ಬಿಂದು ವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

PR = 6, PS = 4, MN = 11

ಇದ್ದರೆ PN ದ ಉದ್ಧಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ



ಆಕೃತಿ **3.74**

ಉತ್ತರ : ಜ್ಯಾಗಳ ಅಂತರ ಛೇದದ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ

$PN \times PM = PR \times PS$... (I)

$PN = x$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ $\therefore PM = 11 - x$

ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು (I) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$x(11 - x) = 6 \times 4$

$\therefore\ 11x - x^2 - 24 = 0$

$\therefore\ x^2 - 11x + 24 = 0$

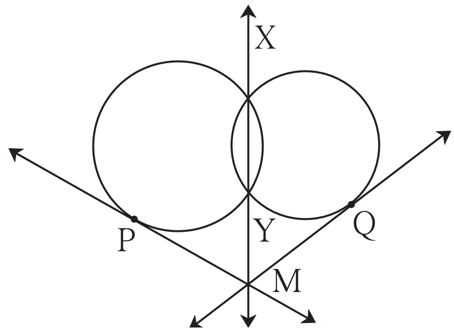
$\therefore\ (x - 3)(x - 8) = 0$

$\therefore\ x - 3 = 0$ ಅಥವಾ $x - 8 = 0$

$\therefore\ x = 3$ ಅಥವಾ $x = 8$

$\therefore$ PN = 3 ಅಥವಾ PN = 8

ಉದಾ. (3) ಆಕೃತಿ 3.75ದಲ್ಲಿ, ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಬಿಂದು X ಮತ್ತು Y ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿವೆ, ರೇಷೆ XYದ M ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತೆಗೆದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಆ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ರೇಖ PM ≅ ರೇಖ QM ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.75**

ಉತ್ತರ : ರಿಕ್ತ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ರೇಷೆ MX ಇದು ಎರಡೂ ವರ್ತುಳಗಳ .... ಇದೆ.

$\therefore PM^2 = MY \times MX$ ..... (I)

ಅದರಂತೆ .....=..... × ....., (ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆ–ಛೇದಿಕೆ ರೇಖಾ ಖಂಡದ ಪ್ರಮೇಯ) .... (II)

$\therefore$ (I) ಮತ್ತು (II) ರಿಂದ ...... = QM^2

$\therefore$ PM =QM

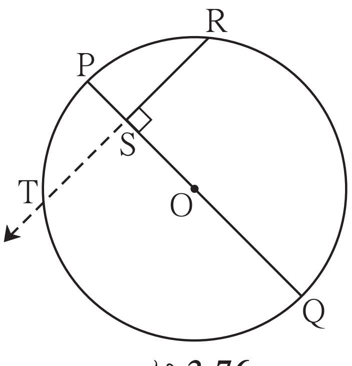
ರೇಖ PM ≅ ರೇಖ QM

ಉದಾ. (4) ಆಕೃತಿ 3.76 ದಲ್ಲಿ, ರೇಖ PQ ಇದು O ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸ ಇದೆ. ಬಿಂದು R ಇದು ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಇವೆ.

ರೇಖ RS ⊥ ರೇಖ PQ.

ಹಾಗಾದರೆ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ – SR ಇದು PS ಮತ್ತು SQ ಇದರ ಭೂಮಿತಿ ಮಧ್ಯ ಇದೆ.

[ಅಂದರೆ $SR^2 = PS \times SQ$]



ಆಕೃತಿ **3.76**

ಉತ್ತರ : ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿದ ಹಂತಗಳಿಂದ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(1) ಕಿರಣ RS ತೆಗೆಯಿರಿ, ಅದು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು ಅದಕ್ಕೆ T ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.

(2) RS = TS ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.

(3) ಜ್ಯಾಗಳ ಅಂತರ ಛೇದದ ಪ್ರಮೇಯ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮಾನತೆ ಬರೆಯಿರಿ.

(4) RS = TS ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

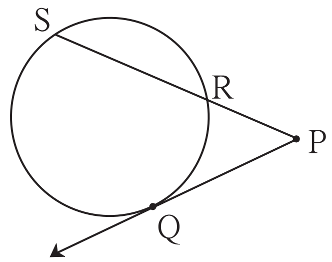
ಯೋಚಿಸೋಣ ಬನ್ನಿ

(1) ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿ 3.76 ರಲ್ಲಿ ರೇಖ PR ಮತ್ತು ರೇಖ RQ ರಚಿಸಿದಾಗ Δ PRQ ಯಾವ ಪ್ರಕಾರದ್ದು ಆಗುವುದು?

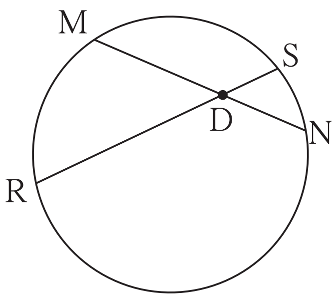
(2) ಮೇಲಿನ ಉದಾ. (4) ದಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧಮಾಡಿದ ಗುಣಧರ್ಮ ಈ ಮೊದಲು ಬೇರೆ ರೀತಿಯಿಂದ ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿದ್ದೀರಾ?

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.5

1. ಆಕೃತಿ 3.77 ರಲ್ಲಿ, ಬಿಂದು Q ಇದು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು ಇದೆ.
PQ = 12, PR = 8, ಇದ್ದರೆ
PS = ಎಷ್ಟು ? RS = ಎಷ್ಟು ?



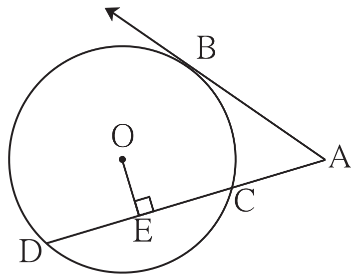
ಆಕೃತಿ **3.77**



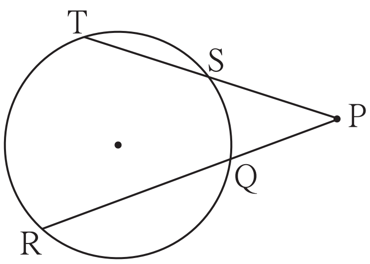
ಆಕೃತಿ **3.78**

2. ಆಕೃತಿ 3.78ರಲ್ಲಿ, ಜ್ಯಾ MN ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ RS ಒಂದನ್ನೊಂದು D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.
(1) RD = 15, DS = 4,
ಮತ್ತು MD = 8 ಇದ್ದರೆ DN = ಎಷ್ಟು?
(2) RS = 18, MD = 9,
DN = 8 ಇದ್ದರೆ DS = ಎಷ್ಟು?

3. ಆಕೃತಿ 3.79ರಲ್ಲಿ, ಬಿಂದು B ಇದು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದು ಮತ್ತು ಬಿಂದು O ಇದು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ.
ರೇಖ OE $\perp$ ರೇಷೆ AD, AB = 12,
AC = 8, ಹಾಗಾದರೆ (1) AD (2) DC
ಮತ್ತು (3) DE ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



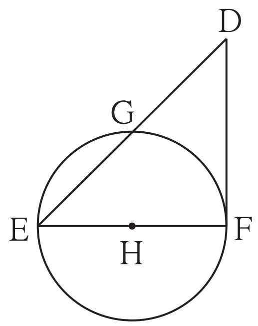
ಆಕೃತಿ **3.79**



ಆಕೃತಿ **3.80**

4. ಆಕೃತಿ 3.80 ರಲ್ಲಿ PQ = 6,
QR = 10, ಮತ್ತು PS = 8
ಇದ್ದಾಗ TS = ಎಷ್ಟು?

5. ಆಕೃತಿ 3.81 ರಲ್ಲಿ ರೇಖ EF ಇದು ವ್ಯಾಸವಿದೆ ಮತ್ತು ರೇಖ DF ಇದು ಸ್ಪರ್ಶಿಕಾ ಖಂಡವಿದೆ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಇದ್ದರೆ,
DE × GE = $4r^2$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.81**

1. ಕೆಳಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ಪರ್ಯಾಯ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ, ಆದರಿಂದ ಸರಿಯಾದ ಪರ್ಯಾಯ ಆಯ್ದು ಬರೆಯಿರಿ.

(1) ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 5.5 ಸೆ.ಮೀ 3.3 ಸೆ.ಮೀ. ಇರುವ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಷಿಸುತ್ರಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೇಂದ್ರಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ಎಷ್ಟು ಸೆಮೀ ಇರುವುದು?

(A) 4.4 (B) 8.8 (C) 2.2 (D) 8.8 ಅಥವಾ 2.2

(2) ಪರಸ್ಪರ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ತುಳ ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಹೋಗುವುದು. ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ 12 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು ಸೆಮೀ ಇರುವುದು.

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) ಹೇಳಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ

(3) 'ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಷಿಸುತ್ತದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ............ ಇರಬಹುದು' ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿಯ ರಿಕ್ತ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯಶಬ್ದ ಬರೆಯಿರಿ.

(A) ಆಯತ (B) ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನ (C) ಚೌರಸ (D) ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ

(4) ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 12.5 ಸೆಮೀ ಅಂತರದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆ ವರ್ತುಳಕ್ಕ ತೆಗೆದ ಸ್ಪರ್ಷಿಕಾಖಂಡದ ಉದ್ದಳತೆ 12 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸ ಎಷ್ಟು ಸೆಮೀ ಇರುವುದು?

(A) 25 (B) 24 (C) 7 (D) 14

(5) ಒಂದನ್ನೊಂದು ಬಾಹ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳಿಂದ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ ಎಷ್ಟು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ?

(A) ಒಂದು (B) ಎರಡು (C) ಮೂರು (D) ನಾಲ್ಕು

(6) O ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಕಂಸ ACB ಯಲ್ಲಿ $\angle$ACB ಅಂತರಲಿಖಿತ ವಾಗಿದೆ. ಇದ್ದರೆ $m\angle ACB = 65^\circ$ ಇದ್ದರೆ m(ಕಂಸ ACB) = ಎಷ್ಟು?

(A) 65° (B) 130° (C) 295° (D) 230°

(7) ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾAB ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ CDಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅಂತರಭಾಗದ E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. (AE) = 5.6, (EB) = 10, (CE) = 8 ಹಾಗಾದರೆ (ED) = ಎಷ್ಟು?

(A) 7 (B) 8 (C) 11.2 (D) 9

(8) ಚಕ್ರೀಯ $\square$ ABCD ಯಲ್ಲಿ ಕೋನ $\angle$ A ಯ ಅಳತೆಯಎರಡು ಪಟ್ಟು ಇದು $\angle$C ದ ಅಳತೆಯ ಮೂರು ಪಟ್ಟಿನಷ್ಟು ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ $\angle$Cಯ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

(A) 36 (B) 72 (C) 90 (D) 108

(9)★ ಒಂದೇ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ A, B, C ಬಿಂದುಗಳಿವೆ, m(ಕಂಸ AB) $= m$(ಕಂಸ BC) $= 120^\circ$, ಎರಡೂ ಕಂಸಗಳಲ್ಲಿ $\angle$Bಯ ಹೊರತಾಗಿ ಒಂದೂ ಸಾಮಾನ್ಯಬಿಂದು ಇಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ Δ ABC ಯಾವ ಪ್ರಕಾರದ ತ್ರಿಕೋನ ಇರುವುದು.

(A) ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ (B) ವಿಷಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ

(C) ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ (D) ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ

(10) ರೇಖ XZ ವ್ಯಾಸವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಅಂತರಭಾಗದಲ್ಲಿ Y ಈ ಬಿಂದು ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು? ವಿಧಾನಗಳು ಸತ್ಯವಿವೆ.

(i) $\angle XYZ$ ಇದು ಲಘುಕೋನ ವಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ

(ii) $\angle XYZ$ ಇದು ಕಾಟಕೋನವಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ

(iii) $\angle XYZ$ ಇದು ವಿಶಾಲಕೋನ ಇದೆ.

(iv) $\angle XYZ$ ಇದರ ಅಳತೆಯ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ನಿಶ್ಚತ ವಿಧಾನ ಮಾಡಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ

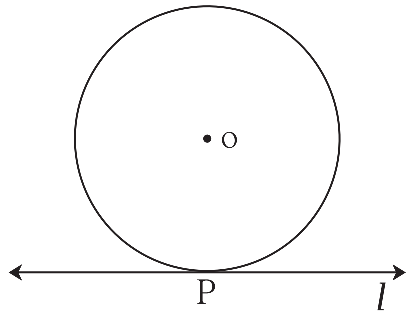
(A) ಕೇವಲ ಒಂದು (B) ಕೇವಲ ಎರಡು (C) ಕೇವಲ ಮೂರು (D) ಎಲ್ಲವೂ.

2. O ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ರೇಷೆ l ಇದು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಷ ಮಾಡುವುದು. ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 9 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.

(1) $d(O, P)$ = ಎಷ್ಟು? ಏಕೆ?

(2) $d(O, Q) = 8$ ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ, ಬಿಂದು Qವ ಸ್ಥಾನ ಎಲ್ಲಿ ಇರುವುದು?

(3) $d(O,R) = 15$ ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ, ಬಿಂದು R ಸಲುವಾಗಿ ಎಷ್ಟು ಸ್ಥಾನ ಬಿಂದುಗಳು ರೇಷೆ l ದ ಮೇಲೆ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯ? ಆ ಬಿಂದು P ದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯ?

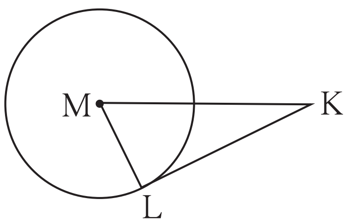


ಆಕೃತಿ **3.82**

3. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ, M ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳ ವಿದೆ, ರೇಖ KL ಇದು ಸ್ಪರ್ಶಿಕಾಖಂಡ ಇದೆ. $MK = 12$, $KL = 6\sqrt{3}$ ಹಾಗಾದರೆ

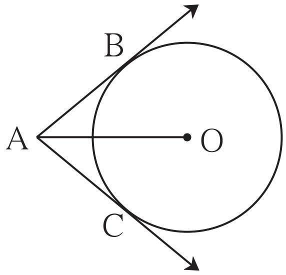
(1) ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(2) $\angle K$ ಮತ್ತು $\angle M$ ಇವುಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

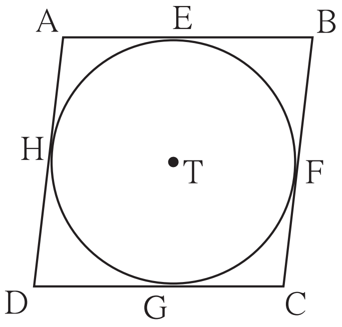


ಆಕೃತಿ **3.83**

4. ಆಕೃತಿ 3.84ದಲ್ಲಿ, ಬಿಂದು O ಇದು ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ ಮತ್ತು ರೇಖ AB ಮತ್ತು ರೇಖ AC ಇವುಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಕಾಖಂಡಗಳಿವೆ. ಒಂದುವೇಳೆ ವರ್ತುಳ ದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು $l(AB) = r$ ಇದ್ದರೆ $\square$ ABOC ಇದು ಚೌರಸ ಆಗುವುದು, ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.84**



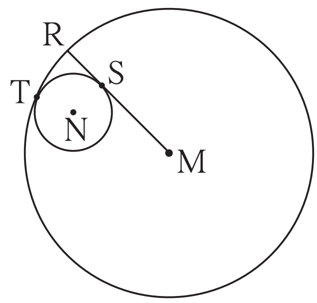
ಆಕೃತಿ **3.85**

5. ಆಕೃತಿ 3.85 ರಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ □ ABCD ಇದು T ಕೇಂದ್ರ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಪರಿಲಿಖಿತ ವಾಗಿದೆ. (ಅಂದರೆ ಚೌಕೋನದ ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ) ಬಿಂದು E, F, G ಮತ್ತು H ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳಿವೆ AE = 4.5 ಮತ್ತು EB = 5.5, ಇದ್ದರೆ AD ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

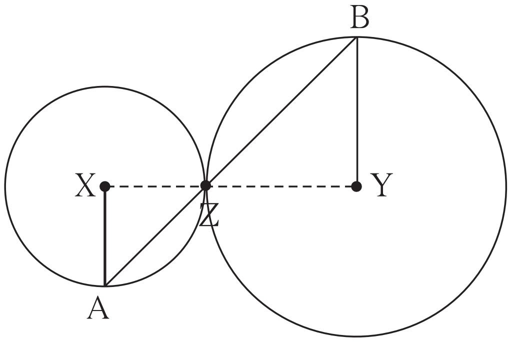
6. ಆಕೃತಿ 3.86 ರಲ್ಲಿ N ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳವು M ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ T ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವುದು. ದೊಡ್ಡ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಚಿಕ್ಕ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ S ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವುದು. ದೊಡ್ಡವರ್ತುಳ ಹಾಗೂ ಚಿಕ್ಕ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 9 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು 2.5 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮತ್ತು MS : SR ಗುಣೋತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) MT = ಎಷ್ಟು? (2) MN = ಎಷ್ಟು?

(3) $\angle$NSM = ಎಷ್ಟು?



ಆಕೃತಿ **3.86**



ಆಕೃತಿ **3.87**

7. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರ X ಮತ್ತು Y ಇರುವ ವರ್ತುಳಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಬಿಂದು Z ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವವು ಬಿಂದು Z ದಿಂದ ಹೋಗುವ ವೃತ್ತ ಛೇದಿಕೆ A ಮತ್ತು ಬಿಂದು B ಗಳಿಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ತ್ರಿಜ್ಯ XA || ತ್ರಿಜ್ಯ YB ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿಯ ರಿಕ್ತ ಸ್ಥಾನ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ರಚನೆ : ರೇಖ XZ ಮತ್ತು .... ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಸಿದ್ಧತೆ : ಸ್ಪರ್ಷ ವರ್ತುಳದ ಪ್ರಮೇಯದ ಅನುಸಾರ ಬಿಂದು X, Z, Y ಇವುಗಳು .... ಗಳಿವೆ

$\therefore$ $\angle$ XZA $\cong$ .... ವಿರುದ್ಧ ಕೋನ

$\angle$ XZA = $\angle$ BZY = a ತಿಳಿಯಲಾಗಿ ..... (I)

ಈಗ ರೇಖ XA $\cong$ ರೇಖ XZ .... (..........)

$\therefore$ $\angle$ XAZ = ... = a .... (ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ (II)

ಅದರಂತೆ ರೇಖ YB $\cong$ .... (..........)

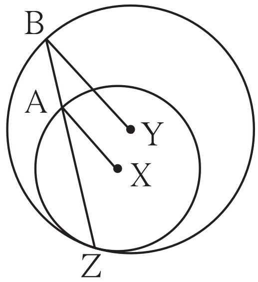
$\therefore$ $\angle$ BZY = ... = a .... (..........) (III)

$\therefore$ (I), (II) ಮತ್ತು (III) ರಿಂದ

$\angle$ XAZ = ...

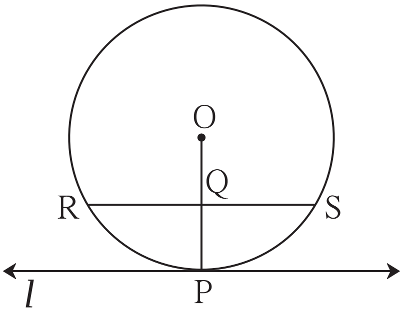
$\therefore$ ತ್ರಿಜ್ಯ XA || ತ್ರಿಜ್ಯ YB .... (..........)

8. ಆಕೃತಿ 3.88 ರಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರ X ಮತ್ತು Y ಇರುವ ಅಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಿ ವರ್ತುಳಗಳು Z ಬಿಂದು ವಿನಲ್ಲಿ ಅಂತರಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ರೇಖ BZ ಇದು ದೊಡ್ಡ ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾ ಇದ್ದು ಅದು ಚಿಕ್ಕ ವರ್ತುಳವನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ರೇಖ AX || ರೇಖ BYಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.88**

9. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಷೆ l ಇದು O ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳವನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವುದು. ಬಿಂದು Q ಇದು ತ್ರಿಜ್ಯ OP ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ. ಬಿಂದು Q ವನ್ನು ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಮಾಡುವ ಜ್ಯಾ RS || ರೇಷೆ l.RS 12 ಸೆ ಮೀ ಇದ್ದರೆ, ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

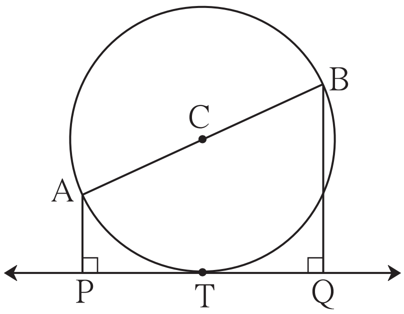


ಆಕೃತಿ **3.89**

10★. ಆಕೃತಿ 3.90 ರಲ್ಲಿ, C ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದ AB ವ್ಯಾಸವಿದೆ, ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ PQ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಬಿಂದು T ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವುದು.

ರೇಖ AP $\perp$ ರೇಷೆ PQ ಮತ್ತು ರೇಖ BQ $\perp$ ರೇಖ PQ.

ಹಾಗಾದರೆ. ರೇಖ CP $\cong$ ರೇಖ CQ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

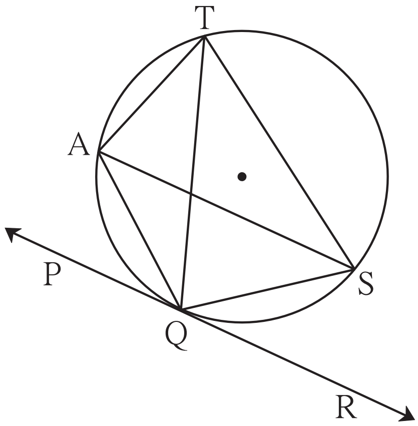


ಆಕೃತಿ **3.90**

11★. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಂತೆ 3 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯ ವಿರುವ A, B, C ಕೇಂದ್ರಗಳಿರುವ ಮೂರು ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ತುಳ ಉಳಿದ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ರಚಿಸಿರಿ.

12★. ವರ್ತುಳದ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಷೀಯ ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

13. ಆಕೃತಿ 3.91 ರಲ್ಲಿ ರೇಷೆ PR ಇದು ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ Q ದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವುದು. ಈ ಆಕೃತಿಯ ಆಧಾರದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.91**

(1) $\angle$TAQ ಮತ್ತು $\angle$ TSQ ಇವುಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಎಷ್ಟು?

(2) $\angle$AQP ಇದಕ್ಕೆ ಏಕರೂಪ ಇರುವ ಕೋನ ಯಾವುದು?

(3) $\angle$QTS ಇದಕ್ಕೆ ಏಕರೂಪ ಇರುವ ಕೋನ ಯಾವುದು

(4) $\angle TAS = 65^\circ$, ಇದ್ದರೆ $\angle$TQS ಮತ್ತು ಕಂಸ TS ಅಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

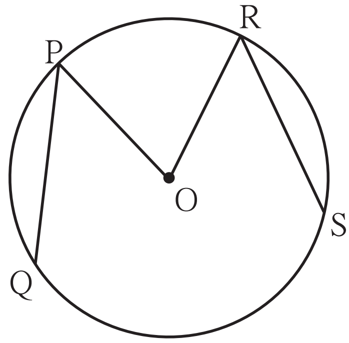
(5) $\angle AQP = 42^\circ$ ಮತ್ತು $\angle SQR = 58^\circ$, ಇದ್ದರೆ $\angle$ATSದ ಅಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ, O ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ರೇಖ PQ ಮತ್ತು ರೇಖ RS ಇವುಗಳು ಏಕರೂಪ ಜ್ಯಾಗಳಿವೆ. $m\angle POR = 70^\circ$ ಮತ್ತು m(ಕಂಸ RS) = 80°, ಇದ್ದರೆ,

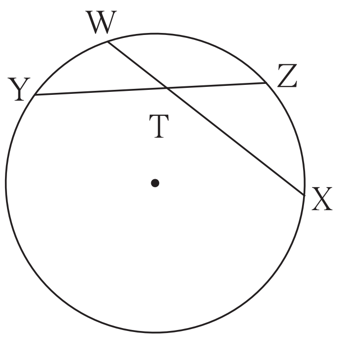
(1) m(ಕಂಸ PR) ಎಷ್ಟು?

(2) m(ಕಂಸ QS) ಎಷ್ಟು?

(3) m(ಕಂಸ QSR) ಎಷ್ಟು?



ಆಕೃತಿ **3.92**



ಆಕೃತಿ **3.93**

15. ಆಕೃತಿ 3.93 ರಲ್ಲಿ, m(ಕಂಸ WY) = 44°, m(ಕಂಸ ZX) = 68°, ಹಾಗಾದರೆ

(1) $\angle$ZTX ಇದರ ಅಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) WT = 4.8, TX = 8.0, YT = 6.4 ಹಾಗಾದರೆ TZ = ಎಷ್ಟು?

(3) WX = 25, YT = 8, YZ = 26, ಹಾಗಾದರೆ WT = ಎಷ್ಟು?

16. ಆಕೃತಿ 3.94 ರಲ್ಲಿ,

(1) m(ಕಂಸ CE) = 54°,

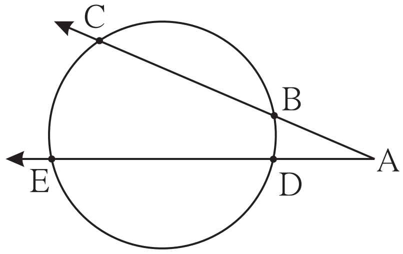
m(ಕಂಸ BD) = 23°, ಹಾಗಾದರೆ ∠CAE = ಎಷ್ಟು?

(2) AB = 4.2, BC = 5.4,

AE = 12.0 ಹಾಗಾದರೆ AD = ಎಷ್ಟು?

(3) AB = 3.6, AC = 9.0,

AD = 5.4 ಹಾಗಾದರೆ AE = ಎಷ್ಟು?



ಆಕೃತಿ **3.94**

17. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ EF || ಜ್ಯಾ GH. ಇದ್ದರೆ ಜ್ಯಾ EG ≅ ಜ್ಯಾ FH. ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ. ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿಯ ರಿಕ್ತ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧತೆ ಬರೆಯಿರಿ.

ಸಿದ್ಧತೆ : ರೇಖ GF ರಚಿಸಿರಿ.

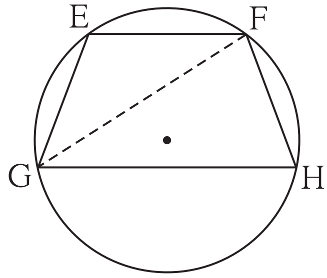
∠ EFG = ∠ FGH $\boxed{}$ (I)

∠ EFG = $\boxed{}$ (ಅಂತರಲಿಖಿತ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ) (II)

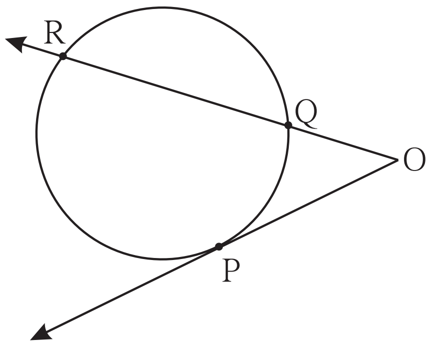
∠ FGH = $\boxed{}$ (ಅಂತರಲಿಖಿತ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯ) (III)

∴ m (ಕಂಸ EG) = $\boxed{}$ [(I), (II) ಮತ್ತು (III) ರಿಂದ]

ಜ್ಯಾ EG ≅ ಜ್ಯಾ FH $\boxed{}$ (................)



ಆಕೃತಿ **3.95**



ಆಕೃತಿ **3.96**

18. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ, ಬಿಂದು P ಇದು ಸ್ಪರ್ಷಬಿಂದು

(1) m(ಕಂಸ PR) = 140,

∠ POR = 36° ಇದ್ದರೆ

m(ಕಂಸ PQ) = ಎಷ್ಟು?

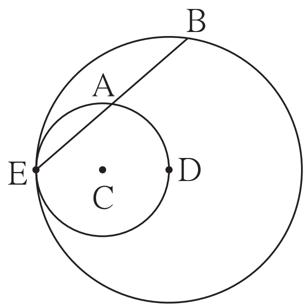
(2) OP = 7.2, OQ = 3.2,

ಇದ್ದರೆ, OR = ಎಷ್ಟು? QR = ಎಷ್ಟು?

(3) OP = 7.2, OR = 16.2, ಇದ್ದರೆ

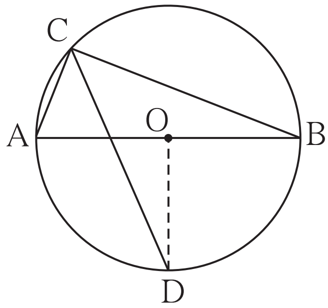
QR = ಎಷ್ಟು?

19. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ C ಮತ್ತು D ಕೆಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳಗಳ ಪರಸ್ಪರ E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವವು ಬಿಂದು D ಇದು ಒಳಗಿನ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಇದೆ. ಹೊರಗಿನ ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾ EB ಇದು ಒಳಗಿನ ವರ್ತುಳವನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ರೇಖ EA ≅ ರೇಖ AB ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.97**

20. ಆಕೃತಿ 3.98 ರಲ್ಲಿ ರೇಖ AB ಇದು O ಕೇಂದ್ರ ಇರುವ ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸ ಇದೆ ಅಂತರ ಲಿಖಿತ ACBಯ ದ್ವಿಭಾಜಕ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಬಿಂದು Dದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ರೇಖ AD ≅ ರೇಖ BD ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ. ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಿದ್ಧತೆಯಲ್ಲಿಯ ರಿಕ್ತ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಿ ಬರೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.98**

ಸಿದ್ಧತೆ : ರೇಖ OD ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ

$\angle$ ACB = $\boxed{}$ (ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳದ ಅಂತರ ಲಿಖಿತ ಕೋನ)

$\angle$ DCB = $\boxed{}$ (ರೇಖ CD ಇದು $\angle$ C ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕ)

m(ಕಂಸ DB) = $\boxed{}$ (ಅಂತರ ಲಿಖಿತ ಕೋನ ಪ್ರಮೇಯ)

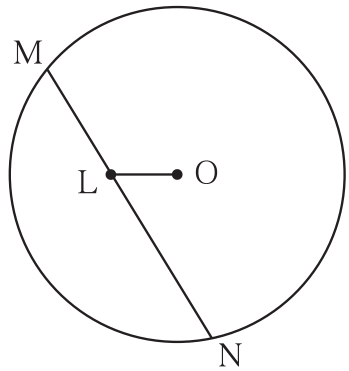
$\angle$ DOB = $\boxed{}$ (ಕಂಸದ ಅಳತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ) (I)

ರೇಖ OA ≅ ರೇಖ OB .... (II)

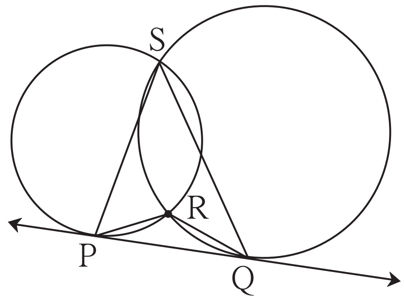
∴ ರೇಷೆ OD ಇದು ರೇಖ AB ಯ .... ರೇಷೆ ಇದೆ (I) ಮತ್ತು (II) ರಿಂದ

∴ ರೇಖ AD ≅ ರೇಖ BD ....

21. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖ MN ಇದು O ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾ ಇದೆ. MN =25, ಜ್ಯಾ MN ದ ಮೇಲೆ L ನ್ನು ML = 9 ಮತ್ತು d(O,L) = 5 ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ, ಹಾಗಾದರೆ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು ಇರುವುದು?



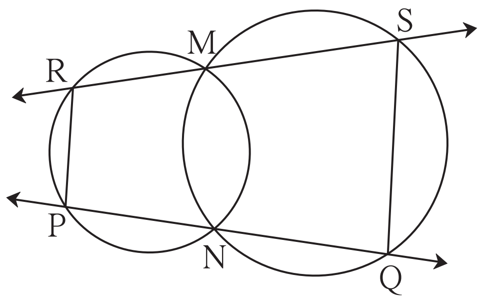
ಆಕೃತಿ **3.99**



ಆಕೃತಿ **3.100**

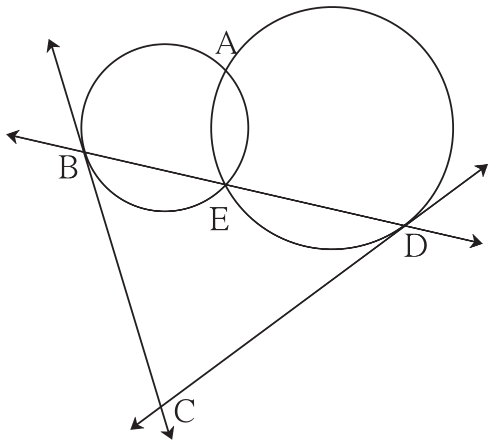
22★. ಆಕೃತಿ 3.100 ರಲ್ಲಿ ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಬಿಂದು S ಮತ್ತು R ರಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು ಅವುಗಳ ರೇಖೆ PQ ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇದ್ದು, P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಮಾಡುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ $\angle$ PRQ + $\angle$ PSQ = 180° ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.

23★. ಆಕೃತಿ 3.101 ರಲ್ಲಿ, ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಪರಸ್ಪರ M ಮತ್ತು N ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಬಿಂದು M ಮತ್ತು N ದಿಂದ ತೆಗೆದ ವೃತ್ತ ಛೇದಿಕೆ ಬಿಂದು R ಮತ್ತು S ದಲ್ಲಿ, ಮತ್ತು ಬಿಂದು P ಮತ್ತು Q ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ PR||QS ಇದೆ, ಎಂದು ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.



