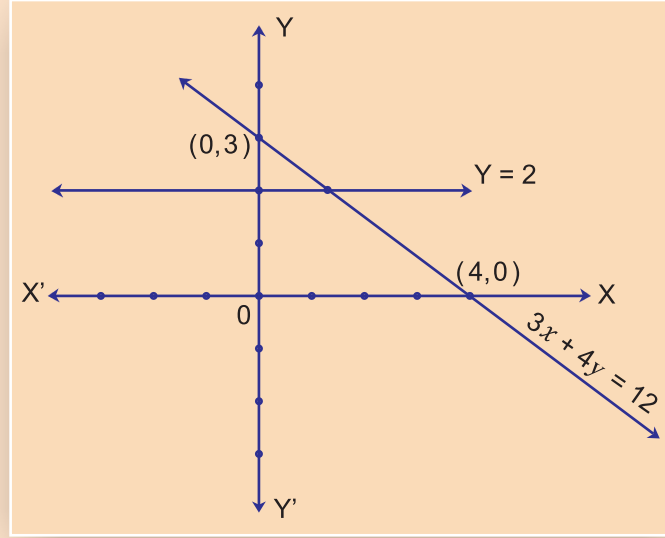




ಗಣಿತ (ಭಾಗ-1)

ಹತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತ್



$$1 + 2 + 3 + \dots + \dots + 78 + 79 + 80$$
$$= (1 + 80) + (2 + 79) + \dots + (39 + 42) + (40 + 41)$$

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಭಾಗ 4 ಕೆ

ನಾಗರಿಕರ ಮೂಲಭೂತ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು

ಅನುಚ್ಛೇದ 51 ಕೆ

ಮೂಲಭೂತ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು- ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಭಾರತೀಯ ನಾಗರಿಕನ ಈ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು ಇರುತ್ತವೆಯೆಂದರೆ ಅವನು-

- (ಕ) ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ನಾಗರಿಕನು ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಪಾಲಿಸಬೇಕು. ಸಂವಿಧಾನದಲ್ಲಿಯ ಆದರ್ಶಗಳು ರಾಷ್ಟ್ರಧ್ವಜ ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆಗಳನ್ನು ಗೌರವಿಸಬೇಕು.
- (ಁ) ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ನಡೆದ ಹೋರಾಟಕ್ಕೆ ಸ್ಫೂರ್ತಿ ನೀಡಿದ ಆದರ್ಶಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸಬೇಕು.
- (ಗ) ದೇಶದ ಸಾರ್ವಭೌಮತ್ವ, ಐಕ್ಯತೆ ಮತ್ತು ಸಮಗ್ರತೆಯನ್ನು ಸುರಕ್ಷಿತವಾಗಿಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಪ್ರಯತ್ನಶೀಲರಾಗಿರಬೇಕು.
- (ಘ) ನಮ್ಮ ದೇಶದ ರಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಬೇಕು. ದೇಶದ ಸೇವೆ ಮಾಡಬೇಕು.
- (ಙ) ಎಲ್ಲ ಪ್ರಕಾರದ ಭೇದಭಾವಗಳನ್ನು ಮರೆತು ಒಗ್ಗಟ್ಟನ್ನು ಬೆಳೆಸಬೇಕು ಹಾಗೂ ಸಹೋದರ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಉತ್ತೇಜಿಸಬೇಕು. ಸ್ತ್ರೀಯರ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಚ್ಯುತಿ ತರುವಂತಹ ರೂಢಿಗಳನ್ನು ತ್ಯಜಿಸಬೇಕು.
- (ಚ) ನಮ್ಮ ಸಮಿಶ್ರ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಪರಂಪರೆಯನ್ನು ಕಾಪಾಡಬೇಕು.
- (ಛ) ನೈಸರ್ಗಿಕ ಪರಿಸರವನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಸಜೀವ ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಮೇಲೆ ದಯೆ ತೋರಿಸಿರಿ.
- (ಜ) ವೈಜ್ಞಾನಿಕಮನೋಭಾವನೆ, ಮಾನವೀಯತೆ ಮತ್ತು ಜಿಜ್ಞಾಸು ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.
- (ಝ) ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಆಸ್ತಿ-ಪಾಸ್ತಿಗಳನ್ನು ರಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಹಿಂಸಾಚಾರವನ್ನು ತ್ಯಜಿಸಬೇಕು.
- (ಞ) ರಾಷ್ಟ್ರದ ಉತ್ತರೋತ್ತರ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ವೈಯಕ್ತಿಕ ಹಾಗೂ ಸಾಮೂಹಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಬೇಕು.
- (ಟ) 6 ರಿಂದ 14 ವರ್ಷ ವಯೋಮಾನದಲ್ಲಿಯ ತಮ್ಮ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಪೋಷಕರು ಶಿಕ್ಷಣದ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಡಬೇಕು.

ಸರಕಾರ ನಿರ್ಣಯ ಕ್ರಮಾಂಕ: ಅಭ್ಯಾಸ-2116/(ಪ್ರ.ಕ್ರ. 43/16) ಎಸ್.ಡಿ.-4 ದಿನಾಂಕ 25.4.2016 ಅನ್ವಯ
ಸ್ಥಾಪಿಸಲಾದ ಸಮನ್ವಯ ಸಮಿತಿಯ ದಿನಾಂಕ 29.12.2017 ರಂದು ನಡೆದ ಸಭೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸನ 2018-19 ಈ
ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷದಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಮಾನ್ಯತೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತ (ಭಾಗ I)

ಹತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ರೆ



ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳಿ, ಪುಣೆ-೪೧೧೦೦೪.



ತಮ್ಮ ಸ್ಮಾರ್ಟ್‌ಫೋನ್‌ನ ಮೇಲೆ DIKSHA App ಮೂಲಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಮೊದಲನೆಯ ಪುಟದ ಮೇಲಿರುವ Q.R. Codeದ ಮೂಲಕ ಡಿಜಿಟಲ್ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾಠದಲ್ಲಿರುವ Q.R. Codeದ ಮೂಲಕ ಆ ಪಾಠಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅಧ್ಯಯನ-ಅಧ್ಯಾಪನದ ಸಲುವಾಗಿ ಉಪಯುಕ್ತ ದೃಕ್-ಶ್ರಾವ್ಯ ಸಾಹಿತ್ಯ ಉಪಲಬ್ಧವಾಗುವುದು.

ಪ್ರಥಮಾವೃತ್ತಿ 2018 ©
ಪುನರ್ಮುದ್ರಣ: 2022



ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳಿ, ಪುಣೆ 411004.
ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳದ ಕಡೆಗೆ ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಎಲ್ಲ ಹಕ್ಕುಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಭಾಗವನ್ನು ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳದ ಸಂಚಾಲಕರ ಲಿಖಿತ ಅನುಮತಿ ಇಲ್ಲದೆ ಉದ್ಧೃತಗೊಳಿಸಬಾರದು.

ಗಣಿತ ವಿಷಯ ತಜ್ಞಸಮಿತಿ

- ಡಾ. ಮಂಗಲಾ ನಾರಳೇಕರ, ಅಧ್ಯಕ್ಷ
- ಡಾ. ಜಯಶ್ರೀ ಅತ್ರೇ, ಅಧ್ಯಕ್ಷ
- ಶ್ರೀ. ವಿನಾಯಕ ಗೋಡಬೋಲೆ, ಸದಸ್ಯ
- ಶ್ರೀಮತಿ ಪ್ರಾಜಕ್ತಿ ಗೋಖಲೆ, ಸದಸ್ಯ
- ಶ್ರೀ ರಮಾಕಾಂತ ಸರೋದೆ, ಸದಸ್ಯ
- ಶ್ರೀ ಸಂದೀಪ ಪಂಚಭಾಯಿ, ಸದಸ್ಯ
- ಶ್ರೀಮತಿ ಪೂಜಾ ಜಾಧವ, ಸದಸ್ಯ
- ಶ್ರೀಮತಿ ಉಜ್ವಲಾ ಗೋಡಬೋಲೆ, ಸದಸ್ಯ-ಸಚಿವೆ

ಕನ್ನಡ ಸಂಯೋಜನೆ: ಡಾ. ಸದಾನಂದ ಎಂ. ಬಿಳೂರ
ವಿಶೇಷಾಧಿಕಾರಿ ಕನ್ನಡ
ಶ್ರೀ ಆರ್.ಎಮ್. ಗಣಾಚಾರಿ
ವಿಷಯ ಸಹಾಯಕ ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಮಂಡಳ ಪುಣೆ
ಭಾಷಾಂತರಕಾರರು: ಶ್ರೀ ವಾಯ್ ಪಿ ತಿಕ್ಕೋಟಿ
ಶ್ರೀ. ಡಿ.ಎಮ್. ಬಗಲೆ, ಶ್ರೀ ಎಸ್.ಸಿ. ದಸಮಾನೆ
ಸಮೀಕ್ಷೆ: ಶ್ರೀ ಎಸ್.ಬಿ. ಪ್ಯಾಟಿ

ಅಕ್ಷರಚೋಡಣೆ: ಕ್ವಿಟ್‌ಕ್ಸ್, ಮುಂಬಯಿ
ಮುಖಪುಟ ಮತ್ತು:
ಸಂಗಣಕ ಆರೇಖನ:
ಸಂದೀಪ ಕೋಳಿ, ಚಿತ್ರಕಾರ, ಮುಂಬಯಿ

ಗಣಿತ ವಿಷಯ- ರಾಜ್ಯ ಅಭ್ಯಾಸಗಟ ಸದಸ್ಯರು

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಶ್ರೀ ಪುರಂದರೆ | ಶ್ರೀಮತಿ ತರುಬೇನ ಪೋಪಟ |
| ಶ್ರೀ ರಾಜೇಂದ್ರ ಚೌಧರಿ | ಶ್ರೀ ಪ್ರಮೋದ ಟೊಂಬರೆ |
| ಶ್ರೀ ರಾಮಾ ವ್ಹನ್ಯಾಳಕರ | ಡಾ. ಭಾರತಿ ಸಹಸ್ರಬುದ್ಧೆ |
| ಶ್ರೀ ಅಣ್ಣಪ್ಪಾ ಪೆರೀಟ | ಶ್ರೀ ವಸಂತ ಶೇವಾಳೆ |
| ಶ್ರೀ ಅನ್ನಾರ ಶೇಖ | ಶ್ರೀ ಪ್ರತಾಪ ಕಾಶಿದ |
| ಶ್ರೀ ಶ್ರೀಪಾದ ದೇಶಪಾಂಡೆ | ಶ್ರೀ ಮಿಲಿಂದ ಭಾಕರೆ |
| ಶ್ರೀ ಸುರೇಶ ಧಾತೆ | ಶ್ರೀ ಜ್ಞಾನೇಶ್ವರ ಮಾಶಾಳಕರ |
| ಶ್ರೀ ಉಮೇಶ ರೇಳೆ | ಶ್ರೀ ಗಣೇಶ ಕೋಲತೆ |
| ಶ್ರೀ ಬನ್ನಿಹಾವಳೆ | ಶ್ರೀ ಸಂದೇಶ ಸೋನಾವಣೆ |
| ಶ್ರೀಮತಿ ರೋಹಿಣಿ ಶಿರ್ಕೆ | ಶ್ರೀ ಸುಧೀರ ಪಾಟೀಲ |
| ಶ್ರೀ ಪ್ರಕಾಶ ಝೇಂಡೆ | ಶ್ರೀ ಪ್ರಕಾಶ ಕಾಪಸೆ |
| ಶ್ರೀ ಲಕ್ಷ್ಮಣ ದಾವಣಕರ | ಶ್ರೀ ರವೀಂದ್ರ ಖಿಂದಾರೆ |
| ಶ್ರೀ ಶ್ರೀಕಾಂತ ರತ್ನ ಪಾರಖೀ | ಶ್ರೀಮತಿ ಸ್ವಾತಿ ಧರ್ಮಾಧಿಕಾರಿ |
| ಶ್ರೀ ಸುನೀಲ ಶ್ರೀವಾಸ್ತವ | ಶ್ರೀ ಅರವಿಂದ ಕುಮಾರ ತಿವಾರಿ |
| ಶ್ರೀ ಅನ್ನಾರಿ ಅಬ್ದುಲ ಹಮೀದ | ಶ್ರೀ ಮಲ್ಲೇಶಾಮ ಬೇಡಿ |
| ಶ್ರೀಮತಿ ಸುವರ್ಣಾ ದೇಶಪಾಂಡೆ | ಶ್ರೀಮತಿ ಆರ್ಯಾಭಿಡೆ |

ನಿರ್ಮಿತಿ:
ಶ್ರೀ ಸಚ್ಚಿತ್ತಾನಂದ ಆಫಳೆ
ಮುಖ್ಯ ನಿರ್ಮಿತಿ ಅಧಿಕಾರಿ
ಶ್ರೀ ಸಂಜಯ ಕಾಂಬಳೆ
ನಿರ್ಮಿತಿ ಅಧಿಕಾರಿ
ಶ್ರೀ ಪ್ರಶಾಂತ ಹರಣೆ
ಸಹಾಯಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಅಧಿಕಾರಿ

ಕಾಗದ:
70 ಜಿ.ಎಸ್.ಎಮ್. ಕ್ರಿಮಿವೋವ್ವೆ

ಮುದ್ರಣಾದೇಶ:
ಮುದ್ರಕ

ಪ್ರಕಾಶಕ
ಶ್ರೀ. ವಿವೇಕ ಉತ್ತಮ ಗೋಸಾವಿ, ನಿಯಂತ್ರಕ
ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮಂಡಳಿ,
ಪ್ರಭಾದೇವಿ, ಮುಂಬಯಿ-25.

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಪೀಠಿಕೆ

ಭಾರತದ ಪ್ರಜೆಗಳಾದ ನಾವು, ಭಾರತವನ್ನು ಒಂದು ಸಾರ್ವಭೌಮ ಸಮಾಜವಾದಿ ಧರ್ಮನಿರಪೇಕ್ಷ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ಗಣರಾಜ್ಯವನ್ನಾಗಿ ನಿರ್ಮಿಸಲು ಹಾಗೂ ಅದರ ಸಮಸ್ತ ನಾಗರಿಕರಿಗೆ :

ಸಾಮಾಜಿಕ, ಆರ್ಥಿಕ ಮತ್ತು ರಾಜಕೀಯ ನ್ಯಾಯ;

ವಿಚಾರ, ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ, ವಿಶ್ವಾಸ, ಶ್ರದ್ಧೆ

ಮತ್ತು ಉಪಾಸನಾ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ;

ಸ್ಥಾನಮಾನ ಹಾಗೂ ಅವಕಾಶ ಸಮಾನತೆಯು;

ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ದೊರೆಯುವಂತೆ ಮಾಡಲು

ಮತ್ತು ವ್ಯಕ್ತಿಗೌರವವನ್ನು

ಹಾಗೂ ರಾಷ್ಟ್ರದ ಐಕ್ಯತೆ ಮತ್ತು ಏಕಾತ್ಮತೆಯನ್ನು

ಆಶ್ವಾಸನೆ ನೀಡುವ ಬಂಧುತ್ವವನ್ನು

ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲು ದೃಢಸಂಕಲ್ಪದ ನಿರ್ಧಾರ ಮಾಡಿ ;

ನಮ್ಮ ಸಂವಿಧಾನ ಸಭೆಯಲ್ಲಿ

ಇಂದು ದಿನಾಂಕ ಇಪ್ಪತ್ತಾರನೆಯ ನವೆಂಬರ್, ೧೯೪೯ ನೆಯ ಇಸವಿ

ಈ ಮೂಲಕ ಈ ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿ ಮತ್ತು ಅಧಿನಿಯಮಿತ

ಗೊಳಿಸಿ ಸ್ವತಃ ಅರ್ಪಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

ಜನಗಣಮನ-ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯ ಹೇ
ಭಾರತ-ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ |

ಪಂಚಾಬ, ಸಿಂಧು, ಗುಜರಾತ, ಮರಾಠಾ,
ದ್ರಾವಿಡ, ಉತ್ಕಲ, ಬಂಗ,

ವಿಂಧ್ಯ, ಹಿಮಾಚಲ, ಯಮುನಾ, ಗಂಗಾ,
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿತರಂಗ,

ತವ ಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ, ತವ ಶುಭ ಆಶಿಸ ಮಾಗೇ,
ಗಾಹೇ ತವ ಜಯಗಾಥಾ,

ಜನಗಣ ಮಂಗಲದಾಯಕ ಜಯ ಹೇ,
ಭಾರತ-ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ |

ಜಯ ಹೇ, ಜಯ ಹೇ, ಜಯ ಹೇ,
ಜಯ ಜಯ ಜಯ, ಜಯ ಹೇ ||

ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

ಭಾರತ ನನ್ನ ದೇಶ. ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ
ಬಂಧು-ಭಗಿನಿಯರು.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ನನಗೆ ನನ್ನ
ದೇಶದ ಸಮೃದ್ಧವಾದ ಹಾಗೂ ಬಹುವಿಧವಾದ ಪರಂಪರೆಯ
ಬಗ್ಗೆ ಅಭಿಮಾನವಿದೆ. ಈ ಪರಂಪರೆಗೆ ತಕ್ಕವನಾಗಿರಲು ನಾನು
ಯಾವಾಗಲೂ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ತಾಯಿ-ತಂದೆ, ಗುರು-ಹಿರಿಯರನ್ನು
ಆದರಿಸುತ್ತೇನೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರೊಡನೆ ಸೌಜನ್ಯದಿಂದ
ನಡೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶ ಹಾಗೂ ನನ್ನ ದೇಶ ಬಾಂಧವರಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಠೆ
ಇಡುವೆನೆಂದು ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಮಾಡುತ್ತೇನೆ. ಅವರ ಕಲ್ಯಾಣ ಹಾಗೂ
ಉತ್ಕರ್ಷ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯೇ ನನ್ನ ಸುಖವುಂಟು.

ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮಿತ್ರರೆ,

ಹತ್ತನೆಯ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ಸ್ವಾಗತವಿದೆ!

ಗಣಿತ ಭಾಗ I ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಭಾಗ II ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಈ ವರ್ಷ ನೀವು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವವರಿದ್ದೀರಿ.

ಗಣಿತ ಭಾಗ I ರಲ್ಲಿ, ಬೀಜಗಣಿತ, ಆಲೇಖ, ಅರ್ಥ ನಿಯೋಜನೆ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಈ ಮುಖ್ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಿವೆ. ನಿಮಗೆ ಈ ವರ್ಷ ಒಂಬತ್ತನೇ ವರ್ಗದ ವರೆಗೆ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿದ ಘಟಕಗಳ ಸ್ವಲ್ಪ ಅಧಿಕ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದಿದೆ. ಅರ್ಥ ನಿಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ GST ಈ ಹೊಸ ಕರಪ್ರಣಾಲಿಯ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಎಲ್ಲಿ ಹೊಸ ಭಾಗ, ಸೂತ್ರಗಳು ಅಥವಾ ಉಪಯೋಜನೆ ಇದೆ, ಅಲ್ಲಿ ಸುಲಭ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ನಮೂನೆಯ, ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು, ಉಜಳಣೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಇವೆ ಹೊರತಾಗಿ ಪ್ರಜ್ಞಾಪಂತ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಲವು ಆವಾಹನಾತ್ಮಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ತಾರಾಂಕಿತ ಮಾಡಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯ ನಂತರ ಗಣಿತದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದು ಇರದಿದ್ದರೂ ಸಹ ಗಣಿತದಲ್ಲಿಯ ಮೂಲಭೂತ ಸಂಕಲ್ಪನೆ ಅವರಿಗೆ ತಿಳಿಯಲು, ಇತರ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವಾಗ ಅವಶ್ಯಕ ಇರುವಷ್ಟು ಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವಂತೆ, ಇಂತಹ ಜ್ಞಾನ ಅವರಿಗೆ ಈ ಪುಸ್ತಕದಿಂದ ಸಿಗುವುದು. “ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಯ ಸಲುವಾಗಿ” ಈ ಶೀರ್ಷಿಕೆಯ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಗತಿ, ಯಾವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯ ನಂತರವೂ ಗಣಿತದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಪ್ರಾವೀಣ್ಯ ಪಡೆಯುವ ಇಚ್ಛೆ ಇದೆ, ಅವರಿಗೆ ಉಪಯೋಗವಾಗಬಹುದು ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂತಹ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅದನ್ನು ಅವಶ್ಯವಾಗಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಿರಿ. ಎಲ್ಲ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಯಾದರೂ ಓದಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಆಪದ ಮಾಧ್ಯಮದಿಂದ ಕ್ಯು.ಆರ್. ಕೋಡ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾಠಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಧಿಕ ಉಪಯುಕ್ತ ದೃಕ್-ಶ್ರಾವ್ಯ ಸಾಹಿತ್ಯ ನಮಗೆ ಉಪಲಬ್ಧವಾಗಬಹುದು. ಅದು ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ನಿಶ್ಚಿತ ಉಪಯೋಗವಾಗಬಹುದು.

ಹತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯ ಪರೀಕ್ಷೆ ಮಹತ್ವದ್ದು ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಸಂಗತಿಗಳ ಒತ್ತಡ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳದೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಿ ಇಷ್ಟವಿರುವ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ದೊರಕಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ನಿಮಗೆ ಶುಭೇಚ್ಛೆ!



(ಡಾ. ಸುನಿಲ ಮಗರ)

ಸಂಚಾಲಕ

ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು
ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳಿ, ಪುಣೆ

ಪುಣೆ

ದಿನಾಂಕ : 18 ಮಾರ್ಚ್ 2018, ಯುಗಾದಿ

ಭಾರತೀಯ ಸೌರ ದಿನಾಂಕ: 27 ಫಾಲ್ಗುಣ 1939

ಹತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆ ಭಾಗ I ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯ ಕೆಳಗಿನ ಕ್ಷಮತೆಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ವಿಕಸಿತವಾಗಬಹುದು.

ಕ್ಷೇತ್ರ	ಘಟಕ	ಕ್ಷಮತೆ ವಿಧಾನಗಳು
1. ಸಂಖ್ಯೆಯ ಜ್ಞಾನ	1.1 ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ	<ul style="list-style-type: none"> ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಉದಾ. ಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವುದು. Cಭವಿಷ್ಯದಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಸಂಗತಿ ಸಾಧ್ಯಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಹಂತ ಹಂತವಾಗಿ ನಿಯೋಜನೆ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು.
2. ಬೀಜ ಗಣಿತ	2.1 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳು 2.2 ದ್ವಿಚಲಗಳಲ್ಲಿಯ ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು	<ul style="list-style-type: none"> ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಮಾಡಲು ಬರುವುದು. ಅವುಗಳ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬರುವುದು. ಶಾಬ್ದಿಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಎಷ್ಟು ಚಲಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು. ಈ ನಿರ್ಣಯ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಬರುವುದು. ಶಾಬ್ದಿಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ರೂಪಾಂತರ ದ್ವಿಚಲ ಚಲಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿ ಉತ್ತರ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವುದು.
3. ವ್ಯವಹಾರಿಕ ಗಣಿತ	3.1 ಅರ್ಥನಿಯೋಜನ	<ul style="list-style-type: none"> ಉಳಿತಾಯ, ಹೂಡಿಕೆ, ಈ ಸಂಗತಿಗಳ ತಿಳಿವಳಿಕೆ ನಿರ್ಮಾಣ ಆಗುವುದು. ಉದ್ಯೋಗ ವ್ಯವಸಾಯದಲ್ಲಿ ಅರ್ಥ ವ್ಯವಹಾರಗಳ ಮುಖ ಪರಿಚಯ ಆಗುವುದು.
4. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಸಂಭಾವ್ಯತೆ	4.1 ಸಂಭಾವ್ಯತೆ 4.2 ಆಲೇಖ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣಗಳು	<ul style="list-style-type: none"> ಆಟ, ಮತದಾನ ಇತ್ಯಾದಿ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಭಾವ್ಯತೆಯ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು. ವಿಶಿಷ್ಟ ಪ್ರಕಾರದ ಮಾಹಿತಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಮೇಲೆ ಅದರ ಪರಿಚಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ/ಚಿತ್ರರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿರೂಪಣೆ ಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ವಿಶಿಷ್ಟ ಆಲೇಖಗಳ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು. ವರ್ಗೀಕೃತ ಸಾಮಗ್ರಿ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಮಧ್ಯ, ಮಧ್ಯಕ ಬಹುಜಾಂಕ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವುದು.

ಶಿಕ್ಷಕರ ಸಲುವಾಗಿ ಸೂಚನೆ

ಮೊದಲು ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಸಖೋಲ ವಾಚನ ಮಾಡಿ ಅದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು. ವಿವಿಧ ಘಟಕಗಳ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ ಮತ್ತು ಸೂತ್ರಗಳ ತಾಳೆ ಹಾಕುವುದು ಆ ಮಹತ್ವದ ಸಂಗತಿಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಕೃತಿಯ ಸಹಾಯ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಪ್ರಯೋಗದಿಂದಲೂ ಮೂಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡುವುದಿದೆ. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಕೃತಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವುದು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಚಾರ ಮಾಡಲು ಉತ್ತೇಜನ ಕೊಡುವುದು. ಯಾವುದೇ ಉದಾಹರಣೆ ಬೇರೆ, ಆದರೂ ತರ್ಕ ಶುದ್ಧ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಬೆನ್ನು ತಟ್ಟುವುದು.

ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆಯ ಮಾದರಿಯ ಯಾದಿ

1. ಆಲೇಖ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ X-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು Y-ಅಕ್ಷ ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆ ತೆಗೆದು ಆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ಬರೆಯಿರಿ. ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಮೇಲಿಂದ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಹೇಗೆ ತಯಾರಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
[ಸಮಾಂತರ ರೇಷೆಯ ಹೊರತಾಗಿ ಆರಂಭ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಂದ ಹೋಗುವ ಅಥವಾ X ಮತ್ತು Y ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಛೇದಿಸುವ ರೇಷೆಗಳು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ನಡೆಯುವದು]
2. ಯಾವುದೇ ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಅದನ್ನು ಹೇಳದೇ ಗುರುತಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಶಬ್ದಗಳ ಆಟ ತಯಾರು ಮಾಡಿರಿ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕಗಳಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಬೈಜಿಕ ಸಂಬಂಧ ತಯಾರಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಶಬ್ದಗಳ ಆಟ ಬಿಡಿಸಿ ತೋರಿಸಿರಿ.
[ಮೇಲಿನ ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆಯನ್ನು ಮೂರು ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಮಾಡಲು ಬರುವದು]
3. ಯಾವುದೇ ಖಾದ್ಯ ಪದಾರ್ಥದ ಪಾಕೀಟದ ಮೇಲಿನ ಘಟಕಗಳ ಮಾಹಿತಿ ಓದಿರಿ ಮತ್ತು ಆ ಮಾಹಿತಿ ತೋರಿಸುವ ವೃತ್ತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಬಿಸ್ಕಿಟುಗಳ ಪುಡಿಯ ಮೇಲಿನ ಕಾರ್ಬೋಹೈಡ್ರೇಟುಗಳು, ಪ್ರೋಟೀನ, ಜೀವನಸತ್ವಗಳು, ಇತ್ಯಾದಿ ಘಟಕಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ ನೋಡಿರಿ. ಅದು ಎಷ್ಟು ತೂಕದ ಸಲುವಾಗಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ತೂಕಗಳ ವಿತರಣೆ ತೋರಿಸುವ ವೃತ್ತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಕಾರ್ಬೋಹೈಡ್ರೇಟುಗಳು, ಸ್ಲಿಗ್ಲ ಪ್ರೋಟೀನಗಳು ಮತ್ತು ಇತರ ಘಟಕಗಳ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗ ಮಾಡಲುಬರುವದು.
4. ಶಿಕ್ಷಕರು ಕೊಟ್ಟ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ ಸಂಗಣಕದ ಮೇಲೆ Excel sheet ದಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಿರಿ. ಆ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಬಹುಭುಜ ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭಾಲೇಖ Excel ದಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಿರಿ.
5. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಹತ್ತುಸಲ ಎಸೆದು ದೊರೆತ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳನ್ನು ನೋಂದಣಿ ಮಾಡುವದು. ಮತ್ತು ಅದರ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸುವದು.
6. ಶಿಕ್ಷಕರು ಕೊಟ್ಟ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ವ್ಯವಹಾರದ ಇನ್‌ವಾಯಿಸ ಕರ ಪಾವತಿ ಅದರಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಬಾಬತ್ತುಗಳ ನೋಂದಣಿ ಮಾಡಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿಯ ಕರ ಆಕರಣೆಯ ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ಗಣನೆಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲ ಗಣನೆಗಳು ಸರಿ ಇರುವ ಖಾತ್ರಿ ಮಾಡಿರಿ.
7. ಶಿಕ್ಷಕರು ಹೇಳಿದ ಮೊದಲಿನ n ಕ್ರಮಾಗತ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ಕೃತಿ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, 1 ರಿಂದ 4ರ ವರೆಗಿನ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿ 4 X 5 ಒಂದು ಚೌಕಟ್ಟಿನ ಕಾಗದ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಮತ್ತು ಆಕೃತಿಯಿಲ್ಲ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕತ್ತರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ (ಇಲ್ಲಿ n = 4 ಇದೆ) ಅವರ ಮೇಲಿಂದ $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ಈ ಸೂತ್ರದ ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.

1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \therefore S_4 = \frac{4(4+1)}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

[ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಇಲ್ಲಿ $a = 1$, $d = 1$ ಇದೆ. ಹೆಚ್ಚು ಸಂಖ್ಯೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು a ಮತ್ತು d ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿ; ಅದರಂತೆ ಸಮ ಮತ್ತು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಸಲುವಾಗಿ ಇಂತಹಕೃತಿ ಮಾಡಲು ಬರುವದು]

8. ಒಂದು ಕಾರ್ಡಿನ ಮೇಲೆ ಮುಂದಿನ ಬದಿಗೆ $\alpha = 6$ ಮತ್ತು ಹಿಂದಿನ ಬದಿಗೆ $\alpha = -6$ ಬರೆಯಿರಿ. ಅದರಂತೆ, ಎರಡನೆಯ ಕಾರ್ಡಿನ ಒಂದೊಂದು ಪುಷ್ಪಭಾಗದ ಮೇಲೆ $\beta = -3$ ಮತ್ತು $\beta = 7$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ $(\alpha + \beta)$ ಮತ್ತು $(\alpha\beta)$ ದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆ ತಯಾರಾಗುವವು. ಆ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲಿಂದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

ಪ್ರಕರಣ	ಪುಟ
1. ದ್ವಿಚಲ ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು.....	1 - 29
2. ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳು	30 - 54
3. ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ	55 - 80
4. ಅರ್ಥ ನಿಯೋಜನೆ	81 - 112
5. ಸಂಭಾವ್ಯತೆ	113 - 128
6. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	129 - 168
• ಉತ್ತರ ಸೂಚಿ	169 - 176



ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

- ದ್ವಿಚಲಗಳಲ್ಲಿಯ ರೇಷಿಯ ಸಮೀಕರಣ ಬಡಿಸುವ ಪದ್ಧತಿ:- ಆಲೇಖ ಪದ್ಧತಿ, ಕ್ರೇಮರನ ಪದ್ಧತಿ.
- ದ್ವಿಚಲಗಳಲ್ಲಿಯ ರೇಷಿಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರಗೊಳಿಸುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು.
- ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉಪಯೋಗ.



ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ದ್ವಿಚಲ ರೇಷಿಯ ಸಮೀಕರಣ (Linear equation in two variables)

ಯಾವ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚಲಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಚಲವಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದ ಘಾತ 1 ಇರುವುದು, ಅಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ದ್ವಿಚಲ ರೇಷಿಯ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುವರು, ಇದನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

$ax + by + c = 0$ ಇದು ದ್ವಿಚಲ ರೇಷಿಯ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ ಇದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ a , b , c ಇವುಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವೆ, a ಮತ್ತು b ಇವುಗಳು ಒಂದೇ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯ ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

ಉದಾ, $3x = 4y - 12$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ $3x - 4y + 12 = 0$ ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ ಇದೆ.