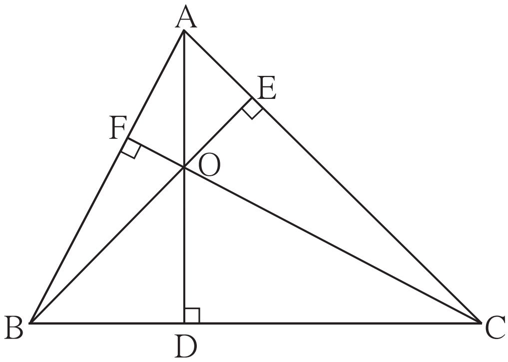
ಆಕೃತಿ **3.101**

24★. ಎರಡು ವರ್ತುಳಗಳು ಪರಸ್ಪರ A ಮತ್ತು E ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಬಿಂದು E ದಲ್ಲಿಂದ ಎಳೆದ ಸಾಮಾನ್ಯ ವೃತ್ತಛೇದಿಕೆ ವರ್ತುಳಗಳಿಗೆ ಬಿಂದು B ಮತ್ತು Dಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವದು. ಬಿಂದು B ಮತ್ತು E ದಲ್ಲಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು C ದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ: □ ABCD ಇದು ಚಕ್ರಿಯವಿದೆ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.102**

25★. Δ ABC ಯಲ್ಲಿ AD $\perp$ ಭುಜ BC, ರೇಖ BE $\perp$ ಭುಜ AC, ರೇಖ CF $\perp$ ಭುಜ AB. ಬಿಂದ O ಇದು ಶಿರೋಲಂಬ ಸಂಪಾತ ಇದೆ. ಬಿಂದು O ಇದು Δ DEF ದ ಅಂತರ ಮಧ್ಯ ಇರುವುದು ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **3.103**

ICT Tools or Links

ಜಿಯೋ ಜೆಬ್ರಾದ ಸಹಾಯದಿಂದ ವಿವಿಧ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ.
ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಷಿಕೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

4 ಭೌಮಿತಿಕ-ರಚನೆಗಳು

ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ

- ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ರಚನೆ
  - ✻ ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜ ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆಯುವದು.
    - (i) ಶಿರೋಬಿಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಇರದಾಗ
    - (ii) ಒಂದು ಶಿರೋಬಿಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಇದ್ದಾಗ
- ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯುವದು.
  - ✻ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯುವದು.
    - (i) ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಂಡು
    - (ii) ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿದೇ.
  - ✻ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅದರ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದು ವಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯುವದು.

ಸ್ವಲ್ಪನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ

ಕೆಳಗಿನ ರಚನೆಗಳು ನಾವು ಹಿಂದಿನ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಆ ರಚನೆಗಳ ಪುನರಾವರ್ತಿ ಮಾಡೋಣ

- ಕೊಟ್ಟ ರೇಖೆ ಅದರ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ ಸಮಾಂತ ರೇಖೆ ತೆಗೆಯುವದು.
- ಕೊಟ್ಟ ರೇಖಾಖಂಡದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆಯುವದು,
- ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಕೋನ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಾಕಷ್ಟು ಘಟಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸುವದು.
- ಕೊಟ್ಟ ರೇಖಾಖಂಡ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಸಮಾನ ಭಾಗಮಾಡುವದು ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟ ರೇಖಾಖಂಡದ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುವದು.
- ಕೊಟ್ಟ ಕೋನದ ಏಕರೂಪ ಇರುವ ಕೋನ ತೆಗೆಯುವದು.

ನೀವು ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಶಾಲೆಯ ಪರಿಸರದ ನಕಾಶೆ ತಯಾರಿಸುವ ಉಪಕ್ರಮ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಯಾವುದೇ ಕಟ್ಟಡ ಕಟ್ಟುವ ಮೊದಲು ಆ ಕಟ್ಟಡ ನೀಲಿ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಶಾಲೆಯ ಪರಿಸರ ಮತ್ತು ಅದರ ನಕಾಶೆ, ಕಟ್ಟಡ ಮತ್ತು ಅದ ನಕ್ಷೆ ಪರಸ್ಪರ ಸಮರೂಪ ಇರುತ್ತವೆ. ಭೂಗೋಲ, ಯಂತ್ರಶಾಸ್ತ್ರ ಇತ್ಯಾದಿ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿ ತೆಗೆಯುವ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇರುತ್ತದೆ ತ್ರಿಕೋನ ಇದು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಸರಳ ಮರ್ಯಾದಿತ ಆಕೃತಿ ಇದೆ. ಅದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನ ಹೇಗೆ ತಗೆಯಲು ಬರುವುದು, ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

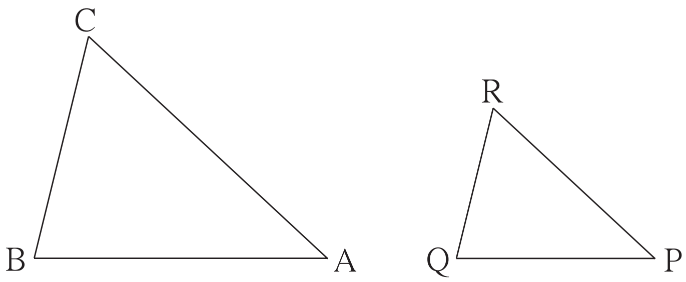
ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನದ ರಚನೆ:

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮರೂಪ ಇರುವ ಮತ್ತು ಗುಣೋತ್ತರದ ಕರಾರು ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡುವ ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆಯುವದು.

ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ಕೋನಗಳು ಏಕರೂಪ ಇರುತ್ತದೆ ಇದರ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮರೂಪ ವಿರುವ ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.

ಉದಾ. (1) Δ ABC ~ Δ PQR, Δ ABC ಯಲ್ಲಿ AB = 5.4 ಸೆಮೀ BC = 4.2 ಸೆಮೀ, AC = 6.0 ಸೆಮೀ. AB: PQ = 3:2 ಇದರೆ Δ ABC ಮತ್ತು Δ PQR ರಚಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **4.1**
ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ

ಮೊದಲು ಕೊಟ್ಟ ಅಳತೆಯ Δ ABC ತೆಗೆಯಿರಿ.

Δ ABC ಮತ್ತು Δ PQR ಸಮರೂಪ ಇವೆ

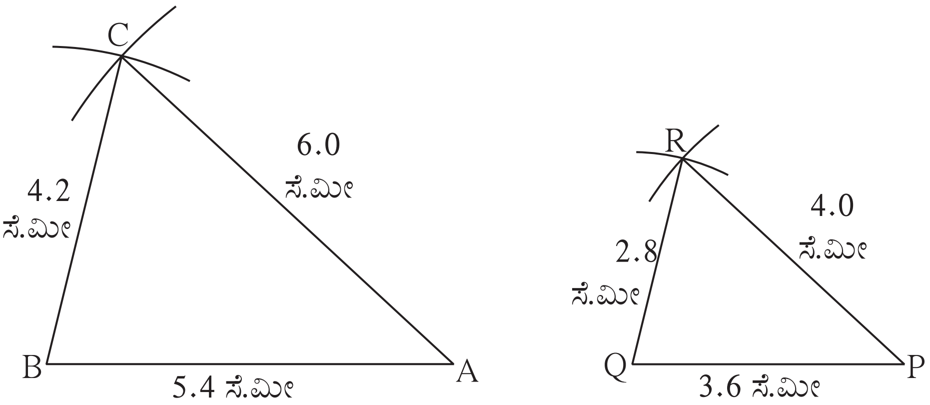
$\therefore$ ಅವುಗಳ ಸಂಗತ ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುತ್ತಿವೆ

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{3}{2} \quad .... \text{(I)}$$

AB, BC, AC ಈ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಗೊತ್ತಿರುವರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಮೇಲಿಂದ PQ, QR, PR ಈ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ದೊರೆಯುವವು ಸಮೀಕರಣ [I] ಮೇಲಿಂದ

$$\frac{5.4}{PQ} = \frac{4.2}{QR} = \frac{6.0}{PR} = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ PQ = 3.6 ಸೆಮೀ QR = 2.8 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು PR = 4.0 ಸೆಮೀ.



ಆಕೃತಿ **4.2**

Δ PQR ದ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಗೊತ್ತಾದ ಮೇಲೆ ನಾವು ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ರಚನೆ ಮಾಡೋಣ.

ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಯ ಸಲುವಾಗಿ

ಕೆಲವು ಸಲ ಕೊಟ್ಟ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪ ಇರುವ, ಯಾವ ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆಯುವದಿದೆಯೋ ಅದರ ಭುಜಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಪಟ್ಟಯಿಂದ ಅಳೆಯಲು ಬರುವಂತಹವು ಇರುವದಿಲ್ಲ. ಇಂತಹ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ರೇಖಾಖಂಡದ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಭಾಗ ಮಾಡುವದು ಈ ರಚನೆಯ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು

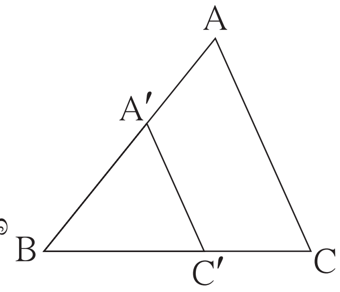
ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಭುಜ ABದ ಉದ್ದಳತೆ $\frac{11.6}{3}$ ಸೆ.ಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆಗ 11.6 ಸೆ.ಮೀ ಉದ್ದದ ರೇಖಾಖಂಡದ 3 ಸಮಾನ ಭಾಗ ಮಾಡಿ AB ರೇಖಾಖಂಡದ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.

ಮೇಲಿನ ಉದಾ. (1)ರಲ್ಲಿ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಮತ್ತು ತೆಗೆಯುವ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಶಿರೋಬಿಂದು ಇರಲಿಲ್ಲ. ಒಂದು ಶಿರೋಬಿಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಇದ್ದರೆ ತ್ರಿಕೋನ ರಚನೆ ಮಾಡಿ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಮಾಡುವದು ಸುಲಭ ಇರುವದು.

ಉದಾ. (2) Δ ABC ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ.

Δ ABCಗೆ ಸಮರೂಪ ಇರುವ Δ A′BC′ ನ್ನು

AB : A′B = 5:3 ಹೀಗೆ ತೆಗೆಯಿರಿ



ಆಕೃತಿ **4.3**

ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ

ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ: B, A, A′ ಇವು ಅದರಂತೆ B, C, C′ ಇವು ಏಕ ರೇಷೀಯ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳೋಣ

$\Delta ABC \sim \Delta A'BC' \therefore \angle ABC = \angle A'BC'$

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}$$

$\therefore$ Δ ABCಯ ಭುಜ Δ A′BC′ ದ ಸಂಗತ ಭುಜಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿರ ಬಹುದು.

$\therefore$ ರೇಖ BC ಯ 5 ಸಮಾನ ಭಾಗ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರಲ್ಲಿಯ ಮೂರು ಭಾಗದಷ್ಟು. ರೇಖ BC′ದ ಉದ್ದಳತೆ ಇರಬಹುದು. ΔABC ತೆಗೆದು ರೇಖ BCಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು B ದಿಂದ ಮೂರು ಭಾಗದಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು ಇದು ಬಿಂದು C′ ಇರಲೇಬೇಕು. ಬಿಂದು C′ ದಲ್ಲಿಂದ ರೇಖ ACಗೆ ಸಮಾಂತರ ತೆಗೆದ ರೇಷೆ, ರೇಖ BAಗೆ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆಯೋ, ಆ ಬಿಂದು A′ ಇರಬಹುದು.

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{5} \text{ ಅಂದರೆ, } \frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{3} \text{ .... ವ್ಯಸ್ತ ಕ್ರಿಯಾ ಮಾಡಿ.}$$

ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(1) Δ ABC ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ.

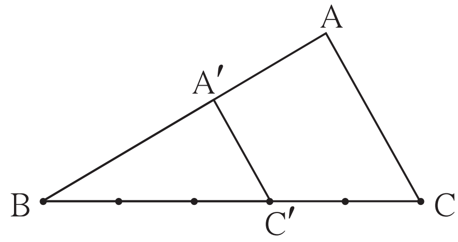
(2) ರೇಖ BCಯ ಐದು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

(3) ಬಿಂದು B ಮುಂದಿನ ಮೂರನೇಯ ಬಿಂದುವಿಗೆ C′ ಹೆಸರು ಕೊಡಿರಿ.

$\therefore BC' = \frac{3}{5} BC$

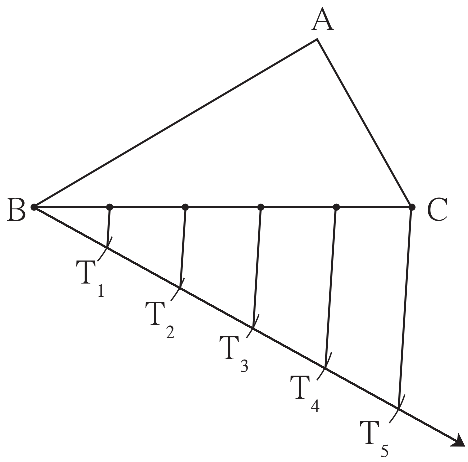
(4) ಈಗ C′ ದಲ್ಲಿಂದ CAಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ ತೆಗೆಯಿರಿ ಅದು ABಗೆ ಎಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು ಆ ಬಿಂದುವಿಗೆ A′ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.

(5) Δ ABC ದೊಂದಿಗೆ ಸಮರೂಪ ವಿರುವ Δ A′BC′ ಇದು ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ಇದೆ.



ಆಕೃತಿ **4.4**

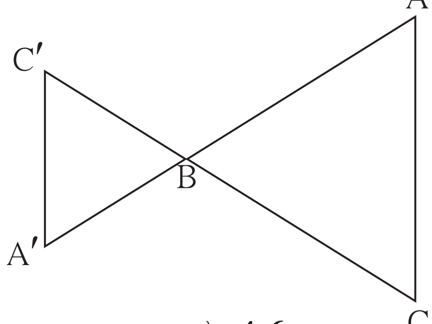
ಟಿಪ್ಪಣೆ : BC ಯ ಐದು ಸಮಾನ ಭಾಗ ಮಾಡುವಾಗ, ರೇಖೆ BCಯ ಯಾವ ಬದಿಗೆ A ಇದೆ ಅವರ ವಿರುದ್ಧ ಬದಿಗೆ B ದಲ್ಲಿಂದ ಒಂದು ಕಿರಣ ತೆಗೆದು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಆ ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ $BT_1 = T_1T_2 = T_2T_3 = T_3T_4 = T_4T_5$?ಗೆ ಸಮಾನ ಭಾಗಮಾಡಿ T_5C ಜೊಡಿಸಿರಿ ಮತ್ತು T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 ದಲ್ಲಿಂದ ACಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **4.5**

ಯೋಚಿಸೋಣ ಬನ್ನಿ

ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ತೆಗೆಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ Δ A′BC′ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ಈ ಆಕೃತಿಯಂತೆ ΔA′BC′ ತೆಗೆಯವದಿದ್ದರೆ ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡ ಬೇಕಾಗುವದು.



ಆಕೃತಿ **4.6**

ಉದಾ. (3) Δ ABCಗೆ ಸಮರೂಪ ವಿರುವ Δ A′BC′ ನ್ನು AB : A′B = 5:7 ತೆಗೆಯಿರಿ

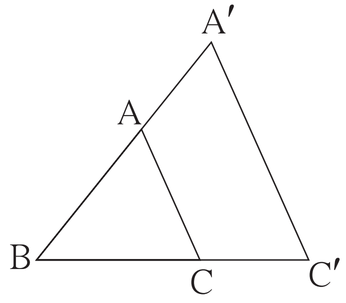
ವಿಶ್ಲೇಷಣ : ಬಿಂದು B,A,A′ ಅದರಂತೆ ಬಿಂದು B,C,C′ ಏಕರೇಖಿಯ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳೋಣ

Δ ABC ~ Δ A′BC′ ಮತ್ತು AB : A′B = 5:7

$\therefore$ Δ ABCಯ ಭುಜ Δ A′BC′ದ ಸಂಗತ ಭುಜಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದು ಇರಬೇಕು

ಅದರಂತೆ $\angle ABC \cong \angle A'BC'$

ಈ ಸಂಗತಿ-ಗಮನದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ ತೆಗೆಯೋಣ



ಆಕೃತಿ **4.7**
ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ

ಈಗ $\dfrac{BC}{BC'} = \dfrac{5}{7}$

$\therefore$ ರೇಖ BCಯ 5 ಸಮಾನ ಭಾಗ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭಾಗದ 7 ಪಟ್ಟು ರೇಖ BC′ದ ಉದ್ದಳತೆ ಇರುವದು.

$\therefore$ Δ ABC ತೆಗೆದು ರೇಖ BCಯ ಐದು ಸಮಾನ ಭಾಗಮಾಡಿ ಬಿಂದು C′ಇದು ಕಿರಣ BCಯ ಮೇಲೆ B ದಿಂದ ಏಳು ಭಾಗ ಅಂತರದಷ್ಟು ಅಂತರದಮೇಲಿನ ಕಿರಣ BCಯ ಬಿಂದು, ಈ ಬಿಂದು C′ ಇರಬಹುದು.

ಪ್ರಮಾಣದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯದ ಅನುಸಾರ ಬಿಂದು C′ದಲ್ಲಿಂದ ಭುಜ ACಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ ತೆಗೆದರೆ ಅದು ಬೆಳಿಸಿದ ಕಿರಣ BAಗೆ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ, ಆ ಬಿಂದು A′ ಈ ಬಿಂದು ಇರಬಹುದು. ರೇಖ A′C′ ತೆಗೆದು Δ A′BC′ ಈ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ತ್ರಿಕೋನ ಸಿಗುವುದು.

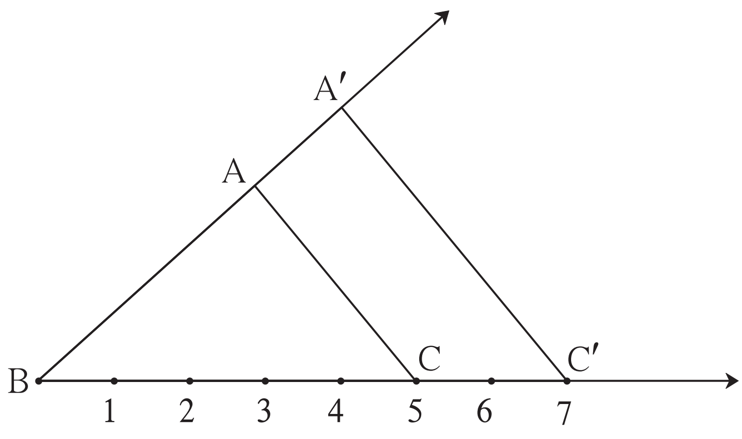
ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು:

(1) Δ ABC ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(2) ರೇಖ BCಯ 5 ಸಮಾನ ಭಾಗಮಾಡಿರಿ. ಕಿರಣ BCಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು C′ಹೀಗೆ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿ. ರೇಖ BC′ಯದ ಉದ್ಧಳತೆ ರೇಖ BCಯ ಒಂದು ಭಾಗದ ಏಳು ಪಟ್ಟು ಇರಬಹುದು.

(3) ರೇಖ ACಗೆ C′ದಲ್ಲಿಂದ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ ತಗೆಯಿರಿ. ಅದು ರೇಖೆ ಕಿರಣ BA ಯನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು ಆ ಬಿಂದುವಿಗೆ A′ಎಂದು ಹೆಸರು ಕೊಡಿರಿ.

Δ A′BC′ ಇದು Δ ABC ಗೆ ಸಮರೂಪ ಇರುವ ಇಷ್ಟ ತ್ರಿಕೋನ ಇದೆ.



ಆಕೃತಿ **4.8**

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.1

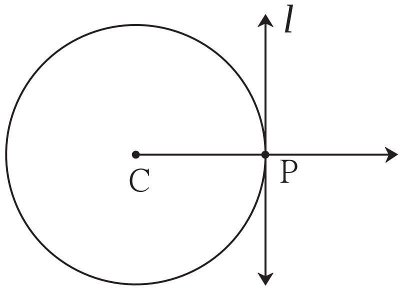
1. Δ ABC ~ Δ LMN , Δ ABCದಲ್ಲಿ AB = 5.5 ಸೆಮೀ, BC = 6 ಸೆಮೀ, CA = 4.5 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು $\frac{BC}{MN} = \frac{5}{4}$ ಇದ್ದರೆ Δ ABC ಮತ್ತು Δ LMN ರಚಿಸಿರಿ.
2. Δ PQR ~ Δ LTR, Δ PQR ದಲ್ಲಿ PQ = 4.2 ಸೆಮೀ, QR = 5.4 ಸೆಮೀ, PR = 4.8 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು $\frac{PQ}{LT} = \frac{3}{4}$ ಇದ್ದರೆ Δ PQR ಮತ್ತು Δ LTR ರಚಿಸಿರಿ.
3. Δ RST ~ Δ XYZ, Δ RST ದಲ್ಲಿ RS = 4.5 ಸೆಮೀ, $\angle$ RST = 40°, ST = 5.7 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು $\frac{RS}{XY} = \frac{3}{5}$ ಇದ್ದರೆ Δ RST ಮತ್ತು Δ XYZ ರಚಿಸಿರಿ.
4. Δ AMT ~ Δ AHE, Δ AMT ದಲ್ಲಿ AM = 6.3 ಸೆಮೀ, $\angle$ TAM = 50°, AT = 5.6 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು $\frac{AM}{AH} = \frac{7}{5}$ ಇದ್ದರೆ Δ AHE ರಚಿಸಿರಿ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅದರ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯುವದು.

(i) ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದ ಉಪಯೋಗಮಾಡಿಕೊಂಡು

ವಿಶ್ಲೇಷಣ :



ಆಕೃತಿ **4.9**

C ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳ ಮೇಲಿನ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ ಹೋಗುವ, ರೇಷೆ l ಈ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯುವದಿಕೆ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಹೊರಗಿನ ತುದಿಯಿಂದ ತೆಗೆದ ಲಂಬ ರೇಖೆಯು ಆ ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಗುಣಧರ್ಮದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡುವಾ. ತ್ರಿಜ್ಯ CP ತೆಗೆದರೆ ರೇಖ CP $\perp$ ರೇಷೆ l ಅಂದರೆ ತ್ರಿಜ್ಯ CPಗೆ ಬಿಂದು P ದಲ್ಲಿಂದ ಹೋಗುವ ಲಂಬ ರೇಷೆ ತೆಗೆದರೆ ಅದು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಆಗುವದು.

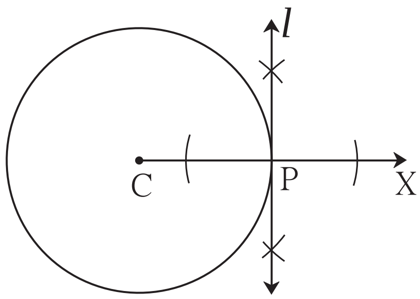
ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ, ಆ ರೇಷೆಗೆ ಲಂಬ ವಿರುವ ರೆಷೆಯ ರಚನೆ ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅನಕೂಲದ ಸಲುವಾಗಿ ಕಿರಣ CP ತೆಗೆದು ರೇಷೆ l ದ ರಚನೆ ಮಾಡೋಣ.

ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು:

(1) ಕೇಂದ್ರ C ಇರುವ ಒಂದು ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ ಅದರ ಮೇಲೆ P ಒಂದು ಬಿಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

(2) ಕಿರಣ CP ತೆಗೆಯಿರಿ.

(3) ಬಿಂದು P ದಲ್ಲಿಂದ ಕಿರಣ CX ಲಂಬ ರೇಷೇ l ತೆಗೆಯಿರಿ. ರೇಕೆ l ಇದು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇದೆ.

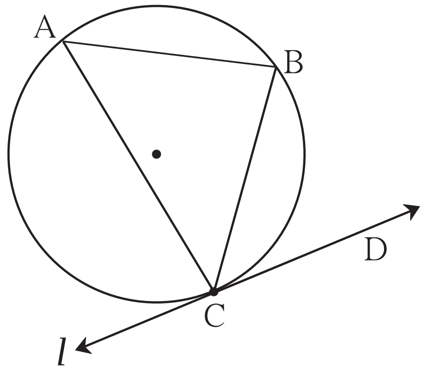


ಆಕೃತಿ **4.10**

ii) ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿನ ಕೊಟ್ಟಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಾಯವ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಯನ್ನು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡದೇ ತೆಗೆಯುವದು.

ಉದಾಹರಣೆ: ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಒಂದು ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲೆ C ಈ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡದೇ ಬಿಂದು C ದಲ್ಲಿಂದ ಹೋಗುವ ಆ ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ವಿಶ್ಲೇಷಣ :



ಆಕೃತಿ **4.11**

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ರೇಖೆ l ಇದು ಬಿಂದು C ದಲ್ಲಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇದೆ. ರೆಖ CB ಇದು ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು $\angle$ CAB ಇದು ಅಂತರಲಿಖಿತ ಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಭೇದಿಕೆಯ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯದ ಅನುಸಾರ $\angle CAB \cong \angle BCD$.

ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಭೇದಿಕೆ ಕೋನದ ಪ್ರಮೇಯದ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅನುಸಾರ, $\angle CAB \cong \angle BCD$, ಇದ್ದರೆ ರೇಖೆ l ಇದು ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖ CB ಇದು ವರ್ತುಳದ ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು $\angle CAB$ ಇದು ಅಂತರ ಲಿಖಿತ ಕೋನ ತಗೆಯೋಣ $\angle BCD$ಯ ಕೋನದ ರಚನೆಯನ್ನು $\angle BCD \cong \angle BAC$

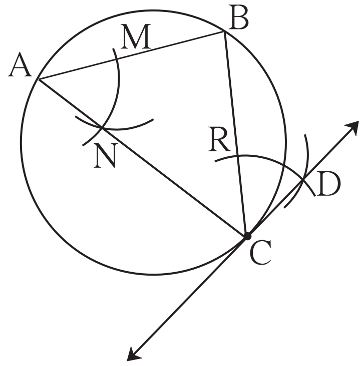
ಆಗುವಂತೆ ಮಾಡಿರಿ. ರೇಖೆ CD ಇದು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳದ ಬಿಂದು C ದಲ್ಲಿಂದ ಹೋಗುವ ಆ ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು:

(1) ಒಂದು ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ C ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

(2) ಜ್ಯಾCB ಮತ್ತು ಅಂತರ ಲಿಖಿತ $\angle CAB$ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(3) ಕಂಪಾಸದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅನುಕೂಲಕರ ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬಿಂದು A ಕೇಂದ್ರ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು $\angle BAC$ ಯ ಭುಜಗಳನ್ನು ಬಿಂದು M ಮತ್ತು ಬಿಂದು N ಗಳಲ್ಲಿ ಭೇದಿಸುವ ಕಂಸ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **4.12**

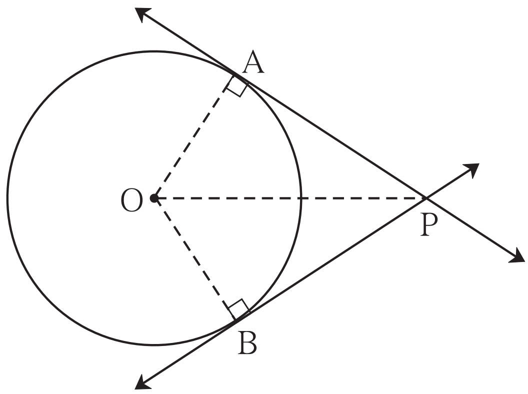
(4) ಅದೇ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರ C ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು, ಜ್ಯಾ CBಗೆ ಭೇದಿಸುವ ಕಂಸ ತೆಗೆಯಿರಿ ಭೇದನ ಬಿಂದುವಿಗೆ R ಎಂದು ಹೆಸರು ಕೊಡಿರಿ.

(5) ಕಂಪಾಸದಲ್ಲಿ MN ದಷ್ಟು, ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ ಕೇಂದ್ರ R ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ಮೊದಲು ತೆಗೆದ ಕಂಸಕ್ಕೆ ಭೇದಿಸುವ ಇನ್ನೊಂದು ಕಂಸ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆ ಭೇದನ ಬಿಂದುವಿಗೆ D ಎಂದು ಹೆಸರು ಕೊಡಿರಿ. ರೇಖೆ CD ತೆಗೆಯಿರಿ. ರೇಖೆ CD ಇದು ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇದೆ.

(ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ $\angle$ MAN $\cong \angle$ BCD ಇದರ ಕಾರಣ ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿರಿ. ರೇಖಾ ಖಂಡ MN ಮತ್ತು ರೇಖಾಖಂಡ RD ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಭುಭುಭು ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಅನುಸಾರ Δ MAN $\cong \Delta$ RCD. $\therefore$ $\angle$ MAN $\cong \angle$ BCD)

ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅದರ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯುವದು.

ವಿಶ್ಲೇಷಣ :



ಆಕೃತಿ **4.13**

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕೇಂದ್ರ O ಇರುವ ವರ್ತುಳದ ಬಾಹ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬಿಂದು P ಇದೆ. ಬಿಂದು P ದಲ್ಲಿಂದ ತೆಗೆದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಯು ವರ್ತುವನ್ನು ಬಿಂದು A ಮತ್ತು ಬಿಂದು B ಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಬಿಂದು A ಮತ್ತು ಬಿಂದು B ಇವುಗಳ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿನ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾಡಲು ಬಂದರೆ ಆ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳು PA ಮತ್ತು PB ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ಕಾರಣ ತ್ರಿಜ್ಯOA ಮತ್ತು OB ತೆಗೆದರೆ ತ್ರಿಜ್ಯ OA $\perp$ ರೇಖೆ PA ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ OB $\perp$ ರೇಖೆ PB.

Δ OAP ಮತ್ತು Δ OBP ಇವು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿದ್ದು OP ಇದು ಎರಡರ ಕರ್ಣ ಇದೆ. ರೇಖ OP ವ್ಯಾಸ ವಿರುವ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆದರೆ ಅದು ಕೇಂದ್ರ O ಇರುವ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಅವು A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಿರುವವು ಕಾರಣ ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ಲಿಖಿತ ಕೋನವು ಕಾಟಕೋನ ಇರುತ್ತದೆ.

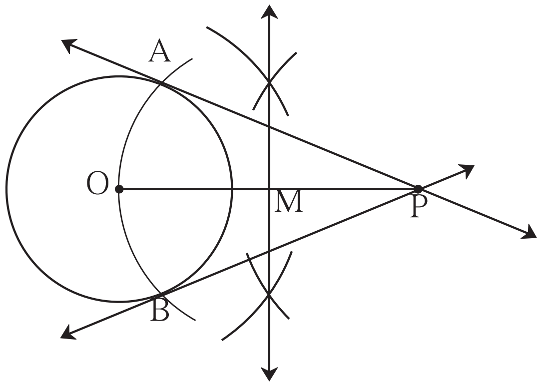
ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು:

(1) ಕೇಂದ್ರ O ಇರುವ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಒಂದು ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(2) ವರ್ತುಳದ ಬಾಹ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ P ಈ ಒಂದು ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

(3) ರೇಖ OP ತೆಗೆಯಿರಿ. ರೇಖ OPಯ ಲಂಬದ್ವಿಭಾಜಕ ತೆಗೆದು ಅದಕ್ಕೆ M ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಿರಿ.

(4) ಕೇಂದ್ರ M ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ OM ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ವರ್ತುಳ ಕಂಸ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **4.14**

(5) ಈ ವರ್ತುಳವು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ತುಳವನ್ನು A ಹಾಗೂ B ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(6) ರೇಖೆ PA ಮತ್ತು ರೇಖೆ PB ತೆಗೆಯಿರಿ.

ರೇಖೆ PA ಮತ್ತು ರೇಖೆ PB ಆ ವರ್ತುಳದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳಿವೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.2

1. ಕೆಂದ್ರ P ಇರುವ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 3.2 ಸೆ.ಮೀ ಇರುವ ವರ್ತುಳದ ಅವರ ಮೇಲಿನ M ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
2. 2.7 ಸೆ.ಮೀ.ತ್ರಿಜ್ಯ ವಿರುವ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅದರ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
3. 3.6 ಸೆ.ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅದರ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳದೇ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತಗೆಯಿರಿ.
4. 3.3 ಸೆ. ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ 6.6 ಸೆ.ಮೀ ಉದ್ದದ ಜ್ಯಾ PQ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಬಿಂದು P ಮತ್ತು ಬಿಂದು Q ದಲ್ಲಿಂದ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮ್ಮ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಬರೆಯಿರಿ.

5. 3.4 ಸೆ.ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ 5.7 ಸೆ.ಮೀ ಉದ್ದದ ಜ್ಯಾ MN ತೆಗೆಯಿರಿ. ಬಿಂದು M ಮತ್ತು ಬಿಂದು N ದಲ್ಲಿಂದ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

6. P ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು 3.4 ಸೆ.ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ಒಂದು ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 5.5 ಸೆ.ಮಿ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ Q ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

7. 4.1 ಸೆ.ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದು ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ವರ್ತುಳಕೇಂದ್ರವಿಂದ 7.3 ಸೆ.ಮೀ ಅಂತರದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ 4

1. ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ.

(1) ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿನ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ....ಇರುತ್ತದೆ.

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

(2) ವರ್ತುಳದ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ .... ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.

(A) 2 (B) 1 (C) ಒಂದು ಹಾಗೂ ಒಂದೇ (D) 0

(3) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $\frac{AB}{PQ} = \frac{7}{5}$ ಇದ್ದರೆ ....

(A) ΔABC ದೊಡ್ಡ ದಿರುತ್ತದೆ (B) ΔPQR ದೊಡ್ಡದಿರುತ್ತದೆ

(C) ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಇರುತ್ತದೆ (D) ನಿಶ್ಚಿತ ಹೇಳಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ

2. ಕೆಂದ್ರ O ಇರುವ 3.5 ಸೆ.ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 5.7 ಸೆ.ಮೀ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

3. ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲೆ A ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರಲ್ಲಿಂದ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡದೇ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

4. 6.4 ಸೆ.ಮೀ ವ್ಯಾಸದ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ವ್ಯಾಸದಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು R ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

5. P ಕೇಂದ್ರ ವಿರುವ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. 100° ಅಳತೆಯ ಒಂದು ಲಘುಕಂಸ AB ತೆಗೆಯಿರಿ. ಬಿಂದು A ಮತ್ತು ಬಿಂದು B ದಲ್ಲಿಂದ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

6. E ಕೇಂದ್ರ ವಿರುದ 3.4 ಸೆ.ಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆಯಿರಿ. ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ F ಬಿಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. E–F–A ಆಗುವಂತೆ A ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಮತ್ತು l (FA) = 4.1 ಬಿಂದು A ದಲ್ಲಿಂದ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

7. $\Delta ABC \sim \Delta LBN$, ΔABC ಯಲ್ಲಿ AB = 5.1 ಸೆ.ಮೀ, $\angle B = 40^\circ$, (BC) = 4.8 ಸೆ.ಮೀ, $\frac{AC}{LN} = \frac{4}{7}$ ಇದ್ದರೆ ΔABC ಮತ್ತು ΔLBN ತೆಗೆಯಿರಿ

8. ΔPYQ ದಲ್ಲಿ PY = 6.3 ಸೆ.ಮೀ, YQ = 7.2 ಸೆ.ಮೀ, PQ = 5.8 ಸೆ.ಮೀ ,

ಇರುವಂತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ ದೊರೆತ ΔXYZ ಇದು ΔPYQ ಸಮ ರೂಪ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಹೀಗೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

$\frac{YZ}{YQ} = \frac{6}{5}$ ಇರುವಂತೆ ರಚಿಸಿರಿ.

R2VSAC

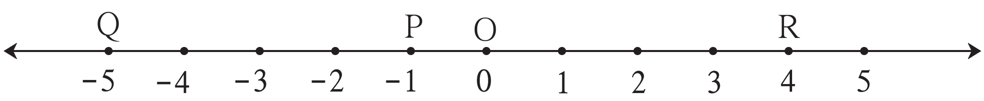
5 ನಿರ್ದೇಶಕ ಭೂಮಿತಿ

ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ

- ಅಂತರದ ಸೂತ್ರ
- ವಿಭಜನೆಯ ಸೂತ್ರ
- ರೇಖೆಯ ಏರಿಕೆ

ಸ್ವಲ್ಪನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ

ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದು ನಮ್ಮ ಗುರುತಿದೆ. P,Q ಮತ್ತು R ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $-1, -5$ ಮತ್ತು 4 ಇರುತ್ತವೆ PQ, ರೇಖೆ QR ಇವುಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **5.1**

ಬಿಂದು A ಮತ್ತು B ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶನಗಳು x_1 ಮತ್ತು x_2 ಇದ್ದು, ಮತ್ತು $x_2 > x_1$ ಇದ್ದರೆ ರೇಖಾ ಖಂಡ

ABದ ಉದ್ದಳತೆ = $d(A,B) = x_2 - x_1$

ಆಕೃತಿಯ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಬಿಂದು P,Q ಮತ್ತು R ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಕಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $-1, -5$ ಮತ್ತು 4 ಇರುತ್ತವೆ

$\therefore \; d(P, Q) = (-1)-(-5) = -1 + 5 = 4$

ಮತ್ತು $\quad d(Q, R) = 4 - (-5) = 4 + 5 = 9$

ಇದೇ ಸಂಕಲ್ಪನೆಯನ್ನುಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಾವು XY ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ, ಒಂದೇ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ತೆಗೆಯೋಣ

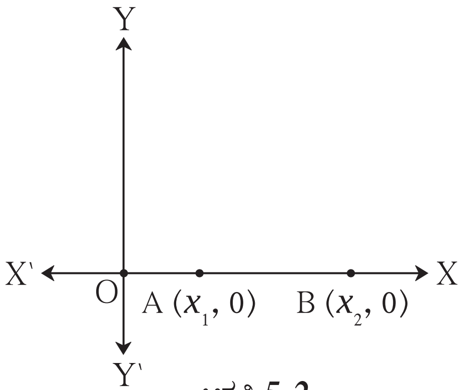
ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

(1) ಒಂದೇ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ತೆಗೆಯುವದು.

ಹೀಗೆ ಒಂದೇ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಎಂದರೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯಾರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. X ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(2, 0)$, $(\frac{-5}{2}, 0)$, $(8, 0)$ ಹೀಗೆ ಇದ್ದರೆ Y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ $(0, 1)$, $(0, \frac{17}{2})$, $(0, -3)$ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

X ಅಕ್ಷದ ಋಣ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೋರಿಸುವ ಭಾಗ ಕಿರಣ OX' ಇದೆ ಹಾಗೂ Y ಅಕ್ಷದ ಋಣ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೋಲಿಸುವ ಭಾಗ ಕಿರಣ OY' ಇದೆ.

i) X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ತೆಗೆಯುವುದು.



ಆಕೃತಿ 5.2

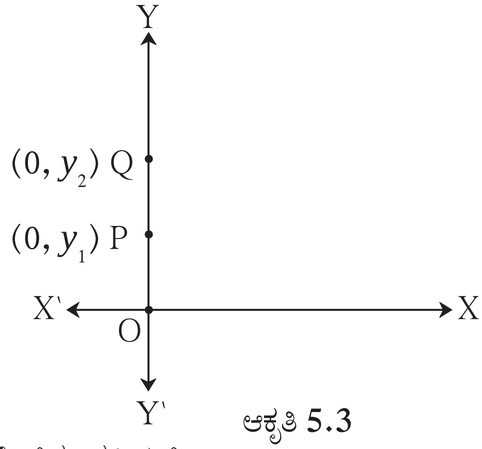
ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ

$A(x_1, 0)$ ಮತ್ತು $B(x_2, 0)$ ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು

X- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ, $x_2 > x_1$ ಹೀಗೆ ಇವೆ

$\therefore$ $d(A, B) = x_2 - x_1$

ii) Y- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ತೆಗೆಯುವುದು.



ಆಕೃತಿ 5.3

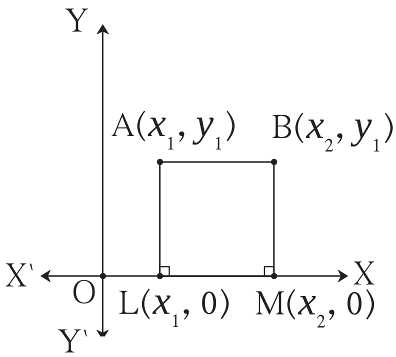
ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ

$P(0, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(0, y_2)$ ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು

Y- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ, $y_2 > y_1$ ಹೀಗೆ ಇವೆ

$\therefore$ $d(P,Q) = y_2 - y_1$

2) ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ XY ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ರೇಖಾಖಂಡ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಕ್ಷತೆ ಸಮಾಂತರ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ತೆಗೆಯುವದು.



ಆಕೃತಿ 5.4

i) ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖ AB ಇದು X- ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬಿಂದು A ಹಾಗೂ ಬಿಂದು B ಗಳ y ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಸಮಾನ ಇವೆ.

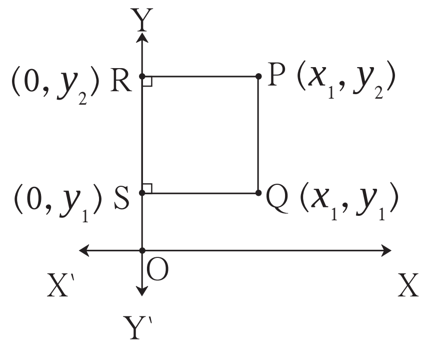
ರೇಖ AL ಮತ್ತು BM ಇವು X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ.

$\therefore$ $\square$ ABML ಇದು ಆಯತ ಇದೆ.

$\therefore$ AB = LM

ಆದರೆ, $LM = x_2 - x_1$

$\therefore$ $d(A,B) = x_2 - x_1$



ಆಕೃತಿ 5.5

ii) ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖ PQ ಇದು Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬಿಂದು P ಹಾಗೂ ಬಿಂದು Q ಗಳ x ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಸಮಾನ ಇವೆ.

ರೇಖ PR ಮತ್ತು QS ಇವು Y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಲಂಬ ತೆಗೆಯಿರಿ.

$\therefore$ $\square$ PQSR ಇದು ಆಯತ ಇದೆ.

$\therefore$ PQ = RS

ಆದರೆ, $RS = y_2 - y_1$

$\therefore$ $d(P,Q) = y_2 - y_1$

ಕೃತಿ :

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖ AB || Y-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ರೇಖ CB || X-ಅಕ್ಷ ಇದು A, C ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

AC ತೆಗೆಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಚೌಕೋನಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ.

Δ ABC ಇದು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ

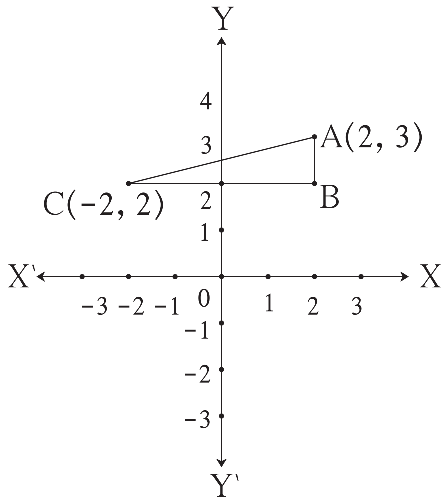
ಪಾಯಥಾಗೋರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ಮೇಲಿಂದ

$(AB)^2 + (BC)^2 = \boxed{}$

AB, BC ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಬಿಂದು B ದ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯೋಣ

CB || X- ಅಕ್ಷ $\therefore$ B ದ y ನಿರ್ದೇಶಕ = $\boxed{}$

BA || Y- ಅಕ್ಷ $\therefore$ B ದ x ನಿರ್ದೇಶಕ = $\boxed{}$



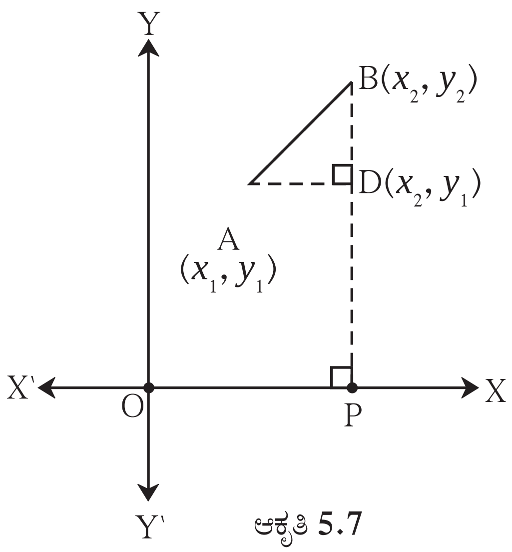
ಆಕೃತಿ **5.6**

AB = $\boxed{3} - \boxed{} = \boxed{}$ BC = $\boxed{} - \boxed{} = \boxed{4}$

$\therefore$ AC^2 = $\boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$ $\therefore$ AC = $\boxed{\sqrt{17}}$

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಅಂತರದ ಸೂತ್ರ (Distance formula)



ಆಕೃತಿ **5.7**

ಆಕೃತಿ 5.7 ದಲ್ಲಿ, A(x_1, y_1) ಮತ್ತು B(x_2, y_2) ಇವು XY ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿವೆ.

ಬಿಂದು B ದಿಂದ BP ಈ ಲಂಬ X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರಂತೆ ಬಿಂದು A ದಿಂದ AD ಈ ಲಂಬ ರೇಖ BPಯ ಮೇಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ರೇಖ BP ಇದು Y-ಅಕ್ಷಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇದೆ.

$\therefore$ ಬಿಂದು D ದ x ನಿರ್ದೇಶಕ x_2 ಇದೆ.

ರೇಖ AD ಇದು X-ಅಕ್ಷಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇದೆ.

$\therefore$ ಬಿಂದು D ದ y ನಿರ್ದೇಶಕ y_1 ಇದೆ.

$\therefore$ AD = d(A, D) = $x_2 - x_1$,

BD = d(B, D) = $y_2 - y_1$

ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ Δ ABDಯಲ್ಲಿ

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ಈ ನಿಷ್ಕರ್ಷೆಗೆ ಅಂತರದ ಸೂತ್ರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಈಡಿರಿ, $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

ಹಿಂದಿನ ಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು AC ಉದ್ದಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸಲುವಾಗಿ AB, ಈ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆದು ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ BC ಪ್ರಮೇಯದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿದ್ದೇವು. ಈಗ ಅಂತರದ ಸೂತ್ರದಿಂದ ನಾವು ಆ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಉದ್ಧಳತೆ ತೆಗೆಯೋಣ.

A(2, 3) ಮತ್ತು C(−2, 2) ಕೊಡಲಾಗಿದೆ

$A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $C(x_2, y_2)$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ

$x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -2, y_2 = 2$

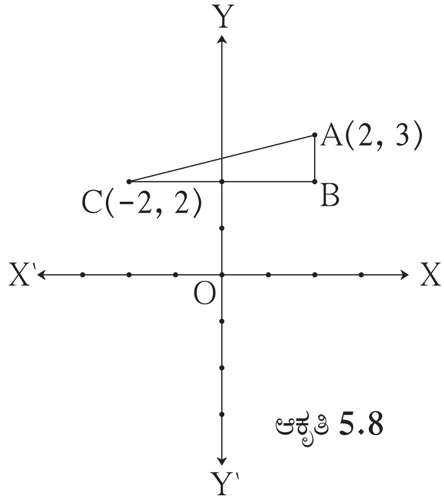
$$AC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2-2)^2+(2-3)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2+(-1)^2}$$

$$= \sqrt{16+1}$$

$$= \sqrt{17}$$



ಆಕೃತಿ 5.8

ರೇಖ AB || Y− ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ರೇಖ BC || X−ಅಕ್ಷ

∴ ಬಿಂದು B ದ ನಿರ್ದೇಶಕ (2, 2) ಇವೆ.

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{0+1} = 1$$

$$BC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-2-2)^2+(2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2+0} = 4$$

ಆಕೃತಿ 5.1 ರಲ್ಲಿ P ಮತ್ತು Q ಈ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ (−1) − (−5) = 4 ; ಹೀಗೆ ನಾವು ತೆಗೆದಿದ್ದು, ಅವುಗಳ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ (−1, 0) ಮತ್ತು (−5, 0) ಇವು ಇರುವವು. ಅಂತರದ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ P ಮತ್ತು Q ಗಳಲ್ಲಿ ಅಂತರ ಅಷ್ಟೇ ಬರುತ್ತದೆ, ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ

- ಆರಂಭಬಿಂದು Oದ ನಿರ್ದೇಶಕ (0, 0) ಇರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ Pದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x, y) ಇದ್ದರೆ $d(O, P) = \sqrt{x^2+y^2}$.
- $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು XY ಸಮತಲದಲ್ಲ ಇದ್ದರೆ

  $$d(P, Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

  ಅಂದರೆ, $PQ^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. (1) P(–1, 1), Q(5, –7) ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ

$x_1 = -1, \quad y_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = -7$

ಅಂತರದ ಸೂತ್ರದಿಂದ $d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{[5-(-1)]^2 + [(-7)-1]^2}$

$= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$

$= \sqrt{36+64}$

$d(P, Q) = \sqrt{100} \quad = 10$

$\therefore$ ಬಿಂದು P ಮತ್ತು Q ಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ 10 ಇದೆ.

ಉದಾ. (2) A(–3, 2), B(1, –2) ಮತ್ತು C(9, –10) ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಏಕ ರೇಷೀಯ ಆಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : d(A, B); d(B, C) ಮತ್ತು d(A, C) ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಂತರಗಳ ಬೇರೀಜು ಮೂರನೆಯ ಅಂತರದಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ, ಬಿಂದು, A, B, C ಏಕ ರೇಷೀಯ ಇರುತ್ತವೆ

$\therefore$ d(A, B), d(B, C) ಮತ್ತು d(A, C) ತೆಗೆಯೋಣ

A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ	B ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ	ಅಂತರದ ಸೂತ್ರ
(–3, 2)	(1, –2)	$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	

$\therefore d(A, B) = \sqrt{[1-(-3)]^2 + [(-2)-2]^2}$ .... (ಅಂತರದ ಸೂತ್ರದಿಂದ)

$= \sqrt{(1+3)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{16+16}$

$= \sqrt{32} \quad = 4\sqrt{2}$ ....(I)

$d(B, C) = \sqrt{(9-1)^2 + (-10+2)^2}$

$= \sqrt{64+64} \quad = 8\sqrt{2}$ ....(II)

ಮತ್ತು $d(A, C) = \sqrt{(9+3)^2 + (-10-2)^2}$

$= \sqrt{144+144} \quad = 12\sqrt{2}$ ....(III)

$4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ .... (I), (II) ಮತ್ತು (III) ರ ಮೇಲಿಂದ

$\therefore d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$

$\therefore$ A, B, C ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಷೀಯ ಆಗಿವೆ.

ಉದಾ. (3) P(6, −6), Q(3, −7) ಮತ್ತು R(3, 3) ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಷೀಯ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $PQ = \sqrt{(6-3)^2+(-6+7)^2}$ .... (ಅಂತರದ ಸೂತ್ರದಿಂದ)

$= \sqrt{(3)^2+(1)^2} \quad = \sqrt{10}$ .... (I)

$QR = \sqrt{(3-3)^2+(-7-3)^2}$

$= \sqrt{(0)^2+(-10)^2} \quad = \sqrt{100}$ .... (II)

$PR = \sqrt{(3-6)^2+(3+6)^2}$

$= \sqrt{(3)^2+(9)^2} \quad = \sqrt{90}$ .... (III)

(I), (II) ಮತ್ತು (III)ರ ಮೇಲಿಂದ $\sqrt{10}$, $\sqrt{100}$ ಮತ್ತು $\sqrt{90}$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ $\sqrt{100}$ ಇದು ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯ ಇದೆ.

$\left(\sqrt{100}\right)$ ಮತ್ತು $\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right)$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ

ಇದರ ಸುಲುವಾಗಿ $\left(\sqrt{100}\right)^2$ ಮತ್ತು $\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right)^2$ ಇವುಗಳ ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಿರಿ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ $\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right) > \left(\sqrt{100}\right) \quad \therefore PQ + PR \neq QR$

$\therefore$ P(6, −6), Q(3, −7) ಮತ್ತು R(3, 3) ಇವು ಏಕರೇಷೇಯ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲ

ಉದಾ. (4) (1, 7), (4, 2), (−1, −1) ಮತ್ತು (−4, 4) ಇವು ಚೇರಸದ ಶೀರೊಬಿಂದುಗಳಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಚೌಕೋನದ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಉದ್ದಳತೆಯ ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳು ಸಮಾನ ಉದ್ದಳತೆಯ ಇದ್ದರೆ ಆ ಚೌಕೋನ ಚೌರಸವಿರುತ್ತದೆ $\therefore$ ಎಲ್ಲ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಹಾಗೂ ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಅಂತರದ ಸೂತ್ರದಿಂದ ತೆಗೆಯೋಣ

A(1, 7), B(4, 2), C(−1, −1) ಮತ್ತು D(−4,4) ಇವು ಬಿಂದುಗಳಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$AB = \sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

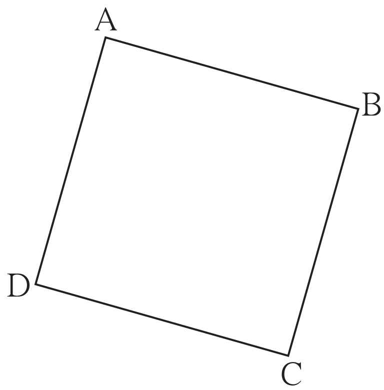
$BC = \sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$DA = \sqrt{(1+4)^2+(7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$



ಆಕೃತಿ **5.9**

$\therefore$ AB = BC = CD = DA ಮತ್ತು AC = BD

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ, ಚೌಕೋನದ ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಸಮಾನವಿದೆ ಅದರಂತೆ ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳು AC ಹಾಗೂ BDಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಸಮಾನ ಇವೆ.

$\therefore$ (1,7),(4,2), (−1,−1) ಮತ್ತು (−4,4) ಈ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಿಂದ ತಯಾರಾದ ಚೌಕೋನ ಚೌರಸ ಇದೆ.

ಉದಾ. (5) Y− ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇರುವ M (−5,−2) ಮತ್ತು N(3,2)ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಶೋಧಿಸಿರಿ

ಉತ್ತರ : Y− ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು $P(0, y)$ಇದು ಬಿಂದು M ಹಾಗೂ N ದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇದೇ.

$$\therefore PM = PN \qquad \therefore PM^2 = PN^2$$

$$\therefore [0-(-5)]^2 + [y-(-2)]^2 = (0-3)^2 + (y-2)^2$$

$$\therefore 25 + (y+2)^2 = 9 + y^2 - 4y + 4$$

$$\therefore 25 + y^2 + 4y + 4 = 13 + y^2 - 4y$$

$$\therefore 8y = -16 \quad \therefore y = -2$$

$\therefore$ M (−5, −2) ಮತ್ತು N (3, 2) ಈ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ Y− ಅಕ್ಷರ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ (0, −2) ಇದೆ.

ಉದಾ. (6) A(−3, −4), B(−5, 0), C(3, 0) ಇವು Δ ABCಯ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಿವೆ Δ ABCಯ ಪರಿಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕ ಶೋಧಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಬಿಂದು $P(a, b)$ ಇದು Δ ABC ಯಿಂದ ಪರಿಕೇಂದ್ರವಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$\therefore$ P ಈ ಬಿಂದು A, B, C ಯಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿದೆ

$$\therefore PA^2 = PB^2 = PC^2 \text{ .... (I)} \qquad \therefore PA^2 = PB^2$$

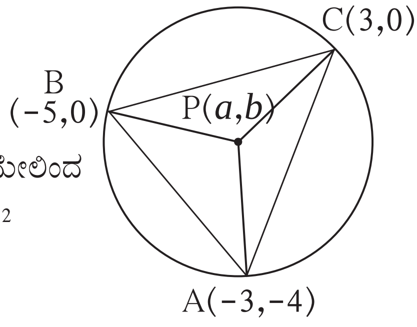
$$(a+3)^2 + (b+4)^2 = (a+5)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 + 10a + 25 + b^2$$

$$\therefore -4a + 8b = 0$$

$$\therefore a - 2b = 0 \text{ .... (II)}$$

ಅದರಂತೆ $PA^2 = PC^2$ ...... (I) ರ ಮೇಲಿಂದ



ಆಕೃತಿ **5.10**

$$\therefore (a+3)^2 + (b+4)^2 = (a-3)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 - 6a + 9 + b^2$$

$$\therefore 12a + 8b = -16$$

$$\therefore 3a + 2b = -4 \text{ .... (III)}$$

ಸಮೀಕರಣ (II) ಮತ್ತು (III) ಬಿಡಿಸಿ $a = -1,\ b = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ ಪರಿಕೇಂದ್ರ ನಿರ್ದೇಶಕ $(-1, -\frac{1}{2})$ ಇದೆ.

ಉದಾ. (7) ಬಿಂದು (x, y) ಇದು $(7, 1)$ ಮತ್ತು $(3, 5)$ ಇವುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ $y = x-2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ

ಉತ್ತರ : P (x, y) ಇದು ಬಿಂದು A$(7, 1)$ ಮತ್ತು B$(3, 5)$ ದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$$\therefore AP = BP$$

$$\therefore AP^2 = BP^2$$

$$\therefore (x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$\therefore x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$\therefore -8x + 8y = -16$$

$$\therefore x - y = 2$$

$$\therefore y = x - 2$$

ಉದಾ. (8) ಬಿಂದು A $(2,-2)$ ಮತ್ತು ಬಿಂದು B $(-1, y)$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ 5 ಇದ್ದರೆ y ದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $\therefore AB^2 = [(-1) - 2]^2 + [y - (-2)]^2$ .... ಅಂತರದ ಸೂತ್ರದಿಂದ

$\therefore \quad 5^2 = (-3)^2 + (y+2)^2$

$\therefore \quad 25 = 9 + (y+2)^2$

$\therefore \quad 16 = (y+2)^2$

$\therefore \quad y + 2 = \pm\sqrt{16}$

$\therefore \quad y + 2 = \pm 4$

$\therefore y = 4 - 2$ ಅಥವಾ $y = -4 - 2$

$\therefore y = 2$ ಅಥವಾ $y = -6$

$\therefore y$ ದ ಬೆಲೆ 2 ಅಥವಾ -6 ಇದೆ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.1

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ ಅಂತರ ತೆಗೆಯಿರಿ.

   (1) A$(2, 3)$, B$(4, 1)$ (2) P$(-5, 7)$, Q$(-1, 3)$ (3) R$(0, -3)$, S$(0, \frac{5}{2})$

   (4) L$(5, -8)$, M$(-7, -3)$ (5) T$(-3, 6)$, R$(9, -10)$ (6) W$(\frac{-7}{2}, 4)$, X$(11, 4)$

2. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕ ರೇಷೀಯ ಇವೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲಿವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

   (1) A$(1, -3)$, B$(2, -5)$, C$(-4, 7)$ (3) L$(-2, 3)$, M$(1, -3)$, N$(5, 4)$

   (2) R$(0, 3)$, D$(2, 1)$, S$(3, -1)$ (4) P$(-2, 3)$, Q$(1, 2)$, R$(4, 1)$

3. X− ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಈ ರೀತಿಯ ಬಿಂದು ಶೋಧಿಸಿರಿ, ಅದು ಬಿಂದು A$(-3, 4)$ ಮತ್ತು B$(1, -4)$ ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇದೆ.

4. P$(-2, 2)$, Q$(2, 2)$ ಮತ್ತು R$(2, 7)$ ಇವು ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

5. P(2, −2), Q(7, 3), R(11, −1) ಮತ್ತು S (6, −6) ಈ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಿರುವ ಚೌಕೋನ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

6. A(−4, −7), B(−1, 2), C(8, 5) ಮತ್ತು D(5, −4) ಇವು ABCD ಈ ಸಮಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

7. ಬಿಂದು L(x, 7) ಮತ್ತು M(1, 15) ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ 10 ಇದ್ದರೆ x ದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

8. A(1, 2), B(1, 6), C($1 + 2\sqrt{3}$, 4) ಇವು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

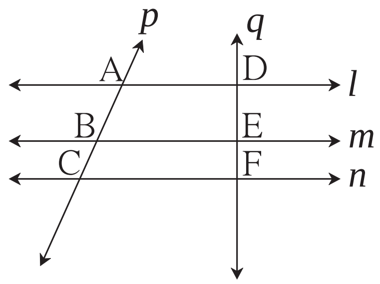
ಸ್ವಲ್ಪನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ

ಮೂರು ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಗಳ ಅಂತರ ಛೇಧಗಳ ಗುಣಧರ್ಮ:

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖೆ l || ರೇಖೆ m || ರೇಖೆ n,

ರೇಖೆ p ಮತ್ತು q ಇವು ಛೇದಿಕೆಗಳಿವೆ

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$



ಆಕೃತಿ **5.11**

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ರೇಖಾ ಖಂಡದ ವಿಭಜನೆ (Division of a line segment)

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ AP = 6 ಮತ್ತು PB = 10.

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

ಆಕೃತಿ **5.12**

ಇದನ್ನು ಬೇರೆ ಶಬ್ದಗಳಲ್ಲಿ ‘ಬಿಂದು P ಇದು ರೇಖ ABಯನ್ನು 3:5 ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುವದು; ಎಂದು ಅನ್ನುವರು. ಯಾವುದೇ ರೇಖಾ ಖಂಡದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು ಅದೇ ರೇಖಾಬಂಡವನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುತ್ತವೆಯೋ ಆವಾಗ ಆ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುವ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವರು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ವಿಭಜನೆ ಸೂತ್ರ (Section formula)

ಆಕೃತಿ 5.13 ದಲ್ಲಿ XY ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ರೇಖ ABಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದು P, ರೇಖ ABಯನ್ನು $m:n$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $P(x, y)$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ ರೇಖ AC, ರೇಖ PQ ಮತ್ತು ರೇಖ BD ಇವುಗಳ X–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಲಂಬ ರೇಖಾಖಂಡ ತೆಗೆದೆವು.

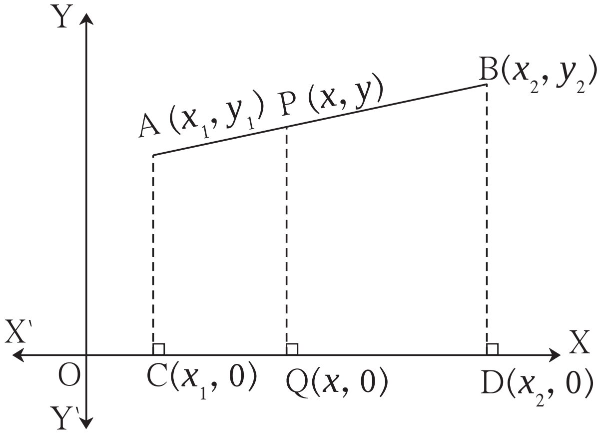
$\therefore C(x_1, 0)$; $Q(x, 0)$

ಮತ್ತು $D(x_2, 0)$.

$\therefore$ $CQ = x - x_1$

ಮತ್ತು $QD = x_2 - x$ $\Big\}$ .... (I)

ಆದರಂತೆ ರೇಖ AC || ರೇಖ PQ || ರೇಖ BD.



ಆಕೃತಿ **5.13**

$\therefore$ ಮೂರು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಅಂತರ ಛೇದಗಳ ಗುಣಧರ್ಮದಿಂದ $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{CQ}{QD} = \dfrac{m}{n}$

ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ $CQ = x - x_1$ ಆದರಂತೆ $QD = x_2 - x$ .... (I)

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

$$\therefore mx + nx = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x(m + n) = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

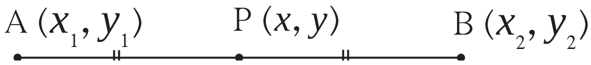
ಆದರಂತೆ ಬಿಂದು A, P ಮತ್ತು B ದಿಂದ Y– ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಲಂಬ ತೆಗೆದು ಮೇಲಿನ ಹಾಗೆ ಕೃತಿ ಮಾಡಲಾಗಿ ನಮಗೆ $y = \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}$ ದೊರೆಯುವದು.

$\therefore$ ಬಿಂದು $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಇವುಗಳಿಗೆ ಜೊಡಿಸುವ ರೇಖ ABಯ $m : n$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ $\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$ ಇರುತ್ತವೆ.

ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂತ್ರ : (Mid-point formula)

$A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಇದ್ದು ಬಿಂದು $P(x, y)$ ಇದು ರೇಖ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದ್ದರೆ

$m = n$ ಈಗ ವಿಭಜನೆಯ ಸೂತ್ರದ ಅನುಸಾರವಾಗಿ,



ಆಕೃತಿ 5.14

x ಹಾಗು y ಗಳ ಬೇರೆ ಬರೆಯೋಣ

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$= \frac{mx_2 + mx_1}{m+m} \quad \because m = n$$

$$= \frac{m(x_1 + x_2)}{2m}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$= \frac{my_2 + my_1}{m+m} \quad \because m = n$$

$$= \frac{m(y_1 + y_2)}{2m}$$

$$= \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$\therefore$ P ಈ ಮಧ್ಯಭಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ಇವು ಇರುತ್ತವೆ.ಇದಕ್ಕೆ 'ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂತ್ರ' ಎನ್ನುವರು

ನಾವು ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a ಮತ್ತು b ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ $\frac{a+b}{2}$ ಇದು ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆ ನಿಷ್ಕರ್ಷ ಎಂದರೆ ಈಗ ದೊರೆಕಿಸಿದ ಸೂತ್ರದ ವಿಶಿಷ್ಟ ಪ್ರಕಾರ ಇದೆ. ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. (1) $A(3,5)$ $B(7,9)$ ಇದ್ದು ಬಿಂದು Q ರೇಖ AB ಯನ್ನು $2:3$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರೆ, Q ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಕೊಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ $(x_1, y_1) = (3, 5)$

ಮತ್ತು $(x_2, y_2) = (7, 9)$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ

ಆದರಂತೆ $m : n = 2:3$

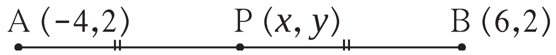
ರೇಖಾಖಂಡದ ವಿಭಜನೆಯ ಸೂತ್ರಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{2\times7+3\times3}{2+3} = \frac{23}{5} \qquad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{2\times9+3\times5}{2+3} = \frac{33}{5}$$

$\therefore$ Q ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ $\left(\frac{23}{5}, \frac{33}{5}\right)$ ಇದೆ.

ಉದಾ. (2) $A(-4,2)$ $B(6,2)$ ಈ ರೇಖಾಖಂಡದ ಬಿಂದು P ಇದು ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದ್ದರೆ, P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ :



ಆಕೃತಿ **5.15**

$(-4, 2) = (x_1, y_1)$; $(6, 2) = (x_2, y_2)$ ಮತುತ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ (x, y) ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ

$\therefore$ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿ ಸೂತ್ರಕ್ಕನುಸಾರ ವಾಗಿ,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$\therefore$ ಮಧ್ಯಬಿಂದು Pದ ನಿರ್ದೇಶಕ $(1,2)$ ಬರುವದು

ಸ್ವಲ್ಪನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ

ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಏಕ ಸಂಪಾತ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುತ್ತದೆ

ಸಂಪಾತಬಿಂದು (centroid) ಮಧ್ಯಗಾಮಿಯ 2:1 ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ

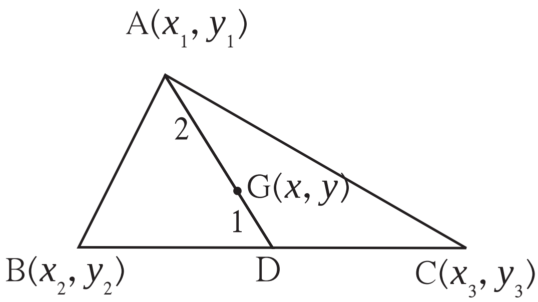
ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂತ್ರ (Centroid formula)

ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಶಿರೋಬಿಂದುವಿಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ಕೊಟ್ಟಾಗ ವಿಭಜನೆಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡೋಣ

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ಇವು Δ ABC ಯ ಶಿರೋಬಿಂದು ಇದ್ದು ರೇಖ AD ಇದು Δ ABCಯ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಬಿಂದು $G(x, y)$ ಇದು ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಸಂಪಾತಬಿಂದು ಇದೆ.

ಬಿಂದು D ಇದು ರೇಖ BCಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದೆ.



ಆಕೃತಿ **5.16**

$\therefore$ D ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ $x = \dfrac{x_2 + x_3}{2}$, $y = \dfrac{y_2 + y_3}{2}$ .... ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂತ್ರಾನುಸಾರ

ಬಿಂದು G(x, y) ಇದು Δ ABCಯ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದು ಇದೆ. $\therefore$ AG : GD = 2 : 1

$\therefore$ ರೇಖಾಖಂಡದ ವಿಭಜನೆಯ ಸೂತ್ರಾನುಸಾರ.

$$x = \frac{2\left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2\left(\dfrac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1 \times y_1}{2+1} = \frac{y_2 + y_3 + y_1}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

ಅಂದರೆ, ಶಿರೋಬಿಂದು (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ ಇರುವುವು.

ಇದಕ್ಕೆ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂತ್ರ ಎನ್ನುವರು

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ

- ವಿಭಜನೆಯ ಸೂತ್ರ

  (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಎ ಎರಡು ಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾ ಖಂಡದ $m : n$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ $\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ ಇರುತ್ತದೆ.

- ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸೂತ್ರ

  (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಈ ಎರಡು ಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ಇರುತ್ತದೆ.

- ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂತ್ರ

  (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಮತ್ತು (x_3, y_3) ಇವು ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶನ ಇದ್ದರೆ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ ಇರುತ್ತದೆ.