ಕೃತಿ: ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

ಕ್ರಮಾಂಕ	ಸಮೀಕರಣ	ದ್ವಿಚಲ ರೇಷಿಯ ಸಮೀಕರಣ ಇದೆಯೋ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲ?
1	$4m + 3n = 12$	ಇದೆ
2	$3x^2 - 7y = 13$	
3	$\sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 16$	
4	$0x + 6y - 3 = 0$	
5	$0.3x + 0y - 36 = 0$	
6	$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 4$	
7	$4xy - 5y - 8 = 0$	

ಏಕಕಾಲಿಕ ರೇಷಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು (Simultaneous linear equations)

ಯಾವಾಗ ನಾವು ಎರಡು ಚಲಗಳಲ್ಲಿಯ ರೇಷಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದೇ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ವಿಚಾರ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ ಆಗ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಏಕಕಾಲಿಕ ರೇಷಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಒಂದು ಚಲದ ಲೋಪ ಮಾಡಿ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವ ಪದ್ಧತಿಯ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಪುನರಾವರ್ತಿತ ಮಾಡೋಣ.

ಉದಾ. (1) ಕೆಳಗಿನ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$5x - 3y = 8; 3x + y = 2$$

ಉತ್ತರ :

ಪದ್ಧತಿ I : $5x - 3y = 8$. . . (I)

$$3x + y = 2 \dots (II)$$

ಸಮೀಕರಣ (II)ಕ್ಕೆ ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ 3ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

$$9x + 3y = 6 \dots (III)$$

$$5x - 3y = 8 \dots (I)$$

ಈಗ ಸಮೀಕರಣ (I) ಮತ್ತು (III) ಇವುಗಳ ಬೇರೆಬೇರೆ

$$5x - 3y = 8$$

$$+ 9x + 3y = 6$$

$$14x = 14$$

$$\therefore x = 1$$

$x = 1$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (II) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$3x + y = 2$$

$$\therefore 3 \times 1 + y = 2$$

$$\therefore 3 + y = 2$$

$$\therefore y = -1$$

$x = 1, y = -1$ ಇದು ಉತ್ತರ ಇರುವುದು.

ಈ ಉತ್ತರವನ್ನು $(x, y) = (1, -1)$ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗುವುದು.

ಪದ್ಧತಿ (II)

$$5x - 3y = 8 \dots (I)$$

$$3x + y = 2 \dots (II)$$

ಸಮೀಕರಣ (II)ರ ಮೇಲಿಂದ y ಈ ಚಲಪದದ

ಬೆಲೆ x ಚಲಪದದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ

$$y = 2 - 3x \dots (III)$$

ಈಗ y ದ ಬೆಲೆ ಸಮೀಕರಣ (I) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ,

$$5x - 3y = 8$$

$$\therefore 5x - 3(2 - 3x) = 8$$

$$\therefore 5x - 6 + 9x = 8$$

$$\therefore 14x - 6 = 8$$

$$\therefore 14x = 8 + 6$$

$$\therefore 14x = 14$$

$$\therefore x = 1$$

$x = 1$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (III)ರಲ್ಲಿ

ತುಂಬಲಾಗಿ

$$y = 2 - 3x$$

$$\therefore y = 2 - 3 \times 1$$

$$\therefore y = 2 - 3$$

$$\therefore y = -1$$

$x = 1, y = -1$ ಇದು ಉತ್ತರ ಇದೆ.

ಉದಾ. (2) ಬಿಡಿಸಿರಿ: $3x + 2y = 29$; $5x - y = 18$

ಉತ್ತರ : $3x + 2y = 29$. . . (I) ಮತ್ತು $5x - y = 18$. . . (II)

ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ y ಈ ಚಲಪದದ ಲೋಪ ಮಾಡಿ ಬಿಡಿಸೋಣ, ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆಯಿರಿ.

ಸಮೀಕರಣ (II) ಕ್ಕೆ 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ

$$\therefore 5x \times \square - y \times \square = 18 \times \square$$

$$\therefore 10x - 2y = \square \dots (III)$$

ಸಮೀಕರಣ (I) ರಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ (III) ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ.

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 29 \\ + \square - \square = \square \\ \hline \square = \square \end{array} \therefore x = \square$$

$x = 5$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (I) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ,

$$3x + 2y = 29$$

$$\therefore 3 \times \square + 2y = 29$$

$$\therefore \square + 2y = 29$$

$$\therefore 2y = 29 - \square$$

$$\therefore 2y = \square \therefore y = \square$$

$(x, y) = (\square, \square)$ ಇದು ಉತ್ತರ ವಿದೆ.

ಉದಾ. (3) $15x + 17y = 21$; $17x + 15y = 11$

ಉತ್ತರ : $15x + 17y = 21$. . . (I)

$17x + 15y = 11$. . . (II)

ಈ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳ x ಮತ್ತು y ಇವುಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿ ಅದಲು ಬದಲು ಇದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರದ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಆ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡಲಾಗಿ ಎರಡು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುವವು. ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉತ್ತರ ಸುಲಭವಾಗಿ ದೊರೆಯುವುದು.

ಸಮೀಕರಣ (I) ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣ (II) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿ,

$$\begin{array}{r} 15x + 17y = 21 \\ + 17x + 15y = 11 \\ \hline 32x + 32y = 32 \end{array}$$

ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿ 32 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ

$$x + y = 1 \dots (III)$$

ಸಮೀಕರಣ (I) ರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (II)ನ್ನು ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡಿರಿ.

$$\begin{array}{r} 15x + 17y = 21 \\ - \\ 17x + 15y = 11 \\ \hline -2x + 2y = 10 \end{array}$$

ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ

$$-x + y = 5 \dots (IV)$$

ಸಮೀಕರಣ (III) ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣ (IV) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡೋಣ.

$$\begin{array}{r} x + y = 1 \\ + \\ -x + y = 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore 2y = 6 \quad \therefore y = 3$$

$y = 3$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (III) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$x + y = 1$$

$$\therefore x + 3 = 1$$

$$\therefore x = 1 - 3 \quad \therefore x = -2$$

$(x, y) = (-2, 3)$ ಇದು ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರ ಇದೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$5x + 3y = 9 \text{ ----- (I)}$$

$$2x - 3y = 12 \text{ ----- (II)}$$

ಸಮೀ. (I) ಮತ್ತು ಸಮೀ. (II) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡೋಣ

$$\begin{array}{r} 5x + 3y = 9 \\ + \\ 2x - 3y = 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{} x = \boxed{}$$

$$x = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$x = \boxed{}$$

$x = 3$ ಸಮೀ. (I) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$5 \times \boxed{} + 3y = 9$$

$$3y = 9 - \boxed{}$$

$$3y = \boxed{}$$

$$y = \frac{\boxed{}}{3}$$

$$y = \boxed{}$$

$(x, y) = (\boxed{}, \boxed{})$ ಇದು ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರ ಇದೆ.

2. ಕೆಳಗಿನ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿರಿ.

- (1) $3a + 5b = 26$; $a + 5b = 22$ (2) $x + 7y = 10$; $3x - 2y = 7$
 (3) $2x - 3y = 9$; $2x + y = 13$ (4) $5m - 3n = 19$; $m - 6n = -7$
 (5) $5x + 2y = -3$; $x + 5y = 4$ (6) $\frac{1}{3}x + y = \frac{10}{3}$; $2x + \frac{1}{4}y = \frac{11}{4}$
 (7) $99x + 101y = 499$; $101x + 99y = 501$
 (8) $49x - 57y = 172$; $57x - 49y = 252$



ದ್ವಿಘಟ ರೇಷಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖ (Graph of a linear equation in two variables)

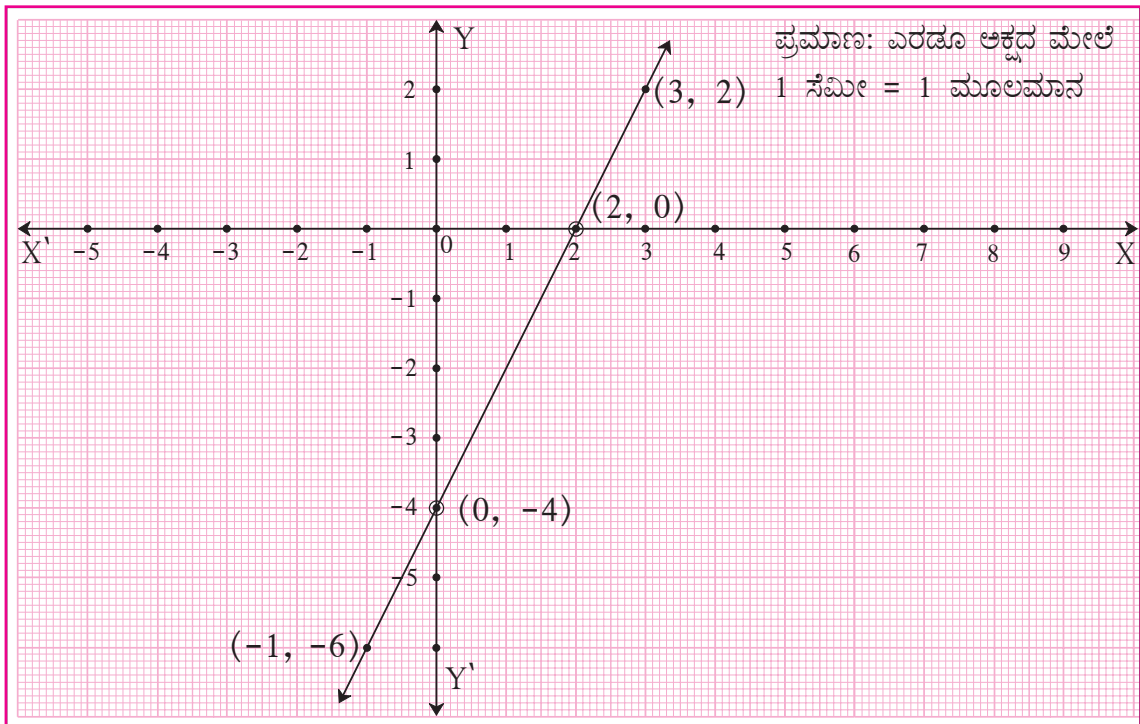
ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚಲಗಳಲ್ಲಿಯ ರೇಷಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖ ಇದು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಷಿಯ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಚಲಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಒಂದು ಜೊತೆ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮಾಧಾನವಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಆ ಜೋಡಿಯು ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರ ಇರುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆ ಈ ಜೊತೆ ಬೆಲೆಗಳ ಸಮೀಕರಣ ಆಲೇಖದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು ದರ್ಶಿಸುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ. $2x - y = 4$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ.

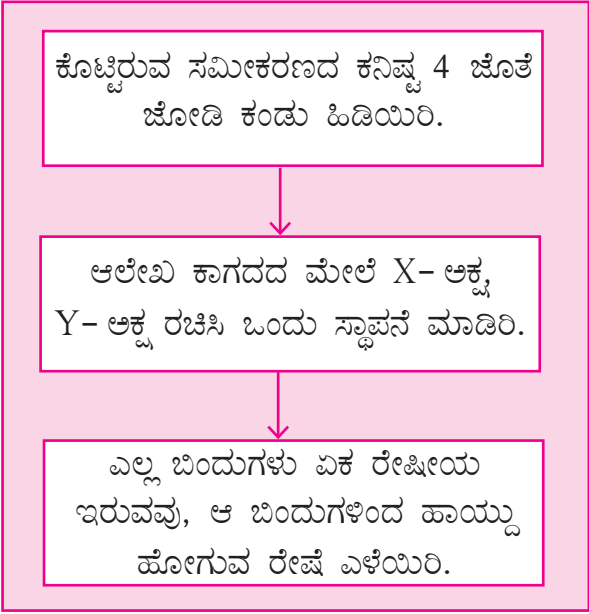
ಉತ್ತರ : $2x - y = 4$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖ ತೆಗೆಯುವ ಸಲುವಾಗಿ (x, y) ಇದರ 4 ಜೊತೆ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು

x	0	2	3	-1
y	-4	0	2	-6
(x, y)	(0, -4)	(2, 0)	(3, 2)	(-1, -6)

ದೊರೆಕಿಸೋಣ, ಕ್ರಮಿತ ಜೊತೆ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ದೊರೆಕಿಸಲು ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವಹಾಗೆ x ಮತ್ತು y ಇವುಗಳ ಶೂನ್ಯ ಈ ಬೆಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಅನುಕೂಲಕರ ಇರುವುದು.



ದ್ವಿಚಲ ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖ ತೆಗೆಯುವಾಗ ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.



ರೇಷೆ ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸಲು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಸಾಕಾಗುವವು. ಆದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯುವುದು ತಪ್ಪಾಗಿದ್ದರೆ ರೇಷೆಯೂ ತಪ್ಪಾಗುವುದು.

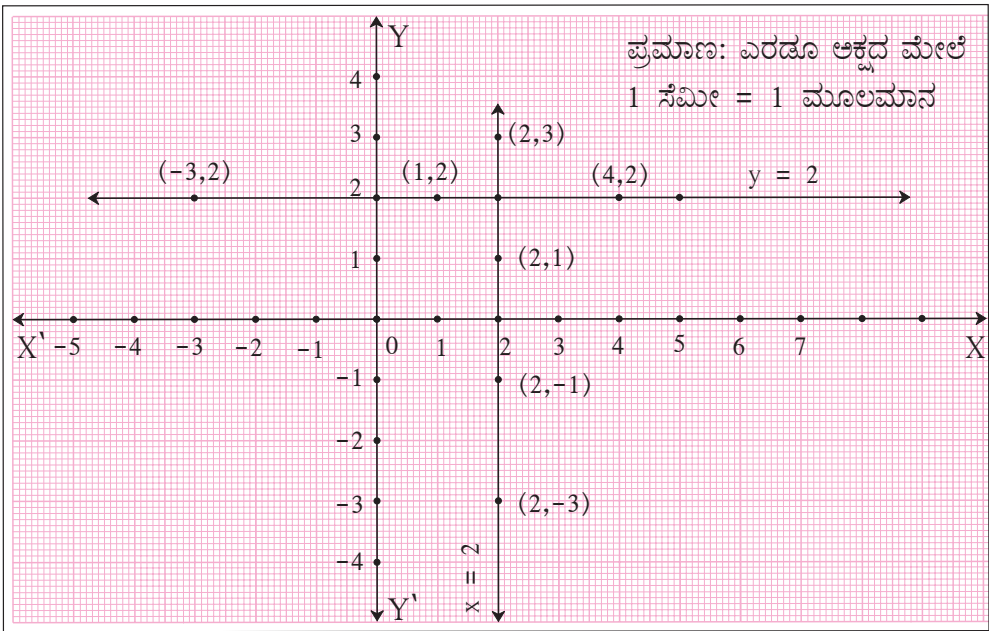
ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯುವಾಗ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತಪ್ಪಾದರೆ ಮೂರು ಬಿಂದು ಒಂದೇ ರೇಷೆಯ ಮೇಲೆ ಬರುವುದಿಲ್ಲ, ಇದರಿಂದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ನಿರ್ದೇಶಕ ತಪ್ಪಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವುದು. ಆದರೆ ಯಾವ ಬಿಂದು ತಪ್ಪಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ವೇಳೆ ತಾಗುವುದು.

ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ತೆಗೆಯುವಾಗ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ತಪ್ಪಾದರೆ ಅದನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕ ರೇಷೀಯಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದರಿಂದ ತಪ್ಪು ಬೇಗನೆ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವುದು, ಆದ್ದರಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಕ ನಿಶ್ಚಯಿಸುವುದು ಹಿತಕರವಾಗಿರುವುದು.

$0x + y = 2$ ಈ ಸಮೀಕರಣ ಸುಲಭವಾಗಲು $y = 2$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವರು. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖ X- ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇರುವುದು, ಏಕೆಂದರೆ x ನಿರ್ದೇಶಕ ಯಾವುದಾದರೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ y ನಿರ್ದೇಶಕ 2 ಇದೇ ಇರುವುದು.

x	1	4	-3
y	2	2	2
(x, y)	(1, 2)	(4, 2)	(-3, 2)

ಅದರಂತೆ $x + 0y = 2$ ಈ ಸಮೀಕರಣ $x = 2$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವರು ಮತ್ತು ಅದರ ಆಲೇಖ Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರ ಇರುವುದು.





ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಆಲೇಖ ಪದ್ಧತಿ

(Solution of simultaneous equations by Graphical method)

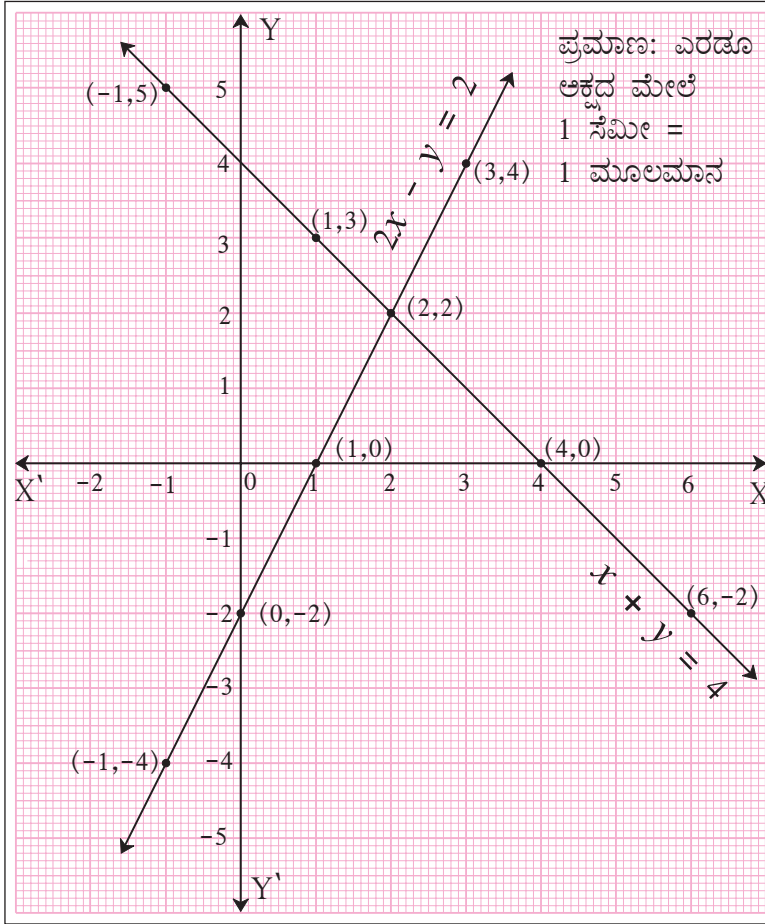
ಉದಾ. $x + y = 4$ ಮತ್ತು $2x - y = 2$ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖ ತೆಗೆದು ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡುವಾ

$$x + y = 4$$

x	-1	4	1	6
y	5	0	3	-2
(x, y)	(-1, 5)	(4, 0)	(1, 3)	(6, -2)

$$2x - y = 2$$

x	0	1	3	-1
y	-2	0	4	-4
(x, y)	(0, -2)	(1, 0)	(3, 4)	(-1, -4)



ಆಲೇಖ ಕಾಗದದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು ಆ ಆಲೇಖದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಮಾಧಾನ ಪಡಿಸುವುದು, ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ (2, 2) ಈ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವವು. ಆಲೇಖದ ಮೇಲೆ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವುದು ಆದ್ದರಿಂದ (2, 2) ಈ ಜೊತೆ ಜೋಡಿಯು, ಅಂದರೆ $x = 2$ ಮತ್ತು $y = 2$ ಈ ಬೆಲೆಗಳು $x + y = 4$ ಮತ್ತು $2x - y = 2$ ಈ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಮಾಧಾನ ಪಡಿಸುವವು. ಚಲಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಮಾಧಾನ ಗೊಳ್ಳುವವು. ಆ ಬೆಲೆಗಳು ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರ ಆಗುವುದು.

$x + y = 4$ ಮತ್ತು $2x - y = 2$ ಈ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉತ್ತರ $x = 2$ ಮತ್ತು $y = 2$ ಇದೆ.

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಲೋಪ (ನಿರಸನ) ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ ಉತ್ತರವನ್ನು ತಾಳೆ ಹಾಕೋಣ.

$$x + y = 4 \dots (I)$$

$$2x - y = 2 \dots (II)$$

ಸಮೀಕರಣ (I) ಮತ್ತು (II) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡೋಣ

$$3x = 6 \therefore x = 2$$

ಸಮೀಕರಣ (I) ರಲ್ಲಿ $x = 2$ ಬೆಲೆ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$x + y = 4$$

$$\therefore 2 + y = 4$$

$$\therefore y = 2$$

ಕೃತಿ I : $x - y = 1$; $5x - 3y = 1$ ಈ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಆಲೇಖ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ ನಿರ್ದೇಶಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$x - y = 1$$

x	0		3	
y		0		-3
(x, y)				

$$5x - 3y = 1$$

x	2			-4
y		8	-2	
(x, y)				

- ಒಂದೇ ನಿರ್ದೇಶಕ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಮೇಲಿನ ನಿರ್ದೇಶಕದಂತೆ ಬಿಂದು ಸ್ಥಾಪನೆ ಮಾಡಿರಿ.
- ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ.
- ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ಓದಿರಿ. ಆದರೆ ಮೇಲಿಂದ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ.

ಕೃತಿ II : ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣ ನಿರಸನ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ ಆಲೇಖದಿಂದ ದೊರೆತ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.



ಯೋಚಿಸೋಣ ಬನ್ನಿ.

$5x - 3y = 1$ ಈ ಆಲೇಖ ತೆಗೆಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ನಿರ್ದೇಶಕ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಅದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

x	0	$\frac{1}{5}$	1	-2
y	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{11}{3}$
(x, y)	$(0, -\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{5}, 0)$	$(1, \frac{4}{3})$	$(-2, -\frac{11}{3})$

- ಬಿಂದು ಸ್ಥಾಪನೆ ಮಾಡಲು ಈ ನಿರ್ದೇಶಕ ಅನುಕೂಲ ವಾಗಿದೆಯೇ ?
- ನಿರ್ದೇಶಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಾಗ ಯಾವ ಕಾಳಜಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಬಿಂದು ಸ್ಥಾಪನೆ ಸುಲಭ ವಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಲೇಖದಿಂದ ಬಿಡಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

$$x + y = 3 ; x - y = 4$$

$$x + y = 3$$

x	3	<input type="text"/>	<input type="text"/>
y	<input type="text"/>	5	3
(x, y)	(3, 0)	<input type="text"/>	(0, 3)

$$x - y = 4$$

x	<input type="text"/>	-1	0
y	0	<input type="text"/>	-4
(x, y)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	(0, -4)

2. ಕೆಳಗಿನ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಲೇಖದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(1) $x + y = 6 ; x - y = 4$

(2) $x + y = 5 ; x - y = 3$

(3) $x + y = 0 ; 2x - y = 9$

(4) $3x - y = 2 ; 2x - y = 3$

(5) $3x - 4y = -7 ; 5x - 2y = 0$

(6) $2x - 3y = 4 ; 3y - x = 4$



$x + 2y = 4$; $3x + 6y = 12$ ಈ ಏಕಾಂಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದನ್ನು ಆಲೇಖ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ನಿಶ್ಚಯಿಸಲಾದ ಕೆಲವು ಜೊತೆ ಜೋಡಿಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇವೆ.

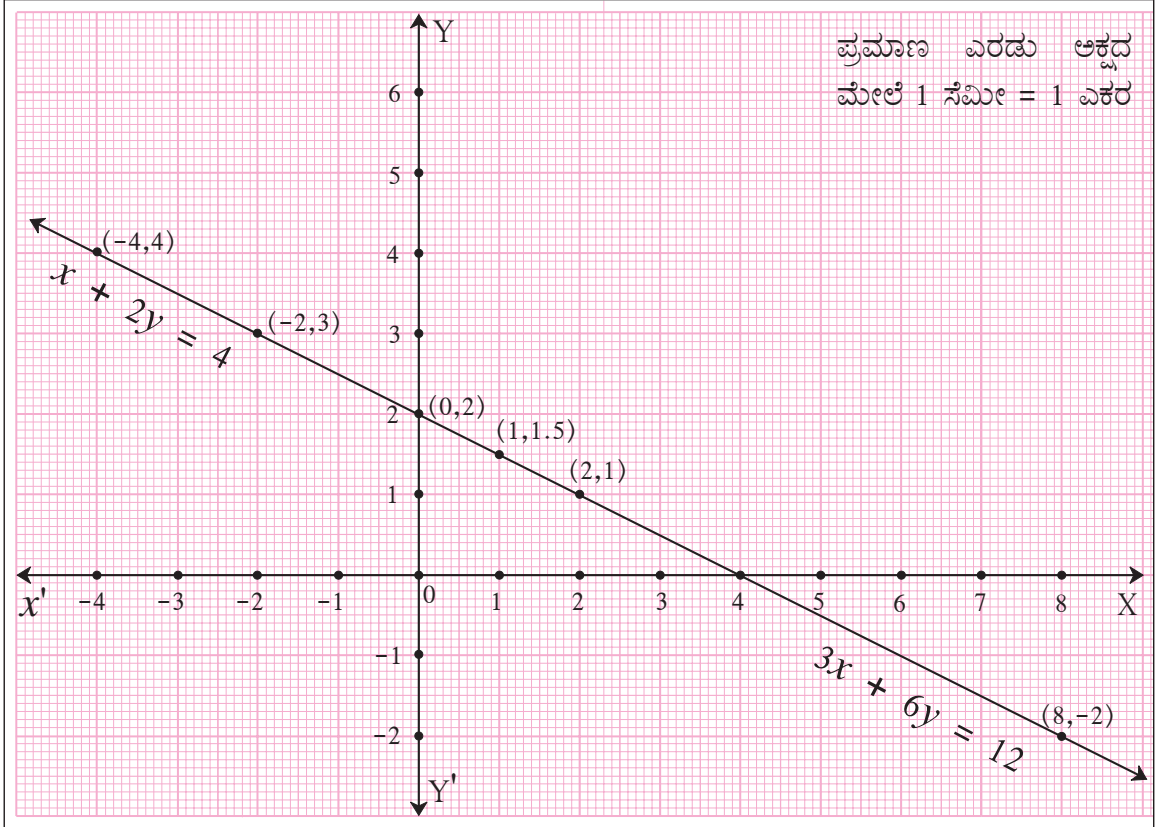
$$x + 2y = 4$$

x	-2	0	2
y	3	2	1
(x, y)	(-2, 3)	(0, 2)	(2, 1)

$$3x + 6y = 12$$

x	-4	1	8
y	4	1.5	-2
(x, y)	(-4, 4)	(1, 1.5)	(8, -2)

ಈ ಜೊತೆ ಜೋಡಿಗಳ ಸ್ಥಾನ ಮಾಡಿ ರಸಿದ ಆಲೇಖ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ ಅದರ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಿರಿ.



ಪ್ರಮಾಣ ಎರಡು ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ 1 ಸೆಮೀ = 1 ಎಕರ

- (1) ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಆಲೇಖಗಳು ಒಂದೇ ಇವೆಯೇ? ಅಥವಾ ಭಿನ್ನವಾಗಿವೆ ?
- (2) $x + 2y = 4$ ಮತ್ತು $3x + 6y = 12$ ಈ ಏಕಾಂಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉತ್ತರ ಯಾವವು? ಅವು ಎಷ್ಟಿವೆ ?
- (3) ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿಯೂ x ದ ಸಹಗುಣಕ, y ದ ಸಹಗುಣಕ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಪದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಬಂಧ ಕಂಡುಬರುವುದು ?
- (4) ಎರಡೂ ಚಲಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಎರಡು ರೇಖೀಯ ಸಮೀಕರಣ ಕೊಡಲಾಗಿ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖ ಇದು ಒಂದೇ ರೇಷೆ ಯಾವಾಗ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯ ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸಲು ಬರುವುದು ?

ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ನೋಡೋಣ,

$x - 2y = 4$ ಮತ್ತು $2x - 4y = 12$ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖ ಮೇಲಿನಂತೆ ಒಂದೇ ನಿರ್ದೇಶಕ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆಲೇಖಗಳ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ. $x - 2y = 4$; $2x - 4y = 12$ ಈ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉತ್ತರಗಳ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿರಿ, x ಮತ್ತು y ಇವುಗಳ ಸಹಗುಣಕ ಅದರಂತೆ ಸ್ಥಿರಪದಗಳು ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಬಂಧಗಳ ಯೋಚನೆ ಮಾಡಿ ನಿಷ್ಕರ್ಷೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ICT Tools or Links

Geogebra software ಇದರ ಸಹಾಯದಿಂದ X-ಅಕ್ಷ, Y-ಅಕ್ಷ ತೆಗೆಯಿರಿ. ವಿವಿಧ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖ ತೆಗೆದು ಅದರ ಉತ್ತರ ಪರಿೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.



ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ನಿಶ್ಚಯಕ (Determinant)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ಈ ನಾಲ್ಕು ಘಟಕಗಳು ನಿಶ್ಚಯಕ ಇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $(a, b), (c, d)$ ಇವುಗಳು ಅಡ್ಡ

ಸಾಲುಗಳಿವೆ, ಅದರಂತೆ $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ ಇವೆರಡು ಲಂಬ ಸ್ತಂಭಗಳಿವೆ, ಈ ನಿಶ್ಚಯಕಗಳ ಘಾತ 2 ಇದೆ. ಕಾರಣ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭಗಳಲ್ಲಿ 2 ಘಟಕಗಳಿವೆ. ಈ ನಿಶ್ಚಯಕ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಗುವುದು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು $ad-bc$ ಇರುವುದು.

ಅಂದರೆ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$

$ad-bc$ ಇದು $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ಇದು ನಿಶ್ಚಯಕದ ಬೆಲೆ ಇದೆ.

ನಿಶ್ಚಯಕಗಳಿಗೆ ಹೆಸರಿಸಲು ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ A, B, C, D, ಹೀಗೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಕ್ಯಾಪಿಟಲ್ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವರು.

ಝಝಝ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಝಝಝ

ಉದಾಹರಣೆ ಕೆಳಗಿನ ನಿಶ್ಚಯಕಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$

(2) $N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

(3) $B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix}$

ಉತ್ತರ :

$$(1) A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (5 \times 9) - (3 \times 7) = 45 - 21 = 24$$

$$(2) N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = [(-8) \times (4)] - [(-3) \times 2] = -32 - (-6) \\ = -32 + 6 = -26$$

$$(3) B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = [2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}] - [2 \times 9] = 18 - 18 = 0$$



ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ನಿಶ್ಚಯಕ ಪದ್ಧತಿ (ಕ್ರಾಮರ್ಸ್ ಪದ್ಧತಿ) Determinant method (Cramer's Method)

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಸುಲಭ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಮತ್ತು ಅತೀ ಕಡಿಮೆ ಸ್ಥಳ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಿಶ್ಚಯಕಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವ ನಿಶ್ಚಯಕ ಪದ್ಧತಿ ಎನ್ನುವರು. ಈ ಪದ್ಧತಿ ಗ್ರ್ಯಾಬಿಯೆಲ್ ಕ್ರೇಮರ್ ಈ ಸ್ವಿಸ್ ಗಣಿತ ತಜ್ಞರು ಶೋಧಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಕ್ರೇಮರ್ ಪದ್ಧತಿ ಎನ್ನುವರು.

ಈ ದ್ವಿಪದ ರೇಷಿಯ ಸಮೀಕರಣ ಸುಲಭವಾಗಲು $a_1x + b_1y = c_1$ ಮತ್ತು $a_2x + b_2y = c_2$ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆಯುವರು.

$$\text{ತಿಳಿಯಿರಿ, } a_1x + b_1y = c_1 \dots (I)$$

$$\text{ಮತ್ತು } a_2x + b_2y = c_2 \dots (II)$$

ಇದರಲ್ಲಿ a_1, b_1, c_1 ಮತ್ತು a_2, b_2, c_2 ಇವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದು

ನಾವು ಈ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಿರಸನ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಸಮೀಕರಣ (I) ಕ್ಕೆ b_2 ದಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ

$$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \dots (III)$$

ಸಮೀಕರಣ (II) ಕ್ಕೆ b_1 ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

$$a_2 b_1 x + b_2 b_1 y = c_2 b_1 \dots (IV)$$

ಸಮೀಕರಣ (III) ರಿಂದ (IV)ನ್ನು ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡಲಾಗಿ

$$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2$$

$$a_2 b_1 x + b_2 b_1 y = c_2 b_1$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \dots (V)$$

$$\text{ಅದೇ ರೀತಿ } x \text{ದ ನಿರಸನ ಮಾಡಿ, } y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \dots (VI)$$

ಮೇಲಿನ ಉತ್ತರಗಳಲ್ಲಿ $c_1 b_2 - c_2 b_1$, $a_1 b_2 - a_2 b_1$, $a_1 c_2 - a_2 c_1$ ಈ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಲು ಮತ್ತು ಸ್ವಲ್ಪ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿಯೇ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿ ಮಂಡಿಸಲು ನಿಶ್ಚಯಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಹಗುಣಕ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಪದಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\begin{array}{l} \text{ಈಗ } a_1 x + b_1 y = c_1 \\ \text{ಮತ್ತು } a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array} \quad \left| \quad \text{ಇದರಲ್ಲಿ } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ ಈ ಮೂರು ಸ್ತಂಭ ದೊರೆಯುವವು.}$$

ಸಮೀಕರಣ (V) ಮತ್ತು (VI) ರಲ್ಲಿಯ x ಮತ್ತು y ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ನಿಶ್ಚಯಕದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬರೆಯೋಣ.

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\text{ಮತ್ತು } y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad (a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0$$

$$\text{ಗಮನದಲ್ಲಿಡುವ ಸಲುವಾಗಿ } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_y \text{ ಹೀಗೆ ಬರೆಯೋಣ}$$

$$\text{ಅಂದರೆ ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ } x = \frac{D_x}{D} \text{ ಮತ್ತು } y = \frac{D_y}{D}$$

D, D_x, D_y ಈ ನಿಶ್ಚಯಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ಈ ಸ್ತಂಭಗಳ ಕ್ರಮ ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡಿರಿ.

ಮತ್ತು $a_1 x + b_1 y = c_1$ ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ಈ ಮೂರು ಸ್ತಂಭಗಳು
 $a_2 x + b_2 y = c_2$ ದೊರೆಯುವವು

- D ದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಪದದ $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ಈ ಸ್ತಂಭ ತೆಗೆದು ಹಾಕಲಾಗಿದೆ.
- D_x ದ ಸಲುವಾಗಿ D ದಲ್ಲಿಯ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ಈ x ದ ಸಹಗುಣಕದ ಸ್ತಂಭ ತೆಗೆದುಹಾಕಿ ಅದರ ಬದಲಾಗಿ ಆ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಪದಗಳ ಸ್ತಂಭ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.
- D_y ದ D ಸಲುವಾಗಿ $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ಈ y ದ ಸಹಗುಣಕದ ಸ್ತಂಭ ತೆಗೆದು ಹಾಕಿ ಅದರ ಬದಲಾಗಿ ಸ್ಥಿರಪದದ ಸ್ತಂಭ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.



ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ

ಕ್ರೇಮರ ಪದ್ಧತಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವ ಪದ್ಧತಿ
 ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣ $ax + by = c$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

D, D_x ಮತ್ತು D_y ಈ ನಿಶ್ಚಯಕಗಳ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

$x = \frac{D_x}{D}$ ಮತ್ತು $y = \frac{D_y}{D}$
 ಅನುಸಾರ x ಮತ್ತು y ದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಗ್ಯಾಬ್ರಿಯಲ ಕ್ರೇಮರ (Gabriel Cramer)

31 ಜುಲೈ, 1704 ರಿಂದ 4 ಜನೆವರಿ, 1752 ಈ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಜನ್ಮ ಜಿನ್ನಿವ್ವಾದಲ್ಲಿ ಆಯಿತು. ಗಣಿತ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಅವರ ಚಿಕ್ಕವರು ಇರುವಾಗಲಿಂದ ಅತೀಶಯ ಪ್ರಾವೀಣ್ಯರಾಗಿದ್ದರು ವಯಸ್ಸಿನ 18 ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅವರಿಗೆ ಡಾಕ್ಟರೇಟ ಪದವಿ ದೊರೆಯಿತು ಅವರು ಜಿನ್ನಿವ್ವಾದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರಾಗಿದ್ದರು.



ಛಛಛ ಬಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಛಛಛ

ಉದಾ. ಕ್ರೇಮರನ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕೆಲಗಿನ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$5x + 3y = -11 ; 2x + 4y = -10$$

ಉತ್ತರ : ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣ

$$5x + 3y = -11$$

$$2x + 4y = -10$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (2 \times 3) = 20 - 6 = 14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = (-11) \times 4 - (-10) \times 3 = -44 - (-30) \\ = -44 + 30 = -14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 5 \times (-10) - 2 \times (-11) = -50 - (-22) \\ = -50 + 22 = -28$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{14} = -1 \quad \Bigg| \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{14} = -2$$

$\therefore (x, y) = (-1, -2)$ ಇದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರ ಇದೆ.

ಕೃತಿ 1 : ನಿಶ್ಚಯಕ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಲಗಿನ ಚೌಕಟ್ಟು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

$$y + 2x - 19 = 0 ; 2x - 3y + 3 = 0$$

ಉತ್ತರ : ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $ax + by = c$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

$$2x + y = 19$$

$$2x - 3y = -3$$

$$D = \begin{vmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \boxed{} \times (-3) - 2 \times (\boxed{}) = \boxed{} - (\boxed{}) \\ = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & \boxed{} \\ \boxed{} & -3 \end{vmatrix} = 19 \times (\boxed{}) - (\boxed{}) \times (\boxed{}) = \boxed{} - \boxed{}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \square & 19 \\ 2 & \square \end{vmatrix} = [(\square) \times (\square)] - [(\square) \times (\square)]$$

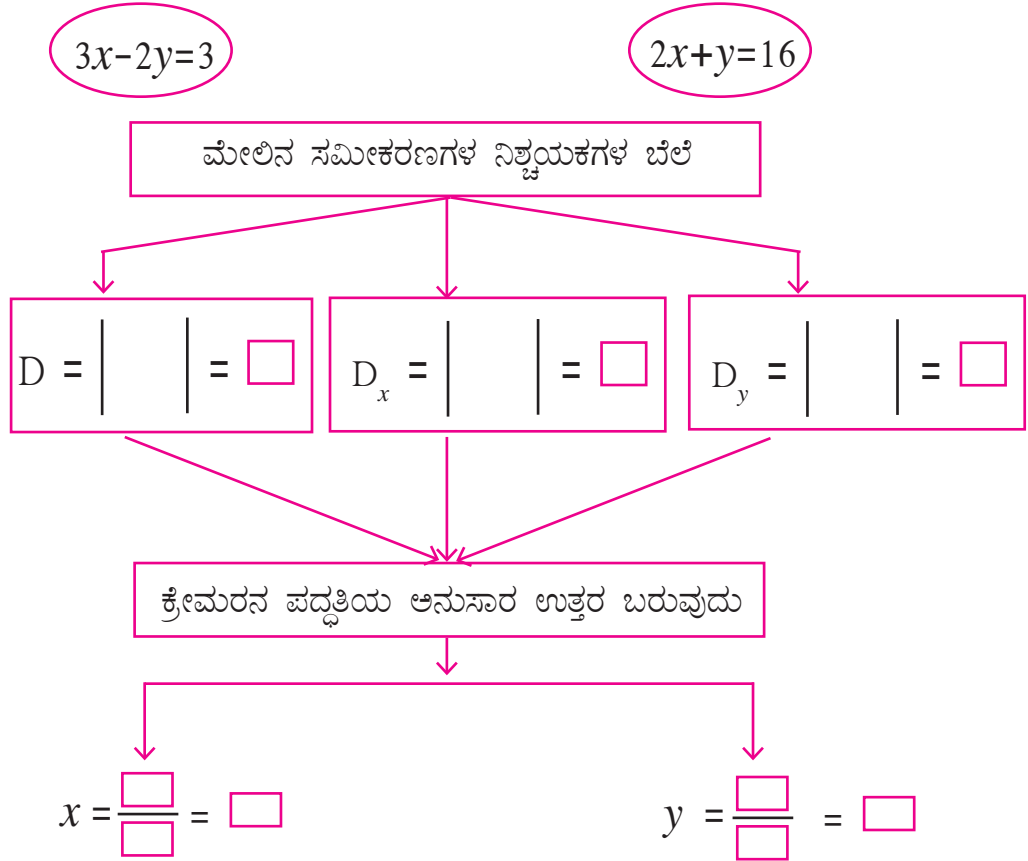
$$= \square - \square = \square$$

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

$$\therefore x = \frac{\square}{\square} = \square \qquad y = \frac{\square}{\square} = \square$$

$\therefore (x, y) = (\square, \square)$ ಇದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉತ್ತರ ಇದೆ.

ಕೃತಿ 2 : ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.



\therefore ಉತ್ತರ (\square, \square) ಇದೆ.

$\therefore (x, y) = (\square, \square)$ ಇದೆ ಉತ್ತರ ಇದೆ.



ಯೋಚನೆ ಮಾಡೋಣ ಬನ್ನಿ

- ಒಂದು ವೇಳೆ $D = 0$ ಇದ್ದರೆ ಉತ್ತರದ ಸ್ವರೂಪ ಏನು ಇರುವುದು ?
- ಸಾಮಾನ್ಯ ಉತ್ತರ ಸಾಧ್ಯ ಇರದಿದ್ದರೆ. ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ರೇಷಗಳ ಸ್ವರೂಪ ಏನು ಇರುವುದು ?

ಉದಾಹರಣೆ ಸಂಗ್ರಹ 1.3

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \square - \square \times 4 = \square - 8 = \square$

2. ಕೆಳಗಿನ ನಿಶ್ಚಯಕಗಳ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

3. ಕೆಳಗಿನ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕ್ರಮದ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(1) $3x - 4y = 10$; $4x + 3y = 5$ (2) $4x + 3y - 4 = 0$; $6x = 8 - 5y$

(3) $x + 2y = -1$; $2x - 3y = 12$ (4) $6x - 4y = -12$; $8x - 3y = -2$

(5) $4m + 6n = 54$; $3m + 2n = 28$ (6) $2x + 3y = 2$; $x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$



ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ದ್ವಿಚಲ ರೇಷೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಗೊಳಿಸುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು:

(Equations reducible to a pair of linear equations in two variables)

ಕೃತಿ : ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

ಸಮೀಕರಣ	ಚಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ರೇಷೀಯ ಇವೆ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲ
$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 8$	2	ಇಲ್ಲ
$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 0$	<input type="text"/>	<input type="text"/>
$\frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 0$	<input type="text"/>	<input type="text"/>
$\frac{14}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5$	<input type="text"/>	<input type="text"/>



ಯೋಚನೆ ಮಾಡೋಣ ಬನ್ನಿ

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ದ್ವಿಚಲದ ಕೆಲವು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅವು ರೇಷಿಯ ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಆದರ ಸಮೀಕರಣಗಳು ರೇಷಿಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಲು ಬರುವುದೇ?



ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡೋಣ

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಲಗಳಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯವಾದ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡಿ ನಾವು ಹೊಸ ಚಲಗಳ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. $\frac{m}{n}$ ಹೊಸ ಚಲಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅದೇ ಸಮೀಕರಣ ರೇಷಿಯ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು. ಯಾವದೇ $\frac{m}{n}$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿಯ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭೇದ ಶೂನ್ಯ ಇರುವುದಿಲ್ಲ

ಝಝಝ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಝಝಝ

ಉದಾ. (1) ಬಿಡಿಸಿರಿ : $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7; \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

ಉತ್ತರ : $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7; \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{y}\right) = 7 \dots (I)$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{y}\right) = 5 \dots (II)$$

ಸಮೀಕರಣ (I) ಮತ್ತು (II) ರಲ್ಲಿ $\left(\frac{1}{x}\right) = m$ ಮತ್ತು $\left(\frac{1}{y}\right) = n$ ಎಂದು ತಿಳಿದಾಗ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವವು.

$$4m + 5n = 7 \dots (III)$$

$$3m + 4n = 5 \dots (IV)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲಾಗಿ

$$m = 3, n = -1 \text{ ಈ ಉತ್ತರ ದೊರೆಯುವುದು.}$$

$$\text{ಈಗ, } m = \frac{1}{x} \quad \therefore 3 = \frac{1}{x} \quad \therefore x = \frac{1}{3}$$

$$\text{ಅದರಂತೆ, } n = \frac{1}{y} \quad \therefore -1 = \frac{1}{y} \quad \therefore y = -1$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{1}{3}, -1\right) \text{ ಇದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉತ್ತರ ಇದೆ.}$$

ಉದಾ. (2) ಬಿಡಿಸಿರಿ : $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3$; $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

ಉತ್ತರ : $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3$; $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x-y}\right) + 1\left(\frac{1}{x+y}\right) = 3 \dots (I)$$

$$2\left(\frac{1}{x-y}\right) - 3\left(\frac{1}{x+y}\right) = 5 \dots (II)$$

ಸಮೀಕರಣ (I) ಮತ್ತು (II) ರಲ್ಲಿ $\left(\frac{1}{x-y}\right) = a$ ಮತ್ತು $\left(\frac{1}{x+y}\right) = b$ ತುಂಬಿದಾಗ ಮುಂದಿನಂತೆ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವುದು

$$4a + b = 3 \dots (III)$$

$$2a - 3b = 5 \dots (IV)$$

ಸಮೀಕರಣ (III) ಮತ್ತು (IV) ಬಿಡಿಸಿ $a = 1$ ಮತ್ತು $b = -1$ ಈ ಉತ್ತರಗಳು ದೊರೆಯುವವು

ಆದರೆ $a = \left(\frac{1}{x-y}\right)$ ಮತ್ತು $b = \left(\frac{1}{x+y}\right)$

$$\left(\frac{1}{x-y}\right) = 1 \text{ ಮತ್ತು } \left(\frac{1}{x+y}\right) = -1$$

$$x - y = 1 \dots (V)$$

$$x + y = -1 \dots (VI)$$

ಸಮೀಕರಣ (V) ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣ (VI) ಬಿಡಿಸಿರಿ $x = 0$ ಮತ್ತು $y = -1$ ಈ ಉತ್ತರಗಳು ದೊರೆಯುವವು.

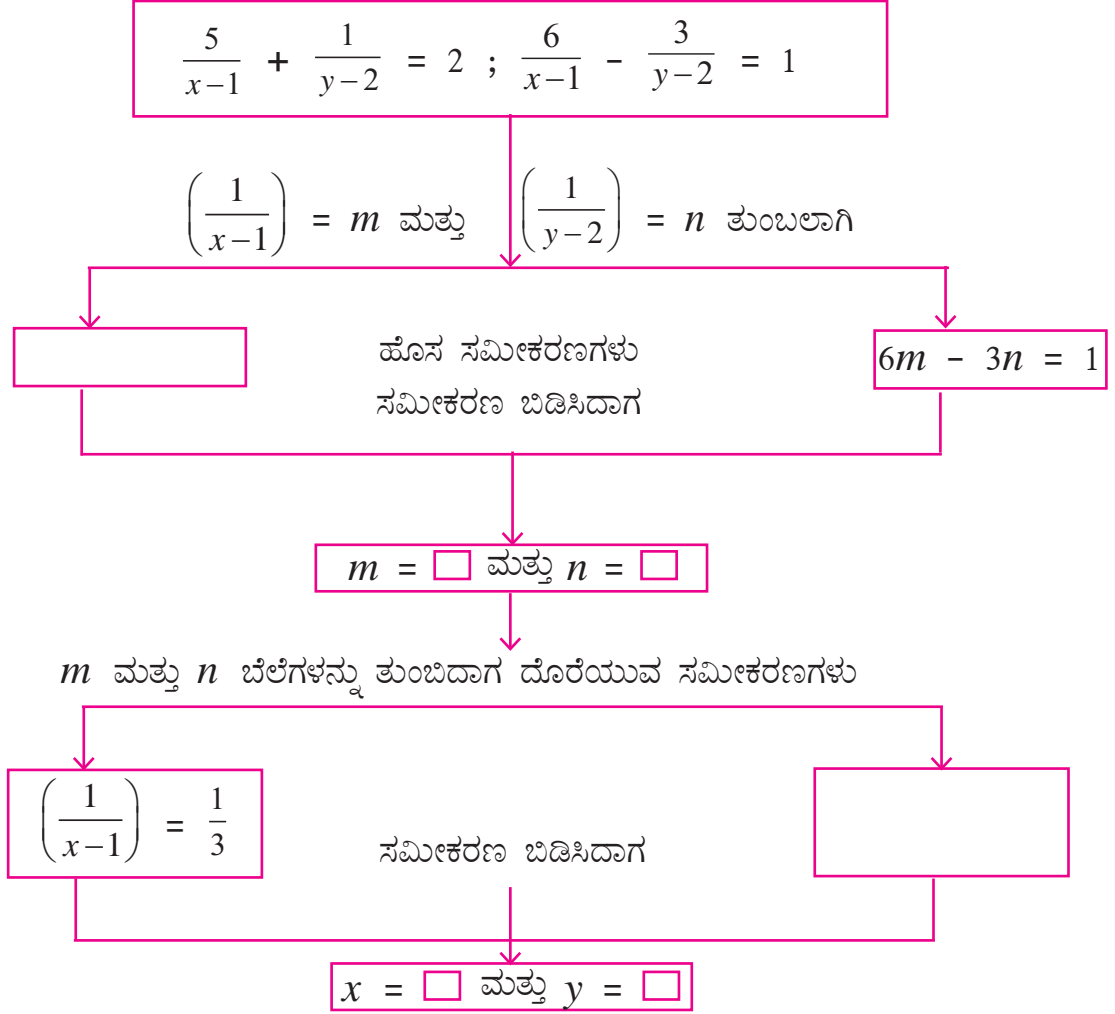
∴ $(x, y) = (0, -1)$ ಇವುಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರ ಇದೆ.



ಯೋಚಿಸೋಣ ಬನ್ನಿ

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಿ ದೊರೆಯುವ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣ ನಿರಸನ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪದ್ಧತಿ ಅಥವಾ ಆಲೇಖ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಉತ್ತರ ದೊರೆಯುವುದೇ? ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

ಕೃತಿ : ಚೌಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಮಾಡಿರಿ.



∴ $(x, y) = (\quad , \quad)$ ಇದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉತ್ತರ ಇವೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.4

1. ಕೆಳಗಿನ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(1) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 15 ; \frac{8}{x} + \frac{5}{y} = 7$

(2) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 ; \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

(3) $\frac{27}{x-2} + \frac{31}{y+3} = 85 ; \frac{31}{x-2} + \frac{27}{y+3} = 89$

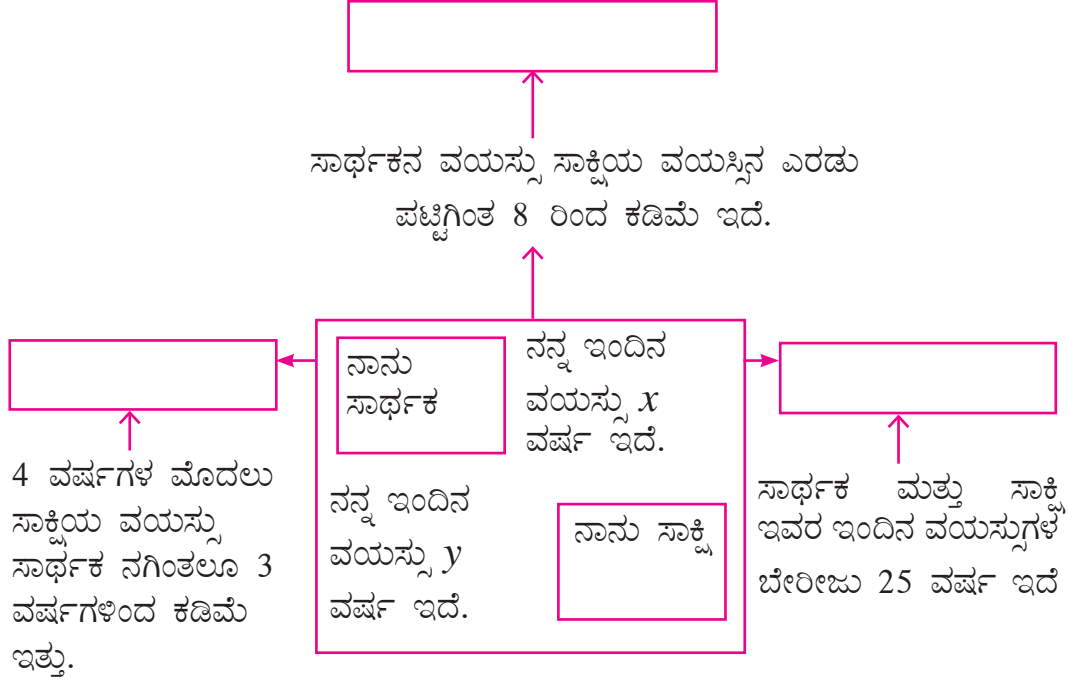
(4) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4} ; \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$



ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉಪಯೋಜನೆ Application of Simultaneous equations

ಕೃತಿ : ಮುಂದೆ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳ ಕೆಳಬದಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಕರಾರು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.



ಉದಾ. (1) ಒಂದು ಆಯತದ ಪರಿಮಿತಿ 40 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಆಯತದ ಉದ್ದವು ಅಗಲದ ಇಮ್ಮಡಿಗಿಂತ 2 ಸೆಮೀ ಹೆಚ್ಚಿದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಆಯತದ ಉದ್ದ x ಸೆಮೀ ಮತ್ತು ಅಗಲ y ಸೆಮೀ ಇದೆ.

ಮೊದಲನೆ ಕರಾರಿನಂತೆ -

$$2(x + y) = 40$$

$$x + y = 20 \dots (I)$$

ಎರಡನೇ ಕರಾರಿನಂತೆ -

$$x = 2y + 2$$

$$\therefore x - 2y = 2 \dots (II)$$

ಸಮೀಕರಣ (I) ಮತ್ತು (II) ನಿಶ್ಚಯಕ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸೋಣ

$$x + y = 20$$

$$x - 2y = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = [1 \times (-2)] - (1 \times 1) = -2 - 1 = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = [20 \times (-2)] - (1 \times 2) = -40 - 2 = -42$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2) - (20 \times 1) = 2 - 20 = -18$$

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ ಮತ್ತು } y = \frac{D_y}{D}$$

$$\therefore x = \frac{-42}{-3} \text{ ಮತ್ತು } y = \frac{-18}{-3}$$

$$\therefore x = 14 \text{ ಮತ್ತು } y = 6$$

\therefore ಆಯತದ ಉದ್ದ 14 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು ಅಗಲ 6 ಸೆಮೀ ಇದೆ.

ಉದಾ. (2)

ಸೇಲ ! ಸೇಲ !! ಸೇಲ !!! ಕೇವಲ ಎರಡೇ ದಿನ



ನನ್ನ ಹತ್ತಿರ ಕೆಲವು ಮುಳ್ಳಿನ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಡಿಜಿಟಲ ಗಡಿಯಾರುಗಳಿವೆ ನಾನು ಅವುಗಳನ್ನು ರಿಯಾಯತಿ ದರದಲ್ಲಿ ಮಾರುವವನಿದ್ದೇನೆ.

ಮೊದಲನೇ ದಿನದ ಮಾರಾಟ
ಮುಳ್ಳಿನ ಗಡಿಯಾರಗಳು = 11
ಡಿಜಿಟಲ ಗಡಿಯಾರಗಳು = 6
ನನಗೆ ದೊರೆತದ್ದು 4330 ರೂ.

ಎರಡನೇ ದಿನದ ಮಾರಾಟ
ಮುಳ್ಳಿನ ಗಡಿಯಾರಗಳು = 22
ಡಿಜಿಟಲ ಗಡಿಯಾರಗಳು = 5
ನನಗೆ ದೊರೆತದ್ದು 7330 ರೂ.

ಹಾಗಾದರೆ ನಾನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಕಾರದ ಗಡಿಯಾರಗಳ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರ : ಮುಳ್ಳಿನ ಒಂದು ಗಡಿಯಾರದ ಬೆಲೆ = x ರೂ.

ಒಂದು ಡಿಜಿಟಲ್ ಗಡಿಯಾರದ ಬೆಲೆ = y ರೂ.

ಮೊದಲನೇಯ ಕರಾರಿನಂತೆ

$$11x + 6y = 4330 \dots (I)$$

ಎರಡನೇ ಕರಾರಿನಂತೆ

$$22x + 5y = 7330 \dots (II)$$

ಸಮೀಕರಣ (I)ಕ್ಕೆ 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿ

$$22x + 12y = 8660 \dots (III)$$

ಸಮೀಕರಣ (II) ರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (III) ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡಲಾಗಿ

$$\begin{array}{r} 22x + 5y = 7330 \\ - \\ 22x + 12y = 8660 \\ \hline -7y = -1330 \end{array}$$

$$\therefore y = 190$$

$y = 190$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (I) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$11x + 6y = 4330$$

$$\therefore 11x + 6(190) = 4330$$

$$\therefore 11x + 1140 = 4330$$

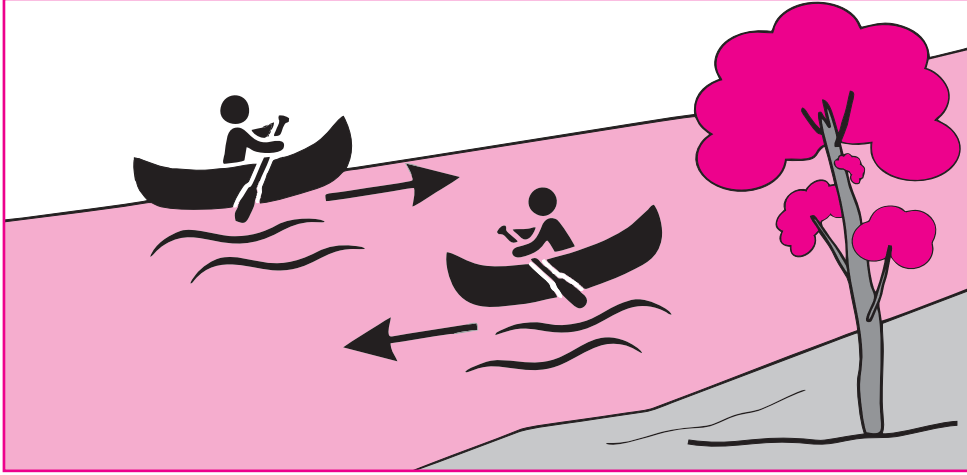
$$\therefore 11x = 3190$$

$$\therefore x = 290$$

\therefore ಮುಳ್ಳಿನ ಒಂದು ಗಡಿಯಾರದ ಬೆಲೆ 290 ರೂಪಾಯಿ

ಮತ್ತು ಒಂದು ಡಿಜಿಟಲ್ ಗಡಿಯಾರದ ಬೆಲೆ 190 ರೂ. ಇದೆ.

ಉದಾ. (3)



ಒಂದು ದೋಣಿಯು 6 ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ 16 ಕಿಮೀ ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ 24 ಕಿಮೀ ಹೋಗುವುದು

ಅದೇ ದೋಣಿಯು 13 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ 36 ಕಿಮೀ ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ 48 ಕಿಮೀ ಹೋಗುವುದು

ಹೇಳಿರಿ ನೋಡೋಣ ! ದೋಣಿಯು ನಿಂತ ನೀರಿನಲ್ಲಿಯ ವೇಗ ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗ ಎಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರ : ದೋಣಿಯು ನಿಂತ ನೀರಿನಲ್ಲಿಯ ವೇಗ = x ಕಿಮೀ/ಗಂಟೆ ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗ = y ಕಿಮೀ/ಗಂಟೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

\therefore ದೋಣಿಯ ಪ್ರವಾಹದ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿಯ ವೇಗ = $(x + y)$ ಕಿಮೀ/ಗಂಟೆ

ದೋಣಿಯ ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿಯ ವೇಗ = $(x - y)$ ಕಿಮೀ/ಗಂಟೆ

ಅಂತರ = ವೇಗ \times ವೇಳೆ \therefore ವೇಳೆ = $\frac{\text{ಅಂತರ}}{\text{ವೇಗ}}$

ದೋಣಿಯ ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ 16 ಕಿಮೀ ಅಂತರ ಚಲಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ವೇಳೆ = $\frac{16}{x-y}$ ಗಂಟೆ

ದೋಣಿಯ ಪ್ರವಾಹದ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ 24 ಕಿಮೀ ಅಂತರ ಚಲಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ವೇಳೆ = $\frac{24}{x+y}$ ಗಂಟೆ

ಮೊದಲನೆ ಕರಾರಿನಂತೆ

$$\frac{16}{x-y} + \frac{24}{x+y} = 6 \dots (I)$$

ಎರಡನೆಯ ಕರಾರಿನಂತೆ

$$\frac{36}{x-y} + \frac{48}{x+y} = 13 \dots (II)$$

ಸಮೀಕರಣ (I) ಮತ್ತು (II) ರಲ್ಲಿ $\frac{1}{x-y} = m$ ಮತ್ತು $\frac{1}{x+y} = n$ ತುಂಬಲಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವವು

$$16m + 24n = 6 \dots (III)$$

$$36m + 48n = 13 \dots (IV)$$

ಸಮೀಕರಣ (III) ಮತ್ತು (IV) ಬಿಡಿಸಿ $m = \frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{12}$

m ಮತ್ತು n ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ಪುನಃ ತುಂಬಲಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವವು.

$$x - y = 4 \dots (V)$$

$$x + y = 12 \dots (VI)$$

ಸಮೀಕರಣ (V) ಮತ್ತು (VI) ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $x = 8$, $y = 4$ ಈ ಬೆಲೆ ದೊರೆಯುವವು.

\therefore ದೋಣಿಯ ನಿಂತ ನೀರಿನಲ್ಲಿಯ ವೇಗ = 8 ಕಿಮೀ/ಗಂಟೆ ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಸದ ವೇಗ = 4 ಕಿಮೀ/ಗಂಟೆ

ಉದಾ. (4) ಕೆಲವು ಹಣ ಕೆಲವು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಸಮಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಂಚಲಾಗಿ, ಒಂದು ವೇಳೆ 10 ಮಕ್ಕಳು ಹೆಚ್ಚಿದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೆ 2 ರೂಪಾಯಿ ಕಡಿಮೆ ದೊರೆಯುತ್ತಿತ್ತು, ಒಂದು ವೇಳೆ 15 ಮಕ್ಕಳು ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೆ 6 ರೂಪಾಯಿ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ದೊರೆಯುತ್ತಿತ್ತು ಹಾಗಾದರೆ ಒಟ್ಟು ಹಣ ಎಷ್ಟು ಇದ್ದವು? ಆ ಹಣವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಹಂಚಲಾಯಿತು ?

ಉತ್ತರ : ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ತಿಳಿದು, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೆ ಹಂಚಿದ ಹಣ y ರೂಪಾಯಿಗಳು ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ

\therefore ಒಟ್ಟು xy ರೂಪಾಯಿ ಹಂಚಲಾಗಿದೆ.

ಮೊದಲನೆ ಕರಾರಿನಂತೆ

$$(x + 10)(y - 2) = xy$$

$$\therefore xy - 2x + 10y - 20 = xy$$

$$\therefore -2x + 10y = 20$$

$$\therefore -x + 5y = 10 \dots (I)$$

ಎರಡನೆಯ ಕರಾರಿನಂತೆ

$$(x - 15)(y + 6) = xy$$

$$\therefore xy + 6x - 15y - 90 = xy$$

$$\therefore 6x - 15y = 90$$

$$\therefore 2x - 5y = 30 \dots (II)$$

ಸಮೀಕರಣ (I) ರಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ (II) ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ

$$-x + 5y = 10$$

$$+ 2x - 5y = 30$$

$$\hline x = 40$$

$x = 40$ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (I) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$-x + 5y = 10$$

$$\therefore -40 + 5y = 10$$

$$\therefore 5y = 50$$

$$\therefore y = 10$$

ಒಟ್ಟು ಹಣ = $xy = 40 \times 10 = 400$ ರೂ.

\therefore 40 ಮಕ್ಕಳಿಗೆ 400 ರೂ. ಸಮನಾಗಿ ಹಂಚಲಾಯಿತು.