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

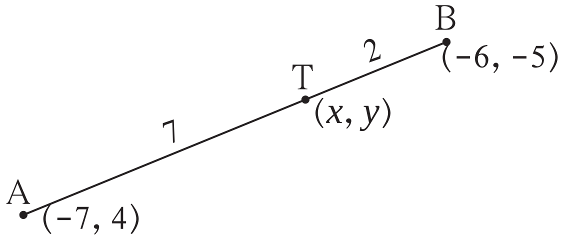
ಉದಾ. (1) A(−7,4) ಮತ್ತು B(−6,−5) ಇದ್ದು ಬಿಂದು T ಇದು ರೇಖ ABಯನ್ನು 7:2 ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರೆ T ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : T ಬಿಂದವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ (x, y) ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ

∴ ರೇಖಾಖಂಡದ ವಿಭಜನೆಯ ಸೂತ್ರಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{7\times(-6)+2\times(-7)}{7+2}$$

$$= \frac{-42-14}{9} = \frac{-56}{9}$$



ಆಕೃತಿ 5.17

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{7\times(-5)+2\times(4)}{7+2}$$

$$= \frac{-35+8}{9} = \frac{-27}{9} = -3$$

∴ T ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ $\left(\frac{-56}{9}, -3\right)$ ಬರುವವು

ಉದಾ. (1) ಬಿಂದು P(−4, 6) ಇದು A(−6, 10) ಮತ್ತು B(r, s) ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಷಾಖಂಡಕ್ಕೆ 2:1 ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಬಿಂದು B ದ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ರೇಖಾ ಖಂಡದ ವಿಭಜನೆಯ ಸೂತ್ರಕನುಸಾರವಾಗಿ

$$-4 = \frac{2\times r + 1\times(-6)}{2+1}$$

$$\therefore \quad -4 = \frac{2r-6}{3}$$

$$\therefore \quad -12 = 2r - 6$$

$$\therefore \quad 2r = -6$$

$$\therefore \quad r = -3$$

$$6 = \frac{2\times s + 1\times 10}{2+1}$$

$$\therefore \quad 6 = \frac{2s+10}{3}$$

$$\therefore \quad 18 = 2s + 10$$

$$\therefore \quad 2s = 8$$

$$\therefore \quad s = 4$$

∴ ಬಿಂದು Bದ ನಿರ್ದೇಶಕ (−3, 4) ಇರುತ್ತದೆ

ಉದಾ. (3) A(15,5), B(9,20) ಮತ್ತು P(11,15) ಇದ್ದು A−P−B. ಇದ್ದರೆ ಬಿಂದು P ಇದು ರೇಖ ABಯನ್ನು ಯಾವ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಬಿಂದು P(11,15) ರೇಖ AB ಯನ್ನು $m : n$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ

∴ ವಿಭಜನ ಸೂತ್ರಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ.

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$\therefore\ 11 = \frac{9m+15n}{m+n}$$

$$\therefore\ 11m + 11n = 9m + 15n$$

$$\therefore\ 2m = 4n$$

$$\therefore\ \frac{m}{n} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

$\therefore$ ವಿಭಜನೆಯ ಗುಣೋತ್ತರ 2 : 1 ಇದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ y - ನಿರ್ದೇಶಕದ ಬೆಲೆ ಹಾಕಲಾಗಿ ಬರುವ ಗುಣೋತ್ತರ ಎಷ್ಟು ಬರುವದು ತೆಗೆಯಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ನಿಷ್ಕರ್ಷ ಬರೆಯಿರಿ.

ಉದಾ. (4) ಬಿಂದು A $(2,-2)$ ಮತ್ತು B$(-7,4)$ ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಷಾಖಂಡದ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

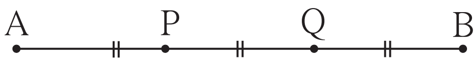
(ರೇಖಾ ಖಂಡದ ಮೇಲಿನ ಯಾವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಆ ರೇಖಾ ಖಂಡವನ್ನು ಮೂರು ಸಮಾನ ಭಾಗ ಮಾಡುತ್ತವೆ, ಅವುಗಳಿಗೆ ಆ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರಿವಿಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳು ಎನ್ನುವರು)

ಉತ್ತರ : ಬಿಂದು P ಮತ್ತು Q ಇವು ಬಿಂದು A ಮತ್ತು ಬಿಂದು B ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರಿವಿಭಾಜಕ ಬಿಂದು ಇರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ಅಂದರೆ P ಮತ್ತು Q ದಿಂದ AB ಯ ಸಮಾನ ಮೂರು ಭಾಗ ಆಗುವವು.

AP = PQ = QB .... (I)

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AP}{PQ+QB} = \frac{AP}{AP+AP} = \frac{AP}{2AP} = \frac{1}{2}$$ .... (I)ರ ಮೇಲಿಂದ

ಬಿಂದು P ರೇಖ ABಯನ್ನು 1:2 ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ 5.18

$$\text{P ದ } x \text{ ನಿರ್ದೇಶಕ} = \frac{1\times(-7)+2\times 2}{1+2} = \frac{-7+4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\text{P ದ } y \text{ ನಿರ್ದೇಶಕ} = \frac{1\times 4+2\times(-2)}{1+2} = \frac{4-4}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

ಅದರಂತೆ Q ಬಿಂದು ರೇಖ ABಯನ್ನು 2:1 ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ $\frac{AQ}{QB} = \frac{2}{1}$

$$\text{Q ದ } x \text{ ನಿರ್ದೇಶಕ} = \frac{2\times(-7)+1\times 2}{2+1} = \frac{-14+2}{3} = \frac{-12}{3} = -4$$

$$\text{Q ದ } y \text{ ನಿರ್ದೇಶಕ} = \frac{2\times 4+1\times -2}{2+1} = \frac{8-2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$\therefore$ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರಿಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ $(-1, 0)$, $(-4, 2)$ ಇರುತ್ತವೆ.

ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಗಾಗಿ

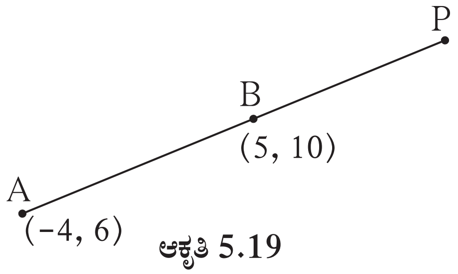
A ಮತ್ತು B ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಬಾಹ್ಯವಿಭಜನೆ ಹೇಗೆ ಮಾಡುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

A(−4, 6), B(5, 10) ಈ ರೀತಿಯ ಬಿಂದು ಇದ್ದರೆ AB ರೇಖಾಖಂಡದ 3:1 ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಿಭಜನೆ ಮಾಡುವ ಬಿಂದು Pದ ನಿರ್ದೇಶಕ ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರವದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ ಅಂದರೆ AP, PB ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದ್ದು A−B−P ಇದೆ.

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ ಅಂದರೆ AP = 3k, BP = k, ಇದ್ದರೆ AB = 2k

$$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{2}{1}$$



ಆಕೃತಿ 5.19

ಈಗ B ಬಿಂದು AP ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 2:1 ದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

A ಹಾಗೂ Bಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ಕೊಟ್ಟಾಗ Pದ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯುವದನ್ನು ನಾವು ಕಲಿತ್ತಿದ್ದೇವೆ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.2

1. P ಬಿಂದು ಇದು A(−1,7) ಮತ್ತು B(4,−3) ಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ 2 : 3 ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರೆ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.
2. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ರೇಖ PQದ a : b ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುವ A ಈ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

   (1) P(−3, 7), Q(1, −4), a : b = 2 : 1

   (2) P(−2, −5), Q(4, 3), a : b = 3 : 4

   (3) P(2, 6), Q(−4, 1), a : b = 1 : 2
3. P−T−Q ಇದ್ದು, ಬಿಂದು T(−1, 6) ಈ ಬಿಂದು P(−3, 10) ಮತ್ತು ಬಿಂದು Q(6, −8) ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಯಾವ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.
4. ರೇಖ AB ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸವಿದ್ದು ಬಿಂದು P ಇದು ಕೇಂದ್ರ ಇದೆ. A(2,−3) ಮತ್ತು P (−2,0) ಇದ್ದರೆ B ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.
5. ಬಿಂದು A(8, 9) ಮತ್ತು B(1, 2) ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖ AB ಯನ್ನು P(k, 7)ಈ ಬಿಂದು ಯಾವ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು ತೆಗೆದು, kದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
6. (22, 20) ಮತ್ತು (0, 16) ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.
7. ಕೆಳಗೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

   (1)(−7, 6), (2, −2), (8, 5)

   (2) (3, −5), (4, 3), (11, −4)

   (3) (4, 7), (8, 4), (7, 11)

8. Δ ABCದ G ಇದು ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದು. ಇದೆ A, B ಮತ್ತು G ಇವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $(-14, -19)$, $(3, 5)$ ಮತ್ತು $(-4, -7)$ ಇವೆ ಹಾಗಾದರೆ, C ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

9. ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಸಂಪಾತಬಿಂದು G $(1, 5)$ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನದ A $(h, -6)$, B $(2, 3)$ ಮತ್ತು C $(-6, k)$ ಶಿರೋ ಬಿಂದುಗಳಿಂದರೆ h ಮತ್ತು k ದ ಬೆಲೆ ತೆಗಯಿರಿ.

10. ಬಿಂದು A $(2, 7)$ ಮತ್ತು B$(-4, -8)$ ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ AB ಯನ್ನು ತ್ರಿವಿಭಜನೆ ಮಾಡುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

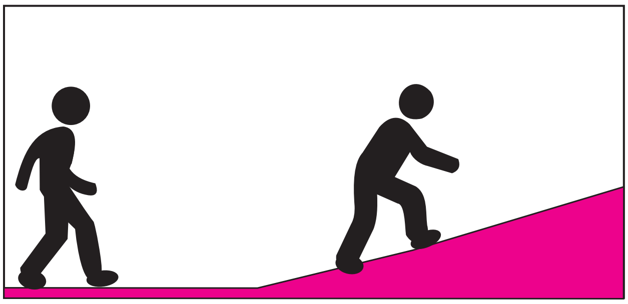
11. A $(-14, -10)$, B$(6, -2)$ ಇರುವ ರೇಖ AB ಯನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಏಕರೂಪ ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

12. A $(20, 10)$, B$(0, 20)$ ಇರುವ ರೇಖ AB ಯನ್ನ ಐದು ಏಕರೂಪ ರೇಖಾಖಂಡಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುವ ಬಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ರೇಖೆಯ ಏರಿಕೆ (Slope of a line)

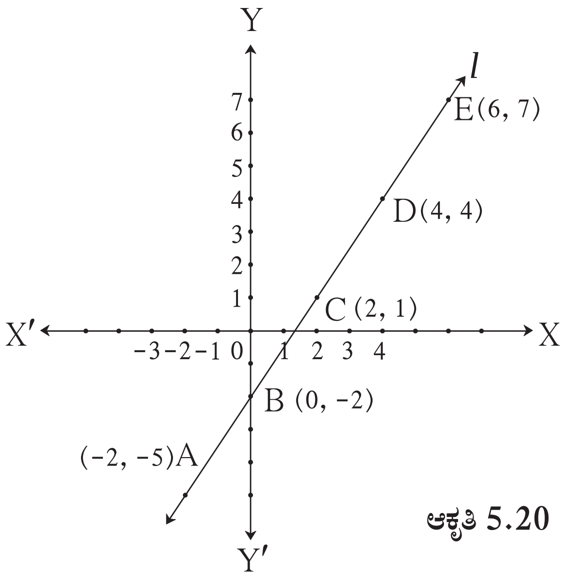
ನಾವು ಸಪಾಟಾದ ಭೂಮಿಯ ಮೇಲೆ ನಡೆದಾಗ, ಬಹಳ ಶ್ರಮ ಹತ್ತು ವದಿಲ್ಲಿ ಏರಿಕೆಯ ಮೇಲೆ ನಡೆಯುವಾಗ ಶ್ರಮ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು. ಮಾನವನಿಗೆ ತೇಕ ಹತ್ತಬಹುದು. ಎರಿಕೆಯ ದಾರಿಯ ಮೇಲೆ ಹೋಗುವಾಗ ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷಣೆ ವಿರುದ್ದ ದಿಕ್ಕನಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ನಾವು ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.



ಸಮತಲದಲ್ಲಿಯ ನಿರ್ದೇಶಕ ಭೂಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯ ಏರಿಕೆ ಇದು ಒಂದು ಮಹತ್ವದ ಸಂಕಲ್ಪನೆ ಇದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿಯ ಮೂಲಕ ಈ ಸಂಕಲ್ಪನೆ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಕೃತಿ I :

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ A$(-2,-5)$, B$(0,-2)$, C$(2,1)$, D$(4,4)$, E$(6,7)$ಇವು ರೇಖೆ l ದ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ ಈ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ತಯಾರಿಸಿದ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದ ನೀರಿಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 5.20

ಅ. ಕ್ರ	ಮೊದಲನೆಯ ಬಿಂದು	ಎರಡನೆಯ ಬಿಂದು	ಮೊದಲನೆಯ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ (x_1, y_1)	ಎರಡನೆಯ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ (x_2, y_2)	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
1	C	E	(2, 1)	(6, 7)	$\frac{7-1}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
2	A	D	(−2, −5)	(4, 4)	$\frac{4-(-5)}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
3	D	A	(4, 4)	(−2, −5)	$\frac{-5-4}{-2-4} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$
4	B	C	--	--	--
5	C	A	--	--	--
6	A	C	--	--	--

ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳನ್ನು ತುಂಬಿ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣ ಗೊಳಿಸಿರಿ. ಅದರಂತೆ ರೇಖೆ l ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಇನ್ನೂ ಕೇಲವು ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಗಾಗಿ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ಈ ಗುಣೋತ್ತರ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಈ ಕೃತಿಯಿಂದ l ರೇಖೆಯ $(x_1,\ y_1)$ ಮತ್ತು $(x_2,\ y_2)$ ಈ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಗಾಗಿ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ಈ ಗುಣೊತ್ತರ ಸ್ಥಿರ ಇರುತ್ತದೆ.

ರೇಖ l ದ (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಇವು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿದ್ದರೆ, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ಈ ಸ್ಥಿರ ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ ರೇಖೆ lದ ಏರಿಕೆ ಎನ್ನುವರು

ರೇಖೆಯ ಏರಿಕೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ m ಈ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ತೋರಿಸುವರು

$$\therefore \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ಕೃತಿ II : ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖೆ l, t ಮತ್ತು n ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಕೆಲವು ಬಿಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಆ ರೇಖೆಗಳ ಏರಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

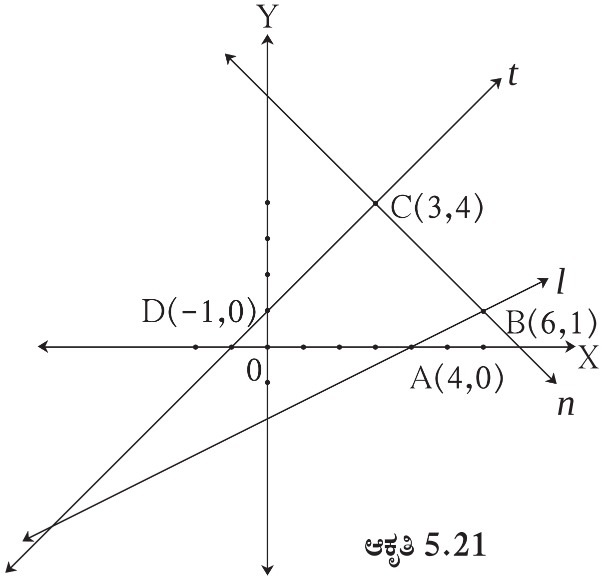
ಇದು ಗಮನಕ್ಕೆ ಬಂದಿರಬಹುದು.

(1) ರೇಖೆ l ಮತ್ತು ರೇಖೆ t ಇವುಗಲ ಏರಿಕೆ

(2) ರೇಖೆ nದ ಏರಿಕೆ ಋಣ ಇದೆ

(3) ರೇಖೆ tದ ಏರಿಕೆ, ರೇಖೆ lದ ಏರಿಕೆಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ.

(4) X− ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಲಘುಕೋನ ಮಾಡುವ



ಆಕೃತಿ 5.21

(5) X− ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ವಿಶಾಲಕೋನ ಮಾಡುವ n ಈ ರೇಖೆಯ ಏರಿಕೆ ಋಣ ಇದೆ.

X−ಅಕ್ಷ, Y−ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಅಕ್ಷ ಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರ ವಿರುವ ರೇಖೆಗಳ ಏರಿಕೆ

ಆಕೃತಿ 5.22ರಲ್ಲಿ $(x_1, 0)$ ಮತ್ತು $(x_2, 0)$

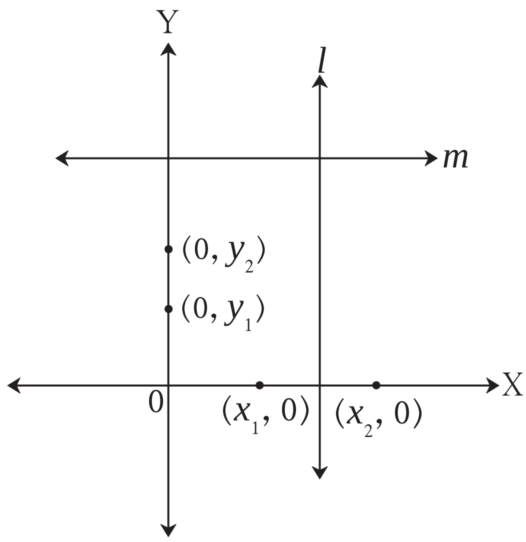
X− ಅಕ್ಷದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿವೆ.

X− ಅಕ್ಷದ ಏರಿಕೆ $= \dfrac{0 - 0}{x_2 - x_1} = 0$

ಅದರಂತೆ $(0, y_1)$ಮತ್ತು $(0, y_2)$ ಇವು Y− ಅಕ್ಷದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿವೆ

Y− ಅಕ್ಷದ ಏರಿಕೆ $= \dfrac{y_2 - y_1}{0 - 0} = \dfrac{y_2 - y_1}{0}$, ಆದರೆ

0 ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲು ಬರುವವಿಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ Y− ಅಕ್ಷದ ಏರಿಕೆ



ಆಕೃತಿ 5.22

ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುವಲ್ಲ. ಆದರಂತೆ ರೇಖೆ mದ ಹಾಗೆ X− ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇರುವ ಯಾವುದೇ ರೇಖೆಯ ಏಲಿಕೆ ತೆಗೆದು ನೋಡಿರಿ. ಅದು ಶೂನ್ಯ ಬರುವದು. ಆದರಂತೆ, ರೇಖೆ l ದ ಹಾಗೆ Y− ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇರುವ ರೇಖೆಯ ಏರಿಕೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುವದಲ್ಲಿ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವದು.

ರೇಖೆಯ ಏರಿಕೆ -ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯ ಗುಣೋತ್ತರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿ 5.23ಯಲ್ಲಿ, $P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಇವು ರೇಖೆ l ರೆಖೆ l ಇದು X ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ T ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸುವದು

ರೇಖ QS $\perp$ X− ಅಕ್ಷ, ರೇಖ PR $\perp$ ರೇಖ QS $\therefore$ ರೇಖ PR $\|$ ರೇಖ TS .... ಸಂಗತ ಕೋನಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ

$\therefore$ QR $= y_2 - y_1$ ಮತ್ತು PR $= x_2 - x_1$

$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .... (I)

ರೇಖ TQ ಇದು X- ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ θ ಕೊನ ಮಾಡುವದು

$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \tan\theta$ .... (II)

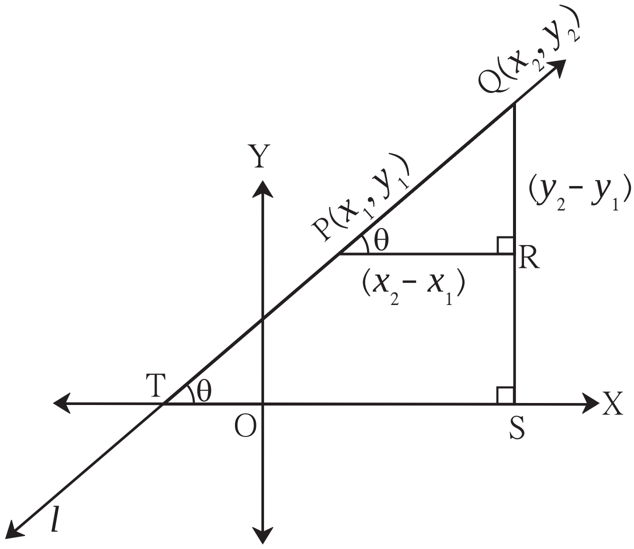
$\therefore$ (I) ಹಾಗೂ (II) ರ ಮೇಲಿಂದ, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$

$\therefore \quad m = \tan\theta$

ಈಗ ರೇಖ PR || ರೇಖ TS, ಛೇದಿಕ ರೇಖ l

$\therefore \quad \angle QPR = \angle QTS$ .... ಸಂಗತಕೊನ

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ರೇಖೆವು X−ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಮಾಡಿರುವ ಕೋನದ ಟ್ಯಾನ ಗುಣೋತ್ತರ ವಿಂದರೆ ಆ ರೇಖೆಯ ಏರಿಕೆ ಇರುವದು ಹೀಗೆಯ ಏರಿಕೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು.



ಆಕೃತಿ 5.23

ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ಸಮಾನ ವಿದ್ದಾಗ ಆ ರೇಖೆ X− ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಒಂದೇ ಕೋನ ಮಾಡುವವು

$\therefore$ ಆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಇರುವವು

ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಏರಿಕೆ (Slope of parallel lines)

ಕೃತಿ :

ಆಕೃತಿ 5.24 ರಲ್ಲಿ ರೇಖೆ l ಮತ್ತು ರೇಖೆ t ಈ ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳು X− ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಮಾಡಿರುವ ಕೋನ θ ಇದೆ.

$\therefore$ ರೇಖ l || ರೇಖ t .... ಸಂಗತ ಕೋನಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆ

ರೇಖlಮೇಲಿನಬಿಂದುA(−3,0)ಮತ್ತುಬಿಂದುB(0,3) ವಿಚಾರಮಾಡಿರಿ. ರೇಖ AB ಯ ಏರಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

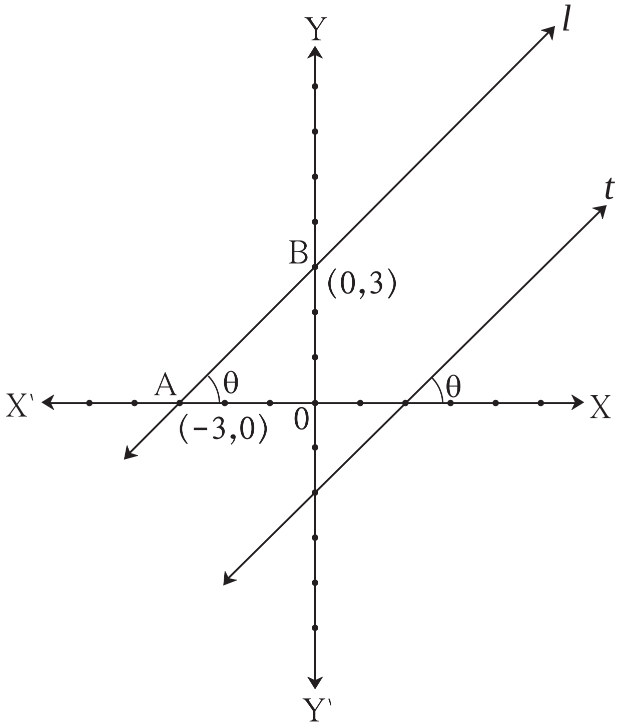
ರೇಖ ABಯ ಏರಿಕೆ = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{\boxed{} - \boxed{}}{\boxed{} - \boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$= \boxed{}$$

ಆದರಂತೆ ರೇಖೆ t ಮೇಲಿನ ಯೋಗ್ಯ ಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆದರ ಏರಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಏರಿಕೆ ಸಮಾನ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದರ ಪರೀಕ್ಷೆ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳ ಬಹುದು.



ಆಕೃತಿ 5.24

ಇಲ್ಲಿ $\theta = 45^\circ$ ಇದೆ

ಏರಿಕೆ $m = \tan\theta$ ಇದರ ಉಪಯೋಗದಿಂದ ಎರಡೂ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಏರಿಕೆ ಸಮಾನ ಬರುತ್ತವೆ ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಅದರಂತೆ $\theta = 30^\circ$, $\theta = 60^\circ$ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಏರಿಕೆ ಸಮಾನ ಇರುತ್ತವೆ ಇದರ ಪರೀಕ್ಷೆ ಮಾಡಿರಿ.

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ X− ಅಕ್ಷದ ಅಥವಾ X− ಅಕ್ಷಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯ ಏರಿಕೆ ಶೂನ್ಯ ಇರುವದು.

Y− ಅಕ್ಷದ ಅಥವಾ Y− ಅಕ್ಷಕೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯ ಏರಿಕೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ.

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. (1) A (−3, 5), ಮತ್ತು B (4, −1) ಈ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಏರಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $x_1 = -3,\quad x_2 = 4,\quad y_1 = 5,\quad y_2 = -1$

$\therefore$ ರೇಖೆ ABದ ಏರಿಕೆ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-1-5}{4-(-3)} = \dfrac{-6}{7}$

ಉದಾ. (2) P(−2, 3), Q(1, 2), R(4, 1) ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಷೀಯ ಇವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : P(−2, 3), Q(1, 2) ಮತ್ತು R(4, 1) ಇವು ಕೊಟ್ಟಬಿಂದುಗಳಿವೆ.

ರೇಖ PQದ ಏರಿಕೆ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2-3}{1-(-2)} = -\dfrac{1}{3}$

ರೇಖ QR ದ ಏರಿಕೆ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1-2}{4-1} = -\dfrac{1}{3}$

ರೇಖ PQ ಮತ್ತು ರೇಖ QRದ ಏರಿಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಆದರೆ ಬಿಂದು Q ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿದೆ

$\therefore$ ಬಿಂದು P, Q, R ಏಕರೇಖಿಯ ಇರುತ್ತವೆ

ಉದಾ. (3) P(k,0) ಮತ್ತು Q(−3,−2), ಈ ಎರಡೂ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಏರಿಕೆ $\dfrac{2}{7}$ ಇದ್ದರೆ kದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : P(k, 0) ಮತ್ತು Q(−3, −2)

ರೇಖ PQದ ಏರಿಕೆ $= \dfrac{-2-0}{-3-k} = \dfrac{-2}{-3-k}$

ರೇಖ PQದ ಏರಿಕೆ $\dfrac{2}{7}$ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$\therefore \dfrac{-2}{-3-k} = \dfrac{2}{7} \qquad \therefore k = 4$

ಉದಾ. (4) A (6, 1), B (8, 2), C (9, 4) ಮತ್ತು D (7, 3) ಮತ್ತು □ ABCDಯ ಶಿರೋಬಿಂದು □ ABCD ಇದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ರೇಖೆಯ ಎರಿಕೆ = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗುರುತಿದೆ

ರೇಖೆ ABಯ ಎರಿಕೆ = $\frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2}$ .... (I)

ರೇಖೆ BCಯ ಎರಿಕೆ = $\frac{4-2}{9-8} = 2$ .... (II)

ರೇಖೆ CDಯ ಎರಿಕೆ = $\frac{3-4}{7-9} = \frac{1}{2}$ .... (III)

ರೇಖೆ DAಯ ಎರಿಕೆ = $\frac{3-1}{7-6} = 2$ .... (IV)

ರೇಖೆ ABಯ ಎರಿಕೆ = ರೇಖೆ CDಯ ಎರಿಕೆ .... (I) ಹಾಗೂ (III)ರ ಮೇಲಿಂದ

∴ ರೇಖೆ AB || ರೇಖೆ CD

ರೇಖೆ BCಯ ಎರಿಕೆ = ರೇಖೆ DAಯ ಎರಿಕೆ .... (II) ಹಾಗೂ (IV)ರ ಮೇಲಿಂದ

∴ ರೇಖೆ BC || ರೇಖೆ DA

ಅಂದರೆ ಚೌಕೋನ ಸಂಮುಖ ಭುಜಗಳ ಎರಡೂ ಜೋಡಿಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರ ಇರುತ್ತವೆ.

∴ □ ABCD ಇದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನವಿದೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.3

1. ರೇಖವು X−ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಮಾಡಿರುವ ಕೋನ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಆ ರೇಖೆಗಳ ಎರಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
   (1) 45° (2) 60° (3) 90°
2. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಎರಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
   (1) A (2, 3) ಮತ್ತು B (4, 7) (2) P (−3, 1)ಮತ್ತು Q (5, −2)
   (3) C (5, −2) ಮತ್ತು D (7, 3) (4) L (−2, −3) ಮತ್ತು M (−6, −8)
   (5) E(−4, −2) ಮತ್ತು F (6, 3) (6) T (0, −3) ಮತ್ತು S (0, 4)
3. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಷೀಯ ಇವೆಯೋ/ಇಲ್ಲವೋ ಇದನ್ನು ಎರಿಕೆ ತೆಗೆದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.
   (1) A(−1, −1), B(0, 1), C(1, 3) (2) D(−2, −3), E(1, 0), F(2, 1)
   (3) L(2, 5), M(3, 3), N(5, 1) (4) P(2, −5), Q(1, −3), R(−2, 3)
   (5) R(1, −4), S(−2, 2), T(−3, 4) (6) A(−4, 4), K(−2, $\frac{5}{2}$), N(4, −2)
4. A (1, −1),B (0, 4),C (−5, 3) ಇವು ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರೋ ಬಿಂದುಗಳಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಎರಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
5. A (−4, −7),B (−1, 2), C (8, 5) ಮತ್ತು D (5, −4) ಇವು ABCD ಈ ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

6. R(1, −1) ಮತ್ತು S (−2, k) ಇದ್ದು RS ಈ ರೇಖೆಯ ಏರಿಕೆ −2 ಇದ್ದರೆ kದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

7. B(k, −5) ಮತ್ತು C (1, 2) ಈ ರೇಖೆಗಳು 7 ಇದ್ದರೆ kದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ

8. ರೇಖೆ PQ ಇದು ರೇಖ RS ಕೇ ಸಮಾಂತರ ಇದ್ದು P(2, 4), Q (3, 6), R(3,1) ಮತ್ತು S(5, k) ಇದ್ದರೆ k ದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ 5

1. ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳ ತುಂಬಿರಿ.

(1)ರೇಖ AB, ಇದು Y−ಅಕ್ಷಕೆ ಸಮಾಂತರ ವಿದ್ದು A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ (1,3)ಇದ್ದರೆ B ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ .... ಇರ ಬಹುದು.

(A)(3,1) (B)(5,3) (C)(3,0) (D)(1,−3)

(2) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಬಿಂದು .... ಈ ಬಿಂದು X− ಅಕ್ಷದ ಆರಂಭ ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಗಡೆ ಇದೆ.

(A)(−2,0) (B)(0,2) (C)(2,3) (D)(2,0)

(3) (−3,4) ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಆರಂಭ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಂತರ ...... ಇದೆ.

(A)7 (B) 1 (C) 5 (D)−5

(4) ಒಂದು ರೇಖೆ X− ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಕ್ಕಿಗೆ 30°ದ ಕೋನ ಮಾಡಿದೆ, ಅಂದರೆ ಆ ರೇಖೆಯ ಏರಿಕೆ .... ಇದೆ.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

2. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕ ರೇಷೀಯ ಇವೆಯೋ/ಇಲ್ಲಿಯೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಿಯಿರಿ.

(1) A (0,2) , B (1,−0.5), C (2,−3)

(2) P (1, 2) , Q (2, $\frac{8}{5}$) , R (3, $\frac{6}{5}$)

(3) L (1,2) , M (5,3) , N (8,6)

3. P (0,6) ಮತ್ತು Q (12,20) ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

4. A (3,8) ಮತ್ತು B(−9,3) ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ Y− ಅಕ್ಷ ಯಾವ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ?

5. X−ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು P(2,−5) ಮತ್ತು Q(−2,9)ದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) A (a, 0), B (0, a) (2) P (−6, −3), Q (−1, 9) (3) R (−3a, a), S (a, −2a)

7. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರೋಬಿಂದು A (−3,1), B (0,−2) ಮತ್ತು C (1,3) ಇದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿ ಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

8. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡ ತ್ರಿಕೋನ ತಯಾರಿಸ ಬಹುದೇ? ತ್ರಿಕೋನ ತಯಾರಾದರೆ ಅದರ ಭುಜಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಪ್ರಕಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿರಿ.

(1) L $(6,4)$, M $(-5,-3)$, N $(-6,8)$

(2) P $(-2,-6)$, Q $(-4,-2)$, R $(-5,0)$

(3) A $(\sqrt{2}\,,\ \sqrt{2}\,)$, B $(-\sqrt{2}\,,\ -\sqrt{2}\,)$, C $(-\sqrt{6}\,,\ \sqrt{6}\,)$

9. P $(-12,-3)$ ಮುತ್ತ Q $(4,\ k)$ ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೋಗವ ಈ ರೇಖೆಯ ಏರಿಕೆ $\frac{1}{2}$ ಇದ್ದರೆ kದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

10. A$(4,\ 8)$ ಮತ್ತು B$(5,\ 5)$ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆ C$(2,4)$ ಮತ್ತು D$(1,7)$ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

11. P$(1,-2)$, Q$(5,2)$, R$(3,-1)$, S$(-1,-5)$ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಶಿರೋ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

12. P$(2,1)$, Q$(-1,3)$, R$(-5,-3)$ ಮತ್ತು S$(-2,-5)$ ಇದ್ದರೆ □ PQRS ಇದು ಆಯತ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

13. A $(-1,\ 1)$, B $(5,\ -3)$ ಮತ್ತು C $(3,\ 5)$ ಈ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನ ಮಧ್ಯಗಾಮಿಯ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

14. D $(-7,\ 6)$, E $(8,\ 5)$ ಮತ್ತು F $(2,\ -2)$ ಇವು ತ್ರಿಕೋದ ಭಜುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಇದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಗಾಮಿ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶನ ತೆಗೆಯಿರಿ.

15. A$(4,\ -1)$, B$(6,\ 0)$, C$(7,\ -2)$ ಮತ್ತು D$(5,\ -3)$ ಇವು ಚೌರಸದ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ

16. A$(7,\ 1)$, B$(3,\ 5)$ ಮತ್ತು C$(2,\ 0)$ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕ ಮತ್ತು ಪರಿವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆಯಿರಿ.

17. A$(4,-3)$ ಮತ್ತು B$(8,5)$, ಇದ್ದರೆ ರೇಖ AB ಯ 3:1 ಈ ಗುಣೋತ್ತರದಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

18★. A$(-4,\ -2)$, B$(-3,\ -7)$ C$(3,\ -2)$ ಮತ್ತು D$(2,\ 3)$ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿದ್ದರೆ ತಯಾರಾಗುವ ABCD ಈ ಚೌಕೋನ ಪ್ರಕಾರ ಬರೆಯಿರಿ.

19★. ರೇಖ AB ಮತ್ತು P, Q, R ಮತ್ತು S ಇವುಗಳಿಂದ ಆ ರೇಖಾಖಂಡದ ಐದು ಏಕರೂಪ ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದುವೇಳೆ A–P–Q – R–S–B ಮತ್ತು Q$(12,\ 14)$, S$(4,\ 18)$; ಇದ್ದರೆ A, P, R ಮತ್ತು Bದ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

20. P $(6,-6)$, Q $(3,-7)$ ಮತ್ತು R $(3,3)$ ಇವುಗಳಿಂದ ಹೋಗುವ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

21★. ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನದ ಮೂರು ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕA $(5,6)$, B $(1,-2)$ ಮತ್ತು C $(3,-2)$ ಇದ್ದರೆ ನಾಲ್ಕನೇ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕದ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

22. A $(1,7)$, B $(6,3)$ C $(0,-3)$ ಮತ್ತು D $(-3,3)$ ಈ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕೋನ ಇದೆ. ಆ ಚೌಕೋನದ ಪ್ರತಿ ಯೊಂದು ಕರ್ಣದ ಏರಿಕೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

R35N82

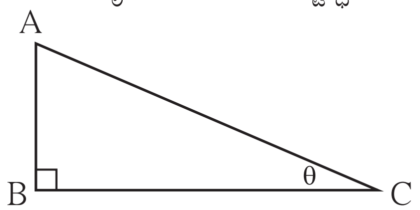
6 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ

- ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು
- ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿತ್ಯಸಮಾನತೆ
- ಉನ್ನತಕೋನ ಮತ್ತು ಅವನತ ಕೋನ
- ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಅಂತರ ಇವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಉದಹರಣೆಗಳು

ಸ್ವಲ್ಪನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ

1. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳ ತುಂಬಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 6.1

$\sin\theta = \dfrac{\square}{\square}$, $\cos\theta = \dfrac{\square}{\square}$,

$\tan\theta = \dfrac{\square}{\square}$

2. ಮುಂದಿನ ಗುಣೋತ್ತರಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಬಂಧ ಪೂರ್ಣಮಾಡಿರಿ.

(i) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \square$ (ii) $\sin\theta = \cos(90 - \square)$

(iii) $\cos\theta = \sin(90 - \square)$ (iv) $\tan\theta . \tan(90 - \theta) = \square$

3. ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \square$

4. ಮುಂದಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಬೆಲೆ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{\square}$ (ii) $\cos 30^\circ = \dfrac{\square}{\square}$ (iii) $\tan 30^\circ = \dfrac{\square}{\square}$

(iv) $\sin 60^\circ = \dfrac{\square}{\square}$ (v) $\cos 45^\circ = \dfrac{\square}{\square}$ (vi) $\tan 45^\circ = \square$

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಲಘುಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ವರ್ಷ ನಾವು ಲಘುಕೋನದ ಇನ್ನು ಕೆಲವು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರ ಬಗ್ಗ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವವರಿದ್ದೇವೆ.

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಕೋಸೆಕ್ ಸೆಕ್ ಮತ್ತು ಕಾಟ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು (cosec, sec and cot ratios)

ಕೋನದ ಸಾಯಿನ್ ಗುಣೋತ್ತರದ ವ್ಯಸ್ತ ಗುಣೋತ್ತರಕ್ಕೆ ಕೋಸೆಕಂಟ್ (cosecant) ಗುಣೋತ್ತರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಇದನ್ನು ಸಲ್ವದರಲ್ಲಿ cosec ಹೇಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ $\therefore \ \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

ಅದರಂತೆ ಕೋಸಾಯಿನ್ ಮತ್ತು ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ ಗುಣೋತ್ತರದ ವ್ಯಸ್ತ ಗುಣೋತ್ತರಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಿಕಂಟ್ (seacant) ಮತ್ತು ಕೋಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ (cotangent) ಗುಣೋತ್ತರಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ sec ಮತ್ತು cot ಹೇಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ.

$\therefore \ \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ ಮತ್ತು $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

ಆಕೃತಿ 6.2ರಲ್ಲಿ

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \ \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{AC}{AB}$$

ಅಂದರೆ $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಸಂಮುಖ ಭುಜ}}$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}}$$

$$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{ಹೊಂದಿದ ಭುಜ}}{\text{ಸಂಮುಖ ಭುಜ}}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

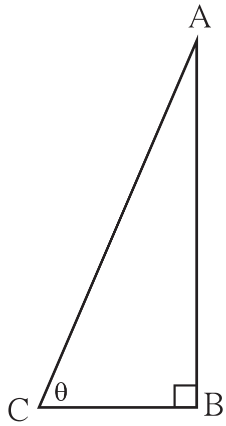
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AC}{BC}$$

ಅಂದರೆ $\sec\theta = \dfrac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಹೊಂದಿದ ಭುಜ}}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ಇದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ

$$\therefore \ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore \ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$



ಆಕೃತಿ **6.2**

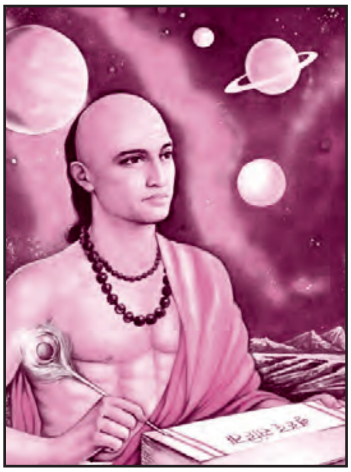
ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳಲ್ಲಿಯ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ

cosec, sec ಮತ್ತು cot ಈ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಮೇಲಿಂದ

- $\dfrac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta \quad \therefore \sin\theta \times \operatorname{cosec}\theta = 1$
- $\dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \quad \therefore \cos\theta \times \sec\theta = 1$
- $\dfrac{1}{\tan\theta} = \cot\theta \quad \therefore \tan\theta \times \cot\theta = 1$

ಅಧಿಕ ಮಾಹಿತಿಯ ಸಲುವಾಗಿ



ಮಹಾನ ಭಾರತೀಯ ಇಣಿತಜ್ಞ ಆರ್ಯಭಟ್ ಇವರ ಜನ್ಮ ಇ. ಸ. 476ರಲ್ಲಿ ಕುಸುಮಪೂರದಲ್ಲಿ ಆಯಿತು ಈ ಸ್ಥಾನ ಸದ್ಯದಲ್ಲಿಯ ಬಿಹಾರದಲ್ಲಿಯ ಪಾಟಣಾ ಈ ಪಟ್ಟಣದ ಹತ್ತಿರ ಇತ್ತು. ಅವರು ಅಂಕಗಣಿತ, ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ಭೂಮಿತಿ ಈ ಗಣಿತದ ಶಾಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಲ್ಲೇಖನಿಯ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದ್ದರೆ. ಆರ್ಯಭಟೀಸ ಈ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ನಿಷ್ಕರ್ಷೆ ಅವರು ಸೂತ್ರರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಇಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ

(1) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಡಿಯಲ್ಲಿಯ nನೇ ಪದ ತೆಗೆಯುವ ಮೊದಲನೆಯ n ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಸೂತ್ರ

(2) $\sqrt{2}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ

(3) π ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ 3.1416ದ ನಾಲ್ಕು ದಶಾಂಶ ಸ್ಥಳಗಳ ವರೆಗಿನ ಸರಿಯಾದ ಬೆಲೆ.

ಇತ್ಯಾದಿ

ಖಗೋಲ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅವರು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿದರು ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ ಗುಣೋತ್ತರ (sine ratio) ಈ ಸಂಕಲ್ಪನೆ ಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರು.

ಅವರ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಜಗತ್ತಿನಲ್ಲಿಯ ಗಣಿತದ ಜ್ಞಾನದ ವಿಚಾರ ಮಾಡಲಾಗಿ ಅದರಲ್ಲಿಯ ಗಣಿತದಲ್ಲಿಯ ಕಾರ್ಯ ಉತ್ತುಂಗ ಇತ್ತು ಅದರಿಂದ ಗ್ರಂಥದ ಪ್ರಸಾರ ಸಂಪೂರ್ಣ ಭಾರತದಲ್ಲಿ, ಅದರಂತೆ, ಅರಬಸ್ಥಾನದಿಂದ ಯುರೋಪಗಳಲ್ಲಿ ಆಯಿತು.

ಪೃಥ್ವಿ ಇದು ಸ್ಥಿರವಿದ್ದು ಸೂರ್ಯ, ಚಂದ್ರ ಮತ್ತು ತಾರೆ ವಿಶಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಿಂದ ಪೃಥ್ವಿಯ ಸುತ್ತಲು ತಿರುಗುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆ ಆ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ನಿರೀಕ್ಷಕರ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಇತ್ತು ಆದರೆ, ದೋಣಿಯಿಂದ ಹೋಗುವಾಗ ದಂಡೆಯಮೇಲಿನ ಗಿಡಗಳು ಮತ್ತು ವಸ್ತು ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಹೋಗುವಂತೆ ಭಾಸವಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಅಂತಹ ಭಾಸ ಸೂರ್ಯ, ತಾರೆಗಳು ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ. ಪೃಥ್ವಿಯ ಮೇಲಿನ ಜನರಿಗೆ ಇತ್ತು ಅಂದರೆ ಪೃಥ್ವಿ ಭ್ರಮಣ ಮಾಡುವದು. ಹೀಗೆ ಆರ್ಯಬಟಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ.

19 ಎಪ್ರೀಲ್ 1975 ಈ ದಿವಸ ಭಾರತವು ತಮ್ಮ ಮೊದಲನೆಯ ಉಪಗ್ರಹ ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಿತ ಮಾಡಿದರು. ಈ ಉಪಗ್ರಹಕ್ಕೆ 'ಆರ್ಯಭಟ್' ಎಂದು ಹೆಸರು ಕೊಟ್ಟು ದೇಶವು ಈ ಶ್ರೇಷ್ಠಗಣಿತಜ್ಞನಿಗೆ ಯಥೋಚಿತ ಗೌರವ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ.

* $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ಮತ್ತು 90° ಅಳತೆಯ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ.

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳು	ಕೋನದ ಅಳತೆ (θ)				
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ನಿಶ್ಚಿಯಿಸಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ
$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	ನಿಶ್ಚಿಯಿಸಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	ನಿಶ್ಚಿಯಿಸಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ
$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	ನಿಶ್ಚಿಯಿಸಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

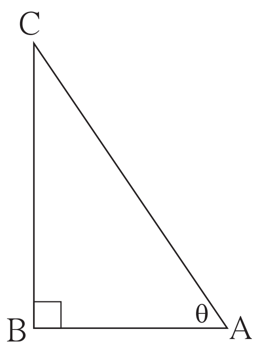
ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ನಿತ್ಯ ಸಮಾನತೆ (Trigonometrical identities)

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ 6.3 ದಲ್ಲಿ Δ ABC ಈ ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $\angle B = 90^\circ$

(i) $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$ (ii) $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$

(iii) $\tan\theta = \frac{BC}{AB}$ (iv) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC}$

(v) $\sec\theta = \frac{AC}{AB}$ (vi) $\cot\theta = \frac{AB}{BC}$



ಆಕೃತಿ 6.3

ರಂತ, ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮೇಲಿಂದ

$BC^2 + AB^2 = AC^2$ . . . . .(I)

ಸಮೀಕರಣ(I) ರಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ AC^2 ಭಾಗಿಸ

$$\frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\therefore \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = 1$$

$$\therefore \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = 1$$

$\therefore (\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$....[$(\sin\theta)^2$ ಇದು $\sin^2\theta$ ಹೇಗೆ ಮತ್ತು $(\cos\theta)^2$ ಇದನ್ನು $\cos^2\theta$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ]

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ .... (II)

ಈ ಸಮೀಕರಣ (II)ರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ $\sin^2\theta$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$ .... (III)

ರಂತೆ, ಸಮೀಕರಣ (II)ರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ $\cos^2\theta$ ಭಾಗಿಸಿ

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ .... (IV)

ಸಮೀಕರಣ (II), (III), ಮತ್ತು (IV) ಈ ಮೂಲಭೂತ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ನಿತ್ಯ ಸಮಾನತೆಗಳು ಇದೆ.

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. (1) $\sin\theta = \frac{20}{29}$ ಇದ್ದರೆ $\cos\theta$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

ಉತ್ತರ : **ಪದ್ಧತಿ I**

ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\left(\frac{20}{29}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\frac{400}{841} + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{400}{841}$

$= \frac{441}{841}$

ಎರಡುಬದಿಗೆ ವರ್ಗಮೂಲ ತೆಗೆದು

$\therefore \cos\theta = \frac{21}{29}$

ಪದ್ಧತಿ II

$\sin\theta = \frac{20}{29}$

ಆದರೆ, ಆಕೃತಿಯಮೆಲಿದ $\sin\theta = \frac{AB}{AC}$

$\therefore AB = 20k$ ಹಾಗೂ $AC = 29k$

$BC = x$ ಎಂದುತಿಳಿಯೋಣ

ಪಾಯಥಾಗೋರಸ್‌ನ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$(20k)^2 + x^2 = (29k)^2$

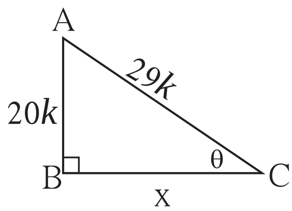
$400k^2 + x^2 = 841k^2$

$x^2 = 841k^2 - 400k^2$

$= 441k^2$

$\therefore x = 21k$

$\therefore \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{21k}{29k} = \frac{21}{29}$



ಆಕೃತಿ **6.4**

ಉದಾ. (2) $\sec\theta = \frac{25}{7}$ ಇದ್ದರೆ $\tan\theta$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

ಉತ್ತರ : **ಪದ್ಧತಿ I**

ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದ ಪ್ರಕಾರ

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad 1 + \tan^2\theta = \left(\frac{25}{7}\right)^2$$

$$\therefore \quad \tan^2\theta = \frac{625}{49} - 1$$

$$= \frac{625-49}{49}$$

$$= \frac{576}{49}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{24}{7}$$

ಪದ್ಧತಿ II

ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ

$$\sec\theta = \frac{PR}{PQ}$$

$$\therefore \quad PQ = 7k, \ PR = 25k$$

ಪಾಯಥಾಗೋರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ

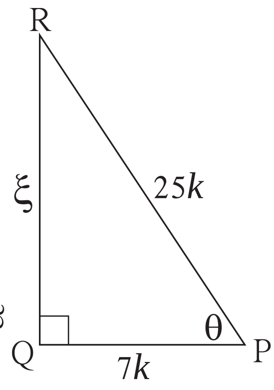
$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

$$\therefore \quad (7k)^2 + QR^2 = (25k)^2$$

$$\therefore \quad QR^2 = 625k^2 - 49k^2 = 576k^2$$

$$\therefore \quad QR = 24k$$

ಈಗ $\tan\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$



ಆಕೃತಿ **6.5**

ಉದಾ. (3) $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$ ಇದ್ದರೆ $\sec\theta$ ಮತ್ತು $\operatorname{cosec}\theta$ ದ ಬೆಲೆಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$

$$\therefore 5\sin\theta = 12\cos\theta$$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{12}{5}$$

ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದ ಪ್ರಕಾರ

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \sec^2\theta$$

$$\therefore 1 + \frac{144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \frac{25+144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \sec^2\theta = \frac{169}{25}$$

$$\therefore \sec\theta = \frac{13}{5}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{5}{13}$$

ಈಗ, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\therefore \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\therefore \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{25}{169}$$

$$= \frac{144}{169}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{12}$$

ಉದಾ. (4) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ಇದ್ದರೆ $\frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta}$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಪದ್ಧತಿ I

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \therefore \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \sin^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore \sin^2\theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \operatorname{cosec}\theta = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2} = \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3} = \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

ಪದ್ಧತಿ II

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ಇದು ಗೊತ್ತಿದೆ.

$\therefore \quad \theta = 30^\circ$

$\therefore \sec\theta = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2} = \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3} = \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

ಉದಾ. (5) ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ $\sec x + \tan x = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

ಉತ್ತರ : $\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

ಉದಾ. (6) ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ θ ದ ನಿರಸನ ಮಾಡಿರಿ.

$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta$

$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta$

ಉತ್ತರ :

$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta$ .... (I)

$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta$ .... (II)

ಸಮೀಕರಣ (I) ಮತ್ತು(II) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿ

$x + y = 2a \cot\theta$

$\therefore \cot\theta = \frac{x+y}{2a}$ .... (III)

ಸಮೀಕರಣ (II) ರಲ್ಲಿಂದ (I) ನ್ನು ವಜಾಮಾಡಿ

$y - x = 2b \operatorname{cosec}\theta$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{y-x}{2b}$ .... (IV)

ಈಗ $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$$\therefore \left(\frac{y-x}{2b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{2a}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{(y-x)^2}{4b^2} - \frac{(y+x)^2}{4a^2} = 1$$

ಅಥವಾ $\left(\frac{y-x}{b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{a}\right)^2 = 4$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.1

1. $\sin\theta = \frac{7}{25}$ ಇದ್ದರೆ $\cos\theta$ ಮತ್ತು $\tan\theta$ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. $\tan\theta = \frac{3}{4}$ ಇದ್ದರೆ $\sec\theta$ ಮತ್ತು $\cos\theta$ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $\cot\theta = \frac{40}{9}$ ಇದ್ದರೆ $\operatorname{cosec}\theta$ ಮತ್ತು $\sin\theta$ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. $5\sec\theta - 12 \operatorname{cosec}\theta = 0$ ಇದ್ದರೆ $\sec\theta$, $\cos\theta$ ಮತ್ತು $\sin\theta$ದ ಬೆಲೆ ಶೋಧಿಸಿರಿ.
5. $\tan\theta = 1$ ಇದ್ದರೆ $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta}$ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

   (1) $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

   (2) $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$

(3) $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

(4) $(\sec\theta - \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta) = \tan\theta \ \sec\theta$

(5) $\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \ \sec\theta$

(6) $\frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

(7) $\sin^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$

(8) $\sec\theta + \tan\theta = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

(9) $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 2$ ಇದ್ದರೆ $\tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} = 2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ

(10) $\frac{\tan A}{(1+\tan^2 A)^2} + \frac{\cot A}{(1+\cot^2 A)^2} = \sin A \cos A$

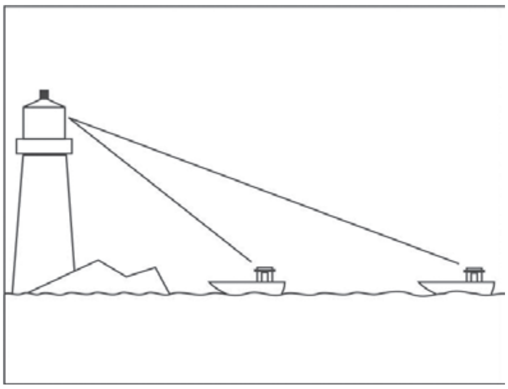
(11) $\sec^4 A\,(1 - \sin^4 A) - 2\tan^2 A = 1$

(12) $\frac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\tan\theta + \sec\theta + 1}{\tan\theta + \sec\theta - 1}$

ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಉಪಯೋಜನೆ (Application of trigonometry)

ಬಹಳಸಲ ನಮಗೆ ಗೋಪುರದ, ಇಮಾರತಿಯ ಅಥವಾ ಗಿಡಗಳ ಎತ್ತರ ಆದರಂತೆ ಹಡಗಿನ ದೀಪಗೃಹದಿಂದ ಅಂತರ ಅಥವಾ ನದಿಯ ಪಾತ್ರದ ಆಗಲ ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುವದು ಈ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ಅಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಉತ್ತರ ಅಥವಾ ಅಂತರಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುವುದು.



ಆಕೃತಿ 6.6

ಎತ್ತರ ಅಥವಾ ಅಂತರಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿ ದರ್ಶಿಸುವ ಕಚ್ಚಾ ಆಕೃತಿ ನಾವು ಮೊದಲು ತಯಾರಿಸೋಣ ಗಿಡಗಳು, ದಿನ್ನೆ, ಪರ್ವತ, ಇಂತಹ ವಸ್ತುಗಳು ಭೂಮಿಗೆ ಲಂಬ ಇರುತ್ತವೆ ಇದನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ನಾವು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಲಂಬ ರೇಖಾಖಂಡದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡುವಾ. ಈಗ ನಾವು ನಿರೀಕ್ಷಕರ ಎತ್ತರ ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳವದಿಲ್ಲ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನೀರೀಕ್ಷಕನ ದೃಷ್ಟಿ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

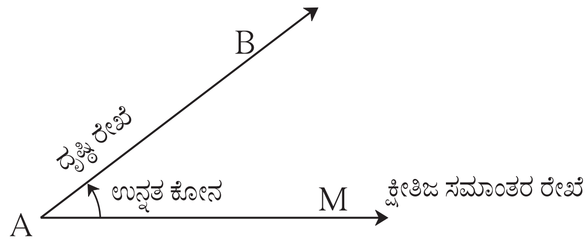
ಮೊದಲು ನಾವು ಕೆಲವು ಸಂಬಂಧಿತ ಸಂಜ್ಞೆಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವಾ.

(i) ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆ (Line of vision) :

ಬಿಂದು 'A' ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿನಿಂತರುವ ನಿರೀಕ್ಷಕನ ಬಿಂದು 'B' ದ ಕಡೆ ನೋಡುತ್ತಿದ್ದರೆ ರೇಷೆ ABಗೆ ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆ ಎನ್ನುವರು.

(ii) ಉನ್ನತ ಕೋನ (Angle of elevation) :

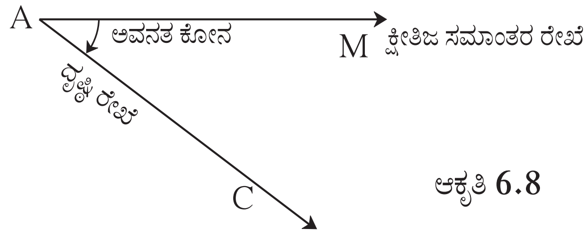
AM ಇದು ನೀಕ್ಷತನ ಸಾಮಾನ್ಯ ದೃಷ್ಟಿ ರೇಖೆ ಕ್ಷಿತಿಜಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇದೆ ಪರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡುವ ಬಿಂದು B, ಇದು Aದ ಹೋಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಅಧಿಕ ಎತ್ತರದ ಮೇಲೆ ಇದ್ದರೆ AB ಈ ದೃಷ್ಟಿ ರೇಷೆ, ರೆಖೆ AM ದೊಂದಿಗೆ ಯಾವ ಕೋನ ಮಾಡುವದೊ ಅದು ಉನ್ನತ ಕೋನ ಇರುವುದು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ $\angle$ MAB ಇದು ಉನ್ನತ ಕೋನ ಇದೆ.



ಆಕೃತಿ **6.7**

(iii) ಅವನತ ಕೋನ (Angle of depression) :

ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡುವ ಬಿಂದು C ಇದು ರೇಖೆ AM ಈ ಕ್ಷಿತಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯ ಕೆಳಗೆ ಇದ್ದರೆ ಆಗ AC ಇದು ದೃಷ್ಟಿ ರೇಷೆ. ಇದು ರೇಖೆ AMದೊಂದಿಗೆ ಅವನತ ಕೋನ ಮಾಡುವದು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ $\angle$ MAC ಇದು ಅವನತ ಕೋನ ಇದೆ.



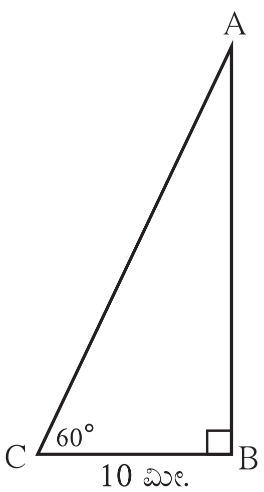
ಆಕೃತಿ **6.8**

ಯಾವಾಗ ನಾವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯ ಮೇಲಿನ ದಿಶೆಗೆ ನೋಡುತ್ತೇವೆ ಆವಾಗ ಆಗುವ ಕೋನ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಇರುವದು.
ಯಾವಾಗ ನಾವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯ ಕೆಳಗಿನ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದಾಗ ಆಗುವ ಕೋನವು ಅವತನ ಕೋನ ಇರುವದು.

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. (1) ಒಂದು ಗಿಡದ ಬುಡದಿಂದ 10 ಮೀ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ನಿರೀಕ್ಷಕನಿಗೆ ಗಿಡದ ತುದಿಯ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದಾಗ 60° ಅಳತೆಯ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಮಾಡ ಬೇಕಾಗುವದು ಹಾಗಾದರೆ. ಗಿಡದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು? ($\sqrt{3}$ = 1.73)

ಉತ್ತರ : ಆಕೃತಿ 6.9 ಯಲ್ಲಿ C ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ನೀರೀಕ್ಷಕನಿದ್ದು AB ಇದು ಗಿಡ ಇದೆ.



ಆಕೃತಿ **6.9**

AB = h = ಗಿಡದ ಎತ್ತರ, ನಿರೀಕ್ಷಕ ಗಿಡದದಿಂದ ಅಂತರ

ನಿರೀಕ್ಷಕನ ಗಿಡದಿಂದ ಇರುವಅಂತರ BC = 10 ಮೀ.

ಮತ್ತ ಉನ್ನತ ಕೋನ $(\theta) \angle BCA = 60^\circ$

ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ $\tan\theta = \dfrac{AB}{BC}$ .... (I)

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ .... (II)

$\therefore \quad \dfrac{AB}{BC} = \sqrt{3}$ .... (I) ಮತ್ತು (II)ರ ಮೇಲಿಂದ

$\therefore \quad AB = BC\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

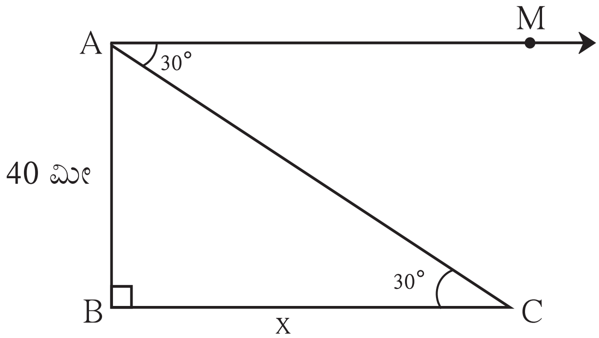
$\therefore \quad AB = 10 \times 1.73 = 17.3$ ಮೀ.

$\therefore$ ಗಿಡದ ಎತ್ತರ 17.3 ಮೀ. ಇದೆ.

ಉದಾ. (2) 40 ಮೀ ಎತ್ತರದ ಇಮಾರತಿಯ ಮೇಲ್ಛಾವಣೆಯಿಂದ, ಆ ಕಟ್ಟಡದದಿಂದ ಕೆಲವು ಮೀಟರ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತ ಸ್ಕೂಟರದ ಕಡೆಗೆ ನೋಡುವಾಗಿ 30° ಅಳತೆಯ ಅವನತ-ಕೋನ ಆಗುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸ್ಕೂಟರ ಇಮಾರತಿಯಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರ ನಿಂತಿರಬಹುದು ? ($\sqrt{3} = 1.73$)

ಉತ್ತರ : ಆಕೃತಿ 6.10 ರಲ್ಲಿ ರೇಖ AB ಇದು ಕಟ್ಟಡ ಇದೆ, ಕಟ್ಟದದಿಂದ 'x' ಮೀ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ 'C' ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಸ್ಕೂಟರ್ ನಿಂತಿದೆ.

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ A ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ನಿರೀಕ್ಷಕನು ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ AM ಇದು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆ ಇದೆ $\angle$ MAC ಇದು ಅವನತ-ಕೋನವಿದೆ $\angle$ MAC ಮತ್ತು $\angle$ ACB ಇವು ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕೋನಗಳಿವೆ. ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ **6.10**

ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40}{x}$$

$$\therefore \quad x = 40\sqrt{3}$$

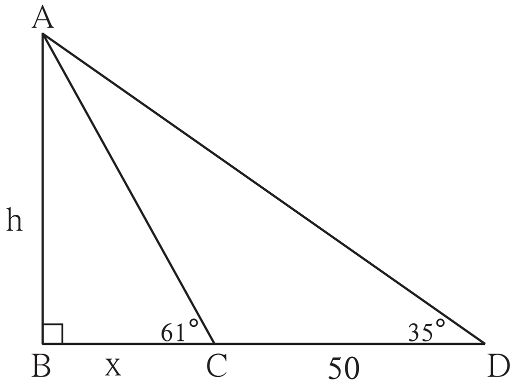
$$= 40 \times 1.73$$

$$= 69.\ 20 \text{ ಮೀ}$$

$\therefore$ ಆ ಸ್ಕೂಟರ ಇಮಾರತಿಯಿಂದ 69.20 ಮೀ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದೆ

ಉದಾ. (3) ನದಿಯ ಪಾತ್ರದ ಆಗಲ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ನದಿಯ ಪಾತ್ರದ ಒಂದು ದಂಡೆಯಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಗೋಪುರದ ಮೇಲಿನ ತುದಿಯ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದಾಗ 61° ಅಳತೆಯ ಉನ್ನತ-ಕೋನ ವಾಗುವದು. 50ಮೀ ಅಂತರ ಹಿಂದೆ ಹೋಗಿ ಪುನ: ಗೋಪುರದ ಮೇಲಿನ ತುದಿಯ ಕಡೆ ನೋಡಿದಾಗ 35° ಅಳತೆಯ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ನದಿಯ ಪಾತ್ರದ ಆಗಲ ಮತ್ತು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

($\tan 61^\circ \approx 1.8$, $\tan 35^\circ \approx 0.7$)



ಆಕೃತಿ **6.11**

ಉತ್ತರ : ರೇಖ ABಇನ್ನೊಂದು ದಂಡೆಯ ಮೇಲಿನ ಗೋಪುರ ತೋರಿಸುವದು 'A' ಇದು ಗೋಪುರದ ತುದಿ, ರೇಖ BC ನದಿ ಪಾತ್ರದ ಆಗಲ ತೋರಿಸುವದು.

ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ h ಮೀ ಮತ್ತು ನದಿಯ ಪಾತ್ರದ ಆಗಲ x ಮೀ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ಆಕೃತಿಯ ಮೇಲಿಂದ $\tan 61^\circ = \frac{h}{x}$

$$\therefore \ 1.8 = \frac{h}{x}$$

$h = 1.8 \times x$

$10h = 18x$ .... (I)..... 10 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

ಕಾಟಕೋನ Δ ABD ದಲ್ಲಿ

ಅದರಂತೆ, $\tan 35 = \dfrac{h}{x + 50}$

$0.7 = \dfrac{h}{x + 50}$

$\therefore \quad h = 0.7\,(x + 50)$

$\therefore \quad 10h = 7\,(x + 50)$ .... (II)

[(I) ಮತ್ತು (II) ಮೇಲಿಂದ]

$18x = 7(x + 50)$

$\therefore\ 18x = 7x + 350$

$\therefore\ 11x = 350$

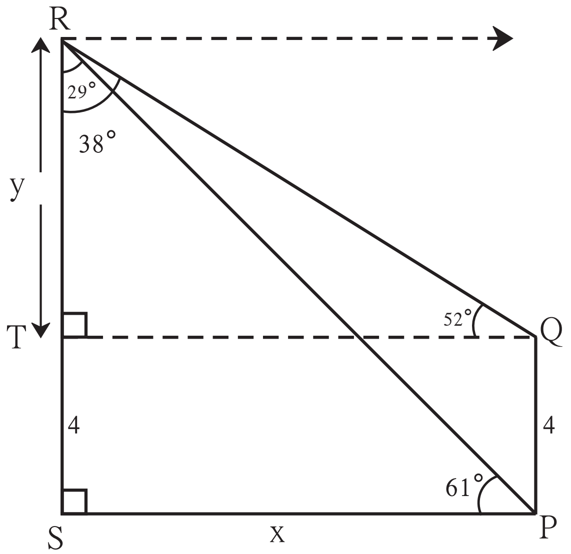
$\therefore \quad x = \dfrac{350}{11} = 31.82$

ಈಗ $h = 1.8x = 1.8 \times 31.82$

$= 57.28$ ಮೀ

$\therefore$ ಪಾತ್ರದ ಅಗಲ = 31.82 ಮೀ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ = 57.28 ಮೀ.

ಉದಾ. (4) ರೋಶನಳು ಮನೆಯ ಬಾಗಿಲಿನಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಳು. ಮನೆಯಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ಅಂತರದ ಮೇಲಿನ ಮರದ ತುದಿಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಗರುಡ ಪಕ್ಷಿ ಕುಳಿತಿದ್ದು ಅವಳಿಗೆ ಕಾಣಿಸಿತು ಆವಾಗ ಅವಳ ದೃಷ್ಟಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನ 61° ಇತ್ತು ಅದು ಇನ್ನಷ್ಟು ಸಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಅವಳು ಮನೆಯಿಂದ 4 ಮೀಟರ ಅಂತರದ ಮೇಲಿರುವ ಮಾಳಿಗೆ ಮೇಲೆ ಹೋದಳು ಅಲ್ಲಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ ಅವಳ ದೃಷ್ಟಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನ 52° ಇತ್ತು ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಗರುಡ ಭೂಮಿಯಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇತ್ತು? (ಉತ್ತರ ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ)



ಆಕೃತಿ **6.12**

$(\tan 61^\circ = 1.80,\ \tan 52^\circ = 1.28,\ \tan 29^\circ = 0.55,\ \tan 38^\circ = 0.78)$

ಉತ್ತರ : ಆಕೃತಿ 6.12 ರಲ್ಲಿ PQ ಇದು ಮನೆ SR ಇದು ಮರ ಇದೆ. ಗರುಡದ ಸ್ಥಾನ R ಹತ್ತಿರ ಇದೆ.

ರೇಖ QT $\perp$ ರೇಖ RS ತೆಗೆದೆನು.

$\therefore$ $\square$ TSPQ ಇದು ಆಯತ ಇದೆ.

SP = x ತಿಳಿಯೋಣ TR = y ಎಂದು ತಿಳಿ.