ಉದಾ. (5) ಒಂದು ಮೂರು ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅವುಗಳ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿನ 17 ಪಟ್ಟು ಇದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 198 ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ, ಅದೇ ಅಂಕಗಳ ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊರೆಯುವುದು. ಅದರಂತೆ ಏಕಕ ಮತ್ತು ಶತಕ ಸ್ಥಾನಗಳ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಇದು ಮಧ್ಯದ ಅಂಕಿಗಿಂತ 1 ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಮೂರು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಶತಕ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕ x ತಿಳಿಯುವಾ ಮತ್ತು ಏಕಕ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕ y ತಿಳಿಯುವಾ

ದಶಕ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕ (ಮಧ್ಯದ) = ಕೊನೆಯ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜಿಗಿಂತ 1 ರಿಂದ ದೊಡ್ಡದಿದೆ.

ಶತಕ	ದಶಕ	ಏಕಕ
x	$x + y + 1$	y

$$\therefore \text{ಮೂರು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ} = 100x + 10(x + y + 1) + y$$

$$= 100x + 10x + 10y + 10 + y = 110x + 11y + 10$$

$$\text{ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು} = x + (x + y + 1) + y = 2x + 2y + 1$$

\therefore ಮೊದಲನೆಯ ಕರಾರಿನಂತೆ

$$\text{ಮೂರು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ} = 17 \times (\text{ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು})$$

$$\therefore 110x + 11y + 10 = 17 \times (2x + 2y + 1)$$

$$\therefore 110x + 11y + 10 = 34x + 34y + 17$$

$$\therefore 76x - 23y = 7 \dots (I)$$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಅಂಕಗಳನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗಿ ದೊರೆಯುವ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆ

$$= 100y + 10(x + y + 1) + x = 110y + 11x + 10$$

$$\text{ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ} = 110x + 11y + 10$$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡನೆಯ ಕರಾರಿನಂತೆ, ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆ + 198 = ಅಂಕಗಳನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಿಂದ ಬರೆದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆ

$$\therefore 110x + 11y + 10 + 198 = 110y + 11x + 10$$

$$\therefore 99x - 99y = -198$$

$$\therefore x - y = -2$$

$$\text{ಅಂದರೆ } x = y - 2 \dots (II)$$

ಸಮೀಕರಣ (II) ರಲ್ಲಿ ದೊರೆತ x ದ ಬೆಲೆ ಸಮೀಕರಣ (I) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$\therefore 76(y - 2) - 23y = 7$$

$$\therefore 76y - 152 - 23y = 7$$

$$53y = 159$$

$$\therefore y = 3 \quad \therefore \text{ಏಕಕ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕ} = 3$$

$y = 3$ ಈ ಬೆಲೆ ಸಮೀಕರಣ (II) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$x = y - 2$$

$$\therefore x = 3 - 2 = 1$$

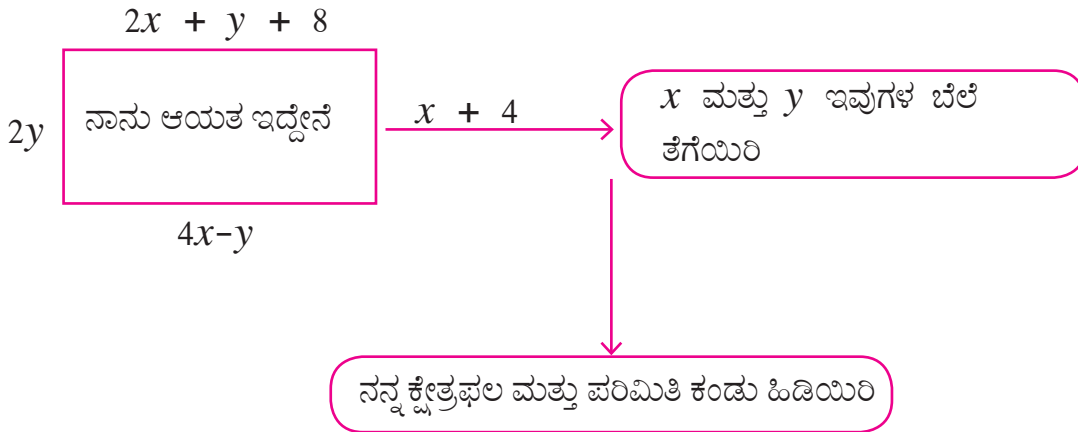
$$\therefore x = 1 \quad \therefore \text{ಶತಕ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕ} = 1$$

$$\text{ದಶಕ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕ} = \text{ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿಯ ಅಂಕ} = x + y + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$\therefore \text{ಕೊಟ್ಟ ಮೂರು ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆ} = 153.$$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.5

1. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 3 ಇದ್ದು, ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಇದು ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಇಮ್ಮಡಿ ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು 19 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಕೃತಿ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.



3. ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿನ ಇಮ್ಮಡಿ ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ ಬೇರೀಜು 70 ಬರುವುದು ಮತ್ತು ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸಿನ ಇಮ್ಮಡಿ ಕೂಡಿಸಲಾಗಿ ಬೇರೀಜು 95 ಬರುವುದು, ಹಾಗಾದರೆ ಅವರಿಬ್ಬರ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಛೇದ ಇದು ಅಂಶದ ಇಮ್ಮಡಿಗಿಂತ 4 ರಿಂದ ದೊಡ್ಡದಿದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಇವೆರಡು 6 ರಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಲಾಗಿ ಛೇದವು ಅಂಶದ 12 ಪಟ್ಟು ಆಗುವುದು ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. 10 ಟನ್ನುಗಳ ಕ್ಷಮತೆ ಇರುವ ಸರಕು ಸಾಗಾಣಿಕೆ ಟ್ರಕ್‌ದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಹೀಗೆ ಎರಡು ಪ್ರಕಾರದ ವಿಶಿಷ್ಟ ತೂಕದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ತುಂಬಲಾಗಿದೆ. A ಪ್ರಕಾರದ 150 ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಮತ್ತು B ಪ್ರಕಾರದ 100 ಪೆಟ್ಟಿಗೆ ತುಂಬಿದಾಗ 10 ಟನ್ನುಗಳ ಕ್ಷಮತೆ ಪೂರ್ಣವಾಗುವುದು. ಒಂದು ವೇಳೆ A ಪ್ರಕಾರದ 260 ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳು ತುಂಬಿದಾಗ ಆ ಟ್ರಕ್ ಅದರ 10 ಟನ್ನುಗಳ ಪೂರ್ಣ ಕ್ಷಮತೆಯಿಂದ ತುಂಬಲು B ಪ್ರಕಾರದ 40 ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಬೇಕಾಗುವವು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಕಾರದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ತೂಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ★ 6. ವಿಶಾಲನು 1900 ಕಿಮೀ ಪ್ರವಾಸದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಅಂತರ ಬಸ್ಸಿನಿಂದ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಅಂತರ ವಿಮಾನದಿಂದ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿದನು. ಬಸ್ಸಿನ ಸರಾಸರಿ ವೇಗ 60 ಕಿಮೀ ಪ್ರತಿ ಗಂಟೆ ಇದೆ. ಅದರಂತೆ ವಿಮಾನದ ಸರಾಸರಿ ವೇಗ 700 ಕಿಮೀ/ಗಂಟೆ ಇರುವುದು. ಒಂದು ವೇಳೆ ಈ ಪ್ರವಾಸ ಅವನು 5 ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿದ್ದರೆ, ವಿಶಾಲನು ಬಸ್ಸಿನಿಂದ ಎಷ್ಟು ಅಂತರ ಪ್ರವಾಸ ಮಾಡಿದಂತಾಯಿತು?

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ 1

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪರ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿಯ ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ.

(1) $4x + 5y = 19$ ಇದರ ಆಲೇಖ ತೆಗೆಯಲು $x = 1$ ಇದ್ದರೆ y ದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) -3

(2) x ಮತ್ತು y ಚಲಗಳಿರುವ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $D_x = 49$, $D_y = -63$ ಮತ್ತು $D = 7$ ಇದ್ದಾಗ $x =$ ಎಷ್ಟು ?

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) $-\frac{1}{7}$

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}$ ಈ ನಿಶ್ಚಯಕದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(A) -1 (B) -41 (C) 41 (D) 1

(4) $x + y = 3$; $3x - 2y - 4 = 0$ ಈ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ D ಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

(A) 5 (B) 1 (C) -5 (D) -1

(5) $ax + by = c$; ಮತ್ತು $mx + ny = d$ ಈ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $an \neq bm$ ಇದ್ದರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ -

(A) ಒಂದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಉತ್ತರ ಇರುವುದು. (B) ಉತ್ತರ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.
(C) ಅಸಂಖ್ಯ ಉತ್ತರ ಇರುವವು (D) ಕೇವಲ ಎರಡು ಉತ್ತರ ಇರುವವು.

2. $2x - 6y = 3$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಲೇಖ ತೆಗೆಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿ

x	-5	<input type="text"/>
y	<input type="text"/>	0
(x, y)	<input type="text"/>	<input type="text"/>

3. ಕೆಳಗಿನ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಲೇಖ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(1) $2x + 3y = 12$; $x - y = 1$

(2) $x - 3y = 1$; $3x - 2y + 4 = 0$

(3) $5x - 6y + 30 = 0$; $5x + 4y - 20 = 0$

(4) $3x - y - 2 = 0$; $2x + y = 8$

(5) $3x + y = 10$; $x - y = 2$

4. ಕೆಳಗಿನ ನಿಶ್ಚಯಕಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

5. ಕೆಳಗಿನ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸಿ.

(1) $6x - 3y = -10$; $3x + 5y - 8 = 0$

(2) $4m - 2n = -4$; $4m + 3n = 16$

(3) $3x - 2y = \frac{5}{2}$; $\frac{1}{3}x + 3y = -\frac{4}{3}$

(4) $7x + 3y = 15$; $12y - 5x = 39$

(5) $\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x-y}{4}$

6. ಕೆಳಗಿನ ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿ.

(1) $\frac{2}{x} + \frac{2}{3y} = \frac{1}{6}$; $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 0$ (2) $\frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 27$; $\frac{13}{2x+1} + \frac{7}{y+2} = 33$

(3) $\frac{148}{x} + \frac{231}{y} = \frac{527}{xy}$; $\frac{231}{x} + \frac{148}{y} = \frac{610}{xy}$ (4) $\frac{7x-2y}{xy} = 5$; $\frac{8x+7y}{xy} = 15$

(5) $\frac{1}{2(3x+4y)} + \frac{1}{5(2x-3y)} = \frac{1}{4}$; $\frac{5}{(3x+4y)} - \frac{2}{(2x-3y)} = -\frac{3}{2}$

7. ಕೆಳಗಿನ ಶಾಬ್ದಿಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿ.

(1) ಒಂದು ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಅಂಕಗಳ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳ ಬೇರಿನು 143 ಇದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯ ಅಂಕ ಇದು ದಶಕ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಗಿಂತ 3 ರಿಂದ ದೊಡ್ಡದಿದ್ದರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಉತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿ.

ಏಕಕ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕ = x

ದಶಕ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕ = y

∴ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ = $\square y + x$

ಅಂಕಗಳ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿ ದೊರೆತ ಸಂಖ್ಯೆ = $\square x + y$

ಮೊದಲನೆಯ ಕಾರಾನಂತೆ

ಎರಡು ಅಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ + ಅಂಕಗಳ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿ = 143 ದೊರೆತ ಸಂಖ್ಯೆ

$10y + x + \square = 143$

$\square x + \square y = 143$

$x + y = \square \dots \dots (I)$

ಎರಡನೆಯ ಕಾರಾನಂತೆ

ಏಕಕ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕ = ದಶಕ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕ + 3

$x = \square + 3$

$x - y = 3 \dots \dots (II)$

(I) ಮತ್ತು (II) ರ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿ.

$$2x = \square \quad \therefore x = 8$$

$x = 8$ ಸಮೀಕರಣ (I) ರಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ

$$x + y = 13$$

$$8 + \square = 13$$

$$\therefore y = \square$$

$$\text{ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ} = 10y + x$$

$$= \square + 8 = 58$$

- (2) ಕಾಂತಾಬಾಯಿಯು ಅಂಗಡಿಯಿಂದ ಒಂದು ವರೆ ಕಿಲೋ ಚಹಾ ಪೌಡರ ಮತ್ತು ಐದು ಕಿಲೋ ಸಕ್ಕರೆ ತಂದಳು. ಅಂಗಡಿಗೆ ಹೋಗಿ ಬರಲು ಅವಳಿಗೆ 50 ರೂ. ಆಟೋ ಬಾಡಿಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾಯಿತು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಅವಳಿಗೆ 700 ರೂ ಖರ್ಚು ಆಯಿತು. ಆನ್‌ಲಾಯಿನ್ ಆರ್ಡರ್ ಮಾಡಿದಾಗ ವಸ್ತುಗಳು ಮನೆಯ ವರೆಗೆ ತಂದು ಮುಟ್ಟಿಸುವರು ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದಾಗ ಅವಳು ಮುಂದಿನ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ 2 ಕಿಲೋ ಗ್ರ್ಯಾಂ. ಚಹಾ ಪೌಡರ ಮತ್ತು 7 ಕಿಲೋ ಗ್ರ್ಯಾಂ ಸಕ್ಕರೆ ಆನ್‌ಲಾಯಿನ್‌ದಿಂದ ತರಿಸಿದಳು, ಆಗ ಅವಳಿಗೆ 880 ರೂ. ಖರ್ಚಾಯಿತು ಹಾಗಾದರೆ ಚಹಾ ಪೌಡರ ಮತ್ತು ಸಕ್ಕರೆಯ ಪ್ರತಿ ಕಿಲೋ ಗ್ರ್ಯಾಂ ದರ ಎಷ್ಟು ?

- (3) ಅನುಷ್ಕಳ ಹತ್ತಿರ 100 ರೂಪಾಯಿಗಳ ನೋಟು x ಮತ್ತು 50 ರೂಪಾಯಿಗಳ ನೋಟು y

ಅನುಷ್ಕಳು ಆನಂದನಿಗೆ ಮೇಲಿನಂತೆ ನೋಟುಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಾಗ 2500 ರೂಪಾಯಿ ಆಗುವುದು ಸಮೀಕರಣ - - - - - I

ಆನಂದನು ಮೂರು ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿ ಹಣ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಆ ಹಣ 500 ರೂ. ದಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತಿತ್ತು ಸಮೀಕರಣ - - - - - II

ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ

100 ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ \square 50 ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ \square

- (4) ಮನಿಷಾ ಮತ್ತು ಸವಿತಾ ಇವರ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸಿನ ಬೇರೀಜು 31 ವರ್ಷ ಇದೆ. 3 ವರ್ಷಗಳ ಮೊದಲು ಮನಿಷಾಳ ವಯಸ್ಸು ಸವಿತಾಳ ಆಗಿನ ವಯಸ್ಸಿನ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟು ಇತ್ತು, ಹಾಗಾದರೆ ಅವರ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ★ (5) ಒಂದು ಕಾರಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ಕುಶಲ ಮತ್ತು ಅಕುಶಲ ದಿನಗೂಲಿ ಕಾರ್ಮಿಕರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ 5 : 3 ಇದೆ. ಒಬ್ಬ ಕುಶಲ ಮತ್ತು ಒಬ್ಬ ಅಕುಶಲ ಕೆಲಸಗಾರರ ಒಂದು ದಿನದ ಕೂಲಿ 720 ರೂಪಾಯಿ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕುಶಲ ಕಾರ್ಮಿಕರ ಮತ್ತು ಅಕುಶಲ ಕಾರ್ಮಿಕರ ದಿನಗೂಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ★ (6) ಒಂದು ಸರಳ ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲೆ A ಮತ್ತು B ಹೀಗೆ ಎರಡು ಸ್ಥಳಗಳಿವೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂತರ 30 ಕಿಮೀ ಇದೆ. ಹಮೀದನು ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲಿನಿಂದ A ದಿಂದ B ಗೆ ಹೋಗುವಾಗ ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಜೋಸೆಫನು B ದಿಂದ A ದ ಕಡೆಗೆ ಮೋಟಾರ್‌ಸೈಕಲಿನಿಂದ ಹೊರಟನು. ಅವರಿಬ್ಬರು 20 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರಿಗೊಬ್ಬರು ಭೇಟಿಯಾಗುವರು. ಜೋಸೆಫನು ಒಂದು ವೇಳೆ ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆಯಿಂದ ಹೋಗಿದ್ದರೆ ಅವನಿಗೆ ಹಮೀದನು ಮೂರು ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ಭೇಟಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಪ್ರವಾಸದ ವೇಗ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



2

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು



ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ

- ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ
- ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವ ಪದ್ಧತಿ
- ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವರೂಪ
- ಮೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣತಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಬಂಧ
- ಣವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉಪಯೋಜನೆ



ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮಿತ್ರರೆ, ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಬಹುಪದಿಯ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತದ ಮೇಲಿಂದ ಆಗುವ ಪ್ರಕಾರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಒಂದೇ ಚಲದಲ್ಲಿಯ, ಯಾವ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತ ಒಂದು ಇರುತ್ತದೆಯೋ, ಅದಕ್ಕೆ ರೇಷೀಯ ಬಹುಪದಿ ಮತ್ತು ಯಾವುದರ ಘಾತ ಎರಡು ಇರುತ್ತದೆ, ಅದಕ್ಕೆ ವರ್ಗ ಬಹುಪದಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಕೃತಿ : ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದಿಗಳ ರೇಷೀಯ ಬಹುಪದಿ ಮತ್ತು ವರ್ಗ ಬಹುಪದಿ ಹೀಗೆ ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡಿ.

$$5x + 9, \quad x^2 + 3x - 5, \quad 3x - 7, \quad 3x^2 - 5x, \quad 5x^2$$

ರೇಷೀಯ ಬಹುಪದಿ

ವರ್ಗ ಬಹುಪದಿ

ಈಗ ನಾವು ವರ್ಗ ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ 0 ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಯಾವ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವುದು ಅದರ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವಾ. ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ನಾವು ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಸಲ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: ಸಂಕೇತನು 200 ಚೌ.ಮೀಟರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿ ಭೂಖಂಡ ಖರೀದಿಸಿದನು. ಭೂಖಂಡದ ಉದ್ದವು ಅದರ ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ 10 ಮೀಟರನಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಭೂಖಂಡದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಭೂಖಂಡದ ಅಗಲ x ಮೀಟರ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$$\therefore \text{ಉದ್ದ} = (x + 10) \text{ ಮೀಟರ}$$

ಆಯತಾಕೃತಿ ಭೂಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ಉದ್ದ \times ಅಗಲ

$$\therefore 200 = (x + 10) \times x$$

$$\therefore 200 = x^2 + 10x$$

$$\text{ಅಂದರೆ } x^2 + 10x = 200$$

$$\therefore x^2 + 10x - 200 = 0$$

ಈಗ $x^2 + 10x - 200 = 0$ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ ನಾವು ಭೂಖಂಡದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲ ನಿಶ್ಚಯಿಸಬಹುದು. ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸುವುದು ಎಂಬುದರ ಅಭ್ಯಾಸ ನಾವು ಮಾಡೋಣ.



ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಕೃತಿ : $x^2 + 3x - 5$, $3x^2 - 5x$, $5x^2$; ಈ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಅದರಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿ ಅದನ್ನು ರಿಕ್ತ ಚೌಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯ ಪ್ರಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$x^2 + 3x - 5, \quad 3x^2 - 5x + 0, \quad 5x^2 + 0x + 0$$

- ◆ x^2 ದ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ , ಮತ್ತು ಅಂದರೆ 0 ಇಲ್ಲ
 - ◆ x ದ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 3, ಮತ್ತು ಇವೆ.
 - ◆ ಸ್ಥಿರ ಪದಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ , ಮತ್ತು ಇವೆ.
- ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಬಹುಪದಿಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಪದ 0 ಇದೆ.



ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ (Standard form of quadratic equation)

ಒಂದೇ ಚಲದಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ಸಮೀಕರಣದ ಎಲ್ಲ ಘಾತಾಂಕಗಳು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದು ಚಲದ ಘಾತಾಂಕ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿದರೆ 2 ಇರುತ್ತದೆಯೋ ಆ ಸಮೀಕರಣವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಇರುತ್ತದೆ.

ಅದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ $ax^2 + bx + c = 0$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು. $ax^2 + bx + c = 0$, ಇದರಲ್ಲಿ a , b ಮತ್ತು c ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದು a ಇದು ಶೂನ್ಯೇತರ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವುದು.

$ax^2 + bx + c = 0$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿಯ ಸಮೀಕರಣ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ ಎನ್ನುವರು.

ಕೃತಿ : ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ	ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ	a	b	c
$x^2 - 4 = 0$	$x^2 + 0x - 4 = 0$	1	0	-4
$y^2 = 2y - 7$
$x^2 + 2x = 0$

ಝಝಝ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಝಝಝ

ಉದಾ. (1) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ಸಮೀಕರಣಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

- (1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ (2) $9y^2 + 5 = 0$
- (3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ (4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

ಉತ್ತರ : (1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ ಇದರಲ್ಲಿ x ಚಲದ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತಾಂಕ 2 ಇದೆ. x ಇದು ಒಂದೇ ಚಲವಿದ್ದು
∴ ಈ ಸಮೀಕರಣ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಇದೆ.

(2) $9y^2 + 5 = 0$ ಇದರಲ್ಲಿ ಚಲಇದ್ದು ಚಲದ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತಾಂಕ ಇದೆ.

∴ ಈ ಸಮೀಕರಣ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ .

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಚಲದ ಇದ್ದರೂ ಸಹ ಚಲದ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತಾಂಕ 2 ಇಲ್ಲ.

∴ ಈ ಸಮೀಕರಣ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ .

(4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

∴ $l(l - 5) + 2(l - 5) = 0$

∴ $l^2 - 5l + 2l - 10 = 0$

∴ $l^2 - 3l - 10 = 0$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಒಂದೇ ಚಲ ಇದ್ದು ಚಲದ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತಾಂಕ ಇದೆ.

∴ ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ .



ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು (ಉತ್ತರಗಳು) (Roots of a quadratic equation)

ನಾವು ಹಿಂದಿನ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಂತೆ, x ದ a ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ ಶೂನ್ಯ ಬರುತ್ತಿದ್ದರೆ $(x-a)$ ಇದು ಆ ಬಹುಪದಿಯ ಅವಯವ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $p(x)$ ಇದು ಬಹುಪದಿ ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು $p(a) = 0$ ಇದ್ದರೆ ಆಗ $(x-a)$ ಇದು $p(x)$ ದ ಅವಯವ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ a ಇದು $p(x) = 0$ ದ ಒಂದು ಉತ್ತರ ಇದೆ. ಅಥವಾ a ಇದು $p(x) = 0$ ದ ಮೂಲ ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ

$x^2 + 5x - 6$ ಈ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ $x = -6$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು

$$x^2 + 5x - 6 = (-6)^2 + 5 \times (-6) - 6 = 36 - 30 - 6 = 0$$

∴ $x = -6$ ಇದು $x^2 + 5x - 6 = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ಉತ್ತರ ಇದೆ. ಅಂದರೆ -6 ಇದು $x^2 + 5x - 6 = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ ಇದೆ.

$x^2 + 5x - 6$ ಈ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ $x = 2$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು

$$x^2 + 5x - 6 = 2^2 + 5 \times 2 - 6 = 4 + 10 - 6 = 8 \neq 0$$

∴ $x = 2$ ಇದು $x^2 + 5x - 6 = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರ ಇಲ್ಲ.

ಝಝಝ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಝಝಝ

ಉದಾ. $2x^2 - 7x + 6 = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ (i) $x = \frac{3}{2}$ ಮತ್ತು (ii) $x = -2$ ಇವು ಉತ್ತರ ಇವೆಯೋ ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ: (i) $2x^2 - 7x + 6$ ಈ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ $x = \frac{3}{2}$ ಈ ಬೆಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಾ

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{3}{2}\right) + 6$$

$$= 2 \times \frac{9}{4} - \frac{21}{2} + 6$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{21}{2} + \frac{12}{2} = 0$$

∴ ಈ ಸಮೀಕರಣದ $x = \frac{3}{2}$ ಇದು ಒಂದು ಉತ್ತರ ಇದೆ.

(ii) $2x^2 - 7x + 6$ ಈ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ $x = -2$ ಈ ಬೆಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬಹುಪದಿಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಾ

$$2x^2 - 7x + 6 = 2(-2)^2 - 7(-2) + 6$$

$$= 2 \times 4 + 14 + 6$$

$$= 28 \neq 0$$

∴ $x = -2$ ಇದು $2x^2 - 7x + 6 = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರ ಇಲ್ಲ.

ಕೃತಿ : ಒಂದು ವೇಳೆ $x = 5$ ಇದು $kx^2 - 14x - 5 = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ ಇದ್ದರೆ, k ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಪೂರ್ಣಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $kx^2 - 14x - 5 = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ ಇದೆ.

∴ $x = \text{$ ಈ ಬೆಲೆ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ತುಂಬಲಾಗಿ.

$$\therefore k \text{$$

$$\therefore 25k - 70 - 5 = 0$$

$$\therefore 25k - \text{$$

$$\therefore 25k = \text{$$

$$\therefore k = \frac{\text{$$



ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ ಇದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ a , b ಮತ್ತು c ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದು a ಇದು ಶೂನ್ಯೇತರ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ.

(2) ಚಲದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳು ಸಮಾನ ಆಗುತ್ತವೆ, (ಅಂದರೆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಸಮಾಧಾನ ಆಗುವದು) ಆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರಗಳು ಅಥವಾ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.1

- ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
- ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಮೀಕರಣಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿ.
 - (1) $x^2 + 5x - 2 = 0$
 - (2) $y^2 = 5y - 10$
 - (3) $y^2 + \frac{1}{y} = 2$
 - (4) $x + \frac{1}{x} = -2$
 - (5) $(m + 2)(m - 5) = 0$
 - (6) $m^3 + 3m^2 - 2 = 3m^3$
- ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು $ax^2 + bx + c = 0$ ಈ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ a, b, c ಗಳ ಬೆಲೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿ.
 - (1) $2y = 10 - y^2$
 - (2) $(x - 1)^2 = 2x + 3$
 - (3) $x^2 + 5x = -(3 - x)$
 - (4) $3m^2 = 2m^2 - 9$
 - (5) $p(3 + 6p) = -5$
 - (6) $x^2 - 9 = 13$
- ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ ಚಲದ ಬೆಲೆ ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳು ಇವೆಯೋ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿ.
 - (1) $x^2 + 4x - 5 = 0, x = 1, -1$
 - (2) $2m^2 - 5m = 0, m = 2, \frac{5}{2}$
- $x = 3$ ಇದು $kx^2 - 10x + 3 = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣ ಒಂದು ಮೂಲ ಇದ್ದರೆ k ದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?
- $5m^2 + 2m + k = 0$ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ $\frac{-7}{5}$ ಇದ್ದರೆ k ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ: $5m^2 + 2m + k = 0$ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ ಇದೆ.

$\therefore m = \text{}$ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣ ತುಂಬಲಾಗಿ

$\therefore 5 \times \text{}^2 + 2 \times \text{} + k = 0$

$\therefore \text{} + \text{} + k = 0$

$\therefore \text{} + k = 0$

$\therefore k = \text{}$



ನಾವು ಹಿಂದಿನ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಬಹುಪದಿ ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ $x^2 - 4x - 5, 2m^2 - 5m, a^2 - 25$ ಇಂತಹ ವರ್ಗ ಬಹುಪದಿಗಳ ಅವಯವ ತೆಗೆಯುವ ಪದ್ಧತಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಮಾಡಿ ಉಜ್ಜಣೆ ಮಾಡೋಣ.

ಕೃತಿ : ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಬಹುಪದಿಗಳ ಅವಯವ ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 - 4x - 5 \\ &= \underline{x^2 - 5x} + \underline{1x - 5} \\ &= x(\dots) + 1(\dots) \\ &= (\dots)(\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & 2m^2 - 5m \\ &= \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & a^2 - 25 \\ &= a^2 - 5^2 \\ &= (\dots)(\dots) \end{aligned}$$



ಅವಯವ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು
(Solution of a quadratic equation by factorisation)

ನಾವು ಚಲಕ್ಕೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ಇದು ಬಹಳ ಸಮಯ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಪದ್ಧತಿ ಇದೆ. ಅದ ಕಾರಣ ನಾವು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಅವಯವ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವವರಿದ್ದೇವೆ.

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$$

ಇಲ್ಲಿ $(x - 5)$ ಮತ್ತು $(x + 1)$ ಈ ವರ್ಗ ಬಹುಪದಿ $x^2 - 4x - 5$ ದ ಎರಡು ರೇಷಿಯ ಅವಯವಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x^2 - 4x - 5$ ಈ ವರ್ಗ ಬಹುಪದಿಯಿಂದ ಸಿಗುವ $x^2 - 4x - 5 = 0$ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಕಾರ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು.

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

ಯಾವದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಶೂನ್ಯವಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾದರೂ ಶೂನ್ಯವಿರಲೇಬೇಕು.

$$\therefore x - 5 = 0 \text{ ಅಥವಾ } x + 1 = 0$$

$$\therefore x = 5 \text{ ಅಥವಾ } x = -1$$

\therefore ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು 5 ಮತ್ತು -1 ಇವೆ.

ಈ ಉದಾಹರಣೆ ಬಿಡಿಸುವಾಗ ನಾವು ಮೊದಲು ವರ್ಗಬಹುಪದಿಯ ಎರಡು ರೇಷಿಯ ಅವಯವಗಳನ್ನು ದೊರಕಿಸಿಕೊಂಡೆವು. ಈ ಪದ್ಧತಿಗೆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಬಿಡಿಸುವ ಅವಯವ ಪದ್ಧತಿ ಎನ್ನೋಣ.

ಝಝಝ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು **ಝಝಝ**

ಉದಾ. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅವಯವ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$(1) m^2 - 14m + 13 = 0 \quad (2) 3x^2 - x - 10 = 0$$

$$(3) 3y^2 = 15y \quad (4) x^2 = 3 \quad (5) 6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$$

$$(1) m^2 - 14m + 13 = 0$$

$$\therefore \underline{m^2 - 13m} - \underline{1m + 13} = 0$$

$$\therefore m(m - 13) - 1(m - 13) = 0$$

$$\therefore (m - 13)(m - 1) = 0$$

$$\therefore m - 13 = 0 \text{ ಅಥವಾ } m - 1 = 0$$

$$\therefore m = 13 \text{ ಅಥವಾ } m = 1$$

\therefore ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು 13 ಮತ್ತು 1 ಇವೆ.

$$(2) 3x^2 - x - 10 = 0$$

$$\therefore \underline{3x^2 - 6x} + \underline{5x - 10} = 0$$

$$\therefore 3x(x - 2) + 5(x - 2) = 0$$

$$\therefore (3x + 5)(x - 2) = 0$$

$$\therefore 3x + 5 = 0 \text{ ಅಥವಾ } x - 2 = 0$$

$$\therefore x = -\frac{5}{3} \text{ ಅಥವಾ } x = 2$$

\therefore ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $-\frac{5}{3}$ ಅಥವಾ 2 ಇವೆ.

$$(3) 3y^2 = 15y$$

$$\therefore 3y^2 - 15y = 0$$

$$\therefore 3y(y - 5) = 0$$

$$\therefore 3y = 0 \text{ ಅಥವಾ } y - 5 = 0$$

$$\therefore y = 0 \text{ ಅಥವಾ } y = 5$$

\therefore ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು 0 ಮತ್ತು 5 ಇವೆ.

$$(4) x^2 = 3$$

$$\therefore x^2 - 3 = 0$$

$$\therefore x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\therefore (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x + \sqrt{3} = 0 \text{ ಅಥವಾ } x - \sqrt{3} = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{3} \text{ ಅಥವಾ } x = \sqrt{3}$$

\therefore ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $-\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\sqrt{3}$

$$(5) 6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$$

$$\therefore 6\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$$

$$\therefore 6\sqrt{3}x^2 + 9x - 2x - \sqrt{3} = 0$$

$$\therefore 3\sqrt{3}x(2x + \sqrt{3}) - 1(2x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore (2x + \sqrt{3})(3\sqrt{3}x - 1) = 0$$

$$\therefore 2x + \sqrt{3} = 0 \text{ ಅಥವಾ } 3\sqrt{3}x - 1 = 0$$

$$\therefore 2x = -\sqrt{3} \text{ ಅಥವಾ } 3\sqrt{3}x = 1$$

$$\therefore x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

\therefore ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

$$6\sqrt{3} \times -\sqrt{3} = -18$$

$$\begin{array}{c} -18 \\ 9 \quad -2 \end{array}$$

$$9 = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.2

1. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅವಯವ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

$$(1) x^2 - 15x + 54 = 0$$

$$(2) x^2 + x - 20 = 0$$

$$(3) 2y^2 + 27y + 13 = 0$$

$$(4) 5m^2 = 22m + 15$$

$$(5) 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$(6) 6x - \frac{2}{x} = 1$$

(7) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅವಯವ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಿ.

ಉತ್ತರ (7) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$$\therefore \sqrt{2}x^2 + \square + \square + 5\sqrt{2} = 0$$

$$\therefore x(\dots) + \sqrt{2}(\dots) = 0$$

$$\therefore (\dots)(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore (\dots) = 0 \text{ ಅಥವಾ } (x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore x = \square \text{ ಅಥವಾ } x = -\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು } \square \text{ ಮತ್ತು } -\sqrt{2}$$

$$(8) 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0 \quad (9) 2m(m - 24) = 50$$

$$(10) 25m^2 = 9$$

$$(11) 7m^2 = 21m$$

$$(12) m^2 - 11 = 0$$



ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವುದು

(Solution of a quadratic equation by completing the square)

ಶಿಕ್ಷಕ : $x^2 + 10x + 2 = 0$ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಇದೆಯೋ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲ ?

ಯೋಗೇಶ : ಹೌದು ಗುರುಗಳೆ, ಕಾರಣ ಅದು $ax^2 + bx + c = 0$ ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಇಲ್ಲಿ x ಈ ಚಲದ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತಾಂಕ 2 ಇದೆ. a ದ ಬೆಲೆ ಶೂನ್ಯ ಇಲ್ಲ.

ಶಿಕ್ಷಕ : ಈ ಸಮೀಕರಣ ನಿಮಗೆ ಬಿಡಿಸಲು ಬರುವದೇ ?

ವರ್ಷಾ : ಬರುವದಿಲ್ಲ ಗುರುಗಳೆ. ಕಾರಣ 2 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಯವಗಳ ಬೇರೀಜು 10 ಬರುವ ಹಾಗೆ ಹೇಳಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ.

ಶಿಕ್ಷಕ : ಆದ್ದರಿಂದ ಇಂತಹ ಉದಾಹರಣೆ ಬಿಡಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಬೇರೆ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವರು, ಈ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$x^2 + 10x$ ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯ ಪದವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ರಾಶಿ ದೊರಕಿಸುವಾ.

$$\text{ಒಂದುವೇಳೆ } x^2 + 10x + k = (x + a)^2$$

$$\text{ಇದ್ದರೆ, } x^2 + 10x + k = x^2 + 2ax + a^2$$

$$\therefore \text{ಸಹಗುಣಕಗಳ ತುಲನೆ ಮಾಡಿದಾಗ; } 10 = 2a \text{ ಮತ್ತು } k = a^2$$

$$\therefore a = 5 \text{ ಮತ್ತು, ಅದರಿಂದ } k = a^2 = (5)^2 = 25$$

$$\text{ಈಗ } x^2 + 10x + 2 = (x + 5)^2 - 25 + 2 = (x + 5)^2 - 23$$

$$x^2 + 10x + 2 = 0 \text{ ಈ ಸಮೀಕರಣ ಈಗ ನೀವು ಬಿಡಿಸಬಹುದೇ ?}$$

ರೆಹಾನಾ: ಹೌದು ಸರ್, ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಬದಿ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬಂದಿರುವದರಿಂದ ಅದರ ಅವಯವ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು.

$$(x + 5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$$

$$\therefore (x + 5 + \sqrt{23})(x + 5 - \sqrt{23}) = 0$$

$$\therefore x + 5 + \sqrt{23} = 0 \text{ ಅಥವಾ } x + 5 - \sqrt{23} = 0$$

$$\therefore x = -5 - \sqrt{23} \text{ ಅಥವಾ } x = -5 + \sqrt{23}$$

ಹಮೀದ : ಸರ್ ಉತ್ತರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸ್ವಲ್ಪ ಬೇರೆ ಪದ್ಧತಿ ನನಗೆ ಹೊಳೆದಿದೆ.

$$(x + 5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$$

$$\therefore (x + 5)^2 = (\sqrt{23})^2$$

$$\therefore x + 5 = \sqrt{23} \text{ ಅಥವಾ } x + 5 = -\sqrt{23}$$

$$\therefore x = -5 + \sqrt{23} \text{ ಅಥವಾ } x = -5 - \sqrt{23}$$

ಝಝಝ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು **ಝಝಝ**

ಉದಾ. (1) ಬಿಡಿಸಿರಿ : $5x^2 - 4x - 3 = 0$

ಉತ್ತರ : ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿಯ ವರ್ಗರಾಶಿಯ ರೂಪಾಂತರ, ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತರುವ ಸಲುವಾಗಿ

x^2 ದ ಸಹಗುಣಕ 1 ಮಾಡುವುದು. ಅನುಕೂಲವಾಗುವುದು ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ

$$x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$$

$$\text{ಈಗ } x^2 - \frac{4}{5}x + k = (x - a)^2 \text{ ಇದ್ದರೆ } x^2 - \frac{4}{5}x + k = x^2 - 2ax + a^2.$$

$$x^2 - \frac{4}{5}x \text{ ದ ತುಲನೆ } x^2 - 2ax \text{ ದೊಂದಿಗೆ ಮಾಡಿ.}$$

$$-2ax = -\frac{4}{5}x \quad \therefore a = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore k = a^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$\text{ಈಗ, } x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{4}{25} - \frac{3}{5} = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{5}\right) = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{19}{25}\right) = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{19}{25}\right)$$

$$\therefore x - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{19}}{5} \text{ ಅಥವಾ } x - \frac{2}{5} = -\frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore x = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore x = \frac{2 + \sqrt{19}}{5} \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{2 - \sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore \text{ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು } \frac{2 + \sqrt{19}}{5} \text{ ಮತ್ತು } \frac{2 - \sqrt{19}}{5}$$

ಸಮೀಕರಣ $x^2 + bx + c = 0$ ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುವುದು, ಆಗ

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ,

$$\text{ಅಂದರೆ } \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \text{ ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು.}$$

ಉದಾ. (2) ಬಿಡಿಸಿರಿ : $x^2 + 8x - 48 = 0$

ಪದ್ಧತಿ I : ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಪದ್ಧತಿ

$$\begin{aligned} x^2 + 8x - 48 &= 0 \\ \therefore x^2 + 8x + 16 - 16 - 48 &= 0 \\ \therefore (x + 4)^2 - 64 &= 0 \\ \therefore (x + 4)^2 &= 64 \\ \therefore x + 4 &= 8 \text{ ಅಥವಾ } x + 4 = -8 \\ \therefore x &= 4 \text{ ಅಥವಾ } x = -12 \\ \therefore \text{ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು } 4 & \\ & \text{ ಮತ್ತು } -12. \end{aligned}$$

ಪದ್ಧತಿ II : ಅವಯವ ಪದ್ಧತಿ

$$\begin{aligned} x^2 + 8x - 48 &= 0 \\ \therefore x^2 + 12x - 4x - 48 &= 0 \\ \therefore x(x + 12) - 4(x + 12) &= 0 \\ \therefore (x + 12)(x - 4) &= 0 \\ \therefore x + 12 = 0 \text{ ಅಥವಾ } x - 4 &= 0 \\ \therefore x &= -12 \text{ ಅಥವಾ } x = 4 \end{aligned}$$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.3

ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$\begin{aligned} (1) x^2 + x - 20 &= 0 & (2) x^2 + 2x - 5 &= 0 & (3) m^2 - 5m &= -3 \\ (4) 9y^2 - 12y + 2 &= 0 & (5) 2y^2 + 9y + 10 &= 0 & (6) 5x^2 &= 4x + 7 \end{aligned}$$



ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವ ಸೂತ್ರ (Formula for solving a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c$ ಈ ರಾಶಿಗೆ a ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ($\because a \neq 0$) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ ಈ ರಾಶಿ ದೊರೆಯುವುದು.

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ ಈ ರಾಶಿ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವಜಾಬಾಕಿಯ ರೂಪದಿಲ್ಲಮಂಡಿಸಿ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ

ಅಂದರೆ, $ax^2 + bx + c = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಉತ್ತರ ಅಥವಾ ಮೂಲಗಳನ್ನು ದೊರಕಿಸಲು ಬರುವುದು.

$$ax^2 + bx + c = 0 \dots (I)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \dots \dots \dots \text{ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ } a \text{ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.}$$

$$\therefore x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad \therefore \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\therefore x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \text{ ಅಥವಾ } x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \text{ ಅಥವಾ } x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ಈ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಮತ್ತು ಅವು α (ಅಲ್ಫಾ), β (ಬೀಟಾ)

ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ದರ್ಶಿಸುತ್ತಾರೆ. $\therefore \alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಮತ್ತು $\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (I)

$ax^2 + bx + c = 0$ ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿಯ a, b, c ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಈ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದು ರಾಶಿಗೆ ಸರಳ ರೂಪ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಈ ಇದಕ್ಕೆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವ ಸೂತ್ರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಉತ್ತರಗಳ ಪೈಕಿ-ಯಾವುದೇ ಉತ್ತರ ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ತೋರಿಸಲು ಬರುವುದು

ವಿದಾನ (I) ಬದಲಾಗಿ $\alpha =$ ಮತ್ತು $\beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಹೀಗೆ ಕೂಡಾ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವರು.

$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಇದ್ದರೆ $\alpha > \beta$; $\alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಇದ್ದರೆ $\alpha < \beta$ ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿ.

ಝಝಝ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಝಝಝ

ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಉದಾ. (1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

ಉತ್ತರ: $m^2 - 14m + 13 = 0$ ದ

$ax^2 + bx + c = 0$ ದೊಂದಿಗೆ ತುಲನೆಮಾಡಿ

$a = 1, b = -14, c = 13,$

$\therefore b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 13$
 $= 196 - 52$
 $= 144$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-14) \pm \sqrt{144}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{14 \pm 12}{2}$$

$\therefore m = \frac{14+12}{2}$ ಅಥವಾ $m = \frac{14-12}{2}$

$\therefore m = \frac{26}{2}$ ಅಥವಾ $m = \frac{2}{2}$

$\therefore m = 13$ ಅಥವಾ $m = 1$

\therefore ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು 13 ಮತ್ತು 1 ಇವೆ.

ಉದಾ. (2) $x^2 + 10x + 2 = 0$

ಉತ್ತರ: $x^2 + 10x + 2 = 0$ ದ

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ ದೊಂದಿಗೆ ತುಲನೆ ಮಾಡಿ}$$

$$a = 1, b = 10, c = 2,$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (10)^2 - 4 \times 1 \times 2$$

$$= 100 - 8$$

$$= 92$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{4 \times 23}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2}$$

$$= \frac{2(-5 \pm \sqrt{23})}{2}$$

$$\therefore x = -5 \pm \sqrt{23}$$

$$\therefore x = -5 + \sqrt{23} \text{ ಅಥವಾ } x = -5 - \sqrt{23}$$

$$\therefore \text{ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು } -5 + \sqrt{23} \text{ ಮತ್ತು } -5 - \sqrt{23}$$

ಉದಾ. (3) $x^2 - 2x - 3 = 0$

ಉತ್ತರ: ಕೊಟ್ಟ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $ax^2 + bx + c = 0$ ದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$$a = 1, b = -2, c = -3,$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$\therefore x = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2} \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2}$$

$$= \frac{2+4}{2} \text{ ಅಥವಾ } \frac{2-4}{2}$$

$$= 3 \text{ ಅಥವಾ } -1$$

ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಯ ಸಲುವಾಗಿ :

$x^2 - 2x - 3 = 0$ ಇದೇ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಆಲೇಖದಿಂದ ಬಿಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದನ್ನು ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ ಅಂದರೆ } x^2 = 2x + 3$$

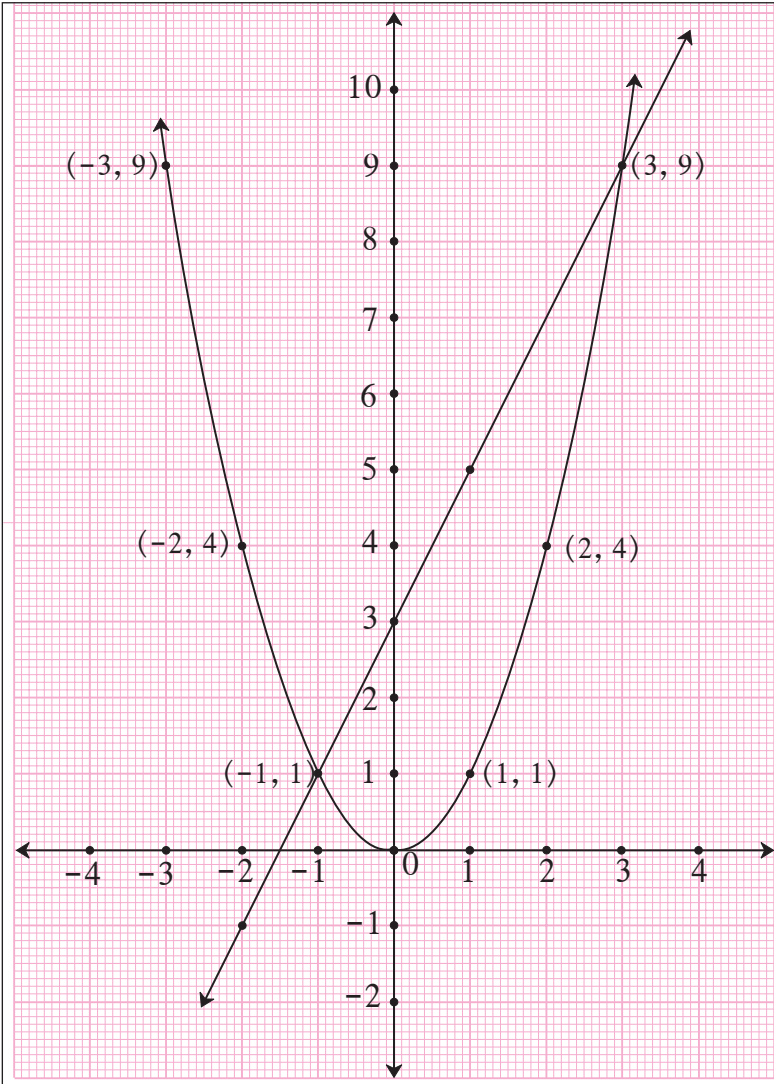
x ದ ಯಾವ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳೆಂದು $x^2 = 2x + 3$ ಈ ಸಮೀಕರಣ ಸಮಾಧಾನ ಆಗುವದೋ, ಆ ಬೆಲೆಗಳು ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರಗಳಿರುವವು. $y = x^2 = 2x + 3$ ತಿಳಿ. $y = x^2$ ಮತ್ತು $y = 2x + 3$ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖ ತೆಗೆಯುವಾ.

$$y = x^2$$

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
y	9	4	1	0	1	4	9

$$y = 2x + 3$$

x	-1	0	1	-2
y	1	3	5	-1



ಈ ಆಲೇಖಗಳು ಪರಸ್ಪರ $(-1, 1)$ ಮತ್ತು $(3, 9)$ ಈ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. $\therefore x^2 = 2x + 3$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಅಂದರೆ $x^2 - 2x - 3 = 0$ ಉತ್ತರ $x = -1$ ಅಥವಾ $x = 3$ ಇವೆ. ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ $y = x^2$ ಮತ್ತು $y = 2x + 3$ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಲೇಖ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೇಲಿಂದ $x^2 = 2x + 3$ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಅಂದರೆ, $x^2 - 2x - 3 = 0$ ದ ಉತ್ತರಗಳು ಹೇಗೆ ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಉದಾ. (4) $25x^2 + 30x + 9 = 0$

ಉತ್ತರ: $25x^2 + 30x + 9 = 0$ ದ

$ax^2 + bx + c = 0$ ದೊಂದಿಗೆ ತುಲನೆ ಮಾಡಿದಾಗ

$a = 25, b = 30, c = 9,$

$\therefore b^2 - 4ac = (30)^2 - 4 \times 25 \times 9$
 $= 900 - 900 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 $= \frac{-30 \pm \sqrt{0}}{2 \times 25}$

$\therefore x = \frac{-30+0}{50}$ ಅಥವಾ $x = \frac{-30-0}{50}$

$\therefore x = -\frac{30}{50}$ ಅಥವಾ $x = -\frac{30}{50}$

$\therefore x = -\frac{3}{5}$ ಅಥವಾ $x = -\frac{3}{5}$

ಗಮನದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. $25x^2 + 30x + 9 = 0$

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಮೂಲಗಳು ಸಮಾನ

ಇವೆ. ಅದರಂತೆ $25x^2 + 30x + 9 = 0$.

ಅಂದರೆ $(5x + 3)^2 = 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಡಿ.

ಉದಾ. (5) $x^2 + x + 5 = 0$

ಉತ್ತರ: $x^2 + x + 5 = 0$ ದ

$ax^2 + bx + c = 0$ ದೊಂದಿಗೆ ತುಲನೆ ಮಾಡಿದಾಗ

$a = 1, b = 1, c = 5,$

$\therefore b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 5$
 $= 1 - 20$

$= -19$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2 \times 1}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}$

ಆದರೆ $\sqrt{-19}$ ಇದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ

ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ

ಕೃತಿ : $2x^2 + 13x + 15 = 0$ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅವಯವ ಪದ್ಧತಿ, ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ. ಉತ್ತರಗಳು ಒಂದೇ ಬರುತ್ತವೆಯೋ ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.4

1. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪಿಗೆ ತುಲನೆ ಮಾಡಿ a, b, c ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(1) $x^2 - 7x + 5 = 0$

(2) $2m^2 = 5m - 5$

(3) $y^2 = 7y$

2. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(1) $x^2 + 6x + 5 = 0$

(2) $x^2 - 3x - 2 = 0$

(3) $3m^2 + 2m - 7 = 0$

(4) $5m^2 - 4m - 2 = 0$

(5) $y^2 + \frac{1}{3}y = 2$

(6) $5x^2 + 13x + 8 = 0$

3. $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರವಾಹ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯ ಆಧಾರದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ :

$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ ದ $ax^2 + bx + c = 0$ ದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಿ a, b, c ದ ಬೆಲೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

$b^2 - 4ac$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸುವ ಸೂತ್ರ ಬರೆಯಿರಿ.

ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಬೆಲೆ ತುಂಬಿ ಉತ್ತರ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವರೂಪ (Nature of roots of a quadratic equation)

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $ax^2 + bx + c = 0$ ದ ಮೂಲಗಳು $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಹೀಗೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

(1) $b^2 - 4ac = 0$ ಇದ್ದರೆ. $x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \therefore x = \frac{-b+0}{2a}$ ಅಥವಾ $x = \frac{-b-0}{2a}$

\therefore ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮಾನ ಇರುತ್ತದೆ.

(2) $b^2 - 4ac > 0$ ಇದ್ದರೆ. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ಅಂದರೆ, $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಅಥವಾ $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

\therefore ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಅಸಮಾನ ಇರುತ್ತವೆ.

(3) $b^2 - 4ac < 0$ ಇದ್ದರೆ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಇವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ ಅಂದರೆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $ax^2 + bx + c = 0$ ದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವರೂಪ $b^2 - 4ac$ ದ ಬೆಲೆಗಳ ಮೇಲಿಂದ ನಿಶ್ಚಿತ ಆಗುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ $b^2 - 4ac$ ದ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ವಿವೇಚಕ (discriminant) ಎನ್ನುವರು. ಅದನ್ನು Δ (ಡೆಲ್ಟಾ) ಈ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ. (Δ ಇದು ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರ ಇದೆ)

ಝಝಝ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಝಝಝ

ಕೃತಿ : ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳ ತುಂಬಿರಿ.

	ವಿವೇಚಕದ ಬೆಲೆ	ಮೂಲಗಳ ಸ್ವರೂಪ
(1)	50	
(2)	-30	
(3)	0	

ಉದಾ. (1) $x^2 + 10x - 7 = 0$ ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ವಿವೇಚಕದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $x^2 + 10x - 7 = 0$ ದ ಹೋಲಿಕೆ $ax^2 + bx + c = 0$ ದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ
 $a = 1, b = 10, c = -7,$

$$\begin{aligned}\therefore b^2 - 4ac &= 10^2 - 4 \times 1 \times (-7) \\ &= 100 + 28 \\ &= 128\end{aligned}$$

ಉದಾ. (2) ವಿವೇಚಕದ ಮೇಲಿಂದ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವರೂಪ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

(i) $2x^2 - 5x + 7 = 0$

ಉತ್ತರ : $2x^2 - 5x + 7 = 0$ ದ ತುಲನೆ

$ax^2 + bx + c = 0$ ದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$$a = 2, b = -5, c = 7$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7$$

$$\begin{aligned}\therefore \Delta &= 25 - 56 \\ &= -31\end{aligned}$$

$$\therefore b^2 - 4ac < 0$$

\therefore ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲ

(ii) $x^2 + 2x - 9 = 0$

ಉತ್ತರ : $x^2 + 2x - 9 = 0$ ದ ತುಲನೆ

$ax^2 + bx + c = 0$ ದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಕೆ

$$a = \boxed{}, b = 2, c = \boxed{}$$

$$\therefore b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times \boxed{} \times \boxed{}$$

$$\therefore \Delta = 4 + \boxed{}$$

$$= 40$$

$$\therefore b^2 - 4ac > 0$$

\therefore ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮಾನ ಇವೆ.

(iii) $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$

ಉತ್ತರ : $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ ದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಕೆ

$ax^2 + bx + c = 0$ ದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ

$$\text{ಇಲ್ಲಿ } a = \sqrt{3}, b = 2\sqrt{3}, c = \sqrt{3},$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$= 4 \times 3 - 4 \times 3$$

$$= 12 - 12$$

$$= 0$$

\therefore ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮಾನ ಇವೆ.



ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಮತ್ತು ಸಹಗುಣಕ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಬಂಧ

(Relation between roots and coefficients of a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c = 0$ ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ α ಮತ್ತು β ಮೂಲಗಳು ಇದ್ದರೆ

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= -\frac{2b}{2a}\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

ಅದರಂತೆ

$$\begin{aligned}\alpha \times \beta &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) \times (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha \beta = \frac{c}{a}$$

ಕೃತಿ : ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ತುಂಬಿರಿ

$$10x^2 + 10x + 1 = 0 \text{ ದ ಸಲುವಾಗಿ } \alpha + \beta = \boxed{} \text{ ಮತ್ತು}$$

$$\alpha \times \beta = \boxed{}$$

ಛಛಛ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು **ಛಛಛ**

ಉದಾ. (1) α ಮತ್ತು β ಇವು $2x^2 + 6x - 5 = 0$ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ. $\alpha + \beta$ ಮತ್ತು $\alpha \times \beta$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : $2x^2 + 6x - 5 = 0$ ದ ಹೋಲಿಕೆ $ax^2 + bx + c = 0$ ದೊಂದಿಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ

$$\therefore a = 2, b = 6, c = -5$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3 \text{ ಮತ್ತು } \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$$

ಉದಾ. (2) $x^2 - 13x + k = 0$ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 7 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ k ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ: $x^2 - 13x + k = 0$ ದ ತುಲನೆ $ax^2 + bx + c = 0$ ಹೊಂದಿಗೆ ಮಾಡಿ.

$$a = 1, b = -13, c = k$$

α ಮತ್ತು β ಇವು ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಇವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ ಮತ್ತು $\alpha > \beta$ ಗೃಹಿತವೆಂದು ತಿಳಿದು

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-13)}{1} = 13 \dots (I)$$

$$\text{ಆದರೆ } \alpha - \beta = 7 \dots \dots \dots (\text{ಕೊಡಲಾಗಿದೆ}) (II)$$

$$2\alpha = 20 \dots \dots \dots (\text{ಸಮೀಕರಣ (I) ಮತ್ತು (II) ಇವುಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿ})$$

$$\therefore \alpha = 10$$

$$\therefore 10 + \beta = 13 \dots \dots \dots (I) \text{ ರ ಮೇಲಿಂದ}$$

$$\therefore \beta = 13 - 10$$

$$\therefore \beta = 3$$

$$\text{ಆದರೆ } \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$\therefore 10 \times 3 = \frac{k}{1}$$

$$\therefore k = 30$$

ಉದಾ. (3) α ಮತ್ತು β ಇವು $x^2 + 5x - 1 = 0$ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಇವೆ ಹಾಗಾದರೆ

(i) $\alpha^3 + \beta^3$ (ii) $\alpha^2 + \beta^2$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ: $x^2 + 5x - 1 = 0$

$$\text{ಇಲ್ಲಿ } a = 1, b = 5, c = -1$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{(i) } \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= (-5)^3 - 3 \times (-1) \times (-5) \\ &= -125 - 15 \\ \alpha^3 + \beta^3 &= -140 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-5)^2 - 2 \times (-1) \\ &= 25 + 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= 27 \end{aligned}$$



ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು?
(To obtain a quadratic equation having given roots)

α ಮತ್ತು β ಇವು x ಚಲದಲ್ಲಿಯ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳಿವೆ. ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ.

$$\therefore x = \alpha \text{ ಅಥವಾ } x = \beta$$

$$\therefore x - \alpha = 0 \text{ ಅಥವಾ } x - \beta = 0$$

$$\therefore (x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

$$\therefore x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0$$

$$\therefore x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

ಅಂದರೆ α ಮತ್ತು β ಮೂಲಗಳಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ

$x^2 - (\text{ಮೂಲಗಳ ಬೇರೀಜು})x + \text{ಮೂಲಗಳ ಗುಣಾಕಾರ} = 0$, ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ ದೊರಕಿಸಲು ಬರುವುದು.

ಕೃತಿ (I) : ಮೂಲಗಳ ಬೇರೀಜು 10 ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳ ಗುಣಾಕಾರ 9 ಇರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಬರೆಯಿರಿ.

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಬರೆಯಿರಿ. $x^2 - \square x + \square = \square$

ಕೃತಿ (II) : $\alpha = 2$ ಮತ್ತು $\beta = 5$ ಈ ಮೂಲಗಳು ಇರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಯಾವವು ?

$$x^2 + (\square + \square)x + \square \times \square = 0 \text{ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು}$$

ಅಂದರೆ $x^2 + \square x + \square = 0$

ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ ಶೂನ್ಯೇತರ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು, α ಮತ್ತು β ಗಳೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಛಛಛ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆ **ಛಛಛ**

ಉದಾ. ಯಾವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು -3 ಮತ್ತು -7 ಇರುವಂತಹ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ: $\alpha = -3$ ಮತ್ತು $\beta = -7$

$$\therefore \alpha + \beta = (-3) + (-7) = -10 \text{ ಮತ್ತು } \alpha \times \beta = (-3) \times (-7) = 21$$

$$\therefore \text{ಸಿಗುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ } x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\therefore x^2 - (-10)x + 21 = 0$$

$$\therefore x^2 + 10x + 21 = 0$$



ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ.

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಇದ್ದರೆ ಆಗ

(i) $\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಮತ್ತು $\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(ii) $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ಮತ್ತು $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವರೂಪ $b^2 - 4ac$ ಈ ರಾಶಿಯ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ರಾಶಿಗೆ ವಿವೇಚಕ (discriminant) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ವಿವೇಚಕ Δ ಗ್ರೀಕ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ.

(3) ಒಂದುವೇಳೆ $\Delta = 0$ ಇದ್ದರೆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಮೂಲಗಳು ಸಮಾನವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಗಳಿರುತ್ತವೆ.

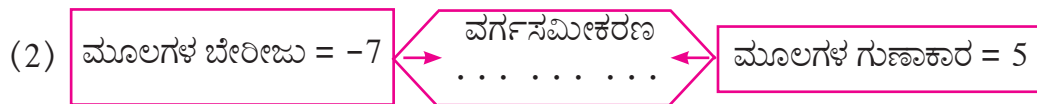
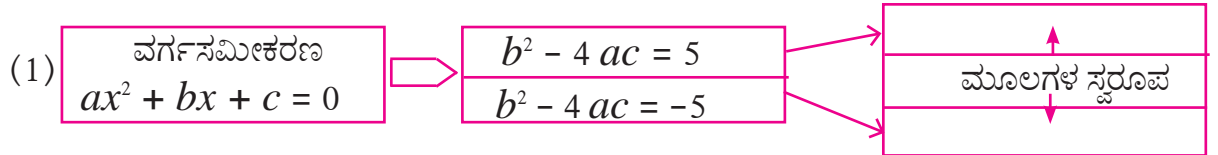
ಒಂದುವೇಳೆ $\Delta > 0$ ಇದ್ದರೆ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಭಿನ್ನವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಒಂದುವೇಳೆ $\Delta < 0$ ಇದ್ದರೆ ಆಗ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುವದಿಲ್ಲ.

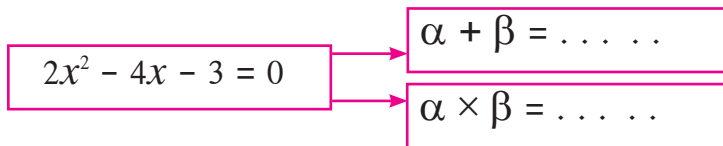
(4) ಯಾವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಇರುತ್ತವೆ, ಆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.5

1. ಕೆಳಗಿನ ರಿಕ್ತ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ.



(3) ಒಂದುವೇಳೆ α ಮತ್ತು β ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಇದ್ದರೆ



2. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ವಿವೇಚಕದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $x^2 + 7x - 1 = 0$

(2) $2y^2 - 5y + 10 = 0$

(3) $\sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} = 0$

3. ವಿವೇಚಕದ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲಿಂದ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವರೂಪ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

(1) $x^2 - 4x + 4 = 0$

(2) $2y^2 - 7y + 2 = 0$

(3) $m^2 + 2m + 9 = 0$

4. ಯಾವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಕಾರ ಇವೆ ಇಂತಹ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ.

- (1) 0 ಮತ್ತು 4 (2) 3 ಮತ್ತು -10 (3) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ (4) $2-\sqrt{5}$, $2+\sqrt{5}$

5. $x^2 - 4kx + k + 3 = 0$ ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಬೇರೀಜು ಇದು ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಇಮ್ಮಡಿ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ k ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದುವೇಳೆ α ಮತ್ತು β ಇವು $y^2 - 2y - 7 = 0$ ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಿದ್ದರೆ,

- (1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\alpha^3 + \beta^3$ ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ k ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

- (1) $3y^2 + ky + 12 = 0$ (2) $kx(x - 2) + 6 = 0$



ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಉಪಯೋಜನೆ (Application of quadratic equation)

ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಸಂಗತಿಗಳ ಉತ್ತರ ತೆಗೆಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳು ಉಪಯೋಗ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ನಾವು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವವರಿದ್ದೇವೆ.

ಉದಾ. (1) ತಿವಸಾದಲ್ಲಿಯ ಶ್ರೀ ರತ್ನಾಕರರಾವ ಇವರಹೊಲದಲ್ಲಿಯ ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನಾಕೃತಿಯ ಇರುಳ್ಳೆ ಸಂಗ್ರಾಹಕದ ತಳದ ಉದ್ದಳತೆಯು ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ 7 ಮೀಟರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಇದೆ, ಮತ್ತು ಕರ್ಣವು ಉದ್ದಳತೆಗಿಂತ 1 ಮೀಟರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಈರುಳ್ಳೆ ಸಂಗ್ರಾಹಕದ ತಳದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಕಾಟಕೋನ ಚೌಕೋನಾಕೃತಿ ಈರುಳ್ಳೆ ಸಂಗ್ರಾಹಕದ ತಳದ ಅಗಲ x ಮೀಟರ ಇದೆ. ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ.

$$\therefore \text{ಉದ್ದ} = (x + 7) \text{ ಮೀಟರ, ಕರ್ಣ} = x + 7 + 1 = (x + 8) \text{ ಮೀಟರ}$$

ಪಾಯಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯ ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$$

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$$

$$\therefore x^2 + 14x - 16x + 49 - 64 = 0$$

$$\therefore x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\therefore \underline{x^2 - 5x} + \underline{3x - 15} = 0$$

$$\therefore x(x - 5) + 3(x - 5) = 0$$

$$\therefore (x - 5)(x + 3) = 0$$

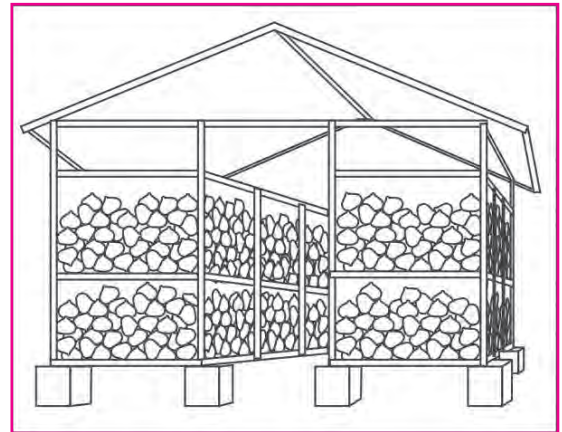
$$\therefore x - 5 = 0 \text{ ಅಥವಾ } x + 3 = 0$$

$$\therefore x = 5 \text{ ಅಥವಾ } x = -3$$

ಆದರೆ ಉದ್ದ ಋಣ ಇರುವದಿಲ್ಲ $\therefore x \neq -3$

$$\therefore x = 5 \text{ ಮತ್ತು } x + 7 = 5 + 7 = 12$$

\therefore ಈರುಳ್ಳೆ ಸಂಗ್ರಾಹಕದ ತಳದ ಉದ್ದ 12 ಮೀಟರ ಮತ್ತು ಅಗಲ 5 ಮೀಟರ.