ಈಗ Δ RSP ದಲ್ಲಿ $\angle$ PRS = $90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$

ರಂತೆ Δ RTQ ದಲ್ಲಿ, $\angle$ QRT = $90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$

$\therefore \tan \angle PRS = \tan 29^\circ = \dfrac{SP}{RS}$

$\therefore 0.55 = \dfrac{x}{y+4}$

$\therefore x = 0.55(y + 4)$ .... (I)

ರಂತೆ $\tan \angle QRT = \dfrac{TQ}{RT}$

$\therefore \tan 38^\circ = \dfrac{x}{y}$ .... [$\because$ SP = TQ = x]

$\therefore 0.78 = \dfrac{x}{y}$

$\therefore x = 0.78y$ .... (II)

$\therefore 0.78y = 0.55(y + 4)$ .... (I) ಮತ್ತು (II) ಮೇಲಿಂದ

$\therefore 78y = 55(y + 4)$

$\therefore 78y = 55y + 220$

$\therefore 23y = 220$

$\therefore y = 9.565 = 10$ (ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ)

$\therefore RS = y + 4 = 10 + 4 = 14$

$\therefore$ ಗರುಡವು ಭೂಮಿಯಿಂದ 14 ಮೀ ಎತ್ತರದ ಮೇಲೆ ಇತ್ತು

ಉದಾ. (5) ಬಿರುಗಾಳಿಯಿಂದ ಒಂದು ಮರ ಮುರಯಿತು ಮತ್ತು ಅದು ಮುರಿ ದದ್ದರಿಂತ ಮರದ ತುದಿ ಭೂಮಿಯ ಮೇಲೆ. ಊರಿತು ಮತ್ತು ಮುರಿದ ಭಾಗ ಭೂಮಿಗೆ 30° ಅಳತೆಯ ಕೋನ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಮರದ ತುದಿ ಮುತ್ತುಬುಡ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ10 ಮೀ ಇದ್ದರೆ ಮರದ ಎತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಆಕೃತಿ 6.13 ರಲ್ಲಿ AB ಇದು ಮರದ ತುದಿ 'A' ಇದೆ ಬಿರುಗಾಳಿಯಿಂದ ಮರವು 'C' ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಮುರಿದದ್ದರಿಂದ D ಈ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ತುದಿ ಊರಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$\angle$ CDB = 30°, BD = 10 ಮೀ. BC = x ಮೀ.

CA= CD = y ಮೀ.

ಕಾಟಕೋನ Δ CDB ದಲ್ಲಿ,

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

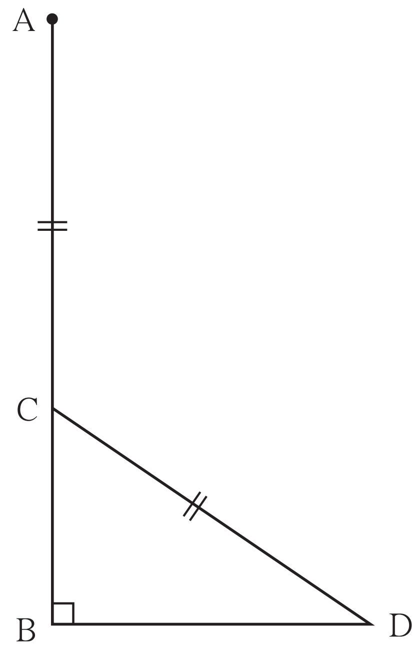
$$y = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = 10\sqrt{3}$$

ಮರದ ಎತ್ತರ $10\sqrt{3}$ ಮೀ ಇದೆ



ಆಕೃತಿ **6.13**

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.2

1. ಒಬ್ಬವ್ಯಕ್ತಿಯು ಒಂದು ಚರ್ಚಿನಿಂದ 80 ಮೀ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ ಆ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಚರ್ಚಿನ ಮೇಲ್ಭಾವಣೆಯ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದಾಗ 45° ಅಳತೆಯ ಉನ್ನತ ಕೋನ ವಾಗುವದು ಹಾಗಾದರೆ, ಆ ಚೇರ್ಚನ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು?

2. ಒಂದು ದೀಪ ಗೃಹದ ಮೇಲಿಂದ ಹಡಗಿನ ಕೆಡೆಗೆ ನೋಡಿದಾಗ 60° ಅಳತೆಯ ಅವನಿತ ಕೋನ ವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ದೀಪಗೃಹದ ಎತ್ತರ 90 ಮೀಟರ ಇದ್ದರೆ ಆ ಹಡಗು ದೀಪಗೃಹದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇದೆ? ($\sqrt{3} = 1.73$)

3. 12 ಮೀಟರ ಆಗಲದ ರಸ್ತೆಯ ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ ಎದುರು-ಬದುರಾಗಿ ಎರಡು ಕಟ್ಟಡಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದರ ಎತ್ತರ 10 ಮೀ ಇದ್ದು ಅದರ ಮೇಲ್ಭಾವಣೆಯಿಂದ ಎರಡನೇಯ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲಬದಿಯನ್ನು ನೋಡಲಾಗಿ 60° ಅಳತೆಯ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಆಗುವದು ಹಾಗಾದರೆ ಎರಡನೆಯ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು?

4. 18 ಮೀ ಮತ್ತು 7 ಮೀ ಉತ್ತರದ ಎರಡು ಕಂಬಗಳನ್ನು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಗಿದೆ ಅವುಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ತಂತಿಯ ಉದ್ದಳತೆ. 22 ಮೀ ಇರುತ್ತದೆ ಆ ತಂತಿಯು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯೊಂದಿಗೆ ಮಾಡಿದ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ?

5. ಬಿರುಗಾಳಿಯಿಂದ ಒಂದು ಮರ ಮುರಿದಿದೆ ಮತ್ತು ಮುರಿಧದ್ದರಿಂದ ತುದಿಯು ಭೂಮಿಯನ್ನು ತಾಗುವಾಗ 60° ಕೋನ ಉಂಟಾಗುವದು ಮರದ ತುದಿ ಮತ್ತು ಬುಡ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ 20 ಮೀ ಇದ್ದರೆ ಮರದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು?

6. ಒಂದು ಗಾಳಿಪಟವು ಹಾರುತ್ತಿದ್ದಾಗ ಭೂಮಿಯಿಂದ 60 ಮೀ ಲಂಬ ಎತ್ತರದ ವರಗೆ ತಲುಪುವದು ಗಾಳಿಪಟದ ದಾರದ ಒಂದು ತುದಿಯನ್ನು ತಾಗಿಸಿ ಕಟ್ಟಿದಾಗ ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ದಾರ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 60° ಅಳತೆಯ ಕೋನ ತಯಾರಾಗುವದು. ದಾರ ಎಲ್ಲಿಯೂ ಬಾಗಿಲ್ಲ ಹೀಗೆ ಗೃಹಿತ ಹಿಡಿದು ದಾರಿನ ಉದ್ದಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\sqrt{3} = 1.73$)

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ 6

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿಬರೆಯಿರಿ.

(1) $\sin\theta \ \ \mathrm{cosec}\theta$ = ಎಷ್ಟು?

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

(2) $\mathrm{cosec}45^{\circ}$ದ ಬೆಲೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದು?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) $1 + \tan^2\theta$ = ಎಷ್ಟು?

(A) $\cot^2\theta$ (B) $\mathrm{cosec}^2\theta$ (C) $\sec^2\theta$ (D) $\tan^2\theta$

(4) ಯಾವಾಗ ನಾವು ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೇಯ ಮೇಲಿನ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದಾಗ .... ಕೋನ ವಾಗುವದು.

(A) ಉನ್ನತ ಕೋನ (B) ಅವನತ ಕೋನ (C) ಶೂನ್ಯ (D) ರೇಷೀಯ

2. $\sin\theta = \frac{11}{61}$ ಇದ್ದರೆ ನಿತ್ಯ ಸಮಾನತೆಯ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ $\cos\theta$ದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

3. $\tan\theta = 2$, ಇದ್ದರೆ ಇತರ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

4. $\sec\theta = \frac{13}{12}$, ಇದ್ದರೆ, ಇತರ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಗುಣೋತ್ತರಗಳ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

5. ಸಿದ್ಧ ಮಾಡಿರಿ.

(1) $\sec\theta\,(1 - \sin\theta)\,(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

(2) $(\sec\theta + \tan\theta)\,(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

(3) $\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \times \mathrm{cosec}^2\theta$

(4) $\cot^2\theta - \tan^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$

(5) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

(6) $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

(7) $\sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3\sec^2 x \times \tan^2 x$

(8) $\frac{\tan\theta}{\sec\theta + 1} + \frac{\sec\theta + 1}{\tan\theta}$

(9) $\frac{\tan^3\theta - 1}{\tan\theta - 1} = \sec^2\theta + \tan\theta$

(10) $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$

6. ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದಿಂದ 48ಮೀ ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ ಆ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲಿನ ತುದಿಯ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದಾಗ ಆ ಹುಡುಗನಿಗೆ 30° ಅಳತೆಯ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಮಾಡ ಬೇಕಾಗುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ದೀಪಗೃಹದಿಂದ ಮೇಲಿಂದ ಹಡಗಿನ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದಾಗ ನೀರೀಕ್ಷನಿಗೆ 30° ಅವನತ ಕೋನ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವದು ಒಂದು ವೇಳೆ ದೀಪಗೃಹದ ಎತ್ತರ 100 ಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ಹಡಗು ದೀಪಗೃಹದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರದ ಮೇಲೆ ಇದೆ.

8. 15 ಮೀ ಆಗಲವಾದ ರಸ್ತೆಯ ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ ಎದುರುಬದುರಾಗಿ ಎರಡು ಕಟ್ಟಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದರ ಎತ್ತರ 12 ಮೀ ಇದೆ. ಆ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲೆ ನಿಂತು ಎರಡನೆಯ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲಬದಿಯನ್ನು ನೋಡಲಾಗಿ 30° ಅಳತೆಯ ಉನ್ನತ -ಕೋನ ವಾಗುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಆಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಅಗ್ನಿಶಾಮಕದಳದ ವಾಹನದ ಮೇಲೆ 2 ಕೂಡ್ರಿಸಿರುವ ಏಣಿ (ನಿಚ್ಚಣಿಕೆ) ಯು ಅತೀ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ 70° ಅಳತೆಯ ಕೋನದಿಂದ ಎತ್ತಲು ಬರುವದು. ಆ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಅದರ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಉದ್ದಳತೆ 20 ಮೀ ಇದೆ. ನಿಚ್ಚಣಿಕೆಯ ವಾಹನದ ಮೇಲಿನ ತುದಿ ಭೂಮಿಯಿಂದ 2 ಮೀ ಎತ್ತರದ ಮೇಲೆ ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ, ಏಣಿಯ ಎರಡನೆಯ ತುದಿ ಭೂಮಿಯಿಂದ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರದ ಮೇಲೆ ಮುಟ್ಟಿಸಲು ಬರುವುದು? $(\sin 70^\circ \approx 0.94)$

10. ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಹಾರುತ್ತಿರುವ ವಿಮಾನದ ವೈಮಾನಿಕನು ವಿಮಾನ ನಿಲ್ದಾಣದ ಮೇಲೆ ಇಳಿಯಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದಾಗ 20° ಅಳತೆಯ ಅವನತ-ಕೋನ ವಾಗುವದು. ಆವಾಗ ವಿಮಾನದ ಸರಾಸರಿ ವೇಗ ತಾಸಿಗೆ 200 ಕಿ.ಮೀ ಇತ್ತು. ಆ ವಿಮಾನ 54 ಸೆಕಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ವಿಮಾನ ನಿಲ್ದಾಣದ ಮೇಲೆ ಇಳಿಯಿತು ವಿಮಾನ ನಿಲ್ದಾಣದ ಮೇಲೆ ಇಳಿಯುವಾಗ ಹೊರಲು ಪಕ್ಷಣದಲ್ಲ ಆ ವಿಮಾನ ಭೂಮಿಯಿಂದ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರದ ಮೇಲೆ ಇತ್ತು? $(\sin 20^\circ \approx 0.342)$

R3EJDM

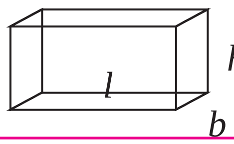
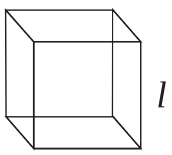
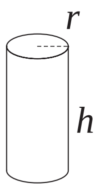
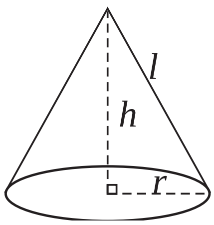
7 ಕ್ಷೇತ್ರಮಾಪನೆ

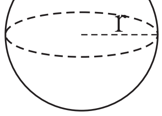
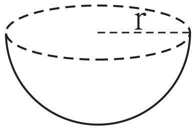
ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ

- ವಿವಿಧ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಪೃಷ್ಠಫಲ ಹಾಗೂ ಘನಫಲದ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಿತ ಸಂಮಿಶ್ರ ಉದಾಹರಣೆಗಳು
- ವರ್ತುಳಕಂಸ- ವರ್ತುಳಕಂಸದ ಉದ್ದಳತೆ
- ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ
- ವರ್ತುಳಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

ಸ್ವಲ್ಪನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ

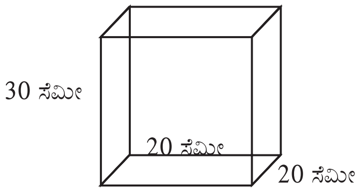
ಇಂದಿನ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಲವು ತ್ರಿಮಿತಿಯ ಆಕೃತಿಗಳ ಪೃಷ್ಠಫಲ ಹಾಗೂ ಘನಫಲಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಅವಶ್ಯವಿರುವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ

ಕ್ರ.	ತ್ರಿಮಿತಿಯ ಆಕೃತಿ	ಸೂತ್ರಗಳು
1 .	ಇಷ್ಟಿಕಾಚಿತಿ 	ಲಂಬ ಪೃಷ್ಠಗಳ ಪೃಷ್ಠಫಲ $= 2h\,(l + b)$ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ $= 2\,(lb + bh + hl)$ ಇಷ್ಟಿಕಾಚಿತಿಯ ಘನಫಲ $= lbh$
2 .	ಘನ 	ಘನದ ಲಂಬ ಪೃಷ್ಠಫಲ $= 4l^2$ ಘನದ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ $= 6l^2$ ಘನದ ಪೃಷ್ಠಫಲ $= l^3$
3 .	ವೃತ್ತಚಿತಿ 	ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ $= 2\pi rh$ ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ಒಟ್ಟು ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ $= 2\pi r\,(r + h)$ ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ಪೃಷ್ಠಫಲ $= \pi r^2 h$
4 .	ಶಂಕು 	ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$ ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ $= \pi rl$ ಶಂಕುವಿನ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ $= \pi r\,(r + l)$ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

ಕ್ರ.	ತ್ರಿಮಿತಿಯ ಆಕೃತಿ	ಸೂತ್ರಗಳು
5.	ಗೋಲ 	ಗೋಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲ = $4\ \pi r^2$ ಗೋಲದ ಘನಫಲ = $\frac{4}{3}\ \pi r^3$
6.	ಅರ್ಧಗೋಲ 	ಅರ್ಧ ಗೋಲದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ = $2\pi r^2$ ತುಂಬಿದ ಅರ್ಧ ಗೋಲದ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ = $3\pi r^2$ ಅರ್ಧ ಗೋಲದ ಘನಫಲ = $\frac{2}{3}\ \pi r^3$

ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

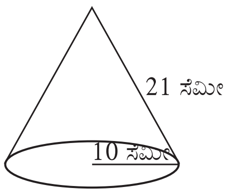
ಉದಾ. (1)



ಆಕೃತಿ 7.1

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ 30ಸೆಮೀ ಎತ್ತರ, 20ಸೆಮೀ ಉದ್ದ ಹಾಗೂ 20ಸೆಮೀ ಆಗಲದ ಎಣ್ಣೆ ಡಬ್ಬಿ ಇದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ ಎಣ್ಣೆ ಹಿಡಿಸುವದು? (1 ಲೀಟರ = 1000 ಸೆಮೀ^{3})

ಉದಾ.(2)



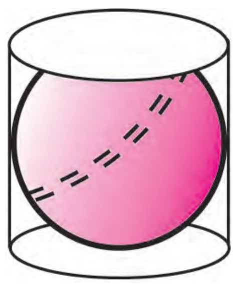
ಆಕೃತಿ 7.2

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ವಿದೂಷಕನ ಟೊಪ್ಪಿಗೆ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆ ಟೊಪ್ಪಿಗೆ ತಯಾರಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಬಟ್ಟೆ ತಗಲುವದು?

ಯೋಚಿಸೋಣ ಬನ್ನಿ

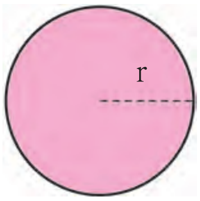
ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಚಿತಿಯ ಒಳಗೆ ಒಂದು ಗೋಲ ಇದೆ. ಗೋಲವು ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ತಳಕ್ಕೆ, ಮೇಲಿನ ಪೃಷ್ಠ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ಪೃಷ್ಠಭಾಗಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುವದು. ವೃತ್ತ ಚಿತಿಯ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯೆ r ಇದ್ದರೆ.

1. ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತ ಚಿತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಎಷ್ಟು?
2. ವೃತ್ತಚಿತಿಯ l ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ ಮತ್ತು ಗೋಲದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಎಷ್ಟು ಇರುವದು?
3. ವೃತ್ತ ಚಿತಿಯ ಘನಫಲ ಮತ್ತು ಗೋಲದ ಘನ ಫಲ ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಎಷ್ಟು ಇರುವದು?

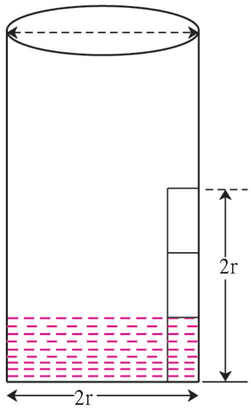


ಆಕೃತಿ 7.3

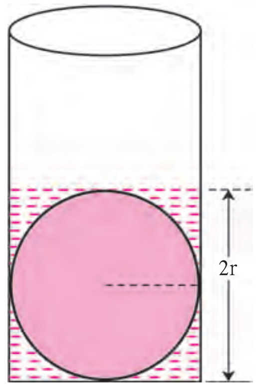
ಕೃತಿ :



ಆಕೃತಿ 7.4



ಆಕೃತಿ 7.5



ಆಕೃತಿ 7.6

ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಚೆಂಡು ಮತ್ತು ಚೆಂಡುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟು (r) ತ್ರಿಜ್ಯ ವಿರುವ ಒಂದು ಚಂಚು ಪಾತ್ರೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಚಂಚು ಪಾತ್ರೆಯ ವ್ಯಾಸದಷ್ಟು ಉದ್ದಳತೆಯ $(2r)$ ಉದ್ದಳತೆಯ ಒಂದು ಕಾಗದದ ಪಟ್ಟಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದರ ಉದ್ದಳತೆಯ ಮೂರು ಸಮಾನ ಭಾಗ ಮಾಡುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯ ಮೇಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಚಂಚು ಪಾತ್ರೆ ಅದರ ತಳದಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ಅಂಟಿಸಿರಿ. ಚಂಚು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಕಾಗದ ಪಟ್ಟಿಯ ಕೆಳಗಿನಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗದ ನೀರು ತುಂಬಿರಿ. ನಂತರ ಚೆಂಡುವನ್ನು ಚಂಚು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ತಳಕ್ಕೆ ತಗಲುವ ವರೆಗೆ ಸಾವಕಾಶವಾಗಿ ಕೂಡ್ರಿಸಿರಿ. ಚಂಚು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿಯ ನೀರಿನ ಪಾತಳಿ ಎಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ನೀರಿನ ಪಾತಳಿ ಕಾಗದದ ಪಟ್ಟಿಯ ಪೂರ್ಣ ಎತ್ತರದ ವರೆಗೆ ಬಂದಿರುವದು ಕಾಣಿಸುವದು.

ಈ ನಿರೀಕ್ಷಣೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಚೆಂಡುವಿನ ಘನಫಲದ ಸೂತ್ರ ಹೇಗೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ

ಚಂಚುಪಾತ್ರೆ ವೃತ್ತಚಿತಿ ಆಕಾರದ್ದಿದೆ. ಆದರಿಂದ ಚಂಚು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ 2r ದಷ್ಟು ಎತ್ತರದ ವರೆಗಿನ ಭಾಗದ ಘನಫಲ, ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ಘನಫಲದ ಸೂತ್ರದಿಂದ ದೊರೆಯುವದು. ಈ ಘನಫಲ V ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ.

$\therefore\ V = \pi \times r^2 \times 2r = 2\pi r^3$

ಆದರೆ V = ಚೆಂಡುವಿನ ಘನಫಲ **+** ಮೊದಲು ತುಂಬಿರುವ ನೀರಿನ ಘನಫಲ

= ಚೆಂಡಿನ ಘನಫಲ **+** $\frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$\therefore$ ಚೆಂಡಿನ ಘನಫಲ $= V - \frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3} \qquad = \frac{4\pi r^3}{3}$

$\therefore$ ಗೋಲದ ಘನಫಲದ ಸೂತ್ರ; $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ಎಂದು ಸಿಗುವದು.

(ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಆಕೃತಿ 7.3ರ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಶ್ನೆ ಕ್ರಮಾಂಕ 3ರ ಉತ್ತರ ನೀವು ಈಗ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯ ಬಹುದು)

ಉದಾ. (1) ಒಂದು ವೃತ್ತಾಚಿತಿ ಆಕಾರದ ನೀರಿನ ಟಾಕಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ 2.8 ಮೀ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 3.5 ಮೀ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಟಾಕಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ ನೀರು ಸಂಗ್ರಹ ವಾಗುವದು? ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ಪ್ರತಿದಿನ ಸರಾಸರಿ 70 ಲೀಟರ ನೀರು ಬೇಕಾದರೆ, ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬಿದ ಟಾಕಿಯಲ್ಲಿಯ ನೀರು ಪ್ರತಿದಿನ ಎಷ್ಟು ಜನರಿಗೆ ಸಾಕಾಗುವದು? ($\pi = \frac{22}{7}$)

ಉತ್ತರ : ತ್ರಿಜ್ಯ (r) = 2.8 ಮೀಟರ್, ಎತ್ತರ (h) = 3.5 ಮೀಟರ್, $\pi = \frac{22}{7}$

ನೀರಿನ ಟಾಕೀಯ ಧಾರಕತೆ = ವೃತ್ತಚಿತಿ ಆಕಾರದ ಟಾಕಿಯ ಘನಫಲ

$= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \times 3.5$

= 86.24 ಮೀ^{3}

= 86.24 × 1000 ಲೀಟರ ($\because$ 1ಮೀ^{3} = 1000 ಲೀಟರ)

= 86240.00 ಲೀಟರ

$\therefore$ ಟಾಕಿಯಲ್ಲಿ 86240 ಲೀಟರ ನೀರು ಸಂಗ್ರಹವಾಗುವುದು.

70 ಲೀಟರ್ ನೀರು ಪ್ರತಿದಿನ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ಸಾಕಾಗುವದು.

$\therefore$ ಸಂಪೂರ್ಣ ತುಂಬಿರುವ ಟಾಕಿಯಲ್ಲಿಯ ನೀರು $\frac{86240}{70}$ = 1232 ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಸಾಕಾಗುವದು

ಉದಾ. (2) 30 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಒಂದು ತುಂಬಿದ ಗೋಲವನ್ನು ಕರಿಗಿನ ಅದರಿಂದ 10 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಹಾಗೂ 6 ಸೆಮೀ ಎತ್ತರದ ಎಷ್ಟು ತುಂಬಿದ ವೃತ್ತಚಿತಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು.

ಉತ್ತರ : ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯ r = 30 ಸೆಮೀ.

ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ R = 10 ಸೆಮೀ.

ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ಎತ್ತರ H = 6 ಸೆಮೀ.

n ವೃತ್ತಾಚಿತಿಗಳು ತಯಾರಾಗುವವು ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$\therefore$ ಗೋಲದ ಘನಫಲ = n × ಒಂದು ವೃತ್ತ ಚಿತಿಯ ಘನಫಲ

$\therefore$ ವೃತ್ತಚಿತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = n = $\frac{\text{ಗೋಲದ ಘನಫಲ}}{\text{ಒಂದು ವೃತ್ತಾಚಿತಿಯ ಘನಫಲ}}$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi (r)^3}{\pi (R)^2 H}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\times(30)^3}{10^2\times 6} \qquad = \frac{\frac{4}{3}\times 30\times 30\times 30}{10\times 10\times 6} = 60$$

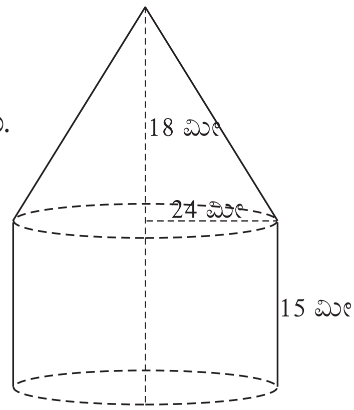
$\therefore$ ಒಟ್ಟ 60 ವೃತ್ತಚಿತಿಗಳು ತಯಾರಾಗುವವು.

ಉದಾ. (3) ಸರ್ಕಸದ ತಂಬುವಿನ ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗ ವೃತ್ತ ಚಿತಿ ಆಕಾರದ ಹಾಗೂ ಅದರ ಮೇಲಿನ ಭಾಗ ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದಿದೆ. ತಂಬುವಿನ ತಳದ ವ್ಯಾಸ 48 ಮೀ ಇದ್ದು ವೃತ್ತ ಚಿತಿ ಭಾಗದ ಎತ್ತರ 15 ಮೀ ಇದೆ. ತಂಬುವಿನ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರ 33 ಮೀ ಇದ್ದರೆ ತಂಬುವಿಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ಬಟ್ಟೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಹಾಗೂ ತಂಬುವಿನಲ್ಲಿಯ ಹವೆಯ ಘನ ಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ತಂಬುವಿನ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರ 33 ಮೀ ಇದೆ.

ವೃತ್ತಾಚಿತಿ ಭಾಗದ ಎತ್ತರ = H ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ. H = 15 ಮೀ ಇದೆ.

$\therefore$ ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದ ಲಂಬ ಎತ್ತರ h = (33−15) = 18 ಮೀ. ಆಗುವದು.



ಆಕೃತಿ 7.7

ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ $(l) = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{24^2 + 18^2}$

$= \sqrt{576 + 324}$

$= \sqrt{900}$

$l = 30$ ಮೀ

ಸರ್ಕಸದ ತಂಬುವಿಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ಬಟ್ಟೆ = ವೃತ್ತಚಿತಿ ಭಾಗದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ + ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಭಾಗದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ

$= 2\pi rH + \pi rl$

$= \pi r\,(2H + l)$

$= \frac{22}{7} \times 24\,(2 \times 15 + 30)$

$= \frac{22}{7} \times 24 \times 60$

$= 4525.71$ ಚೌ.ಮೀ

ತಂಬುವಿನಲ್ಲಿಯ ಹವೆಯ ಘನಫಲ = ವೃತ್ತಚಿತಿ ಭಾಗದ ಘನಫಲ + ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಭಾಗದ ಘನಫಲ

$= \pi r^2 H + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \pi r^2 \left(H + \frac{1}{3}h\right)$

$= \frac{22}{7} \times 24^2\,(15 + \frac{1}{3} \times 18)$

$= \frac{22}{7} \times 576 \times 21$

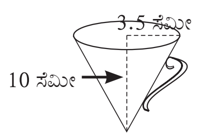
$= 38{,}016$ ಘಮೀ.

ತಂಬುವಿಗಾಗಿ ಬೇಕಾಗುವ ಬಟ್ಟೆ = 4525.71 ಚೌ.ಮೀ

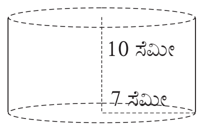
ತಂಬುವಿನಲ್ಲಿಯ ಹವೆಯ = 38016 ಘಮೀ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.1

1. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 1.5 ಸೆಮೀ ಇದ್ದು ಅದರ ಲಂಬ ಉತ್ತರ 5 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.
2. 6 ಸೆ ಮೀ ವ್ಯಾಸ ಇರುವ ಗೋಲದ ಘನಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಲಂಬ ವೃತ್ತಾ ಚಿತಿಯ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ 40 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ವಕ್ರ ಪೃಷ್ಠಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.
5. ಧಾತುವಿನ ಒಂದು ಇಷ್ಟಕಾಚಿತಿಯ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 44 ಸೆಮೀ. 21 ಸೆಮೀ. 12 ಸೆಮೀ ಇವೆ. ಅದನ್ನು ಕರಸಿನೆ 24 ಸೆಮೀ ಎತ್ತರದ ಶಂಕು ತಯಾರಾಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆಯಿರಿ.
6.



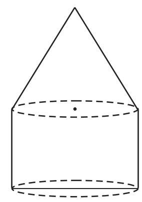
ಆಕೃತಿ 7.8
ಶಂಕಾಕೃತಿಯ ನೀರಿನ ಜಗ್ಗ



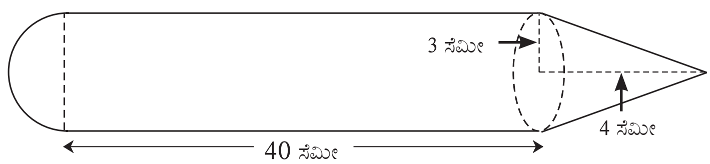
ಆಕೃತಿ 7.9
ವೃತ್ತಾಚಿತಿ ಆಕಾರದ ಪಾತ್ರೆ

ಆಕೃತಿ 7.8 ಹಾಗೂ 7.9 ದಲ್ಲಿಯ ಪಾತ್ರೆಗಳ ಅಳತೆ ನೋಡಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ವೃತ್ತಾಚಿತಿ ಆಕಾರದ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಜಗ್ಗ ನೀರು ಹಿಡಿಸುವದು? ಅದನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

7. ವೃತ್ತಾಚಿತಿ ಹಾಗೂ ಶಂಕುಗಳ ತಳ ಸಮಾನ ಇವೆ. ವೃತ್ತಾಚಿತಿಯ ಮೇಲೆ ಶಂಕು ಇಡಲಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತಾಚಿತಿ ಭಾಗಾದ ಎತ್ತರ 3 ಸೆಮೀ ಇದ್ದು ತಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 100 ಚೌ ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಒಟ್ಟು ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ 500 ಘ ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಸಂಪೂರ್ಣ ಘನಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ ತೆಗೆಯಿರಿ.


ಆಕೃತಿ 7.10

8. ಆಟಿಗೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಅರ್ಧಗೋಲ, ವೃತ್ತಾಚಿತಿ ಹಾಗೂ ಶಂಕುಗಳಿಂದ ತಯಾರಾದ ಆಟಿಗೆಯ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.

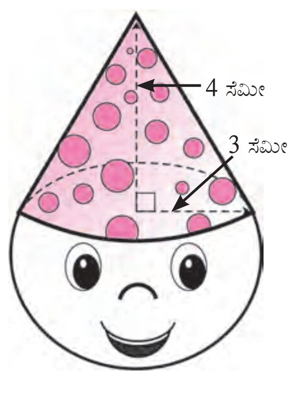


ಆಕೃತಿ 7.11

9. ಆಕೃತಿ 7.12 ರಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಚಿತಿ ಆಕಾರದ ಚಪ್ಪಟೆ ಗೋಲಿಗಳು 10 ಸೆಮೀ. ಉದ್ದದ ಒಂದು ಹೊದಿಕೆ ಇದೆ. ಒಂದು ಗೋಲಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 ಮಿಮೀ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 5 ಮಿಮೀ ಇದ್ದರೆ ಇಂತಹ ಎಷ್ಟು ಗೋಲಿಗಳು ಆ ಹೊದಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಸುವವು?

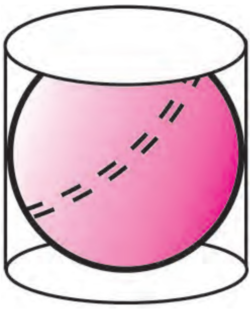
ಆಕೃತಿ 7.12

10. ಆಕೃತಿ 7.13 ರಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳ ಒಂದು ಆಟಿಕೆ ಇದೆ. ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಲ ಹಾಗೂ ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಸಹಾಯದಿಂದ ತಯಾರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಅಳತೆಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಆಟಿಕೆಯ ಘನಫಲ ಹಾಗೂ ಪೃಷ್ಠಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$)



ಆಕೃತಿ 7.13

11. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಬೀಚ ಬಾಲದ ಪೃಷ್ಠಫಲ ಹಾಗೂ ಘನಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 7.14

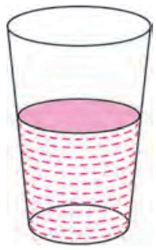
12. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತಾಚಿತಿ ಆಕಾರಾದ (ಲೋಟದಲ್ಲಿ) ನೀರು ಇದೆ. ಹಾಗೂ ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಧಾತುವಿನ 2 ಸೆಮೀ ವ್ಯಾಸದ ಗೋಲಿ ಮುಳುಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ನೀರಿನ ಘನಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಆಕೃತಿ 7.15

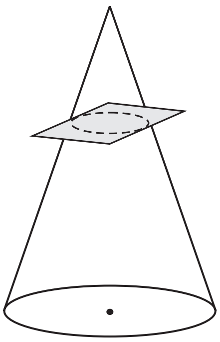
ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಶಂಕುಭೇದ (frustum of the cone)

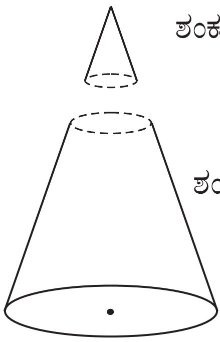
ನಾವು ನೀರು ಕುಡಿಯುವ ಸಬಳವಾದ ಗ್ಲಾಸುಗಳ (ಲೋಟ) ಉಪಯೋಗ ಮಾಡುತ್ತಿವೆ. ಈ ಗ್ಲಾಸುಗಳ ಆಕಾರ ಅದರಂತೆ ನೀರಿನ ಆಕಾರ ಇವು ಶಂಕು ಭೇನದ ಅಕಾರದವು ಇವೆ.



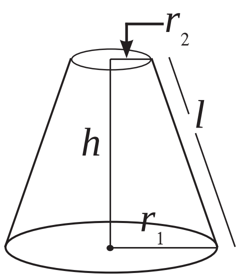
ಆಕೃತಿ 7.16



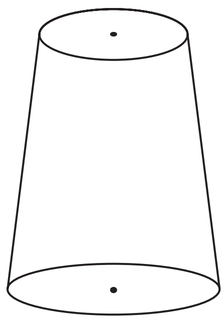
ಆಕೃತಿ 7.17
ಶಂಕು ಕತ್ತರಿಸುವಾಗ



ಆಕೃತಿ 7.18
ಶಂಕು ಕತ್ತರಿಸಿದನಂತರ
ಬೇರೆಯಾದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳು



ಆಕೃತಿ 7.19
ಶಂಕುಭೇದ



ಆಕೃತಿ 7.20
ಬುಡಮೇಲಾಗಿ
ಇಟ್ಟ ಲೋಟ

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶಂಕು ಬುಡಮೇಲಾಗಿ ಇಟ್ಟದನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ ಈ ಶಂಕುವಿನ ಅದರ ತಳಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಭೇಧ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಆದರಿಂದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭಾಗದ ಆಕಾರ ಶಂಕುವಿನ ಹಾಗೆ ಇದೆ. ಉಳಿದ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಶಂಕು ಭೇದ (frustum) ಎನ್ನುವರು.