ಈರುಳ್ಳೆ ಸಂಗ್ರಾಹಕ

ಉದಾ. (2) ಒಂದು ಉಗಿಬಂಡಿಯ ಏಕಸಮಾನ ವೇಗದಿಂದ (ಗತಿಯಿಂದ) 360 ಕಿಮೀ ಅಂತರ ಕ್ರಮಿಸುವುದು. ಆದರೆ ಅವರ ವೇಗ ಗಂಟೆಗೆ 5 ಕಿಮೀ ನಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ಅದಕ್ಕೆ ಅಷ್ಟೇ ಅಂತರ ಕ್ರಮಿಸಲು 48 ಮಿನಿಟುಗಳು ಕಡಿಮೆ ಬೇಕಾಗುವವು, ಹಾಗಾದರೆ, ಆ ಉಗಿಬಂಡಿಯ ಆರಂಭದ ವೇಗ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ವೇಗ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದ ನಂತರ ಉಗಿಬಂಡಿಯ ತಾಸಿಗೆ ವೇಗ x ಕಿಮೀ ಇರಬಹುದು.

\therefore ವೇಗ ಹೆಚ್ಚಾದ ನಂತರ ಗಾಡಿಯ ತಾಸಿಗೆ ವೇಗ $(x + 5)$ ಕಿ.ಮಿ. ಇರಬಹುದು

360 ಕಿಮೀ ಅಂತರ ಕ್ರಮಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ಆರಂಭದ ವೇಳೆ = $\frac{\text{ಅಂತರ}}{\text{ವೇಗ}} = \frac{360}{x}$ ತಾಸು.

ವೇಗ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ಅದೇ ಅಂತರ ಕ್ರಮಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ವೇಳೆ = $\frac{360}{x+5}$

ಕೊಟ್ಟ ಕರಾರಿಗೆ ಅನುಸಾರ

$$\frac{360}{x+5} = \frac{360}{x} - \frac{48}{60} \quad \text{--- (} \because 48 \text{ ಮಿನಿಟು} = \frac{48}{60} \text{ ತಾಸು)}$$

$$\therefore \frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = \frac{48}{60}$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{48}{60 \times 360} \quad \text{--- (ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ 360 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ)}$$

$$\therefore \frac{x+5-x}{x(x+5)} = \frac{4}{5 \times 360}$$

$$\therefore \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{5 \times 90}$$

$$\therefore \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{450}$$

$$\therefore x^2 + 5x = 2250$$

$$\therefore x^2 + 5x - 2250 = 0$$

$$\therefore \underline{x^2 + 50x} - \underline{45x - 2250} = 0$$

$$\therefore x(x + 50) - 45(x + 50) = 0$$

$$\therefore (x + 50)(x - 45) = 0$$

$$\therefore x + 50 = 0 \text{ ಅಥವಾ } x - 45 = 0$$

$$\therefore x = -50 \text{ ಅಥವಾ } x = 45$$

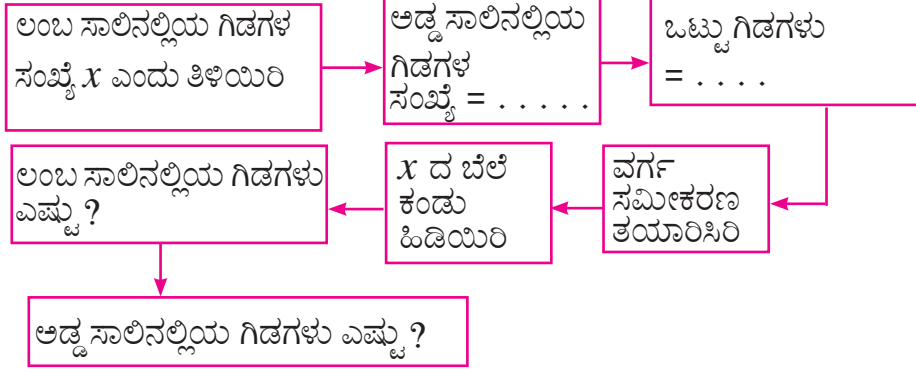
ಆದರೆ ವೇಗವು ಋಣ ಇರುವುದಿಲ್ಲ $\therefore x \neq -50$

$$\therefore x = 45$$

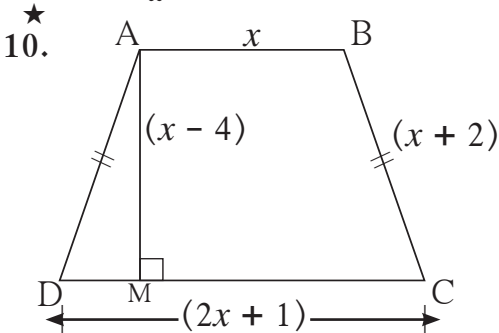
\therefore ಉಗಿಬಂಡಿಯ ಆರಂಭದ ವೇಗವು ತಾಸಿಗೆ 45 ಕಿಮೀ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.6

1. ಪ್ರಗತಿಯ 2 ವರ್ಷ ಮೊದಲಿನ ಮತ್ತು 3 ವರ್ಷ ನಂತರದ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ 84 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವಳ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಎರಡು ಕ್ರಮಾಗತ ಸಮ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಬೇರೀಜು 244 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಶ್ರೀ ಮಧುಸೂದನ ಇವರ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣಿನ ತೋಟದಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಲಂಬ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 5 ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಇದೆ. ಆ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣಿನ ತೋಟದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 150 ಗಿಡಗಳಿದ್ದರೆ, ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಲಂಬ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?



4. ವಿವೇಕನು ಕಿಶೋರನಿಗಿಂತ 5 ವರ್ಷಗಳಿಂದ ದೊಡ್ಡವನಿದ್ದಾನೆ. ಅವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ವ್ಯಸ್ತಗಳ ಬೇರೀಜು $\frac{1}{6}$ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಸುಯಶನಿಗೆ ಗಣಿತದ ಮೊದಲನೆಯ ಚಾಚಣಿಯಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಗುಣಗಳಿಗಿಂತ ಎರಡನೆಯ ಚಾಚಣಿಯಲ್ಲಿ 10 ಗುಣಗಳು ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ದೊರೆತವು ಎರಡನೆಯ ಚಾಚಣಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಗುಣಗಳ 5 ಪಟ್ಟು ಇದು ಮೊದಲನೆಯ ಚಾಚಣಿಯಲ್ಲಿ ಗುಣಗಳ ವರ್ಗದಷ್ಟು ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ಅವನಿಗೆ ಮೊದಲನೆಯ ಚಾಚಣಿಯಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಗುಣಗಳು ಎಷ್ಟು ?
- ★ 6. ಶ್ರೀ ಕಾಸಮ ಇವರ ಮಣ್ಣಿನ ಪಾತ್ರೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಲಘು ಉದ್ಯೋಗ ಇದೆ. ಅವರು ಪ್ರತಿದಿನ ನಿಶ್ಚಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪಾತ್ರೆಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾತ್ರೆಯ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮೂಲ್ಯವು ತಯಾರಿಸಿದ ಪಾತ್ರೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ 10 ಪಟ್ಟು ಅಧಿಕ 40 ರೂ. ಇರುತ್ತದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಒಂದು ದಿವಸದಲ್ಲಿಯೂ ಪಾತ್ರೆಗಳ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮೂಲ್ಯ 600 ರೂ. ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾತ್ರೆಯ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮೂಲ್ಯ ಮತ್ತು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಿದ ಪಾತ್ರೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ★ 7. ಒಂದು ನದಿಯಲ್ಲಿ ದೋಣಿಯಿಂದ ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ 36 ಕಿಮೀ ಹೋಗಿ ಮರಳಿ ಅದೇ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಬರಲು ಪ್ರತೀಕನಿಗೆ 8 ತಾಸು ಬೇಕಾಗುವವು. ದೋಣಿಯನಿಂತ ನೀರಿನಲ್ಲಿಯೂ ವೇಗವು ತಾಸಿಗೆ 12 ಕಿಮೀ ಇದ್ದರೆ ನದಿಯ ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ★ 8. ಪಿಂಟು ಇವನಿಗೆ ಒಂದು ಕೆಲಸ ಮಾಡಲು ನೀಶು ವಿನಿಗಿಂತ 6 ದಿನಗಳು ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಬೇಕಾಗುವವು ಇಬ್ಬರೂ ಕೂಡಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದರೆ ಆ ಕೆಲಸ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಲು ಅವರಿಗೆ 4 ದಿನಗಳು ಬೇಕಾಗುವವು. ಹಾಗಾದರೆ, ಆ ಕೆಲಸವನ್ನು ಒಬ್ಬನೇ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಲು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ದಿವಸಗಳು ಬೇಕಾಗುವವು ?
- ★ 9. 460 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಒಂದು ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಾಕಾರವು ಭಾಜಕದ 5 ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ 6 ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಬರುತ್ತಿದ್ದು ಶೇಷವು 1 ಬರುವುದು ಹಾಗಾದರೆ ಭಾಗಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಜಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಬದಿಯ ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ $\square ABCD$ ಯಲ್ಲಿ $AB \parallel CD$ ಇದು ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 33 ಚೌ ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಚೌಕೋನದ ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಳತೆ ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಪೂರ್ಣಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ : □ABCD ಸಮಲಂಬ ಚೌಕೋನ ಇದೆ. $AB \parallel CD$

$$A(\square ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \times \square$$

$$\therefore 33 = \frac{1}{2}(x + 2x + 1) \times \square$$

$$\therefore \square = (3x + 1) \times \square$$

$$\therefore 3x^2 + \square - \square = 0$$

$$\therefore 3x(\dots) + 10(\dots) = 0$$

$$\therefore (3x + 10)(\dots) = 0$$

$$\therefore (3x + 10) = 0 \text{ ಅಥವಾ } \square = 0$$

$$\therefore x = -\frac{10}{3} \text{ ಅಥವಾ } x = \square$$

ಆದರೆ ಉದ್ದವು ಋಣ ಇರುವುದಿಲ್ಲ

$$\therefore x \neq -\frac{10}{3} \quad \therefore x = \square$$

$$AB = \dots, CD = \dots, AD = BC = \dots$$

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ 2

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ.

(1) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಇದೆ ?

(A) $\frac{5}{x} - 3 = x^2$ (B) $x(x + 5) = 2$ (C) $n - 1 = 2n$ (D) $\frac{1}{x^2}(x + 2) = x$

(2) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವಿಲ್ಲ ?

(A) $x^2 + 4x = 11 + x^2$ (B) $x^2 = 4x$ (C) $5x^2 = 90$ (D) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(3) $x^2 + kx + k = 0$ ದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮಾನ ವಿದ್ದರೆ k ದ ಬೆಲೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದು ?

(A) 0 (B) 4 (C) 0 ಅಥವಾ 4 (D) 2

(4) $\sqrt{2}x^2 - 5x + \sqrt{2} = 0$ ದ ಸಲುವಾಗಿ ವಿವೇಚಕದ ಬೆಲೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದು ?

(A) -5 (B) 17 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2} - 5$

(5) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು 3 ಮತ್ತು 5 ಇವೆ ?

(A) $x^2 - 15x + 8 = 0$ (B) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(C) $x^2 + 3x + 5 = 0$ (D) $x^2 + 8x - 15 = 0$

(6) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಬೇರೀಜು -5 ಇದೆ ?

(A) $3x^2 - 15x + 3 = 0$ (B) $x^2 - 5x + 3 = 0$

(C) $x^2 + 3x - 5 = 0$ (D) $3x^2 + 15x + 3 = 0$

(7) $\sqrt{5}m^2 - \sqrt{5}m + \sqrt{5} = 0$ ಗೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಿಧಾನ ಅನ್ವಯಿಸುವದು ?

(A) ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಅಸಮಾನ ಮೂಲಗಳು (B) ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳು

(C) ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ (D) ಮೂರು ಮೂಲಗಳು

(8) $x^2 + mx - 5 = 0$ ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ 2 ಇದ್ದರೆ m ದ ಬೆಲೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವದು ?

(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಮೀಕರಣಗಳು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳಿವೆ.

(1) $m^2 + 2m + 11 = 0$ (2) $x^2 - 2x + 5 = x^2$ (3) $(x + 2)^2 = 2x^2$

3. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣದ ವಿವೇಚಕದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $2y^2 - y + 2 = 0$ (2) $5m^2 - m = 0$ (3) $\sqrt{5}x^2 - x - \sqrt{5} = 0$

4. $2x^2 + kx - 2 = 0$ ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು -2 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ k ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಕೆಳಗಿನ ಮೂಲಗಳಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

(1) 10 ಮತ್ತು -10 (2) $1-3\sqrt{5}$ ಮತ್ತು $1+3\sqrt{5}$ (3) 0 ಮತ್ತು 7

6. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವರೂಪ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

(1) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (2) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$ (3) $m^2 - 2m + 1 = 0$

7. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(1) $\frac{1}{x+5} = \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0, x + 5 \neq 0$) (2) $x^2 - \frac{3x}{10} - \frac{1}{10} = 0$ (3) $(2x + 3)^2 = 25$

(4) $m^2 + 5m + 5 = 0$ (5) $5m^2 + 2m + 1 = 0$ (6) $x^2 - 4x - 3 = 0$

8. $(m - 12)x^2 + 2(m - 12)x + 2 = 0$ ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮಾನವಿದ್ದರೆ m ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳ ಬೇರೀಜು 5 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಘನಗಳ ಬೇರೀಜು 35 ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಆ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಯಾವದು ?

10. $2x^2 + 2(p + q)x + p^2 + q^2 = 0$ ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ವರ್ಗವು ವಜಾಬಾಕಿಯ ವರ್ಗದಷ್ಟು ಇರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

11. ಮುಕುಂದನ ಹತ್ತಿರ ಸಾಗರನಿಗಿಂತ 50 ರೂ. ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಇವೆ ಅವರ ಹತ್ತಿರ ಇರುವ ಹಣದ ಗುಣಾಕಾರ 15000 ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಹತ್ತಿರ ಇರುವ ಹಣ ಎಷ್ಟು ?

12. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 120 ಇದೆ. ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಇಮ್ಮಡಿಯಷ್ಟು ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ರಂಜನಾಳಿಗೆ ಹುಟ್ಟು ಹಬ್ಬದ ಪ್ರಯುಕ್ತ 540 ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಹಂಚುವದಿದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ 30 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೆ 3 ಕಿತ್ತಳೆಗಳು ಕಡಿಮೆ ದೊರೆಯುವವು ಹಾಗಾದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ತಳವಲೆಯಲ್ಲಿ ಒಕ್ಕಲಿಗ ಶ್ರೀ ದಿನೇಶ ಇವರ ಆಯತಾಕೃತಿ ಹೊಲದ ಉದ್ದವು ಅಗಲದ ಇಮ್ಮಡಿಗಿಂತ 10 ಮೀಟರ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಇದೆ. ಅವರು ಆ ಹೊಲದಲ್ಲಿ ಮಳೆಯ ನೀರು ಸಂಗ್ರಹಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಹೊಲದ $\frac{1}{3}$ ಪಟ್ಟು ಭುಜವಿರುವ ಚೌರಸ ಆಕೃತಿಯ ಕೃಷಿಹೊಂಡ ನಿರ್ಮಿಸಿದರು. ಆವಾಗ ಮೂಲ ಹೊಲದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಇದು ಆಕೃಷಿಹೊಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ 20 ಪಟ್ಟು ಆಗುವದು ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಹೊಲದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲದ ಅದರಂತೆ ನೀರಿನ ಹೊಂಡದ ಭುಜದ ಉದ್ದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಒಂದು ನೀರಿನ ಟಾಕಿಯು ಎರಡು ನಳಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ 2 ತಾಸಿನಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ತುಂಬುವದು. ಅದರಲ್ಲಿಯ ಸಣ್ಣ ನಳದಿಂದ ಟಾಕಿ ತುಂಬಲು ಬೇಕಾಗುವ ವೇಳೆಯು ಇದು ಕೇವಲ ದೊಡ್ಡ ನಳದಿಂದ ಟಾಕಿ ತುಂಬಲು ಬೇಕಾಗುವ ವೇಳೆಗಿಂತ 3 ತಾಸು ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಬೇಕಾಗುವದು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಳದಿಂದ ಆ ಟಾಕಿ ತುಂಬಲು ಎಷ್ಟು ವೇಳೆ ಬೇಕಾಗುವದು ?



3

ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ



ಬನ್ನಿ ಕಲಿಯೋಣ.

- ಕ್ರಮಾನುಗತೆ
- ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯ n ನೆ ಪದ
- ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ
- ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯ n ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು



ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಕ್ರಮಾನುಗತೆ (Sequence)

ನಾವು 1, 2, 3, 4, . . . ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾಲಿಕೆ ಇದೆ. ಈ ಮಾಲಿಕೆಯಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟನೆ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇದೆ ಇದನ್ನು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು. ಹೀಗೆ 13 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 13 ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎರಡನೆಯ ಮಾಲಿಕೆ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, . . . ನೋಡಿರಿ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವಿಶಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಿಂದ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $16 = 4^2$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ನಾಲ್ಕನೆ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ $25 = 5^2$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದೆ. $49 = 7^2$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಳನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದೆ. ಅಂದರೆ ಈ ಮಾಲಿಕೆಯಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟನೆ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಬರುವುದು.

ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಂತೆ ವಿಶಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಿಂದ ಮಂಡಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮೂಹಕ್ಕೆ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ ಎನ್ನುವರು

ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿ ವಿಶಿಷ್ಟ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ವಿಶಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ ಈ ಕ್ರಮದಿಂದ ತೋರಿಸಿದಾಗ a_1 ಇದು ಮೊದಲನೆಯ a_2 ಇದು ಎರಡನೆಯ . . . ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ a_n ಇದು n ನೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರುವುದು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ f_1, f_2, f_3, \dots ಈ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ನಿಶ್ಚಿತ ಕ್ರಮದಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಯಾವುದೇ ಒಂದುವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಹುಡುಗರು ಕವಾಯತಕ್ಕಾಗಿ ಮೈದಾನದಲ್ಲಿ ಹೋದಾಗ ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲುವರು. ಅವರ ಕ್ರಮ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ, ಅವಾಗ ಅವರ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ ತಯಾರಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಲವೊಂದು ಕ್ರಮಾನುಗತೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿಶಿಷ್ಟ ಆಕೃತಿಬಂಧ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಅನುಭವಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಕೃತಿ : ಮುಂದಿನ ಆಕೃತಿಬಂಧವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಆಕೃತಿಬಂಧ	○	○○	○○○	○○○○					
ವರ್ತುಗಳ									
ಸಂಖ್ಯೆ	1	3	5	7					

ಆಕೃತಿಬಂಧ	$\Delta\Delta$ Δ $\Delta\Delta$	$\Delta\Delta\Delta$ Δ Δ $\Delta\Delta\Delta$	$\Delta\Delta\Delta\Delta$ Δ Δ Δ $\Delta\Delta\Delta\Delta$				
ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	5	8	11				

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ತಯಾರಾದ ಆಕೃತಿಬಂಧ ನೋಡಿರಿ. ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊರೆಯುವ ಮೇಲಿಂದ ನಿಯಮ ಶೋಧಿಸಿರಿ; ಈ ನಿಯಮದ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮುಂದಿನ ಮಾಲಿಕೆ ನೋಡಿರಿ. 2, 11, -6, 0, 5, -37, 8, 2, 61

ಇಲ್ಲಿ $a_1 = 2, a_2 = 11, a_3 = -6, \dots$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಯಾದಿ ಸಹ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ ಇದೆ, ಆದರೆ ವಿಶಿಷ್ಟ ಪದಗಳು ಆ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಏಕೆ ಇವೆ ಎಂಬುದು ಹೇಳಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರಂತೆ ಕ್ರಮಾಗತ ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಬಂಧ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಯಾವ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ಪದವನ್ನು ನಿಶ್ಚಿತ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು ಎಂಬ ನಿಯಮ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಉದಾ. (1) 4, 8, 12, 16, ... (2) 2, 4, 8, 16, 32, ...

(3) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \dots$

ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳು (Terms in a sequence)

ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿಯ ಕ್ರಮಾಗತ ಪದಗಳನ್ನು $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯನ್ನು $\{t_n\}$ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಗಳು ಅನಂತ ಇದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ n , ಇದರೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಎಂದು ಗ್ರಹಿಸಲಾಗುವುದು.

ಕೃತಿ I : ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳ ಕ್ರಮಾಂಕ t_1, t_2, t_3, \dots ದಿಂದ ತೋರಿಸಿರಿ.

(1) 9, 15, 21, 27, ... ಇಲ್ಲಿ $t_1 = 9, t_2 = 15, t_3 = 21, \dots$

(2) 7, 7, 7, 7, ... ಇಲ್ಲಿ $t_1 = 7, t_2 = \square, t_3 = \square, \dots$

(3) -2, -6, -10, -14, ... ಇಲ್ಲಿ $t_1 = -2, t_2 = \square, t_3 = \square, \dots$

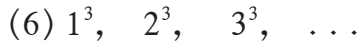
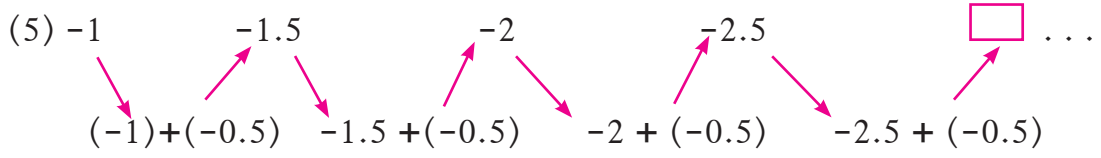
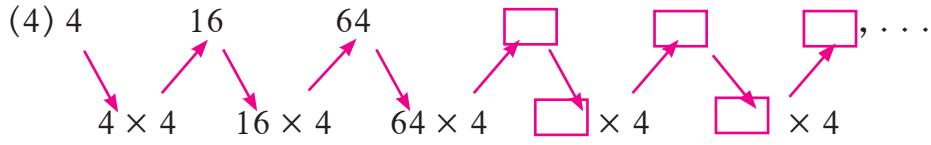
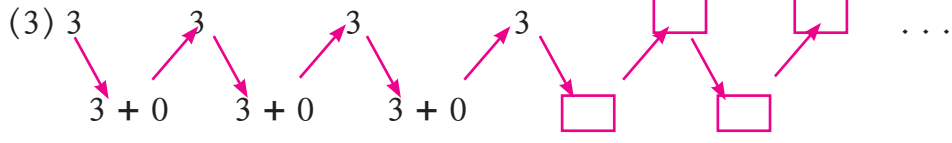
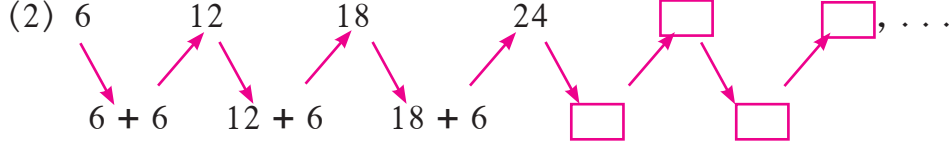
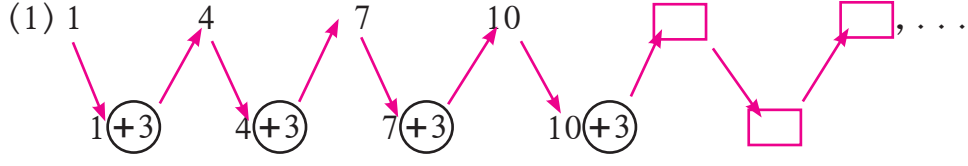
ಕೃತಿ II : ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ಕ್ರಮಾನುಗತೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ನಿಯಮ ಕಂಡುಬರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಾಮ್ಯತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ನಿಯಮ ಕಂಡು ಬರುವುದೇ ಇದನ್ನು ನೋಡಲು ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟ ಮಂಡನೆ ನೋಡಿರಿ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಪುಟದ ಮೇಲಿನ ರಿಕ್ತ ಚೌಕೋನ ತುಂಬಿರಿ.

(1) 1, 4, 7, 10, 13, ... (2) 6, 12, 18, 24, ... (3) 3, 3, 3, 3, ...

(4) 4, 16, 64, ... (5) -1, -1.5, -2, -2.5, ... (6) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots$

ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಬಂಧ ಶೋಧಿಸೋಣ. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಮಾಡಿರುವ ವಿಚಾರ ನೋಡೋಣ.



ಇಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ (1), (2), (3), (5) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಪದದಲ್ಲಿ ನಿಶ್ಚಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಮುಂದಿನ ಪದ ದೊರೆಯುವದು. ಈ ಸಾಮ್ಯತೆ ಇದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರದ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಗಳಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಎನ್ನುವರು.

ಮೇಲಿನ (4) ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇಲ್ಲ. ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಪದಕ್ಕೆ ನಿಶ್ಚಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಮುಂದಿನ ಪದ ದೊರೆಯುವದು. ಈ ಪ್ರಕಾರದ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಗಳಿಗೆ ಭೂಮಿತಿ ಶ್ರೇಣಿ (Geometric Progression) ಎನ್ನುವರು.

ಮೇಲಿನ (6) ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯು ಇಲ್ಲ. ಅದರಂತೆ ಭೂಮಿತಿ ಶ್ರೇಣಿಯು ಇಲ್ಲ.

ಈ ವರ್ಷ ನಾವು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದೆಂದೇವೆ.

ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ (Arithmetic Progression)

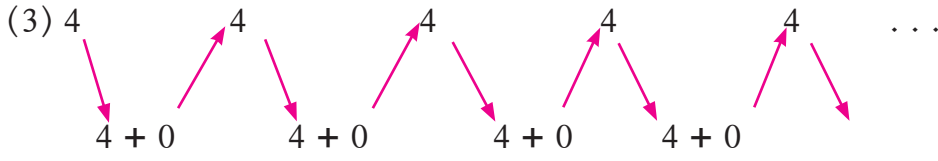
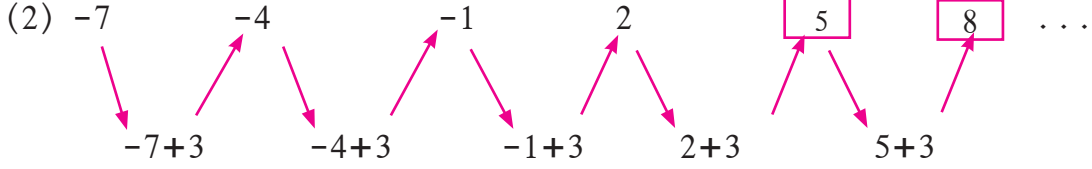
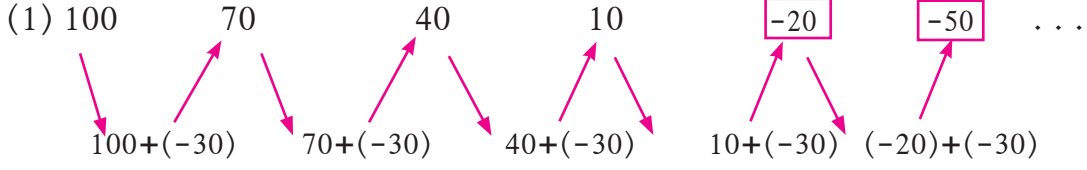
ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ಕ್ರಮಾನುಗತೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿಯ ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(1) 100, 70, 40, 10, ...

(2) -7, -4, -1, 2, ...

(3) 4, 4, 4, ...

ಕೊಟ್ಟಿ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಮುಂದಿನ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಏನು ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಎರಡನೆಯ ಪದ ಮೂರನೆಯ ಪದ



ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಯಾದಿಯಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದ ಮೊದಲಿನ ಪದದಲ್ಲಿ ವಿಶಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ತಯಾರಾಗಿವೆ. ಎರಡು ಕ್ರಮಗತ ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸ್ಥಿರ ಇದೆ.

ಉದಾ. (1) ರಲ್ಲಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಋಣ, (2) ರಲ್ಲಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಧನ ಮತ್ತು (3) ರಲ್ಲಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 0 ಇದೆ.

ಕ್ರಮಗತ ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎನ್ನುವರು **(Common difference)**. ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಈ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸುವರು.

ಕೊಟ್ಟ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕ್ರಮಗತ ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $(t_{n+1} - t_n)$ ಸ್ಥಿರ ಇದ್ದರೆ ಆ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಎನ್ನುವರು. ಇಂತಹ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ $t_{n+1} - t_n = d$ ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಇದ್ದರೆ,

$$\text{ಆಗ } t_1 = a, \quad t_2 = a + d, \quad t_3 = (a + d) + d = a + 2d$$

ಮೊದಲನೆಯ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಇರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ $a, (a + d), (a + 2d), (a + 3d), \dots$ ಹೀಗೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ: (1) ಅರಿಫಾನನು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ 100 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದನು. ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿನ ನಂತರದ ಒಟ್ಟು ಉಳಿತಾಯ ಕೆಳಗಿನ ಹಾಗೆ ಇದ್ದರೆ.

ತಿಂಗಳು	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
ಉಳಿತಾಯ (₹)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿನ ಒಟ್ಟು ಉಳಿತಾಯ ತೋರಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

(2) ಪ್ರಣವನು ಗೆಲೆಯನಿಂದ 10000 ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗೆ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡನು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು 1000 ರೂಪಾಯಿಗಳಂತೆ ಮರುಳು ಕೊಡುವದಾಗಿ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿದ್ದರೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಮರುಳು ಕೊಡಲು ಹಿಂದಿರುವ ಹಣ ಕೆಳಗಿನ ಹಾಗೆ ಇದ್ದರೆ.

ತಿಂಗಳ ಕ್ರ.	1	2	3	4	5
ಮರುಳು ಕೊಡಬೇಕಾದ ಹಣ ₹	10,000	9,000	8,000	7,000	2,000	1,000	0

(3) 5 ರ ಮಗ್ಗಿ. ಎಂದರೆ 5 ರ ವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

5, 10, 15, 20, . . . 50, 55, 60, ಇದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇದೆ.

ಮೇಲಿನ (1) ಮತ್ತು (2) ಈ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಸಾಂತ ಇವೆ. ಹಾಗಾದರೆ (3) ಈ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಅನಂತ ಶ್ರೇಣಿ ಇದೆ.



ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡೋಣ.

(1) ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿ $(t_{n+1} - t_n)$ ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸ್ಥಿರ ಇದ್ದರೆ ಆ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಗೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಎನ್ನುವರು.

(2) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತೆ ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ಸ್ಥಿರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಈ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ತೋರಿಸುವರು.

(3) d ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಧನ, ಋಣ ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯ ಇರಬಹುದು.

(4) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ a , ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಇದ್ದರೆ ಆ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯ ಪದಗಳು $a, (a + d), (a + 2d), \dots$ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ.

ಕೃತಿ : ಸಾಂತ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಒಂದು ಮತ್ತು ಅನಂತ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಬರೆಯಿರಿ.

ಛಛಛ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಛಛಛ

ಉದಾ. (1) ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ. ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

(i) 5, 12, 19, 26, . . .

(ii) 2, -2, -6, -10, . . .

(iii) 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . .

(iv) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots$

ಉತ್ತರ : (i) 5, 12, 19, 26, . . . ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿ

ಮೊದಲನೆಯ ಪದ = $t_1 = 5, \quad t_2 = 12, \quad t_3 = 19, \dots$

$t_2 - t_1 = 12 - 5 = 7$

$t_3 - t_2 = 19 - 12 = 7$

ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ = 5 ಹಾಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = $d = 7$ ಇದೆ ಅದು ಸ್ಥಿರ ಇದೆ.

∴ ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇದೆ. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಪದಗಳು.

$26 + 7 = 33, \quad 33 + 7 = 40.$

ಇಲ್ಲಿ 33 ಹಾಗೂ 40 ಇವು ಕೊಟ್ಟ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಪದಗಳಾಗಿವೆ.

(ii) 2, -2, -6, -10, . . . ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿ

$$t_1 = 2, \quad t_2 = -2, \quad t_3 = -6, \quad t_4 = -10 \dots$$

$$t_2 - t_1 = -2 - 2 = -4$$

$$t_3 - t_2 = -6 - (-2) = -6 + 2 = -4$$

$$t_4 - t_3 = -10 - (-6) = -10 + 6 = -4$$

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಎರಡು ಕ್ರಮಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಅಂದರೆ $t_{n+1} - t_n = -4$ ಇದೆ.

$\therefore d = -4$ ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇದೆ. ಅದು ಸ್ಥಿರ ಇದೆ. \therefore ಇದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇದೆ.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯ ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಪದಗಳು $(-10) + (-4) = -14$ ಮತ್ತು $(-14) + (-4) = -18$

(iii) 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . . ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿ

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 2, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 3, \quad t_6 = 3 \dots$$

$$t_2 - t_1 = 1 - 1 = 0, \quad t_3 - t_2 = 2 - 1 = 1$$

$$t_4 - t_3 = 2 - 2 = 0, \quad t_5 - t_4 = 3 - 2 = 1$$

ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಗಳ ಎರಡು ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸ್ಥಿರ ಇಲ್ಲ. \therefore ಕೊಟ್ಟ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇಲ್ಲ.

(iv) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$ ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿ

$$t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_3 = -\frac{1}{2}, \quad t_4 = -\frac{3}{2}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$t_3 - t_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$t_4 - t_3 = -\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

ಇಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = -1$ ಇದು ಸ್ಥಿರ ಇದೆ.

\therefore ಕೊಟ್ಟ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇದೆ.

ಇದರ ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ

$$-\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}, \quad -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$$

\therefore ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಪದಗಳು $-\frac{5}{2}$ ಹಾಗೂ $-\frac{7}{2}$ ಇವೆ.

ಉದಾ. (2) ಮೊದಲನೆಯ ಪದ a ಹಾಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅಂಕ ಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $a = -3, d = 4$

(ii) $a = 200, d = 7$

(iii) $a = -1, d = -\frac{1}{2}$

(iv) $a = 8, d = -5$

ಉತ್ತರ : (i) $a = -3, d = 4$

ಅದ್ದರಿಂದ $a = t_1 = -3$

$t_2 = t_1 + d = -3 + 4 = 1$

$t_3 = t_2 + d = 1 + 4 = 5$

$t_4 = t_3 + d = 5 + 4 = 9$

∴ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ $-3, 1, 5, 9, \dots$

(iii) $a = -1, d = -\frac{1}{2}$

$a = t_1 = -1$

$t_2 = t_1 + d = -1 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

$t_3 = t_2 + d = -\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{2} = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-\frac{1}{2})$

$= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

∴ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ $-1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \dots$

(ii) $a = 200, d = 7$

$a = t_1 = 200$

$t_2 = t_1 + d = 200 + 7 = 207$

$t_3 = t_2 + d = 207 + 7 = 214$

$t_4 = t_3 + d = 214 + 7 = 221$

∴ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ $200, 207, 214, 221, \dots$

(iv) $a = 8, d = -5$

$a = t_1 = 8$

$t_2 = t_1 + d = 8 + (-5) = 3$

$t_3 = t_2 + d = 3 + (-5) = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-5) = -7$

∴ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ $8, 3, -2, -7, \dots$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.1

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಗಳಾಗಿವೆ ? ಯಾವವು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇರುತ್ತವೆವೋ ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿ ಯೊಂದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(1) $2, 4, 6, 8, \dots$ (2) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots$ (3) $-10, -6, -2, 2, \dots$

(4) $0.3, 0.33, .0333, \dots$ (5) $0, -4, -8, -12, \dots$ (6) $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \dots$

(7) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \dots$ (8) $127, 132, 137, \dots$

2. ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ a ಹಾಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಇದ್ದರೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(1) $a = 10, d = 5$ (2) $a = -3, d = 0$ (3) $a = -7, d = \frac{1}{2}$

(4) $a = -1.25, d = 3$ (5) $a = 6, d = -3$ (6) $a = -19, d = -4$

3. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಗಾಗಿ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(1) 5, 1, -3, -7, . . .

(2) 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, . . .

(3) 127, 135, 143, 151, . . .

(4) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \dots$



ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ.

- 5, 8, 11, 14, . . . ಇದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆಯೆ ? ಇದ್ದರೆ ಅದರ 100 ನೇ ಪದ ಯಾವದು ಇರಬಹುದು ? ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ 92 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರಬಹುದೇ ? 61 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರಬಹುದೇ ?



ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ

ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ n ನೇ ಪದ (n^{th} term of an A. P.)

5, 8, 11, 14, . . . ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕ್ರಮಾಗತ ಪದಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 3 ಇರುವುದರಿಂದ ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ 5 ಇದೆ. 5 ರಲ್ಲಿ 3 ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 8 ಈ ಎರಡನೆಯ ಪದ ದೊರೆಯುವುದು. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ 100 ನೇ ಪದವನ್ನು ದೊರಕಿಸಲು ಏನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು ?

ಮೊದಲನೆಯ ಪದ	ಎರಡನೆಯ ಪದ	ಮೂರನೆಯ ಪದ	. . .
ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 5,	$5 + 3 = 8,$	$8 + 3 = 11,$. . .

ಈ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ 100 ನೇ ಪದವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಬಹಳಷ್ಟು ಸಮಯ ಬೇಕಾಗುವುದು. ಇದರ ಸಲುವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದು ಸೂತ್ರ ದೊರೆಯುವುದೇ? ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

5	8	11	14
5	$5 + 1 \times 3$	$5 + 2 \times 3$	$5 + 3 \times 3$. . .	$5 + (n - 1) \times 3$	$5 + n \times 3$. . .
ಮೊದಲನೆಯ ಪದ	ಎರಡನೆಯ ಪದ	ಮೂರನೆಯ ಪದ	ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪದ	. . .	n ನೇ ಪದ	$n + 1$ ನೇ ಪದ	. . .
t_1	t_2	t_3	t_4		t_n	t_{n+1}	

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ; t_1, t_2, t_3, \dots ಈ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಇದ್ದರೆ.

$$t_1 = a$$

$$t_2 = t_1 + d = a + d = a + (2 - 1) d$$

$$t_3 = t_2 + d = a + d + d = a + 2d = a + (3 - 1)d$$

$$t_4 = t_3 + d = a + 2d + d = a + 3d = a + (4 - 1)d$$

$$t_n = a + (n - 1)d \quad \text{ಈ ಸೂತ್ರ ದೊರೆಯುವುದು.}$$

ಈಗ ಈ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗದಿಂದ 5, 8, 11, 14, . . . ಈ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ 100 ನೇ ಪದ ತೆಗೆಯೋಣ.
ಇಲ್ಲಿ $a = 5$ ಮತ್ತು $d = 3$ ಇದೆ.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore t_{100} = 5 + (100 - 1) \times 3$$

$$= 5 + 99 \times 3$$

$$= 5 + 297$$

$$= 302$$

ಈ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ 100 ನೇ ಪದ 302 ಇದೆ.

ಈಗ 61 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೊಟ್ಟ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಇದೆಯೋ? ಇದರ ಉತ್ತರ ದೊರಕಿಸಲು ಇದೇ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$t_n = 5 + (n - 1) \times 3$$

\therefore ಒಂದುವೇಳೆ 61 ಇದು n ನೇ ಪದ ಅಂದರೆ t_n ಇದ್ದರೆ

$$61 = 5 + 3n - 3$$

$$= 3n + 2$$

$$\therefore 3n = 59$$

$$\therefore n = \frac{59}{3}$$

ಆದರೆ n ಇದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ.

\therefore 61 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೊಟ್ಟ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ.



ವಿಚಾರಿಸೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಕಬೀರನ ತಾಯಿಯು ಅವರ ಪ್ರತಿ ಹುಟ್ಟು ಹಬ್ಬದಂದು ಅವನ ಎತ್ತರದ ನೋಂದಣಿ ಮಾಡುವಳು. ಅವನು 1 ವರ್ಷದವನಾಗಿದ್ದಾಗ ಅವನ ಎತ್ತರ 70 ಸೆಮೀ ಇತ್ತು. 2 ವರ್ಷದವನಾದಾಗ ಅವನು 80 ಸೆಮೀ ಎತ್ತರದವನಾದನು. 3 ವರ್ಷದವನಾದಾಗ ಅವನ ಎತ್ತರ 90 ಸೆಮೀ. ಆಯಿತು ಆತನ ಚಿಕ್ಕಮ್ಮಳಾದ ಮೀರಾ ಹತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುತ್ತಿದ್ದಳು. ಅವಳು ಹೇಗೆ ಹೇಳಿದಳು, 'ಕಬೀರನ ಎತ್ತರ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಯುವುದು. ಹೀಗೆ ಕಾಣಿಸುವುದು. ಇದನ್ನು ಗೃಹಿತ ಹಿಡಿದು ಅವಳು ಕಬೀರನು 15 ವರ್ಷದವನಾಗಿ ಹತ್ತನೆಯ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಹೋದಾಗ ಅವನ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು ಇರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಅಳಿದಳು. ಅವಳಿಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯ ಅಘಾತ ಆಯಿತು. ನೀವು ಸಹ ಕಬೀರನ ಎತ್ತರ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು. ಎಂದು ಗೃಹಿತಹಿಡಿದು ಅವನು 15 ವರ್ಷದವನಾದ ಮೇಲೆ ಅವನ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು ಇರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಶಶಶ ಬಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಶಶಶ

ಉದಾ. (1) ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ t_n ತೆಗೆಯಿರಿ
ಹಾಗೂ ಅದರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಶ್ರೇಣಿಯ
30 ನೇ ಪದ ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$3, 8, 13, 18, \dots$$

ಉತ್ತರ : ಕೊಟ್ಟ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ 3, 8, 13, 18, ...

$$\text{ಇಲ್ಲಿ } t_1 = 3, t_2 = 8, t_3 = 13, t_4 = 18, \dots$$

$$d = t_2 - t_1 = 8 - 3 = 5, \quad n = 30$$

$$\text{ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದಂತೆ } t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore t_n = 3 + (n - 1) \times 5 \because a = 3, d = 5$$

$$\therefore t_n = 3 + 5n - 5$$

$$\therefore t_n = 5n - 2$$

$$\therefore 30 \text{ ನೇ ಪದ} = t_{30} = 5 \times 30 - 2$$

$$= 150 - 2 = 148$$

ಉದಾ. (2) ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎಷ್ಟನೇ ಪದ
560 ಇದೆ ?

$$2, 11, 20, 29, \dots$$

ಉತ್ತರ : ಕೊಟ್ಟ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ 2, 11, 20, 29, ...

$$\text{ಇಲ್ಲಿ } a = 2, d = 11 - 2 = 9$$

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ n ನೇ ಪದ 560 ಇದೆ. $t_n = 560$

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore 560 = 2 + (n - 1) \times 9$$

$$= 2 + 9n - 9$$

$$\therefore 9n = 567$$

$$\therefore n = \frac{567}{9} = 63$$

\therefore ಕೊಟ್ಟ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ 63 ನೇ ಪದ 560 ಇದೆ.

ಉದಾ. (3) ಕೊಟ್ಟ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ 5, 11, 17,
23, ... ಇದೆ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿ 301 ಈ
ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆಯೇ ?

ಉತ್ತರ : 5, 11, 17, 23, ... ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ

$$t_1 = 5, t_2 = 11, t_3 = 17, t_4 = 23, \dots$$

$$t_2 - t_1 = 11 - 5 = 6$$

$$t_3 - t_2 = 17 - 11 = 6$$

\therefore ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ.

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ $a = 5$

ಮತ್ತು $d = 6$

ಒಂದು ವೇಳೆ n ನೇ ಪದ 301 ದೆ ಇದ್ದರೆ

$$t_n = a + (n - 1)d = 301$$

$$\therefore 301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

$$= 5 + 6n - 6$$

$$\therefore 6n = 301 + 1 = 302$$

$$\therefore n = \frac{302}{6}, \text{ ಇದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಇಲ್ಲ.}$$

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕ್ರಮಾನುಗತೆಯಲ್ಲಿ 301 ಈ
ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾ. (4) 4 ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ಎರಡಂಕಿ
ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : 4 ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ

ಯಾದಿ 12, 16, 20, 24, ... 96 ಇದೆ.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೆಗೆಯೋಣ

$$t_n = 96, a = 12, d = 4, n = ?$$

\therefore ಸೂತ್ರದಿಂದ

$$96 = 12 + (n - 1) \times 4$$

$$= 12 + 4n - 4$$

$$\therefore 4n = 88$$

$$\therefore n = 22$$

\therefore 4 ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

22 ಇರುತ್ತವೆ.

ಉದಾ. (5) ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ 10 ನೇ ಪದ 25 ಮತ್ತು 18 ನೇ ಪದ 41 ಇದ್ದರೆ ಆ ಶ್ರೇಣಿಯ 38 ನೇ ಪದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದರಂತೆ n ನೇ ಪದ 99 ಇದ್ದರೆ n ದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಕೊಟ್ಟ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ $t_{10} = 25$ ಹಾಗೂ $t_{18} = 41$ ಇದೆ.

$$\text{ನಮ್ಮ ತಿಳಿದಂತೆ } t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore t_{10} = a + (10 - 1)d$$

$$\therefore 25 = a + 9d \dots\dots\dots (I)$$

$$\text{ಅದರಂತೆ, } t_{18} = a + (18 - 1)d$$

$$\therefore 41 = a + 17d \dots\dots\dots (II)$$

$$25 = a + 9d \dots\dots\dots (I) \text{ ರ ಮೇಲಿಂದ}$$

$$a = 25 - 9d.$$

ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ II ರಲ್ಲಿ ಇಡಲಾಗಿ.

$$\text{ಸಮೀಕರಣ (II) } a + 17d = 41 \text{ ಇದೆ.}$$

$$\therefore 25 - 9d + 17d = 41$$

$$\therefore 8d = 41 - 25 = 16$$

$$\therefore d = 2$$

$$d = 2 \text{ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ}$$

I ರಲ್ಲಿ ಇಡಲಾಗಿ

$$a + 9d = 25$$

$$\therefore a + 9 \times 2 = 25$$

$$\therefore a + 18 = 25$$

$$\therefore a = 7$$

n ನೇ ಪದ 99 ಇದ್ದರೆ n ದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯ ಬೇಕಾಗಿದೆ.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$99 = 7 + (n - 1) \times 2$$

$$99 = 7 + 2n - 2$$

$$99 = 5 + 2n$$

$$\therefore 2n = 94$$

$$\therefore n = 47$$

\therefore ಕೊಟ್ಟ ಶ್ರೇಣಿಯ 38 ನೇ ಪದ 81 ಇದೆ ಮತ್ತು 99 ಇದು 47 ನೇ ಪದ ಇದೆ.

$$\text{ಈಗ } t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore t_{38} = 7 + (38 - 1) \times 2$$

$$= 7 + 37 \times 2$$

$$= 7 + 74$$

$$= 81$$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.2

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಚೌಕೋನಗಳಲ್ಲಿಯೋಗ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆಯಿರಿ.

(1) 1, 8, 15, 22, . . .

$$\text{ಇಲ್ಲಿ } a = \square, t_1 = \square, t_2 = \square, t_3 = \square, \dots$$

$$t_2 - t_1 = \square - \square = \square$$

$$t_3 - t_2 = \square - \square = \square \therefore d = \square$$

(2) 3, 6, 9, 12, . . .

$$\text{ಇಲ್ಲಿ } t_1 = \square, t_2 = \square, t_3 = \square, t_4 = \square, \dots$$

$$t_2 - t_1 = \square, t_3 - t_2 = \square \therefore d = \square$$

(3) -3, -8, -13, -18, . . .

$$\text{ಇಲ್ಲಿ } t_1 = \square, t_2 = \square, t_3 = \square, t_4 = \square, \dots$$

$$t_2 - t_1 = \square, t_3 - t_2 = \square \therefore a = \square, d = \square$$

(4) 70, 60, 50, 40, . . .

$$\text{ಇಲ್ಲಿ } t_1 = \square, t_2 = \square, t_3 = \square, \dots$$

$$\therefore a = \square, d = \square$$

2. ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇದೆ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಇದ್ದರೆ ಆ ಶ್ರೇಣಿಯ ಇಪ್ಪತ್ತನೇ ಪದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

-12, -5, 2, 9, 16, 23, 30, . . .

3. 12, 16, 20, 24, . . . ಇದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ 24 ನೇ ಪದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ 19 ನೇ ಪದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

7, 13, 19, 25, . . .

5. ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ 27 ನೇ ಪದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

9, 4, -1, -6, -11, . . .

6. ಮೂರಂಕಿ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮೂಹದಲ್ಲಿ 5 ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟು ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಶೋಧಿಸಿ.

7. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ 11 ನೇ ಪದ 16 ಮತ್ತು 21 ನೇ ಪದ 29 ಇದ್ದರೆ, ಆ ಶ್ರೇಣಿಯ 41 ನೇ ಪದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. 11, 8, 5, 2, . . . ಈ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ -151 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟನೇ ಪದ ಇರಬಹುದು ?

9. 10 ರಿಂದ 250 ವರೆಗಿನ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 4 ರ ವಿಭಾಜ್ಯ ಆಗಿವೆ ?

10. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ 17 ನೇ ಪದ 10 ನೇ ಪದಕ್ಕಿಂತ 7 ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಚಾಣಾಕ್ಷ ಶಿಕ್ಷಕ

ಒಬ್ಬರಾಜನಿದ್ದನು. ಅವನು ಯಶವಂತರಾಜ ಹಾಗೂ ಗೀತಾದೇವಿ ತನ್ನ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಕುದುರೆಸವಾರ ಕಲಿಸಲು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ತಾರಾ ಹಾಗೂ ಮೀರಾ ಈ ಶಿಕ್ಷಕರನ್ನು ನೇಮಿಸಿದ್ದನು. ಆ ಇಬ್ಬರಿಗೆ ವರ್ಷದ ಸಲುವಾಗಿ ಎಷ್ಟು ಸಂಬಳ ಕೊಡಬೇಕು ಎಂದು ವಿಚಾರಿಸಿದನು.

ತಾರಾ ಹೇಳಿದಳು, “ನನಗೆ ಮೊದಲನೆಯ ತಿಂಗಳು 100 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಸಂಬಳವಾಗಿ ಕೊಡಬೇಕು ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ 100 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಕೊಡಬೇಕು.” ಮೀರಾ ಹೇಳಿದಳು, “ನನ್ನಿಗೆ ಮೊದಲನೆಯ ತಿಂಗಳು 10 ನಾಣ್ಯಗಳ ಸಂಬಳ ಕೊಡಬೇಕು ಮತ್ತು ನಂತರ ಮುಂದಿನ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೆ ಮೊದಲಿನ ತಿಂಗಳಿನ ಸಂಬಳದ ಎರಡರಷ್ಟು ಸಂಬಳ ಕೊಡಬೇಕು.” ಮಹಾರಾಜನು ಅದನ್ನು ಮಾನ್ಯ ಮಾಡಿದನು. ಮೂರು ತಿಂಗಳ ನಂತರ ಯಶವಂತರಾಜನು ತನ್ನ ತಂಗಿಗೆ ಹೇಳಿದ್ದನು. “ನನ್ನ ಶಿಕ್ಷಕಿ ನಿನ್ನ ಶಿಕ್ಷಕನಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಜಾಣಳಾಗಿದ್ದಾರೆ, ಅವಳು ಹೆಚ್ಚು ಸಂಬಳ ಬೇಡಿದ್ದಾಳೆ.” ಗೀತಾದೇವಿ ಹೇಳಿದಳು, “ನನ್ನಿಗೆ ಮೊದಲು ಹಾಗೆ ಅನಿಸಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾನು ಮೀರಾತಾಯಿಗೆ ವಿಚಾರಿಸಿದ್ದೇನು.” ನೀವು ಕಡಿಮೇ ಸಂಬಳ ಏಕೆ ಬೇಡಿದ್ದೀರಿ”, ಆಗ ಅವಳು ನಕ್ಕು ಹೇಳಿದಳು ಎಂಟು ತಿಂಗಳ ನಂತರ ಮೋಜು ಕಾಣುವದು, ನೀನು ನೋಡು ಮತ್ತು ನಾನು ಎಂಟನೆಯ ತಿಂಗಳಿನ ಸಂಬಳ ತೆಗೆದು ನೋಡಿದ್ದೇನೆ. ನೀನು ಸಹ” ತೆಗೆದು ನೋಡು.

ತಿಂಗಳು	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ತಾರಾಳ ಸಂಬಳ	100	200	300	400	500	600	700	800	900	-	-	-
ಮೀರಾಳ ಸಂಬಳ	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	-	-	-

ನೀವು ಈ ಕೊಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ತಾರಾಳ ಸಂಬಳ 100, 200, 300, 400, . . . ಇದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಕ್ಕೆ ಬಂದಿದೆಯೇ ?

$$t_1 = 100, \quad t_2 = 200, \quad t_3 = 300, \dots \quad t_2 - t_1 = 100 = d$$

ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 100 ಇದೆ.

ಮೀರಾಳ ಸಂಬಳ 10, 20, 40, 80, . . . ಇದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇಲ್ಲ. ಕಾರಣ $20 - 10 = 10$, $40 - 20 = 20$, $80 - 40 = 40$ ಅಂದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಇದು ಸ್ಥಿರ ಇಲ್ಲ.

ಅದರೆ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದ ಮೊದಲನೆಯ ಪದದ ಎರಡರಷ್ಟು ಆಗುತ್ತ ಹೋಗುವದು

$$\text{ಇಲ್ಲಿ } \frac{t_2}{t_1} = \frac{20}{10} = 2, \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{40}{20} = 2, \quad \frac{t_4}{t_3} = \frac{80}{40} = 2$$

$\therefore \frac{t_{n+1}}{t_n}$, ಅಂದರೆ ಎರಡನೆಯ ಪದ ಹಾಗೂ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಇವುಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಸಮಾನ ಇದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರದ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಭೂಮಿತಿ ಶ್ರೇಣಿ ಎನ್ನುವರು. $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ ಗುಣೋತ್ತರ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದರೆ, ಭೂಮಿತಿಯ ಶ್ರೇಣಿ ಇದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಕ್ಕಿಂತ ವೇಗದಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವದು ಇದನ್ನು ಅನುಭವಿಸಿರಿ.

ಈ ಗುಣೋತ್ತರ 1 ರ ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೇ ಇದ್ದರೆ ಆ ಶ್ರೇಣಿ ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವದು ಇದನ್ನು ಅನುಭವಿಸಿರಿ.

ಈ ವರ್ಷ ನಾವು ಕೇವಲ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವವರಿದ್ದೇವೆ. ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯ n ನೇ ಪದ ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಮೊದಲು n ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡೋಣ.

ತಕ್ಷಣ ಬೇರೀಜು

ಮೂರು ನೂರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದಿನ ಘಟನೆ ಇದೆ. ಜರ್ಮನಿಯಲ್ಲಿ ಬ್ಯೂಟನೆರ್ (Buttner) ಹೆಸರಿನ ಶಿಕ್ಷಕರ ಏಕೋಪಾಧ್ಯಾಯ ಶಾಲೆ ಇತ್ತು. ಆ ಶಿಕ್ಷಕನಿಗೆ ಜೋಡಾನ್ ಮಾರ್ಟಿನ್ ಬಾರ್ಡೆಲಿಸ್ ಈ ಒಬ್ಬ ಮಾತ್ರ ಸಹಾಯಕನು ಇದ್ದನು. ಅವನ ಕೆಲಸವೆಂದರೆ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಮೂಲಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಕಲಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಅವರಿಗೆ ಲೇಖನಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಕೊಡುವುದು. ಬ್ಯೂಟನೆರ್ ಮಾತ್ರ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚು ಶಿಸ್ತಿನವನಾಗಿದ್ದನು. ಬ್ಯೂಟನೆರ್ ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳು ಗದ್ದಲ ಮಾಡಬಾರದೆಂದು ಅವರನ್ನು ಕೆಲಸದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಲು ಅವರು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಹೇಳಬೇಕೆಂದು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿದ್ದರು. ಅವರು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ 1 ರಿಂದ 100 ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಾಟಿಯ ಮೇಲೆ ಬರೆದು ಬೇರೀಜು ಮಾಡಲು ಹೇಳಿದ್ದರು. ಶಿಕ್ಷಕರು ಅವರ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರು. ಮಕ್ಕಳು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರು. ಐದು ಮಿನಿಟುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪಾಟಿ ಕೆಳಗೆ ಇಟ್ಟಿ ಸವ್ವಳ ಬಂದಿತು. ಅವರು ಕಾರ್ಲ್ ಗಾವುಸನ ಕಡೆಗೆ ನೋಡಿದರು ಮತ್ತು ಕೇಳಿದರು, “ಇದು ಏನು? ನಾನು ನಿನಗೆ 1 ರಿಂದ 100 ರ ವರೆಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಅವುಗಳ ಬೇರೀಜುಸಹ ಮಾಡಲು ಹೇಳಿದ್ದೇನೆ ಪಾಟಿಯನ್ನು ಏಕೆ ಕೆಳಗೆ ಇಟ್ಟೆ? ನಿನಗೆ ಏನೂ ಮಾಡುವುದು ಇಲ್ಲವೇ ?

ಕಾರ್ಲ್ ಗಾವುಸ್ ಹೇಳಿದನು, “ನಾನು ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿದ್ದೇನೆ.”

ಶಿಕ್ಷಕರು ಕೇಳಿದರು, “ಏನು? ಇಷ್ಟು ತಕ್ಷಣ ಬೇರೀಜು ಹೇಗೆ ಆಯಿತು ? ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಹ ಬರೆಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲ. ಉತ್ತರ ಎಷ್ಟು ಬಂದಿದೆ?”

ಕಾರ್ಲ್ ಗಾವುಸ್ ಹೇಳಿದನು, “ಐದು ಸಾವಿರದಾ ಐವತ್ತು.”

ಶಿಕ್ಷಕರು ಆಶ್ಚರ್ಯಚಕಿತರಾದರು ಮತ್ತು ಕೇಳಿದರು, “ಉತ್ತರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದೆ ?”

ಕಾರ್ಲ್ ಗಾವುಸನು ತಕ್ಷಣ ಬೇರೀಜು ಮಾಡುವ ಪದ್ಧತಿ :

ನಿರಂತರ ಕ್ರಮದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	1	2	3	4 100
) ⁺) ⁺) ⁺) ⁺
ವಿರುದ್ಧಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	100	99	98	97 1
ಬೇರೀಜು	101	101	101	101

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು 101 ಬರುವುದು. ಈ ಬೇರೀಜು 100 ಸಲ ಬಂದಿರುವುದರಿಂದ 100×101 ಇದರ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿದನು. ಅದು 10100 ಬಂದಿತ್ತು. ಇಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ 100 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಲಾಗಿತ್ತು. ಆದ್ದರಿಂದ 10100 ದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಅದು 5050 ಬಂದಿತ್ತು. ಆದ್ದರಿಂದ 1, 2, 3, . . . , 100 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು 5050 ಇದೆ. ಶಿಕ್ಷಕರು ಅವನಿಗೆ ಶಬ್ಬಾಸಿಕೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರು.

ಈಗ ಗಾವುಸರ್ ಬೇರೀಜು ಮಾಡುವ ಕಲ್ಪಿತೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ n ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ತೆಗೆಯುವ ಸೂತ್ರ ತೆಗೆಯೋಣ.

ಜೋಡಾನ್ ಫ್ರೆಡೆರಿಕ್ ಗಾವುಸ:

30 ಏಪ್ರಿಲ್ 1777 - 23 ಫೆಬ್ರವರಿ 1855.

ಕಾರ್ಲ್ ಗಾವುಸ ಇವರು ಒಬ್ಬ ಶೇಷ್ಠ ಜರ್ಮನ್ ಗಣಿತಜ್ಞರಾಗಿದ್ದರು. ಅವರ ಜನ್ಮ ಬ್ರಾಡಿಸ್ ಸ್ವಾಯಿಕ್ ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಶಿಕ್ಷಿತ ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿ ಆಯಿತು. ಬ್ಯೂಟನೆರ್ ಇವರ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಅವರು ತಮ್ಮ ಬುದ್ಧಿಯ ಚಾಣಾಕ್ಷತನ ತೋರಿಸಿದರು. ಇದಾದ ನಂತರ ಬ್ಯೂಟನೆರ್ ಇವರ ಸಹಾಯಕ ಜೋಡಾನ್ ಮಾರ್ಟಿನ್ ಬಾರ್ಡೆಲಿಸ್ ಇವರೊಂದಿಗೆ ಗಳಿತನವಾಯಿತು. ಇಬ್ಬರೂ ಕೊಡಿಕೊಂಡು ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಪ್ರಸಿದ್ಧಗೊಳಿಸಿದರು. ಬಾರ್ಡೆಲಿಸನು ಗಾವುಸರ ಅಸಾಮಾನ್ಯ ಬುದ್ಧಿಯನ್ನು ಅನೇಕರ ಮುಂದೆ ತಂದಿಟ್ಟನು.





ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು (Sum of first n terms of an A. P.)

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + (n - 1)d$ ಈ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ a ಇದು ಮೊದಲನೆಯ ಪದ ಇದೆ ಮತ್ತು d ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇದೆ. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು S_n ದಿಂದ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ.

$$S_n = [a] + [a + d] + \dots + [a + (n-2)d] + [a + (n-1)d]$$

ಈ ಪದಗಳನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಿಂದ ಮಂಡಿಸಿ

$$S_n = [a + (n-1)d] + [a + (n-2)d] + \dots + [a + d] + [a]$$

ಬೇರೀಜು ಮಾಡಲಾಗಿ,

$$2S_n = [a + a + (n-1)d] + [a + d + a + (n-2)d] + \dots + [a + (n-2)d + a + d] + [a + (n-1)d + a]$$

$$2S_n = [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \dots + [2a + (n-1)d] \dots n \text{ ಸಲ}$$

$$2S_n = n [2a + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \quad \text{ಅಥವಾ} \quad S_n = na + \frac{n(n-1)}{2} d$$

ಉದಾಹರಣಾರ್ಥ 14, 16, 18, ... ಈ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲು 100 ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ತೆಗೆಯೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ $a = 14, d = 2, n = 100$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$\therefore S_{100} = \frac{100}{2} [2 \times 14 + (100-1) \times 2]$$

$$= 50 [28 + 198]$$

$$= 50 \times 226 = 11,300$$

\therefore ಕೊಟ್ಟ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 100 ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು 11,300 ಇದೆ.



ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ.

ಕೊಟ್ಟ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಇದ್ದರೆ,

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = na + \frac{n(n-1)}{2} d$$

ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನ ಇನ್ನು ಒಂದು ಸೂತ್ರ ದೊರೆಕಿಸೋಣ.