ಶಂಕುವಿನ ಹಾಗೆ ಶಂಕು ಭೇದದ ಪೃಷ್ಠಫಲ ಹಾಗೂ ಘನಫಲ ತೆಗೆಯಲು ಬರುತ್ತದೆ. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಮುಂದಿನ ಸೂತ್ರಗಳ ಉಪಯೋಗ ನಾವು ಮಾಡುವವರಿದ್ದೇನೆ.

ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ

h = ಶಂಕುಛೇದದ ಎತ್ತರ, l = ಶಂಕುಛೇದದ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ

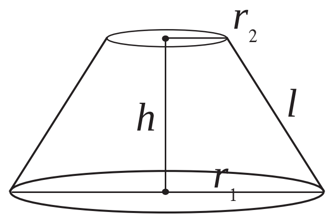
r_1 ಮತ್ತು r_2 = ಶಂಕುಛೇದದ ವರ್ತುಳಾಕಾರ ಬದಿಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ($r_1 > r_2$)

ಶಂಕು ಛೇದದ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ = l = $\sqrt{h^2+(r_1-r_2)^2}$

ಶಂಕು ಛೇದದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ = $\pi l\,(r_1 + r_2)$

ಶಂಕು ಛೇದದ ಒಟ್ಟ ಪೃಷ್ಠಫಲ = $\pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

ಶಂಕು ಛೇದದ ಘನಫಲ = $\frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$



ಆಕೃತಿ 7.21

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. (1) ಒಂದು ಶಂಕು ಛೇದದ ಆಕಾರದ ಬಾದಲಿಯ ಎತ್ತರ 28 ಸೆಮೀ ಇದೇ. ಬಾದಲಿಯ ಎರಡು ವರ್ತುಳಾಕಾರದ ಬದಿಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 12 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ 15 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ಬಾದಲಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ ನೀರು ಹಿಡಿಸುವದು ($\pi = \frac{22}{7}$)

ಉತ್ತರ : ಬಾದಲಿಯ ವರ್ತುಳಾಕಾರ ಬದಿಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು r_1 = 15 ಸೆಮೀ, r_2 = 12 ಸೆಮೀ

ಬಾದಲಿಯ ಎತ್ತರೆ h = 28 ಸೆಮೀ

ಬಾದಲಿಯ ಧಾರಕತೆ = ಶಂಕು ಛೇದದ ಘನಫಲ

$$= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$$

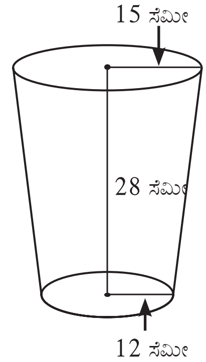
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 28\,(15^2 + 12^2 + 15 \times 12)$$

$$= \frac{22 \times 4}{3} \times (225 + 144 + 180)$$

$$= \frac{22 \times 4}{3} \times 549$$

$$= 88 \times 183$$

= 16104 ಸೆಮೀ^{3} = 16.104 ಲೀಟರ



ಆಕೃತಿ 7.22

ಬಾದಲಿಯಲ್ಲಿ 16.104 ಲೀಟರ ನೀರು ಹಿಡಿಸುವದು

ಉದಾ. (2) ಶಂಕು ಛೇದದ ವರ್ತುಳಾಕಾರದ ಭಾಗಗಳು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 14 ಸೆಮೀ 8 ಸೆಮೀ ಇವೇ. ಶಂಕು ಛೇದದ ಎತ್ತರ 8 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಮುಂದಿನ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ (π= 3.14)

i) ಶಂಕು ಛೇದದ ವಕ್ರ ಪೃಷ್ಠಫಲ ii) ಶಂಕು ಛೇದದ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ iii) ಶಂಕು ಛೇದದ ಘನಫಲ

ಉತ್ತರ : ಇಲ್ಲಿ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು r_1 = 14 ಸೆಮೀ, r_2 = 8 ಸೆಮೀ, ಎತ್ತರ h = 8 ಸೆಮೀ

ಶಂಕು ಛೇದದ ವಕ್ರೋನ್ನತಿ $l = \sqrt{h^2+(r_1-r_2)^2}$

$$l = \sqrt{8^2+(14-8)^2}$$

$$l = \sqrt{64+36} = 10 \text{ ಸೆಮೀ}$$

ಶಂಕು ಛೇದದ ವಕ್ರ ಪೃಷ್ಠಫಲ $= \pi(r_1 + r_2)\, l$

$= 3.14 \times (14 + 8) \times 10$

$= 690.8$ ಚೌ ಸೆಮೀ

ಶಂಕು ಛೇದದ ಒಟ್ಟ ಪೃಷ್ಠಫಲ $= \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$= 3.14 \times 10\,(14 + 8) + 3.14 \times 14^2 + 3.14 \times 8^2$

$= 690.8 + 615.44 + 200.96$

$= 690.8 + 816.4$

$= 1507.2$ ಚೌ ಸೆಮೀ

ಶಂಕು ಛೇದದ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 8\,(14^2 + 8^2 + 14 \times 8)$

$= 3114.88$ ಘಸೆಮೀ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.2

1. 30 ಸೇಮೀ ಎತ್ತರ ಇರವ ಶಂಕು ಛೇದದ ಆಕಾರದ ನೀರಿನ ಬಾದಲಿಯ ಎರಡು ವರ್ತುಳಾಕಾರದ ಬದಿಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 14 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ 7 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಬಾದಲಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ ನೀರು ಹಿಡಿಸುವದು (1ಲೀಟರ = 1000 ಘಸೆಮೀ)
2. ಶಂಕು ಛೇದದ ವರ್ತುಳಾಕಾರದ ಭಾಗಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 14 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ 6 ಸೇಮಿ ಇದ್ದು ಅದರ ಎತ್ತರ 6 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಮುಂದಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ ($\pi = 3.14$)

   (1) ಶಂಕು ಛೇದದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ (2) ಶಂಕು ಛೇದದ ಒಟ್ಟು ಪೃಷ್ಠಫಲ (3) ಶಂಕು ಛೇದದ ಘನ ಫಲ
3. ಆಕೃತಿ 7.23 ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶಂಕು ಛೇದದ ವರ್ತುಳಾಕಾರದ ತಳದ ಪರೀಘಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 132 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ 88 ಸೆಮೀ ಇರುತ್ತವೆ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ 24 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಶಂಕುಛೇದದ ವಕ್ರ ಪೃಷ್ಠಫಲ ತೆಗೆಯಲು ಕಳಗಿನ ಕೃತಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$)

ಪರಿಘ$_1$ $= 2\pi r_1 = 132$

$r_1 = \frac{132}{2\pi} = \boxed{}$ ಸೆಮೀ

ಪರಿಘ$_2$ $= 2\pi r_2 = 88$

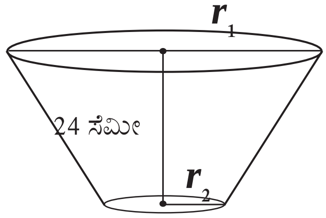
$r_2 = \frac{88}{2\pi} = \boxed{}$ ಸೆಮೀ

ಶಂಕು ಛೇದದ ಪರೋನ್ನತಿ $= l$

$l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$l = \sqrt{\boxed{}^2 + \boxed{}^2}$

$l = \boxed{}$ ಸೆಮೀ



ಆಕೃತಿ 7.23

ಶಂಕು ಛೇದದ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ = $\pi(r_1 + r_2)l$

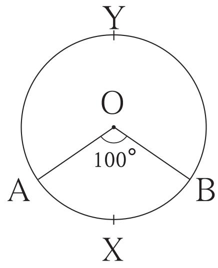
$= \pi \times \boxed{} \times \boxed{}$

$= \boxed{}$ ಚೌ ಸೆಮೀ

ಸ್ವಲ್ಪನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಿಂದ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ

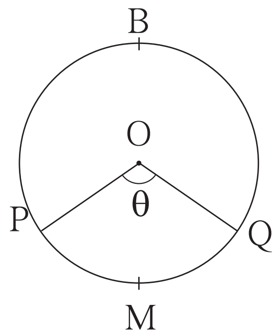
ಕಂಸಗಳ ಪ್ರಕಾರ	ಕಂಸದ ಹೆಸರು	ಕಂಸದ ಅಳತೆ
ಲಘು ವರ್ತುಳ ಕಂಸ	ಕಂಸ AXB	....
....	ಕಂಸ AYB	....



ಆಕೃತಿ 7.24

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ವರ್ತುಳಾಂಶ (Sector of a circle)



ಆಕೃತಿ 7.25

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರಿಯ ಕೋನದಿಂದ ವರ್ತುಳ ಕೇತ್ರದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಜನ ಆಗಿದೆ ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಕ್ಕೆ ವರ್ತುಳಾಂಶ ಎನ್ನುವರು

"ವರ್ತುಳದ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಮತ್ತು ಅದರ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ವರ್ತುಳಕಂಸವು ವ್ಯಾಪಿಸಿದ ಭಾಗಕ್ಕೆ ವರ್ತುಳಾಂಶ ಎನ್ನುವರು."

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ O –PMQ ಮತ್ತು O–PBQ ಈ ಎರಡು ವರ್ತುಳಾಂಶಗಳಿವೆ

ಲಘು ವರ್ತುಳಾಂಶ (Minor sector) :

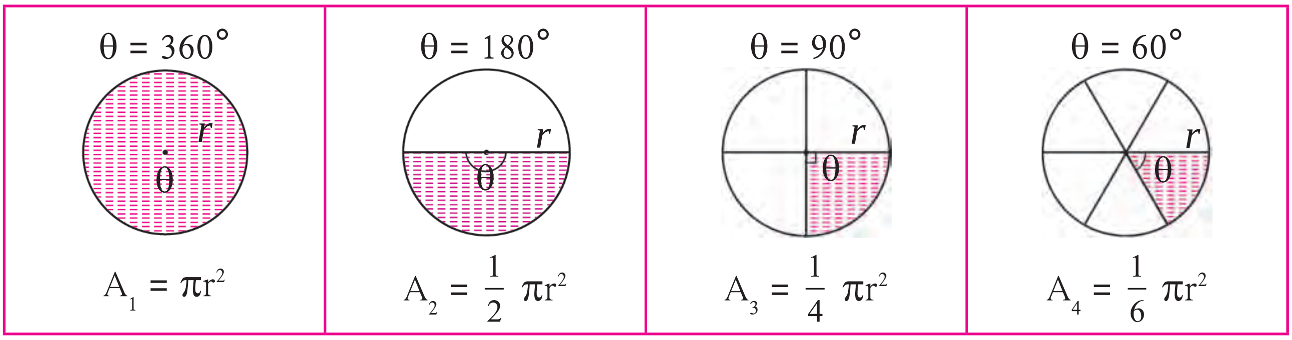
ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಹಾಗೂ ಅದರ ಸಂಗತ ಲಘುಕಂಸದಿಂದ ವ್ಯಾಪಿಸಿದ ವರ್ತುಳಾಂಶಕ್ಕೆ ಲಘು ವರ್ತುಳಾಂಶ ಎನ್ನುವರು. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ O–PMQ ಇದು ಲಘು ವರ್ತುಳಾಂಶ ಇದೆ

ವಿಶಾಲ ವರ್ತುಳಾಂಶ (Major sector) :

ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಹಾಗೂ ಸಂಗತ ವಿಶಾಲ ಕಂಸದಿಂದ ವ್ಯಾಪಸಿದ (ಮರ್ಯದಿತ) ವರ್ತುಳಾಂಶಕ್ಕೆ ವಿಶಾಲ ವರ್ತುಳಾಂಶ ಎನ್ನುವರು. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ O–PBQ ಇದ ವಿಶಾಲ ವರ್ತುಳಾಂಶ ಇದೆ.

ವರ್ತುಳಾಂಶ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ (Area of a sector)

ಕೆಳಗಿನ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ವರ್ತುಳಗಳ ಛಾಯಾಂಕಿತ ಭಾಗಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ. ಹಾಗೂ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 7.26

ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಅಳತೆ $= 360^\circ =$ ಪೂರ್ಣ ಕೋನ

ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನ $= 360^\circ$, ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \pi r^2$			
ವರ್ತುಳಾಂಶ	ವರ್ತುಳಾಂಶ ಕಂಸದ ಅಳತೆ	$\frac{\theta}{360}$	ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ A
A_1	360°	$\frac{360}{360} = 1$	$1 \times \pi r^2$
A_2	180°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \pi r^2$
A_3	90°	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times \pi r^2$
A_4	60°	....	....
A	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

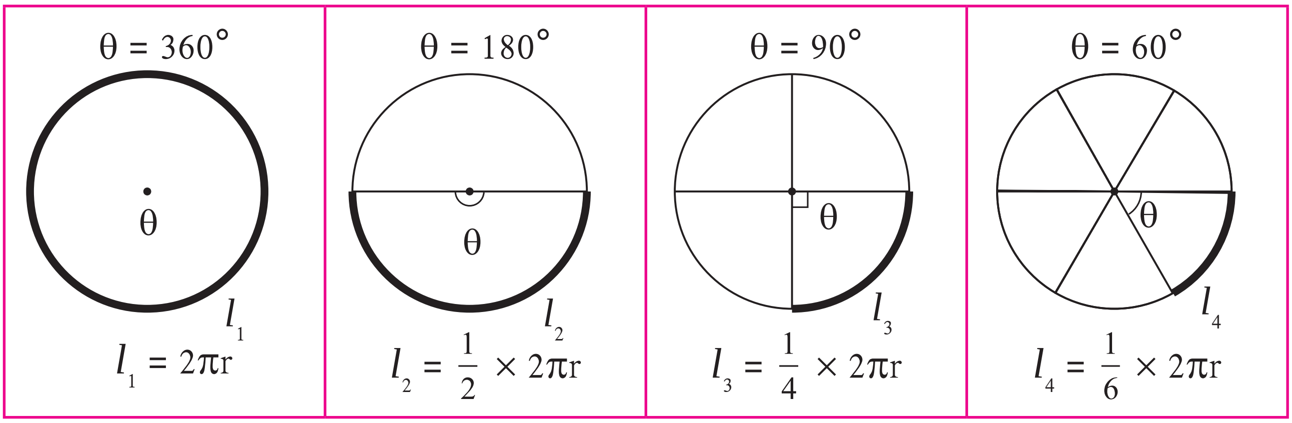
ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವುದೆನೆಂದರೆ, ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಕ್ಕೆ $\frac{\theta}{360}$ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಕಂಸದ ಅಳತೆ θ ಇರುವ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ದೊರೆಯುವದು. ಈ ಸೂತ್ರದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು.

$$\text{ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ (A)} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360}$; ಅಂದರೆ $\frac{\text{ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}}{\text{ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}} = \frac{\theta}{360}$

ವರ್ತುಳಕಂಸದ ಉದ್ದಳತೆ (Length of an arc)

ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ವರ್ತುಳಗಳ ಸ್ಪಷ್ಟ ಗುರುತು ಮಾಡಿರುವ ವರ್ತುಳ ಕಂಸಗಳ ಉದ್ದಳತೆಗಳ ನೀರಿಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ ಹಾಗೂ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣಮಾಡಿರಿ.



ವರ್ತುಳ ಪರೀಘ $2\pi r$

ಆಕೃತಿ 7.27

ವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ಉದ್ದಳತೆ	ವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ಅಳತೆ (θ)	$\frac{\theta}{360}$	ವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ಅಳತೆ (l)
l_1	360°	$\frac{360}{360} = 1$	$1 \times 2\pi r$
l_2	180°	$\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 2\pi r$
l_3	90°	$\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 2\pi r$
l_4	60°	....	....
l	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

ಮೇಲಿನ ಆಕೃತಿಗಳಿಂದ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವುದೇನೆಂದರೆ, ವರ್ತುಳದ ಪರೀಘಕ್ಕೆ $\frac{\theta}{360}$ ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ, ಕಂಸದ ಅಳತೆ θ ಇರುವ ವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ಉದ್ದಳತೆ ದೊರೆಯುವದು. ಇದನ್ನು ಸೂತ್ರರೂಪದಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನಂತೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವದು

ವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ಉದ್ದಳತೆ $(l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ,

$$\therefore \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$$

$$\frac{\text{ವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ಉದ್ದಳತೆ}}{\text{ಪರೀಘ}} = \frac{\theta}{360}$$

ವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ಉದ್ದಳತೆ ಮತ್ತು ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಬಂಧ

ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ I

ಆದರಂತೆ ವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ಉದ್ದಳತೆ $(l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$\therefore \frac{\theta}{360} = \frac{l}{2\pi r} \quad \text{.......... II}$$

$$A = \frac{l}{2\pi r} \times \pi r^2$$ .... I ಮತ್ತು II ರ ಮೇಲಿಂದ

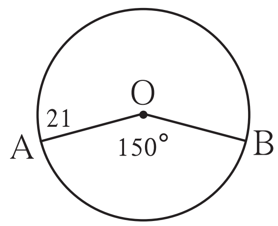
$$A = \frac{1}{2} lr = \frac{lr}{2}$$

$\therefore$ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = $\frac{\text{ವರ್ತುಳಕಂಸದ ಉದ್ದಳತೆ} \times \text{ತ್ರಿಜ್ಯ}}{2}$

ಆದರಂತೆ $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. (2) 21 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕೋನ ಅಳತೆ 150° ಇದ್ದರೆ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಹಾಗೂ ಸಂಗತ ವರ್ತುಳಕಂಸದ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 7.28

ಉತ್ತರ : ಇಲ್ಲಿ $r = 21$ಸೆಮೀ. $\theta = 150$, $\pi = \frac{22}{7}$

ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $(A) = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$$= \frac{150}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

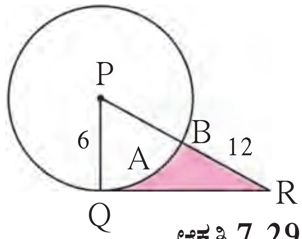
$$= \frac{1155}{2} \text{ ಸೆಮೀ}^2 \qquad = 577.5 \text{ ಸೆಮೀ}^2$$

ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಉದ್ದಳತೆ $= l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$= \frac{150}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$$

$= 55$ ಸೆಮೀ

ಉದಾ. (2) ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ, ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರ P ಮತ್ತು ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 6 ಸೆಮೀ ಇದೆ ವರ್ತುಳ QR ಇದು ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ಇದೆ PR = 12 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಛಾಯಾಕಿಂತ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ ($\sqrt{3}$ = 1.73)



ಆಕೃತಿ 7.29

ಉತ್ತರ : ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತೆಗೆದ ತಿಜ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆಗೆ ಲಂಬ ಇರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ Δ PQRಯಲ್ಲಿ, $\angle$ PQR = 90°, PQ = 6 ಸೆಮೀ, PR = 12 ಸೆಮೀ

$$\therefore PQ = \frac{PR}{2}$$

ಕಾಟಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜ ಕರ್ಣದ ಅರ್ಧ ದಷ್ಟು ಉದ್ದಳತೆ ಇದ್ದರೆ ಆ ಭುಜದ ಎದುರಿನ ಕೋನದ ಅಳತೆ 30° ಇರುತ್ತದೆ.

$\therefore \angle R = 30°$ ಮತ್ತು $\angle P = 60°$

30°-60°-90° ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ $QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times PR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$

$QR = 6\sqrt{3}$ ಸೆಮೀ

$$\therefore A(\Delta PQR) = \frac{1}{2} QR \times PQ$$

$$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6$$

$$= 18\sqrt{3} = 18 \times 1.73$$

= 31.14 ಸೆಮೀ^{2}

ಕಾಟಕೋನ Δ PQR ದಲ್ಲಿ,

$PQ = \frac{1}{2}$ (ಕರ್ಣ PR)

$\therefore \angle PRQ = 30°$

$\therefore \angle QPR = 60°$

ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$$\therefore \quad A(P\text{-}QAB) = \frac{60}{360} \times 3.14 \times 6^2$$

$$= \frac{1}{6} \times 3.14 \times 6 \times 6 \quad = 3.14 \times 6$$

= 18.84 ಸೆಮೀ^{2}

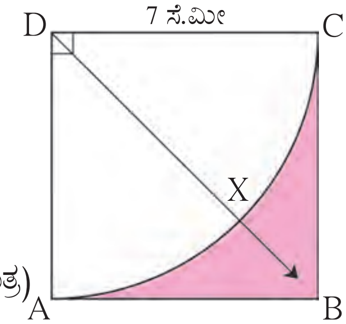
ಛಾಯಾಂಕಿತ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = A(Δ PQR) - A(P-QAB)

= 31.14 - 18.84

= 12.30 ಸೆಮೀ^{2}

ಛಾಯಾಂಕಿತ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = 12.30 ಸೆಮೀ^{2}

ಕೃತಿ : ಕೊಟ್ಟಿ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ABCD ಈ ಚೌರಸದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜ 7 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಬಿಂದು D ಇದನ್ನು ಕೇಂದ್ರವೆಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು DA ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ತೆಗೆದ ವರ್ತುಳಾಂಶ D – AXC ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಛಾಯಾಂಕಿತ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಲು ರಿಕ್ತ ಚೌಕಟ್ಟು ತುಂಬಿ ಉದಾಹರಣೆ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 7.30

ಉತ್ತರ : ಚೌರಸದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = $\boxed{}$ (ಸೂತ್ರ)

= $\boxed{}$

= 49 ಚೌ.ಸೆಮೀ.

ವರ್ತುಳಾಂಶದ (D– AXC) ದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = $\boxed{}$ (ಸೂತ್ರ)

$= \dfrac{\boxed{}}{360} \times \dfrac{22}{7} \times \boxed{}$

= 38.5 ಚೌ.ಸೆಮೀ.

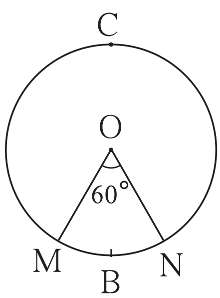
ಛಾಯಾಂಕಿತ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = $\boxed{}$ ದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ – $\boxed{}$ ಚೌ.ಸೆಮೀ.

= $\boxed{}$ ಚೌ.ಸೆಮೀ. – $\boxed{}$ ಚೌ.ಸೆಮೀ.

= $\boxed{}$ ಚೌ.ಸೆಮೀ.

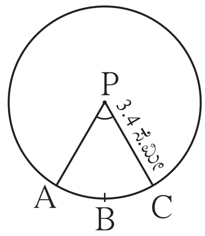
ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.3

1. ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 10 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ಅಳತೆ 54° ಇದ್ದರೆ ಆ ಕಂಸವು ವ್ಯಾಪಿಸಿದ (ಮರ್ಯಾದಿತ) ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ ($\pi = 3.14$)
2. ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ವರ್ತುಳಕಂಸದ ಅಳತೆ 80° ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 18ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ವರ್ತುಳಕಂಸದ ಉದ್ಧಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$)
3. ವರ್ತುಳಾಂಶದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3.5 ಸೆಮೀ ಇದ್ದು ವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ಉದ್ಧಳತೆ 2.2 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.
4. ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 10 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಅದರ ಒಂದು ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 100 ಚೌಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ವಿಶಾಲ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$)
5. 15 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 30 ಚೌ.ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವರ್ತುಳಕಂಸ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
6. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 ಸೆಮೀ ಇದೆ ಮತ್ತು m(ಕಂಸ MBN)= 60° ಇದ್ದರೆ (1) ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.
   (2) A(O – MBN) ತೆಗೆಯಿರಿ.
   (3) A(O – MCN) ತೆಗೆಯಿರಿ.



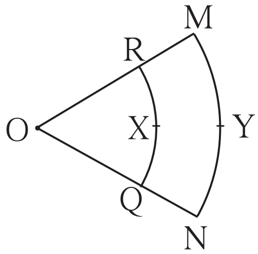
ಆಕೃತಿ 7.31

7. 3.4 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಪರಿಮಿತಿ 12.8 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 7.32

8. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದು O ಇದು ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕೇಂದ್ರ ಇದೆ. $\angle ROQ = \angle MON = 60^\circ$, OR = 7 ಸೆಮೀ. OM = 21 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಕಂಸ RXQ ಹಾಗೂ ಕಂಸ MYN ಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ ($\pi = \frac{22}{7}$)

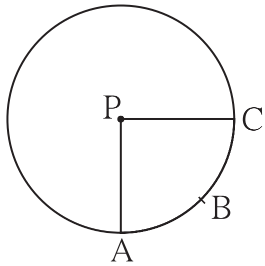


ಆಕೃತಿ 7.33

9. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ A(P-ABC) = 154 ಚೌ.ಸೆಮೀ ಮತ್ತು ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 14 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ

(1) $\angle$ APC ದ ಅಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(2) ಕಂಸ ABC ದ ಉದ್ದಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.



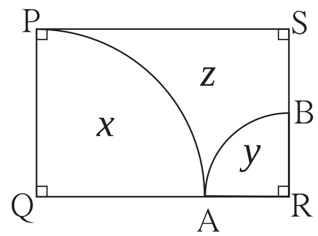
ಆಕೃತಿ 7.34

10. ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕಂಸದ ಅಳತೆ ಮುಂದಿನಂತೆ ಇದ್ದರೆ ಆ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(1) 30° (2) 210° (3) 3 ಕಾಟಕೋನ

11. ಲಘು ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 3.85 ಚೌ.ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ ಸಂಗತ ಕೇಂದ್ರಿಯ ಕೋನದ ಅಳತೆ 36° ಇದ್ದರೆ ಆ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆಯಿರಿ.

12. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ $\square$ PQRS ಇದು ಆಯತ ವಿದ್ದು PQ = 14 ಸೆಮೀ QR = 21 ಸೆಮೀ x, y ಮತ್ತು z ಇವುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 7.35

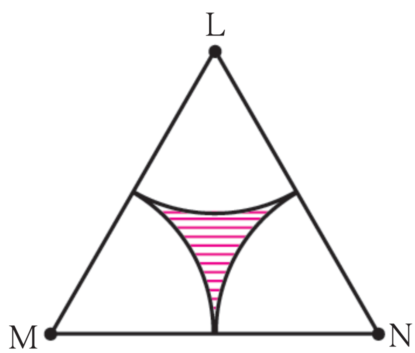
13. Δ LMN ಇದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ. LM = 14 ಸೆಮೀ, ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿ ಯೊಂದು ಶಿರೋಬಿಂದುವನ್ನು ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ತಿಳಿದು. 7 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸದಂತೆ ಮೂರು ವರ್ತುಳಾಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ.

(1) A (Δ LMN) = ?

(2) ಒಂದು ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(3) ಮೂರು ವರ್ತುಳಾಂಶಗಳ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.

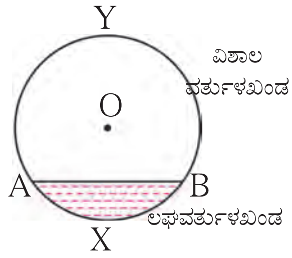
(4) ರೇಖಾಕಿಂತ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 7.36

ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ವರ್ತುಳಖಂಡ (segment of a circle)



ಆಕೃತಿ 7.37

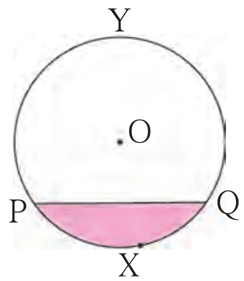
ವರ್ತುಳಖಂಡ ಎಂದರೆ ಜ್ಯಾ ಹಾಗೂ ಸಂಗತ ವರ್ತುಳ ಕಂಸ ಇವುಗಳಿಂದ ವ್ಯಾಪಿಸಿದ ಭಾಗವಾಗಿದೆ.

ಲಘು ವರ್ತುಳಖಂಡ: ಜ್ಯಾ ಹಾಗೂ ಲಘು ವರ್ತುಳಕಂಸ ಇವುಗಳಿಂದ ವ್ಯಾಪಿಸಿದ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಲಘು ವರ್ತುಳ ಖಂಡ ಎನ್ನುವರು. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಖಂಡ AXB ದು ಲಘು ವರ್ತುಳಖಂಡ ಇದೆ.

ವಿಶಾಲ ವರ್ತುಳಖಂಡ: ಜ್ಯಾ ಹಾಗೂ ವಿಶಾಲ ವರ್ತುಳಕಂಸ ಇವುಗಳಿಂದ ವ್ಯಾಪಿಸಿದ ಭಾಗಕ್ಕೆ ವಿಶಾಲ ವರ್ತುಳಖಂಡ ಎನ್ನುವರು. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳಖಂಡ AYB ಇದು ವಿಶಾಲ ವರ್ತುಳ ಖಂಡ ಇದೆ.

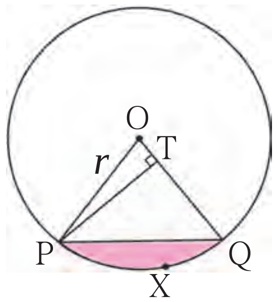
ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳಖಂಡ: ವ್ಯಾಸದಿಂದ ತಯಾರಾಗುವ ವರ್ತುಳಖಂಡಕ್ಕೆ ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳಖಂಡ ಎನ್ನುವರು.

ವರ್ತುಳಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ (Area of a Segment)



ಆಕೃತಿ 7.38

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ (O-PXQ) ಇದು ಲಘುವರ್ತುಳಖಂಡ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ತುಳಖಂಡ (O-PYQ) ಇದು ವಿಶಾಲ ವರ್ತುಳಖಂಡ ಇದೆ.



ಆಕೃತಿ 7.39

ಲಘು ವರ್ತುಳಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯಬಹುದು?

ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರ O ದಿಂದ OP ಹಾಗೂ OQ ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ನಿಮಗೆ ವರ್ತುಳಾಂಶ O-PXQದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. ಆದರಂತೆ ΔOPQದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಸಹ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವುದು. ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ವಜಾ ಮಾಡಿದ್ದರೆ ವರ್ತುಳಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ದೊರೆಯುವದು.

ವರ್ತುಳಖಂಡ PXQದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ವರ್ತುಳಾಂಶ (O – PXQ)ದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ – Δ OPQದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta \text{ OPQ ದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ} ---------- \text{(I)}$$

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ Δ OPQ ದಲ್ಲಿ, ರೇಖ PT ಇದು ಭುಜ OQ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದ ಲಂಬ ಇದೆ.

ಕಾಟಕೋನ Δ OTP ದಲ್ಲಿ, $\sin \theta = \dfrac{PT}{OP}$

$\therefore$ PT = OP $\times$ sin θ

PT = r sin θ $\qquad\qquad$ ($\because$ OP = r)

Δ OPQದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = $\frac{1}{2}$ $\times$ ತಳ $\times$ ಎತ್ತರ

$$= \frac{1}{2} \times OQ \times PT$$

$$= \frac{1}{2} \times r \times r \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2} \times r^2 \sin\theta \text{ ----------------- (ii)}$$

(I) ಹಾಗೂ (II)ರ ಮೇಲಿಂದ

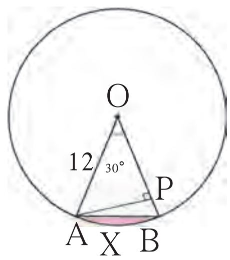
ವರ್ತುಳಖಂಡ PXQದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

$$= r^2 \left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$$

(ನಾವು ಲಘುಕೋನದ ಸಲುವಾಗಿ ಸಾಯಿನ ಗುಣೋತ್ತರದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ θ ಈ ಅಳತೆ 90° ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದಾಗ ಈ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು, ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ)

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. (1) ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ $\angle$ AOB = 30°, OA = 12 ಸೆಮೀ. ಇದ್ದರೆ ಲಘು ವರ್ತುಳಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.
(π = 3.14 ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ)



ಆಕೃತಿ 7.40

ಪದ್ಧತಿ I :

r = 12, θ = 30°, π = 3.14

ವರ್ತುಳಾಂಶ O−AXBದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 12^2$$

$$= 3.14 \times 12$$

= 37.68 ಚೌಸೆಮೀ

$$A(\Delta\, OAB) = \frac{1}{2} r^2 \times \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 12^2 \times \sin 30$$

$$= \frac{1}{2} \times 144 \times \frac{1}{2}$$

.....($\because$ sin 30 = $\frac{1}{2}$)

= 36 ಚೌಸೆಮೀ-

ವರ್ತುಳಖಂಡ AXBದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ವರ್ತುಳಾಂಶ (O - AXB)ದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ - A(Δ OAB)

= 37.68 - 36

= 1.68 ಚೌ.ಸೆ.ಮೀ

ಪದ್ಧತಿ II :

ವರ್ತುಳಖಂಡ AXBದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = $r^2\left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$

$$= 12^2\left[\frac{3.14\times 30}{360}-\frac{\sin 30}{2}\right]$$

$$= 144\left[\frac{3.14}{12}-\frac{1}{2\times 2}\right]$$

$$= \frac{144}{4}\left[\frac{3.14}{3}-1\right]$$

$$= 36\left[\frac{3.14-3}{3}\right]$$

$$= \frac{36}{3}\times 0.14 = 12 \times 0.14$$

= 1.68 ಚೌಸೆಮೀ

ಉದಾ. (2) P ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 10 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಜ್ಯಾ ABಯು ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಕಾಟಕೋನ ಮಾಡಿದ್ದರೆ ಲಘು ವರ್ತುಳ ಖಂಡದ ಹಾಗೂ ವಿಶಾಲ ವರ್ತುಳಖಂಡಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. (π = 3.14)

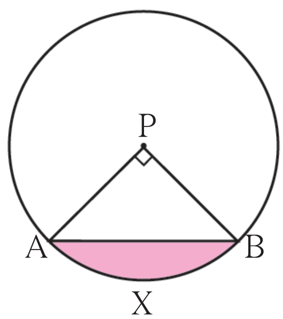
ಉತ್ತರ : r = 10 ಸೆಮೀ, θ = 90, π = 3.14

ವರ್ತುಳಾಂಶ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$$= \frac{90}{360}\times 3.14 \times 10^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 314$$

= 78.5 ಚೌಸೆಮೀ



ಆಕೃತಿ 7.41

A(ΔAPB) = $\frac{1}{2}$ × ತಳ × ಎತ್ತರ

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10$$

= 50 ಚೌಸೆಮೀ

ಲಘು ವರ್ತುಳಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ - ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

= 78.5 - 50

= 28.5 ಚೌಸೆಮೀ

ವಿಶಾಲ ವರ್ತುಳಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ − ಲಘು ವರ್ತುಳಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

$= 3.14 \times 10^2 - 28.5$

$= 314 - 28.5$

$= 285.5$ ಚೌಸೆಮೀ

ಉದಾ. (3) 14 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸುಸಮ ಷಟ್‌ಕೋನ ಅಂತರ ಲಿಖಿತ ಮಾಡಿದ್ದರೆ ಷಟ್‌ಕೋನದ ಹೊರಗಿನ ಹಾಗೂ ವರ್ತುಳದ ಒಳಬದಿಯ ಭಾಗದ ಕೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. $\left(\pi = \frac{22}{7}, \sqrt{3} = 1.732\right)$

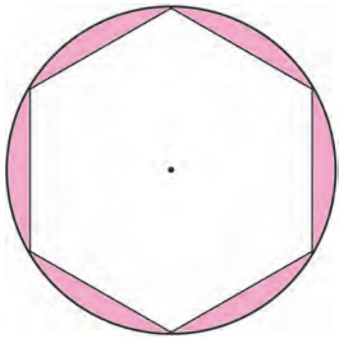
ಉತ್ತರ : ಸುಸಮ ಷಟಕೋನದ ಭುಜ = ಸುಸಮ ಷಟಕೋನದ ಪರಿವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ

$\therefore$ ಸುಸಮ ಷಟಕೋನದ ಭುಜ = 14 ಸೆಮೀ

ಸುಸಮ ಷಟ್‌ಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{ಭುಜ})^2$

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14^2$

$= 509.208$ ಚೌಸೆಮೀ



ಆಕೃತಿ 7.42

ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 616$ ಚೌಸೆಮೀ

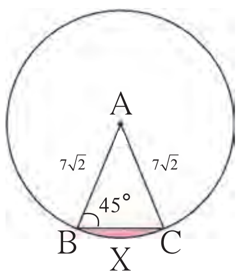
ಷಟ್‌ಕೋನದ ಹೊರಗಿನ ಹಾಗೂ ವರ್ತುಳದ ಒಳಗಿನ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರ − ಸುಸಮ ಷಟ್‌ಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರ

$= 616 - 509.208$

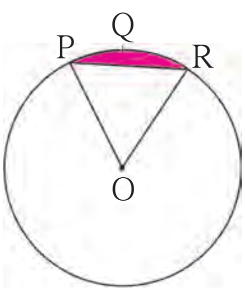
$= 106.792$ ಚೌಸೆಮೀ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.4

1. ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ A ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ $\angle ABC = 45^\circ$, $AC = 7\sqrt{2}$ ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ. ವರ್ತಳಖಂಡ BXC ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. $(\pi = 3.14, \sqrt{2} = 1.41)$



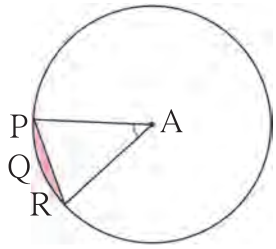
ಆಕೃತಿ 7.43

2. 

ಆಕೃತಿ 7.44

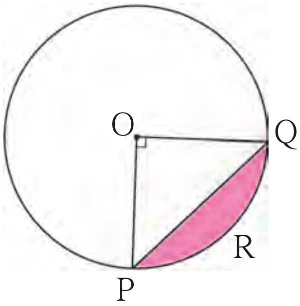
ಆಕೃತಿ 7.44 ರಲ್ಲಿ O ಇದು ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ m(ಕಂಸ PQR) = 60°, OP = 10 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಛಾಯಾಕಿಂತ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. $(\pi = 3.14, \sqrt{3} = 1.73)$

3. A ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ $\angle PAR = 30^\circ$ $AP = 7.5$ ಇದ್ದರೆ ವರ್ತುಳಖಂಡ PQR ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$)



ಆಕೃತಿ 7.45

4. O ಕೆಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ PQ ಇದು ಜ್ಯಾ ಇದೆ. $\angle POQ = 90^\circ$, ಮತ್ತು ಛಾಯಾಕಿಂತ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 114 ಚೌಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$)



ಆಕೃತಿ 7.46

5. 15 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳದ PQ ಈ ಜ್ಯಾ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ 60°ದ ಕೋನ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಆ ಜ್ಯಾದಿಂದ ತಯಾರಾದ ವಿಶಾಲ ವರ್ತುಳಖಂಡ ಮತ್ತು ಲಘುವರ್ತುಳಖಂಡ ಇವುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ 7

1. **ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಪರ್ಯಾಯಗಳಿಂದ ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ**

(1) ವರ್ತುಳದ ಪರೀಘ ಹಾಗೂ ವರ್ತುಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 2:7 ಇದ್ದರೆ ವರ್ತುಳದ ಪರೀಘ ಎಷ್ಟು?

(A) 14π (B) $\frac{7}{\pi}$ (C) 7π (D) $\frac{14}{\pi}$

(2) 44 ಸೆಮೀ ಉದ್ದಳತೆ ಇರುವ ವರ್ತುಳ ಕಂಸದ ಅಳತೆ 160° ಇದ್ದರೆ ಆ ವರ್ತುಳದ ಪರೀಘ ಎಷ್ಟು?

(A) 66 ಸೆಮೀ (B) 44 ಸೆಮೀ (C) 160 ಸೆಮೀ (D) 99 ಸೆಮೀ

(3) ಕಂಸದ ಅಳತೆ 90° ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 7 ಸೆಮೀ ಇರುವ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಪರಿಮಿತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(A) 44 ಸೆಮೀ (B) 25 ಸೆಮೀ (C) 36 ಸೆಮೀ (D) 56 ಸೆಮೀ

(4) ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 7 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ 24 ಸೆಮೀ ಇರುವ ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರಪೃಷ್ಠಫಲ ಎಷ್ಟು?

(A) 440 ಸೆಮೀ^{2} (B) 550 ಸೆಮೀ^{2} (C) 330 ಸೆಮೀ^{2} (D) 110 ಸೆಮೀ^{2}

(5) 5 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ವಕ್ರಫಲ 440 ಸೆಮೀ^{2} ಇದ್ದರೆ ಆ ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು?

(A) $\frac{44}{\pi}$ ಸೆ.ಮೀ. (B) 22π ಸೆ.ಮೀ. (C) 14π ಸೆ.ಮೀ. (D) $\frac{22}{\pi}$ ಸೆ.ಮೀ.

(6) ಒಂದು ಶಂಕು ಕರಗಿಸಿ ಅದರ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತಚಿತಿ ತಯಾರು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ಎತ್ತರ 5 ಸೆಮೀ ಇದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು?

(A) 15 ಸೆಮೀ (B) 10 ಸೆಮೀ (C) 18 ಸೆಮೀ (D) 5 ಸೆಮೀ

(7) 0.01 ಸೆಮೀ ಭುಜ ಇರುವ ಘನದ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟು ಘ.ಸ.ಮೀ?

(A) 1 (B) 0.001 (C) 0.0001 (D) 0.000001

(8) ಒಂದು ಘನಮೀಟರ ಘನಫಲ ಇರುವ ಘನದ ಭಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಎಷ್ಟು

(A) 1 ಸೆಮೀ (B) 10 ಸೆಮೀ (C) 100 ಸೆಮೀ (D) 1000 ಸೆಮೀ

2. ಒಂದು ಶಂಕು ಛೇದದ ಆಕಾರದ ಬಟ್ಟೆ ತೊಳೆಯುವ ಟಬ್ಬಿನ ಎತ್ತರ 21 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಟಬ್ಬಿನ ಎರಡು ವರ್ತುಳಾಕಾರದ ಭುಜಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯ 20 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ 15 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಟಬ್ಬಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ ನೀರು ಹಿಡಿಸುವದು? ($\pi = \frac{22}{7}$)

3★. ಪ್ಲಾಸ್ಟಿಕ್‌ನ 1 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಸಣ್ಣ ಗೋಲಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ವೃತ್ತಚಿತಿ ಆಕಾರದ ಕೊಳವೆ ತಯಾರಿಸಿದೆ. ಕೊಳವೆಯ ದಪ್ಪಳತೆ 2 ಸೆಮೀ, ಎತ್ತರ 90 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯ 30 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ಡಬ್ಬಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಎಷ್ಟು ಗೋಲಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಲಾಗಿದೆ?

4. ಉದ್ದ 16 ಸೆಮೀ ಅಗಲ 11 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ 10 ಸೆಮೀ ಇರುವ ಧಾತುವಿನ ಇಷ್ಟಿಕಾಚಿತಿಯಿಂದ ಯಾವುದರ ದಪ್ಪಳತೆ 2 ಮಿಮೀ ಹಾಗೂ ವ್ಯಾಸ 2 ಸೆಮೀ ಇರುತ್ತದೆ ಆ ರೀತಿಯ ಕೆಲವು ನಾಣ್ಯಗಳು ತಯಾರಿಸಿದ್ದರೆ, ಎಷ್ಟು ನಾಣ್ಯಗಳು ತಯಾರಾಗುವವು?

5. ಒಂದು ರೋಲರದ ವ್ಯಾಸ 120 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು ಉದ್ದ 84 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಒಂದು ಮೈದಾನ ಒಂದು ಸಲ ಸಪಾಟು ಮಾಡಲು ರೋಲರದ 200 ಸುತ್ತುಗಳ ಪೂರ್ಣವಾಗುವವು. ಹಾಗಾದರೆ 10 ರೂಪಾಯ ಪ್ರತಿ ಚೌರಸ ಮೀಟರ ಈ ದರದಿಂದ ಆ ಮೈದಾನ ಸಪಾಟು ಮಾಡಲು ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟು?

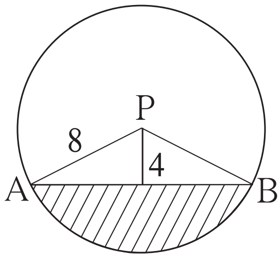
6. ವ್ಯಾಸ 12 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ ದಪ್ಪ 0.01 ಮೀಟರ ಇರುವ ಒಂದು ಧಾತುವಿನ ಪೊಳ್ಳು ಗೋಲ ಇದೆ. ಆ ಗೋಲದ ಹೊರಗಿನ ಭಾಗದ ಪೃಷ್ಠಸಲ ತೆಗೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಧಾತುವಿನ ದಾರ್ಢ್ಯ 8.88 ಗ್ರಾ ಪ್ರತಿ ಘನ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ ಇದ್ದರೆ ಆ ಗೋಲದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ಲಂಬ ವೃತ್ತಚಿತಿಯ ಆಕಾರದ ಬಕೇಟಿನ ತಳದ ವ್ಯಾಸ 28 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ 20 ಸೆಮೀ. ಇದೆ. ಈ ಬಕೇಟ ಮರುಳಿನಿಂದ ಸಂಪೂರ್ಣ ತುಂಬಿದೆ. ಆ ಬಕೇಟಿನಲ್ಲಿಯ ಮರಳನ್ನು ಭೂಮಿಯ ಮೇಲೆ ಮರುಳಿನ ಶಂಕು ತಯಾರಾಗುವ ಹಾಗೆ ಹಾಕಿರಿ. ಮರಳಿನ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ 14 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.

8. ಒಂದು ಧಾತುವಿನ ಗೋಲದ ತ್ರಿಜ್ಯ 9 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಆ ಗೋಲವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ 4 ಮಿಮೀ ವ್ಯಾಸದ ಧಾತುವಿನ ತಂತಿ ತಯಾರಿಸಿದರೆ ಆ ತಂತಿಯ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು ಮೀಟರ ಇರುವದು?

9. 6 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವರ್ತುಳದ ಒಂದು ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 15π ಸೆಮೀ^{2} ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕಂಸದ ಅಳತೆ ಉದ್ಧಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಹಾಗೂ ವರ್ತುಳಕಂಸದ ಉದ್ಧಳತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

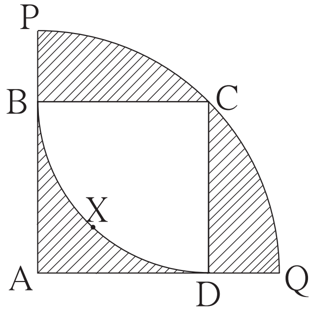
10.



ಆಕೃತಿ 7.47

ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ P ಇದು ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರವಿದ್ದು ರೇಖ AB ಇದು ಜ್ಯಾ ಇದೆ. PA = 8 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾ AB ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 4 ಸೆಮೀ ಅಂತರದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ ರೇಖಾಂಕಿತ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

11. ವರ್ತುಳಾಂಶ A–PCQ ದಲ್ಲಿ □ ABCD ಇದು ಚೌರಸವಿದೆ. C – BXD ಈ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ತ್ರಿಜ್ಯ 20 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ರೇಖಾಂಕಿತ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಮಾಡಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 7.48

ಉತ್ತರ : ಚೌರಸ ABCDಯ ಭುಜ = ವರ್ತುಳಾಂಶ C – BXDದ ತ್ರಿಜ್ಯ = $\boxed{}$ ಸೆಮೀ

ಚೌರಸದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ಭುಜ^2 = $\boxed{}^2$ = $\boxed{}$ ..... (I)

ಚೌರಸದಲ್ಲಿಯ ರೇಖಾಕಿಂತ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

= ಚೌರಸ ABCDಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ – ವರ್ತುಳಾಂಶ C – BXDಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

$$= \boxed{} - \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \boxed{} - \frac{90}{360} \times \frac{3.14}{1} \times \frac{400}{1}$$

$$= \boxed{} - 314$$

$$= \boxed{}$$

ದೊಡ್ಡ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ತ್ರಿಜ್ಯ = ಚೌರಸ ABCD ಯ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದಳತೆ

$$= 20\sqrt{2}$$

ದೊಡ್ಡ ವರ್ತುಳಾಂಶದಲ್ಲಿಯ ರೇಖಾಂಕಿತ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರ

= ವರ್ತುಳಾಂಶ A – PCQದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ – ಚೌರಸ ABCDದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

= A(A – PCQ) – A(□ ABCD)

$$= \left(\frac{\theta}{360} \times \pi \times r^2\right) - \boxed{}^2$$

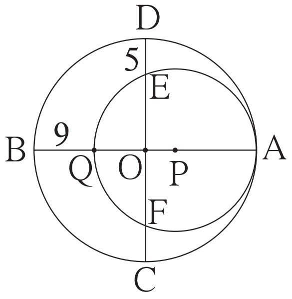
$$= \frac{90}{360} \times 3.14\,(20\sqrt{2}\,)^2 - (20)^2$$

$$= \boxed{} - \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$

∴ ಒಟ್ಟು ರೇಖಾಕಿಂತ ಭಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = 86 + 228 = 314 ಚೌಸೆಮೀ

12.



ಆಕೃತಿ 7.49

O ಮತ್ತು P ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳಗಳು Aದಲ್ಲಿ ಬಳ ಬದಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಮಾಡುತ್ತವೆ. BQ = 9, DE = 5, ಇದ್ದರೆ ವರ್ತುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ದೊಡ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ R ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ

ಸಣ್ಣ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ

OA, OB, OC ಮತ್ತು OD ಇವು ದೊಡ ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿವೆ $\therefore$ OA = OB = OC = OD = R

PQ = PA = r

$OQ = OB - BQ = \boxed{\quad}$

$OE = OD - DE = \boxed{\quad}$ .... ($\because$ OE = OF)

P ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳ ಅಂತರ ವಿಭಾಜನೆಯ ಗುಣಧರ್ಮಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ

$OQ \times OA = OE \times OF$

$\boxed{\quad} \times R = \boxed{\quad} \times \boxed{\quad}$ ($\because$ OE = OF)

$R^2 - 9R = R^2 - 10R + 25$

$R = \boxed{\quad}$

$AQ = 2r = AB - BQ$

$2r = 50 - 9 = 41$

$r = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$

ಉತ್ತರ ಸೂಚಿ
ಪ್ರಕರಣ 1 ಸಮರೂಪತೆ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.1

1. $\frac{3}{4}$; **2.** $\frac{1}{2}$; **3.** 3 ; **4.** 1:1 ; **5.** (i) $\frac{BQ}{BC}$, (ii) $\frac{PQ}{AD}$, (iii) $\frac{BC}{DC}$, (iv) $\frac{DC \times AD}{QC \times PQ}$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.2

1. (a) ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇದೆ (b) ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇಲ್ಲ (c) ದ್ವಿಭಾಜಕ ಇದೆ ;

2. $\frac{PN}{NR} = \frac{PM}{MQ} = \frac{3}{2}$ ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಷೆ NM || ಭುಜ RQ ;

3. QP = 3.5 ; **5.** BQ = 17.5 ; **6.** QP = 22.4 ; **7.** x = 6, AE = 18 ; **8.** LT = 4.8 ;

9. $x = 10$; 10. ಪಕ್ಷ, XQ ; PD, ಪಕ್ಷ, $\frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}} = \frac{\boxed{XQ}}{\boxed{QE}}$, ಪ್ರಮಾಣದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯ $\frac{\boxed{XP}}{\boxed{PD}} = \frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}}$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.3

1. Δ ABC ~ Δ EDC ; **2.** Δ PQR ~ Δ LMN, ಭು-ಭು-ಭು ಸಮರೂಪತೆಯ ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಅನುಸಾರ

3. 12 ಮೀಟರ ; **4.** AC = 10.5 ; **6.** OD = 4.5 ;

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.4

1. ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ = 9 : 25 ;

2. $\boxed{PQ^2}$, $\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}$, **3.** $\boxed{A(\Delta\ PQR)}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{4}{5}$,

4. MN = 15 ,

5. 20 ಸೆ.ಮೀ ,

6. $4\sqrt{2}$

7. $\boxed{PF}$, $\boxed{x}$, $\boxed{2x}$, $\boxed{\angle FPQ}$, $\boxed{\angle FQP}$, $\frac{DF^2}{PF^2}$, $\boxed{20}$, $\boxed{45}$, $\boxed{45}-\boxed{20}$, $\boxed{25 \text{ ಚೌ.ಏಕಕ}}$

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ 1

1. (1) (ii), (2) (ii), (3) (i), (4) (iv) (5) (i)

2. $\frac{7}{13}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{13}{20}$; **3.** 9 ಸೆ.ಮೀ. ; **4.** $\frac{3}{4}$; **5.**11 ಸೆ.ಮೀ. ; **6.** $\frac{25}{81}$; **7.** 4 ;

8. PQ = 80, QR = $\frac{280}{3}$, RS = $\frac{320}{3}$; 9. $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MQ}} = \frac{\boxed{PX}}{\boxed{XQ}}$, $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MR}} = \frac{\boxed{PY}}{\boxed{YR}}$,

10. $\frac{\boxed{AX}}{\boxed{XY}} = \frac{3}{2}$; 12. $\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{3}+\boxed{2}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$, $\frac{\boxed{5}}{3}$, $\boxed{15}$

ಪ್ರಕರಣ 2 ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.1

1. ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ತ್ರಿಕೂಟಗಳು ; (i), (iii), (iv), (vi) ;   2. NQ = 6 ; 3. QR = 20.5 ;
4. RP = 12, PS = $6\sqrt{3}$; 5. $\boxed{\text{ಪಕ್ಷ}}$, $\boxed{45^\circ}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{2}$;
6. ಭುಜ = $5\sqrt{2}$ ಸೆ.ಮೀ, ಪರಿಮಿತಿ = $20\sqrt{2}$ ಸೆ.ಮೀ. 7. (i) 18, (ii) $4\sqrt{13} = 6\sqrt{13}$; 8. 37 ಸೆ.ಮೀ;
10. 8.2 ಮೀ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.2

1. 12 ;   2. $2\sqrt{10}$; 4. 18 ಸೆ.ಮೀ ;

ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಗ್ರಹ 2

1. (1) (B), (2) (B), (3) (A), (4) (C), (5) (D), (6) (C), (7) (B), (8) (A);
2. (i) $a\sqrt{3}$, (iii) 61, (iv) 15, (v) $x\sqrt{2}$, (vi) $\angle$ PRQ.
3. RS = 6 ಸೆ.ಮೀ, ST = $6\sqrt{3}$ ಸೆ.ಮೀ; 4. 20 ಸೆ.ಮೀ; 5. ಭುಜ = 2 ಸೆ.ಮೀ, ಪರಿಮಿತಿ = 6 ಸೆ.ಮೀ
6. 7;7. AP = $2\sqrt{7}$; 10. 7.5 ಸೆ.ಮೀ / ತಾಸು ; 12. 8 ಸೆ.ಮೀ ; 14. 8 ಸೆ.ಮೀ ; 15. 192 ಚೌರಸ ಮೂಲಮಾನ;
17. 58 ; 18.26

ಪ್ರಕರಣ 3 ವರ್ತುಳ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.1

1. (1) 90°, ಸ್ಪರ್ಶಿಕೆ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಪ್ರಮೆಯ   (2) 6 ಸೆ.ಮೀ   (3) $6\sqrt{2}$ (4) 45°
2. (1) $5\sqrt{3}$ (2) 30° (3) 60° 3. –   4. 9 ಸೆ.ಮೀ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.2

1. 1.3 ಸೆ.ಮೀ   2.   9.7 ಸೆ.ಮೀ   3. –   4. (1) – (2)– (3) 110° 5. $4\sqrt{6}$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.3

1. m(ಕಂಸ DE) = 90°, m(ಕಂಸ DEF) = 160° 2. –   3. –

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.4

1. (1) 60° (2) 30° (3) 60° (4) 300° 2. (1) 70° (2) 220° (3) 110° (4) 55°
3. m$\angle$R = 92°, m$\angle$N = 88° 4. –   5. –   6. –   7. 44° 8. 121°

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.5

1. PS = 18, RS = 10,   2. (1) 7.5   (2) 12 ಅಥವಾ 6
3. (1) 18 (2) 10 (3) 5   4. 4   5. –

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3

1. (1) D (2) B (3) C (4) A (5) B (6) B (7) A (8) B (9) A (10) C.
2. (1) 9 ಸೆ.ಮೀ   (2) ವರ್ತುಳದ ಅಂತರ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ   (3) 2 ಬಿಂದು 12 ಸೆ.ಮೀ
3. (1) 6   (2) $\angle K = 30^\circ$; $\angle M = 60^\circ$ **5.** 10   **6.** (1) 9 ಸೆ.ಮೀ   (2) 6.5 ಸೆ.ಮೀ

(3) 90° ; MS : SR = 2 : 1 **9.** $4\sqrt{3}$ ಸೆ.ಮೀ.

13. (1) 180° (2) $\angle AQP \cong \angle ASQ \cong \angle ATQ$

(3) $\angle QTS \cong \angle SQR \cong \angle SAQ$ (4) $65^\circ, 130^\circ$ (5) 100° **14.**(1) 70°

(2) 130° (3) 210° **15.** (1) 56° (2) 6 (3) 16 ಅಥವಾ 9 **16.** (1) 15.5°

(2) 3.36 (3) 6 **18.** (1) 68° (2) OR = 16.2, QR = 13 (3) 13 **21.** 13

ಪ್ರಕರಣ 4 ಭೌಮಿತಿಕ ರಚನೆ

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ 4

1. (1) C (2) A (3) A

ಪ್ರಕರಣ 4 ನಿರ್ದೇಶಕ ಭೂಮಿತಿ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.1

1. (1) $2\sqrt{2}$ (2) $4\sqrt{2}$ (3) $\frac{11}{2}$ (4) 13 (5) 20 (6) $\frac{29}{2}$

2. (1) ಏಕರೇಷೀಯ ಇವೆ. (2) ಏಕರೇಷೀಯ ಇಲ್ಲ. (3) ಏಕರೇಷೀಯ ಇಲ್ಲ. (4) ಏಕರೇಷೀಯ ಇವೆ.

3. $(-1, 0)$ **7.** 7 ಅಥವಾ -5

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.2

1. (1, 3) **2.** (1) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ (2) $\left(\frac{4}{7}, -\frac{11}{7}\right)$ (3) $\left(0, \frac{13}{3}\right)$ **3.** 2:7 **4.** $(-6, 3)$

5. 2:5, $k = 6$ **6.** (11, 18) **7.** (1) (1, 3) (2) $(6, -2)$ (3) $\left(\frac{19}{3}, \frac{22}{3}\right)$

8. $(-1, -7)$ **9.** $h = 7, k = 18$ **10.** (0, 2) ; $(-2, -3)$

11. $(-9, -8), (-4, -6), (1, -4)$ **12.** (16, 12), (12, 14), (8, 16), (4, 18)

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.3

1. (1) 1 (2) $\sqrt{3}$ (3) ಏರಿಕೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ

2. (1) 2 (2) $-\frac{3}{8}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{5}{4}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6)ಏರಿಕೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ

3. (1) ಏಕರೇಷೀಯ ಇವೆ. (2) ಏಕರೇಷೀಯ ಇವೆ. (3) ಏಕರೇಷೀಯ ಇಲ್ಲ. (4) ಏಕರೇಷೀಯ ಇವೆ.
(5) ಏಕರೇಷೀಯ ಇವೆ. (6) ಏಕರೇಷೀಯ ಇವೆ.

4. $-5; \frac{1}{5}; -\frac{2}{3}$ 6. $k = 5$ 7. $k = 0$ 8. $k = 5$

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ 5

1. (1) D (2) D (3) C (4) C

2. (1) ಏಕರೇಷೀಯ ಇವೆ. (2) ಏಕರೇಷೀಯ ಇವೆ. (3) ಏಕರೇಷೀಯ ಇಲ್ಲ **3.** (6, 13) **4.** 3:1

5. $(-7, 0)$ **6.** (1) $a\sqrt{2}$ (2) 13 (3) $5a$ **7.** $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

8. (1) ಹೌದು ವಿಷಮ ಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ (2) ಇಲ್ಲ (3) ಹೌದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ **9.** $k = 5$

13. $5, 2\sqrt{13}, \sqrt{37}$ **14.** $(1, 3)$ **16.** $\left(\frac{25}{6}, \frac{13}{6}\right)$, ತ್ರಿಜ್ಯ $= \frac{13\sqrt{2}}{6}$ **17.** $(7, 3)$

18. ಸಮಾಂತರ ಭುಜ ಚೌಕೋನ **19.** A(20, 10), P(16, 12), R(8, 16), B(0, 20). **20.** $(3, -2)$

21. (7, 6) ಮತ್ತು (3, 6) **22.** 10 ಮತ್ತು 0

ಪ್ರಕರಣ 6 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.1

1. $\cos\theta = \frac{24}{25}$; $\tan\theta = \frac{7}{24}$ **2.** $\sec\theta = \frac{5}{4}$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$

3. $\operatorname{cosec}\theta = \frac{41}{9}$; $\sin\theta = \frac{9}{41}$ **4.** $\sec\theta = \frac{13}{5}$; $\cos\theta = \frac{5}{13}$; $\sin\theta = \frac{12}{13}$

5. $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta} = \frac{1}{2}$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.2

1. ಚರ್ಚಿನ ಎತ್ತರ 80 ಮೀಟರ

2. ಹಡಗಿನ ದೀಪ ಗೃಹದಿಂದ ಅಂತರ 51.60 ಮೀಟರ

3. ಎರಡನೆಯ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ $(10 + 12\sqrt{3})$ ಮೀಟರ

4. ಚುಕ್ಕೆಯ ಕ್ಷಿತಿಜ ಸಮಾಂತರ ಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಕೋನ 30°

5. ಮರದ ಎತ್ತರ $(40 + 20\sqrt{3})$ ಮೀಟರ

6. ಪತಂಗದ ದಾರಿನ ಉದ್ದ 69.20 ಮೀಟರ

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ 6

1. (1) A (2) B (3) C (4) A

2. $\cos\theta = \frac{60}{61}$ **3.** $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sec\theta = \sqrt{5}$; $\cot\theta = \frac{1}{2}$

4. $\sin\theta = \frac{5}{13}$; $\cos\theta = \frac{12}{13}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$; $\tan\theta = \frac{5}{12}$; $\cot\theta = \frac{12}{5}$

6. ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ $16\sqrt{3}$ ಮೀಟರ

7. ಹಡಗಿನ ದೀಪ ಗೃಹದಿಂದ ಅಂತರ $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ ಮೀಟರ

8. ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರ $(12 + 15\sqrt{3})$ ಮೀಟರ

9. ಏಣೆಯ ಎರಡನೆಯ ತುದಿ ಭೂಮಿಯಿಂದ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ 20.80 ಮೀಟರ ಎತ್ತರ ಇರಬಹುದು.

10. ವಿಮಾನವು ಭೂಮಿಯಿಂದ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚೆಂದರ 1026 ಮೀಟರ ಎತ್ತರದ ಮೇಲೆ ಇತ್ತು

ಪ್ರಕರಣ 7 ಮಹತ್ವ ಮಾಪನೆ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.1

1. 11.79 ಘನಸೆಮೀ **2.** 113.04 ಘನಸೆಮೀ **3.**1413 ಚೌಸೆಮೀ (π=3.14 ತೆಗೆದುಕೊಡ) **4.**616 ಚೌಸೆಮೀ
5. 21 ಸೆಮೀ **6.** 12 ಜಗ್ಗ **7.** 9 ಸೆಮೀ **8.** 273π ಚೌಸೆಮೀ **9.** 20 ಗೋಳಿಗಳು
10. 94.20 ಘನಸೆಮೀ, 103.62 ಚೌಸೆಮೀ **11.** 5538.96 ಚೌಸೆಮೀ, 38772.72 ಸೆಮೀ
12. 1468.67π ಘನಸೆಮೀ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.2

1. 10.780 ಲೀಟರ **2.** (1) 628 ಚೌಸೆಮೀ (2) 1356.48 ಚೌಸೆಮೀ (3) 1984.48 ಘನಸೆಮೀ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.3

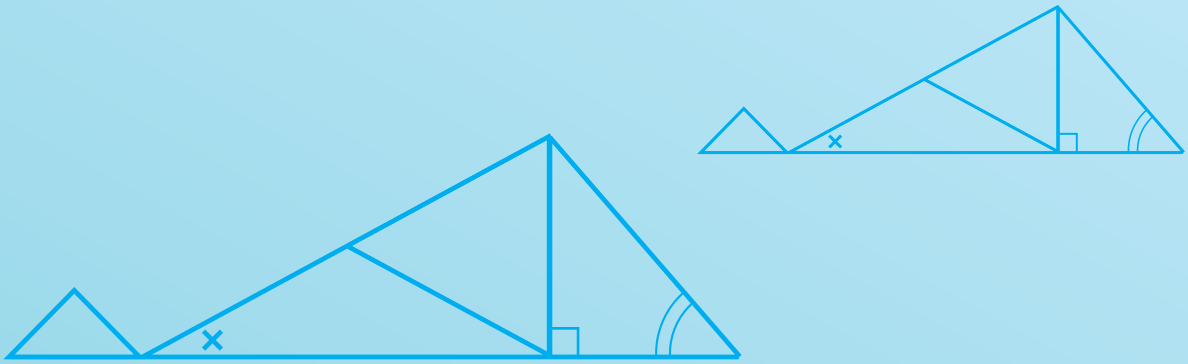
1. 47.1 ಚೌಸೆಮೀ **2.** 25.12 ಸೆಮೀ **3.** 3.85 ಚೌಸೆಮೀ **4.** 214 ಚೌಸೆಮೀ **5.** 4 ಸೆಮೀ
6. (1) 154 ಚೌಸೆಮೀ (2) 25.7 ಚೌಸೆಮೀ (3) 128.3 ಚೌಸೆಮೀ **7.** 10.2 ಚೌಸೆಮೀ
8. 7.3 ಸೆಮೀ ; 22 ಸೆಮೀ **9.** (1) 90° (2) 22 ಸೆಮೀ **10.**(1) 12.83 ಚೌಸೆಮೀ (2) 89.83 ಚೌಸೆಮೀ
(3) 115.5 ಚೌಸೆಮೀ **11.** 3.5 ಸೆಮೀ **12.** x = 154 ಚೌಸೆಮೀ ; y = 38.5 ಚೌಸೆಮೀ ; z = 101.5 ಚೌಸೆಮೀ
13. (1) 84.87 ಚೌಸೆಮೀ (2) 25.67 ಚೌಸೆಮೀ (3) 77.01 ಚೌಸೆಮೀ (4) 7.86 ಚೌಸೆಮೀ

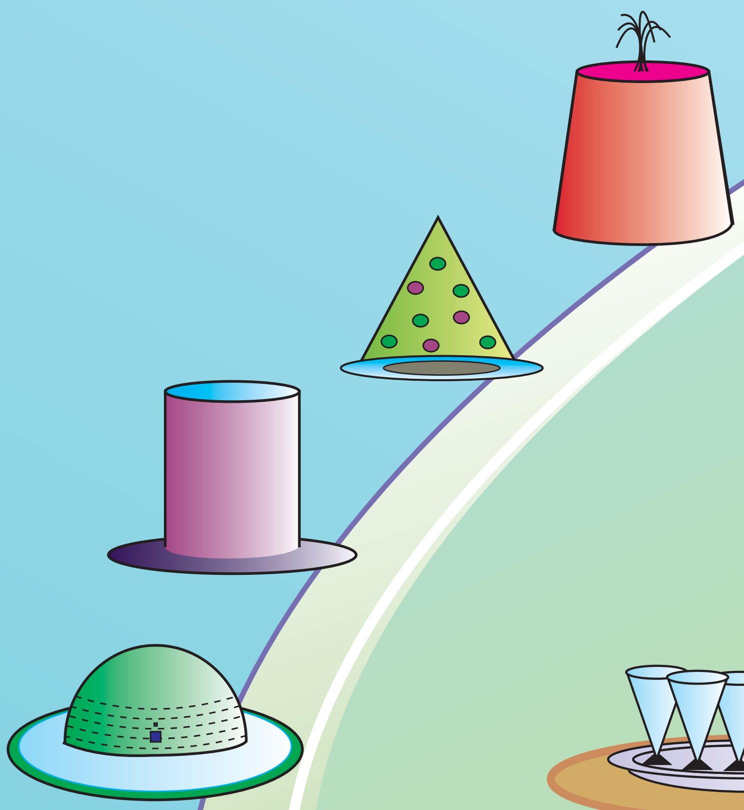
ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 7.4

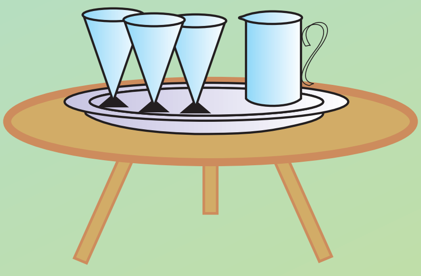
1. 3.92 ಚೌಸೆಮೀ **2.** 9.08 ಚೌಸೆಮೀ **3.** 0.65625 ಚೌ ಮೂಲಮಾನ **4.** 20 ಸೆಮೀ
5. 20.43 ಚೌಸೆಮೀ ; 686.07 ಚೌಸೆಮೀ

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನ ಸಂಗ್ರಹ 7

1. (1) A, (2) D, (3) B, (4) B, (5) A, (6) A, (7) D, (8) C.
2. 20.35 ಲೀಟರ್ **3.** 7830 ಗೋಲಿಗಳು **4.** 2800 ನಾಣ್ಯಗಳು ($\pi = \frac{22}{7}$ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು) **5.** 6336 ರೂಪಾಯಿಗಳು
6. 452.16 ಚೌಸೆಮೀ ; 3385.94 ಗ್ರಾ **7.** 2640 ಚೌಸೆಮೀ **8.** 243ಮೀ
9. 150°; 5π ಚೌಸೆಮೀ **10.** 39.28 ಚೌಸೆಮೀ







ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು
ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳ,
ಪುಣೆ – 411004.
कन्नड गणित इ.१०वी भाग-२ ₹ 77.00