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots [a + (n - 1)d]$ ಈ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯ

ಮೊದಲನೆಯ ಪದ = $t_1 = a$ ಇದೆ. ಮತ್ತು n ನೇ ಪದ $[a + (n - 1)d]$ ಇದೆ.

$$\text{ಈಗ } S_n = \frac{n}{2} [a + a + (n-1)d]$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [t_1 + t_n] = \frac{n}{2} [\text{ಮೊದಲನೆಯ ಪದ} + \text{ಕೊನೆಯ ಪದ}]$$

ಝಝಝ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು **ಝಝಝ**

ಉದಾ. (1) ಮೊದಲ n ಸಮ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಮೊದಲ n ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $1, 2, 3, \dots, n$ ಆಗಿವೆ.

$$\text{ಇಲ್ಲಿ } a = 1, \quad d = 1, \quad n \text{ ನೇ ಪದ} = n$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$S_n = \frac{n}{2} [\text{ಮೊದಲನೆಯ ಪದ} + \text{ಕೊನೆಯ ಪದ}]$$

$$= \frac{n}{2} [1 + n] = \frac{n(n+1)}{2}$$

\therefore ಮೊದಲ n ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು $\frac{n(n+1)}{2}$ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ. (2) ಮೊದಲ n ಸಮ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಮೊದಲ n ಸಮ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ $2, 4, 6, 8, \dots, 2n$ ಆಗಿವೆ.

$$t_1 = \text{ಮೊದಲನೆಯ ಪದ} = 2, \quad t_n = \text{ಕೊನೆಯ ಪದ} = 2n$$

ಪದ್ಧತಿ I

$$\begin{aligned} &= \frac{n}{2} [t_1 + t_n] \\ &= \frac{n}{2} [2 + 2n] \\ &= \frac{n}{2} \times 2 (1 + n) \\ &= n (1 + n) \\ &= n (n+1) \end{aligned}$$

ಪದ್ಧತಿ II

$$\begin{aligned} S_n &= 2 + 4 + 6 \dots + 2n \\ &= 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) \\ &= \frac{2[n(n+1)]}{2} \\ &= n (1 + n) \\ &= n (n+1) \end{aligned}$$

ಪದ್ಧತಿ III

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ &= \frac{n}{2} [2 \times 2 + (n-1)2] \\ &= \frac{n}{2} [4 + 2n - 2] \\ &= \frac{n}{2} [2 + 2n] \\ &= \frac{n}{2} \times 2 (1 + n) \\ &= n (1 + n) = n (n+1) \end{aligned}$$

\therefore ಮೊದಲ n ಸಮ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು $n (n+1)$ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ. (3) ಮೊದಲು n ವಿಷಮ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಮೊದಲು n ವಿಷಮ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

$$1, 3, 5, 7, \dots, (2n - 1).$$

$$a = t_1 = 1 \text{ ಮತ್ತು } t_n = (2n - 1), d = 2$$

ಪದ್ಧತಿ I	ಪದ್ಧತಿ II	ಪದ್ಧತಿ III
$S_n = \frac{n}{2} [t_1 + t_n]$	$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$	$S_n = 1 + 3 + \dots + (2n-1)$
$= \frac{n}{2} [1 + (2n - 1)]$	$= \frac{n}{2} [2 \times 1 + (n-1) \times 2]$	$= (1 + 2 + 3 + \dots + 2n)$
$= \frac{n}{2} [1 + 2n - 1]$	$= \frac{n}{2} [2 + 2n - 2]$	$= (2 + 4 + 6 + \dots + 2n)$
$= \frac{n}{2} \times 2n$	$= \frac{n}{2} \times 2n$	$= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{2n(n+1)}{2}$
$= n^2$	$= n^2$	$= (2n^2 + n) - (n^2 + n)$
		$= n^2$

\therefore ಮೊದಲು n ವಿಷಮ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು n^2 ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ. (4) 1 ರಿಂದ 150 ರ ವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ : 1 ರಿಂದ 150 ರ ವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 1, 3, 5, 7, \dots , 149 ಇವೆ.

ಇದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇದೆ.

ಇಲ್ಲಿ $a = 1$ ಮತ್ತು $d = 2$, ಮೊದಲು 1 ರಿಂದ 150 ರ ವರೆಗಿನ ವಿಷಮ n ದ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯೋಣ.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$149 = 1 + (n - 1)2 \quad \therefore 149 = 1 + 2n - 2$$

$$\therefore n = 75$$

ಈಗ $1 + 3 + 5 + \dots + 149$ ಈ 75 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡೋಣ.

$$a = 1 \text{ ಮತ್ತು } d = 2, n = 75$$

ಪದ್ಧತಿ I	ಪದ್ಧತಿ II
$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$	$S_n = \frac{n}{2} [t_1 + t_n]$
$S_n = \boxed{}$	$S_n = \frac{75}{2} [1 + 149]$
$S_n = \boxed{} \times \boxed{}$	$S_n = \boxed{} \times \boxed{}$
$S_n = \boxed{}$	$S_n = \boxed{}$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.3

1. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ 6 ಹಾಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 3 ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ S_{27} ತೆಗೆಯಿರಿ.

$$a = 6, d = 3, S_{27} = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2} [\square + (n-1)d]$$

$$S_{27} = \frac{27}{2} [12 + (27-1)\square]$$

$$= \frac{27}{2} \times \square$$

$$= 27 \times 45 = \square$$

2. ಮೊದಲ 123 ಸಮ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ತೆಗೆಯಿರಿ.

3. 1 ಹಾಗೂ 350 ರ ನಡುವಿನ ಎಲ್ಲ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ತೆಗೆಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ 19 ನೇ ಪದ 52 ಮತ್ತು 38 ನೇ ಪದ 128 ಇವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲ 56 ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ತೆಗೆಯಿರಿ.

5. 1 ಹಾಗೂ 140 ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ, 4 ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟು ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಾಡಿರಿ.

1 ಹಾಗೂ 140 ರ ನಡುವಿನ 4 ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

4, 8, , 136

ಇವು ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ? $\therefore n = \square$

$a = \square, d = \square, t_n = \square$

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$136 = \square + (n-1) \times \square$$

$$n = \square \rightarrow S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$S_{\square} = \frac{\square}{2} [\quad] = \square$$

1 ಹಾಗೂ 140 ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ 4 ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು = \square

★ 6. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 55 ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು 3300 ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಅದರ 28 ನೇ ಪದ ತೆಗೆಯಿರಿ.

- 7.★ ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೂರು ಕ್ರಮಾಗತ ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು 27 ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಗುಣಾಕಾರ 504 ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
(ಮೂರು ಕ್ರಮಾಗತ ಪದಗಳು $a - d$, a , $a + d$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ)
- 8.★ ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯ ನಾಲ್ಕು ಕ್ರಮಾಗತ ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು 12 ಇದೆ. ಅದರಂತೆ ಆ ನಾಲ್ಕು ಕ್ರಮಾಗತ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರನೆಯ ಹಾಗೂ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು 14 ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಆ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.
(ನಾಲ್ಕು ಕ್ರಮಾಗತ ಪದಗಳು $a - d$, a , $a + d$, $a + 2d$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ)
- 9.★ ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಒಂಬತ್ತನೆಯ ಪದ ಶೂನ್ಯ ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ 29 ನೇ ಪದ ಇದು 19 ನೇ ಪದದ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.



ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಉಪಯೋಜನೆ (Application of A.P.)

ಉದಾ. (1) ಮಿಕ್ಸರ್ ತಯಾರಿಸುವ ಒಂದು ಕಂಪನಿಯು ಮೂರನೆಯ ವರ್ಷ 600 ಮಿಕ್ಸರ್‌ಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿತು ಮತ್ತು ಎಳನೇಯ ವರ್ಷ 700 ಮಿಕ್ಸರ್ ತಯಾರಿಸಿತು. ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ತಯಾರಾಗುವ ಮಿಕ್ಸರ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯ ಹೆಚ್ಚಳ ನಿಶ್ಚಿತ ಇದ್ದರೆ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. (i) ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪಾದನೆ (ii) 10 ನೇಯ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪಾದನೆ (iii) ಮೊದಲು ಎಳು ವಷಹಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆ.

ಉತ್ತರ : ಕಂಪನಿ ತಯಾರಿಸುವ ಮಿಕ್ಸರ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ಹೆಚ್ಚಳ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ನಿಶ್ಚಿತ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ನಿರಂತರ ವರ್ಷದಲ್ಲಿಯ ಉತ್ಪಾದನೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಕಂಪನಿಯು

(i) n ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ t_n ಮಿಕ್ಸರ್‌ಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ಕೊಟ್ಟ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ,

$$t_3 = 600, t_7 = 700$$

$$t_n = a + (n-1)d \text{ ಎಂದು ನಮ್ಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ}$$

$$t_3 = a + (3-1)d$$

$$= 600 = a + 2d \quad \dots\dots\dots (I)$$

$$t_7 = a + (7-1)d$$

$$= a + 6d = 700 \quad \dots\dots\dots (II)$$

$$a + 2d = 600 \quad \therefore a = 600 - 2d \text{ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (II) ದಲ್ಲಿ ಇಡಲಾಗಿ,$$

$$600 - 2d + 6d = 700$$

$$4d = 100 \quad \therefore d = 25$$

$$a + 2d = 600 \quad \therefore a + 2 \times 25 = 600$$

$$a + 50 = 600 \quad \therefore a = 550$$

\therefore ಮೊದಲನೇಯ ವರ್ಷದಲ್ಲಿಯ ಉತ್ಪಾದನೆ 550 ಇದೆ.

$$(ii) t_n = a + (n-1)d$$

$$t_{10} = 550 + (10-1) \times 25$$

$$= 550 + 225 = 775$$

\therefore 10 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿಯ ಉತ್ಪಾದನೆ 775 ಇದೆ.

(iii) ಮೊದಲನೆಯ 7 ವರ್ಷದಲ್ಲಿಯ ಉತ್ಪಾದನೆ ತೆಗೆಯಲು S_n ದ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ.

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$\therefore S_7 = \frac{7}{2} [1100 + 150] = \frac{7}{2} [1250] = 7 \times 625 = 4375$$

\therefore ಮೊದಲಿನ 7 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ 4375 ಮಿಕ್ಟರುಗಳ ಉತ್ಪಾದನೆ ಆಯಿತು.

ಉದಾ. (2) ಕೈಗಡ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ 3,25,000 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಮರಳಿ ಮುಟ್ಟಿಸಲು ಅಜಯ ಶರ್ಮಾ ಮೊದಲನೆಯ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ 30500 ರೂಪಾಯಿ ತುಂಬುವನು. ಇದ್ದಾದ ನಂತರ ಅವನಿಗೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಮೊದಲಿನ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದ ಹಣಕ್ಕಿಂತ 1500 ರೂಪಾಯಿ ಕಡಿಮೆ ತುಂಬಬೇಕಾಗುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಕೈಗಡ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಹಣವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮುಟ್ಟಿಸಲು ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ತಿಂಗಳುಗಳು ಬೇಕಾಗುವವು ?

ಉತ್ತರ : ಕೈಗಡ ಹಣ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮುಟ್ಟಿಸಲು n ತಿಂಗಳುಗಳು ಬೇಕಾಗುವವು ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. 30,500 ದಿಂದ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು 1500 ರೂ. ಕಡಿಮೆ ಕೊಡುವವಿದೆ.

\therefore 30,500; 30,500 - 1500; 30,500 - 2 × 1500, . . . ಈ ಕೊಡುವ ಹಣದ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇದೆ.

ಮೊದಲನೆ ಪದ = $a = 30500$, $d = -1500$ ಕೈಗಡ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಹಣ = $S_n = 3,25,000$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$3,25,000 = \frac{n}{2} [2 \times 30500 + (n-1) \times (-1500)]$$

$$= \frac{n}{2} [2 \times 30500 - 1500n + 1500]$$

$$3,25,000 = 30500n - 750n^2 + 750n$$

$$\therefore 750n^2 - 31250n + 325000 = 0$$

$$\therefore 3n^2 - 125n + 1300 = 0 \quad \dots \dots \quad (\text{ಎರಡು ಬದಿಗೆ 250 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗಿ,})$$

$$\therefore 3n^2 - 60n - 65n + 1300 = 0$$

$$\therefore 3n(n-20) - 65(n-20) = 0$$

$$\therefore (n-20)(3n-65) = 0$$

$$\therefore n-20 = 0, \text{ ಅಥವಾ } 3n-65 = 0$$

$$n = 20 \text{ ಅಥವಾ } n = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$$

n ಇದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯ ಪದದ ಕ್ರಮಾಂಕ ಇರುವುದರಿಂದ n ಇದು ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

$$\therefore n \neq \frac{65}{3} \quad \therefore n = 20$$

(ಅಥವಾ, 20 ತಿಂಗಳುಗಳ ನಂತರ $S_{20} = 3,25,000$ ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವಾಗ ಎಲ್ಲ ಕೈಗಡ ಹಣ ಮುಟ್ಟುತ್ತದೆ. ನಂತರದ ಕಾಲದ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ)

∴ ಕೈಗಡ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಹಣವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮುಟ್ಟಿಸಲು ಅವನಿಗೆ 20 ತಿಂಗಳುಗಳು ಬೇಕಾಗುವವು.

ಉದಾ. (3) ಅನ್ವರ್ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಕೆಲವು ಹಣದ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುವನು. ಮೊದಲನೆಯ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಅವನು 200 ರೂ. ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುವನು. ಎರಡನೆಯ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ 250 ರೂ. ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುವನು. ಮೂರನೆಯ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ 300 ರೂ. ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುವನು. ಹಾಗಾದರೆ 1000 ರೂಪಾಯಿ ಉಳಿತಾಯ ಎಷ್ಟನೇ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಆಗುವದು? ಆ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಅವನ ಒಟ್ಟು ಉಳಿತಾಯ ಎಷ್ಟು ಆಗುವದು ?

ಉತ್ತರ: ಮೊದಲನೆಯ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿಯ ಉಳಿತಾಯ 200 ರೂ., ಎರಡನೆಯ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿಯ ಉಳಿತಾಯ 250 ರೂ. . . . ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಆಗುವ ಉಳಿತಾಯ 200, 250, 300, . . . ಇದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇದೆ. ಇಲ್ಲಿ $a = 200$, $d = 50$, t_n ದ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಮೊದಲು n ತೆಗೆದು ಆ ಮೇಲೆ ಅದರ ಮೇಲಿಂದ S_n ತೆಗೆಯೋಣ.

$$\begin{aligned}t_n &= a + (n-1)d \\ &= 200 + (n-1)50 \\ &= 200 + 50n - 50\end{aligned}$$

$$\therefore 1000 = 150 + 50n$$

$$150 + 50n = 1000$$

$$50n = 1000 - 150$$

$$50n = 850$$

$$\therefore n = 17$$

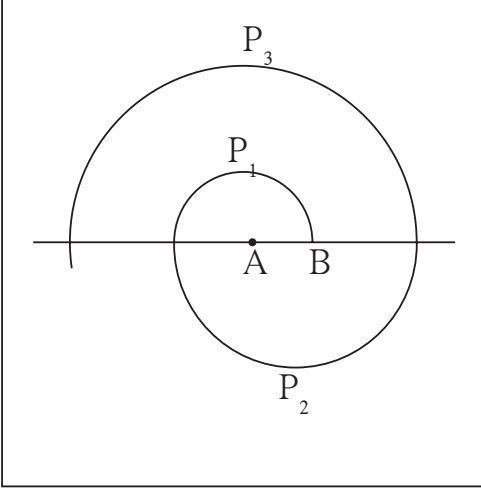
1000 ರೂ. ಉಳಿತಾಯ 17 ನೇ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಆಗುವದು.

17 ನೇ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿಯ ಒಟ್ಟು ಉಳಿತಾಯ ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ &= \frac{17}{2} [2 \times 200 + (17-1) \times 50] \\ &= \frac{17}{2} [400 + 800] \\ &= \frac{17}{2} [1200] \\ &= 17 \times 600 \\ &= 10200\end{aligned}$$

17 ನೇ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 10,200 ರೂ.ಗಳ ಉಳಿತಾಯ ಆಗುವದು.

ಉದಾ. (4) ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ರೇಷಿಯ ಮೇಲೆ A ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು 0.5 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯದ



P_1 ಈ ಅರ್ಧವರ್ತುಗಳ ತೆಗೆದ್ದೇವು. ಅವು ರೇಷಿಗೆ B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಈಗ B ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು 1 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯದ P_2 ಈ ಅರ್ಧವರ್ತುಗಳ ರೇಷಿಯ ಎರಡನೆಯ ಬವಿಗೆ ತೆಗೆದ್ದೇವು.

ಈಗ ಮತ್ತೆ A ಕೇಂದ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು 1.5 ಸೆಮೀ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅರ್ಧವರ್ತುಗಳ P_3 ತೆಗೆದೇವು. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ A ಮತ್ತು B ಕೇಂದ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು 0.5 ಸೆಮೀ, 1 ಸೆಮೀ, 1.5 ಸೆಮೀ, 2 ಸೆಮೀ. ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಅರ್ಧವರ್ತುಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವದರಿಂದ ಒಂದು ವಲಯಾಕಾರದ ಆಕೃತಿ ತಯಾರಾಗುವದು. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ 13 ಅರ್ಧವರ್ತುಗಳಿಂದ ತಯಾರಾದ ವಕ್ರಗಳ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು ಇರಬಹುದು ?

$$(\pi = \frac{22}{7} \text{ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ})$$

ಉತ್ತರ : A, B, A, B, . . . ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಕೇಂದ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ತೆಗೆದ ಅರ್ಧಪರಿಘಗಳ ಉದ್ದ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ P_1, P_2, P_3, \dots ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ. ಮೊದಲನೆಯ ಅರ್ಧ ಪರಿಘದ ತ್ರಿಜ್ಯ 0.5 ಸೆಮೀ ಇದೆ. ಎರಡನೆಯ ಅರ್ಧಪರಿಘದ ತ್ರಿಜ್ಯ 1.0 ಸೆಮೀ ಇದೆ, . . . ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಮಾಹಿತಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ $P_1, P_2, P_3, \dots P_{13}$ ತೆಗೆಯೋಣ.

$$\text{ಮೊದಲನೆಯ ಅರ್ಧಪರಿಘದ ಉದ್ದ} = P_1 = \pi r_1 = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$P_2 = \pi r_2 = \pi \times 1 = \pi$$

$$P_3 = \pi r_3 = \pi \times 1.5 = \frac{3}{2} \pi$$

P_1, P_2, P_3, \dots ಈ ಅರ್ಧಪರಿಘ, ಎಂದರೆ $\frac{1}{2} \pi, 1 \pi, \frac{3}{2} \pi, \dots$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂಕಗಣಿತದ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

ಇಲ್ಲಿ $a = \frac{1}{2} \pi, d = \frac{1}{2} \pi$, ಇದರ ಮೇಲಿಂದ S_{13} ತೆಗೆಯೋಣ.

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$S_{13} = \frac{13}{2} [2 \times \frac{\pi}{2} + (13-1) \times \frac{\pi}{2}]$$

$$= \frac{13}{2} [\pi + 6 \pi]$$

$$= \frac{13}{2} \times 7 \pi$$

$$= \frac{13}{2} \times 7 \times \frac{22}{7}$$

$$= 143 \text{ ಸೆಮೀ}$$

\therefore 13 ಅರ್ಧ ವರ್ತುಗಳಿಂದ ತಯಾರಾಗುವ ವಕ್ರಗಳ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದಳತೆ 143 ಸೆ.ಮೀ. ಇರುವುದು.

ಉದಾ. (5) ಒಂದು ಊರಿನಲ್ಲಿ 2010 ರಲ್ಲಿ 4000 ಜನರು ಸಾಕ್ಷರರಿದ್ದರು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ 400 ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ 2020 ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಜನರು ಸಾಕ್ಷರರು ಇರುವರು ?

ಉತ್ತರ :

ವರ್ಷ	2010	2011	2012	...	2020
ಸಾಕ್ಷರ ಜನರು	4000	4400	4800	...	<input type="text"/>

$$a = 4000, \quad d = 400 \quad n = 11$$

$$\begin{aligned} t_n &= a + (n-1)d \\ &= 4000 + (11-1)400 \\ &= 4000 + 4000 \\ &= 8000 \end{aligned}$$

2020 ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 8000 ಜನರು ಸಾಕ್ಷರರು ಇರುವರು.

ಉದಾ. (6) ಶ್ರೀಮತಿ ಶೇಖ ಇವರಿಗೆ 2015 ರಲ್ಲಿ ವಾರ್ಷಿಕ ಸಂಬಳ 1,80,000 ರೂ. ಸಿಗುವ ನೌಕರಿ ಸಿಕ್ಕಿತು. ಆಫೀಸಿನವರು ಅವರಿಗೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ 10,000 ರೂಪಾಯಿ ಹೆಚ್ಚಳ ಕೊಡಲು ಮಾನ್ಯ ಮಾಡಿದರು. ಹಾಗಾದರೆ ಎಷ್ಟನೇಯ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಅವರಿಗೆ ವಾರ್ಷಿಕ ಸಂಬಳ 2,50,000 ರೂಪಾಯಿ ಆಗುವುದು ?

ಉತ್ತರ :

ವರ್ಷ	ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಷ (2015)	ಎರಡನೆಯ ವರ್ಷ (2016)	ಮೂರನೆಯ ವರ್ಷ (2017)	...
ಸಂಬಳ ರೂಪಾಯಿ	[1,80,000]	[1,80,000 + 10,000]		...

$$a = 1,80,000, \quad d = 10,000 \quad n = ? \quad t_n = 2,50,000 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$2,50,000 = 1,80,000 + (n-1) \times 10,000$$

$$(n-1) \times 10000 = 70,000$$

$$n-1 = 7$$

$$n = 8$$

∴ 8 ನೇ ವರ್ಷ ಅವರಿಗೆ ವಾರ್ಷಿಕ ಸಂಬಳ 2,50,000 ರೂಪಾಯಿ ಆಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.4

1. ಸಾನಿಕಾಳು 1 ಜಾನೇವರಿ 2016 ಕ್ಕೆ ಹೀಗೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿದಳು, ಆದಿವಸ ₹ 10, ಎರಡನೆಯ ದಿವಸ ₹ 11 ಮೂರನೆಯ ದಿವಸ ₹ 12 ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುತ್ತ ಹೋಗುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ 31 ಡಿಸೆಂಬರ 2016 ರ ವರೆಗೆ ಅವಳ ಒಟ್ಟು ಉಳಿತಾಯ ಎಷ್ಟು ?
2. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ 8000 ರೂ. ಸಾಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡನು ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ 1360 ರೂಪಾಯಿ ಬಡ್ಡಿ ಕೊಡಲು ಒಪ್ಪಿ ಕೊಡನು. ಒಂದು ಕಂತು ಮೊದಲಿನ ಕಂತಿನಕ್ಕಿಂತ 40 ರೂಪಾಯಿ ಕಡಿಮೆ ಕೊಟ್ಟ ಎಲ್ಲ ಹಣ 12 ತಿಂಗಳ ಕಂತಿನಿಲ್ಲ ಮುಟ್ಟಿಸುವನು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನು ಕೊಟ್ಟ ಮೊದಲನೆಯ ಹಾಗೂ ಕೊನೆಯ ಕಂತು ಎಷ್ಟು ಆಗುವುದು ?
3. ಸಚಿನನು ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಉಳಿತಾಯ ಪ್ರಮಾಣ ಪತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಷ 5000 ರೂಪಾಯಿ, ಎರಡನೆಯ ವರ್ಷ 7000 ರೂಪಾಯಿ, ಮೂರನೆಯ ವರ್ಷ 9000 ರೂಪಾಯಿ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಹಣ ತೋಡಗಿಸಿದನು. ಹಾಗಾದರೆ 12 ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿಯೂ ತೋಡಗಿಸಿದ ಹಣ ಎಷ್ಟು ?
4. ಒಂದು ನಾಟ್ಯಗೃಹದಲ್ಲಿ ಋರ್ಚಿಗಳ ಒಟ್ಟು 27 ಸಾಲುಗಳಿವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 20 ಋರ್ಚಿಗಳಿವೆ, ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 22 ಋರ್ಚಿಗಳಿವೆ, ಮೂರನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 24 ಋರ್ಚಿಗಳಿವೆ, ಹಾಗಾದರೆ 15 ನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಋರ್ಚಿಗಳಿವೆ ಮತ್ತು ನಾಟ್ಯಗೃಹದಲ್ಲಿಯೂ ಒಟ್ಟು ಋರ್ಚಿಗಳು ಎಷ್ಟು ?
5. ಕಾರಗಿಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿಯೂ ಸೋಮವಾರ ದಿಂದ ಶನಿವಾರದ ವರೆಗಿನ ದಿವಸಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಉಷ್ಣತಾಮಾನದ ನೋಂದಣಿ ಮಾಡಿದರು. ಆ ವಿವರಣೆವು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದು. ಸೋಮವಾರ ಹಾಗೂ ಶನಿವಾರದ ಉಷ್ಣತಾಮಾನಗಳ ಬೇರೀಜು ಮಂಗಳವಾರ ಹಾಗೂ ಶನಿವಾರದ ಬೇರೀಜಿಕ್ಕಿಂತ 5° ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್‌ದಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಬುಧವಾರದ ಉಷ್ಣತಾಮಾನ -30° ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್ ಇದ್ದರೆ ಪ್ರತಿ ದಿವಸದ ಉಷ್ಣತಾಮಾನ ತೆಗೆಯಿರಿ ?
6. 'ಜಾಗತಿಕ ಪರ್ಯಾವರಣ ದಿನ'ದ ಅಂಗವಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನಾಕಾರದ ಮೈದಾನದಲ್ಲಿ ವೃಕ್ಷಾರೋಪಣೆಯ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಆಯೋಜಿಸಲಾಯಿತು. ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗಿಡ ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎರಡು ಗಿಡಗಳು, ಮೂರನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮೂರು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ 25 ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಗಿಡಗಳನ್ನು ಹಚ್ಚಿದರೆ, ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಗಿಡಗಳನ್ನು ಹಚ್ಚಿದರು ?

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 3

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಪರ್ಯಾಯಗಳಿಂದ ಸರಿ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $-10, -6, -2, 2, \dots$ ಈ ಕ್ರಮಾನುಗತೆ

(A) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇದೆ, ಕಾರಣ $d = -16$	(B) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇದೆ, ಕಾರಣ $d = 4$
(C) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇದೆ, ಕಾರಣ $d = -4$	(D) ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇಲ್ಲ

(2) ಮೊದಲನೆಯ ಪದ -2 ಇದೆ ಹಾಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ -2 ಇರುವ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಮೊದಲನೆಯ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

(A) $-2, 0, 2, 4$	(B) $-2, 4, -8, 16$
(C) $-2, -4, -6, -8$	(D) $-2, -4, -8, -16$

(3) ಮೊದಲನೆಯ 30 ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ?

(A) 464	(B) 465	(C) 462	(D) 461
---------	---------	---------	---------

- (4) ಕೊಟ್ಟ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ $t_7 = 4$, $n = 7$, $d = -4$ ಇದ್ದರೆ $a = \dots$
 (A) 6 (B) 7 (C) 20 (D) 28
- (5) ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ $a = 3.5$, $d = 0$, $n = 101$, ಇದ್ದರೆ $t_n = \dots$
 (A) 0 (B) 3.5 (C) 103.5 (D) 104.5
- (6) ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಎರಡು ಪದಗಳು -3 , 4 ಇವೆ, ಹಾಗಾದರೆ 21 ನೇ ಪದ \dots ಇದೆ.
 (A) -143 (B) 143 (C) 137 (D) 17
- (7) ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಗಾಗಿ $d = 5$ ಇದ್ದರೆ $t_{18} - t_{13} = \dots$
 (A) 5 (B) 20 (C) 25 (D) 30
- (8) 3 ರ ಮೊದಲು ಐದು ಪಟ್ಟುಗಳ ಬೇರೀಜು \dots ಇದೆ.
 (A) 45 (B) 55 (C) 15 (D) 75
- (9) 15, 10, 5, \dots ಈ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲು 10 ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು \dots ಇದೆ.
 (A) -75 (B) -125 (C) 75 (D) 125
- (10) ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ 1 ಇದು n ನೇಯ ಪದ 20 ಇದೆ, $S_n = 399$ ಇದ್ದರೆ $n = \dots$
 (A) 42 (B) 38 (C) 21 (D) 19
2. $-11, -8, -5, \dots, 49$ ಈ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಕೊನೆಯ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪದ ತೆಗೆಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ 10 ನೇಯ ಪದ 46 ಇದೆ. 5 ನೇಯ ಹಾಗೂ 7 ನೇಯ ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು 52 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಶ್ರೇಣಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.
4. ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ 4 ನೇಯ ಪದ -15 , 9 ನೇಯ ಪದ -30 , ಮತ್ತು ಮೊದಲು 6 ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು 36 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲು 10 ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಎರಡು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಗಳು 9, 7, 5, \dots ಮತ್ತು 24, 21, 18, \dots ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಎರಡು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಗಳ n ನೇಯ ಪದ ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೆ, n ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮತ್ತು n ನೇಯ ಪದ ತೆಗೆಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೂರನೆಯ ಹಾಗೂ ಎಂಟನೆಯ ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು 7 ಇದ್ದು ಮತ್ತು ಎಳನೆಯ ಹಾಗೂ 14 ನೇಯ ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು -3 ಇದ್ದರೆ 10 ನೇಯ ಪದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ -5 ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ 45 ಇದೆ ಒಂದುವೇಳೆ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು 120 ಇದ್ದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳು ಇರುವವು ? ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಷ್ಟು ಇರುವದು ?
8. 1 ರಿಂದ n ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು 36 ಇದ್ದರೆ n ದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. 207 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರು ಭಾಗ ಹೀಗೆ ಮಾಡಿರಿ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕು ಹಾಗೂ ಚಿಕ್ಕ ಎರಡು ಭಾಗಗಳ ಗುಣಾಕಾರ 4623 ಇರಬೇಕು.
10. ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ 37 ಪದಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲವುಗಳಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು 225 ಇದೆ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಮೂರು ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು 429 ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಬರೆಯಿರಿ.
- 11.★ ಯಾವ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲನೆಯ ಪದ a ಎರಡನೆಯ ಪದ b ಇದೆ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ c ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯ ಆ ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ ದಷ್ಟು ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.
- 12.★ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲು p ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಇದು ಮೊದಲು q ಪದಗಳ ಬೇರೀಜಿನಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಮೊದಲು (p + q) ಪದಗಳ ಬೇರೀಜು ಶೂನ್ಯ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. (p ≠ q)
- 13.★ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ m ನೇಯ ಪದದ m ಪಟ್ಟಿ ಇದು n ನೇಯ ಪದದ n ಪಟ್ಟಿಗೆ ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ ಅದರ (m + n) ನೇಯ ಪದ ಶೂನ್ಯ ಇದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.
- 14.★ 1000 ರೂ. ಹಣವನ್ನು 10% ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಯ ದರದಿಂದ ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಿದರು. ಪ್ರತಿ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ ಬಡ್ಡಿಯ ಹಣ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಬರುವದೇ? ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಅದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಇದ್ದರೆ 20 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ದೊರೆಯುವ ಬಡ್ಡಿಯ ಹಣ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

$$\text{ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ} = \frac{P \times R \times N}{100}$$

$$1 \text{ ವರ್ಷದ ನಂತರ ದೊರೆಯುವ ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ} = \frac{1000 \times 10 \times 1}{100} = \square$$

$$2 \text{ ವರ್ಷದ ನಂತರ ದೊರೆಯುವ ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ} = \frac{1000 \times 10 \times 2}{100} = \square$$

$$3 \text{ ವರ್ಷದ ನಂತರ ದೊರೆಯುವ ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ} = \frac{\square \times \square \times \square}{100} = 300$$

ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ 4, 5, 6 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ದೊರೆಯುವ ಬಡ್ಡಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 400, \square , \square ಇರುವುದು.

ಇದರ ಮೇಲಿಂದ $d = \square$, ಮತ್ತು $a = \square$

20 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ದೊರೆಯುವ ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$t_{20} = \square + (20-1) \square$$

$$t_{20} = \square$$

20 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ದೊರೆಯುವ ಒಟ್ಟು ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ = \square



□□□

4

ಆರ್ಥಿಕ ನಿಯೋಜನೆ



ಕೆಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

- ಜಿಎಸ್‌ಟಿಯ ಪರಿಚಯ
- ಸರಕು ಪಟ್ಟಿ ಪದ್ಧತಿ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ಪದ್ಧತಿ
- ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಗಣನೆ ಮತ್ತು ಇನ್‌ಪುಟ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಕ್ರೇಡಿಟ್
- ಶೇಅರ್ಸ, ಮ್ಯುಚ್ಯುಅಲ ಫಂಡ ಮತ್ತು SIP



ಚರ್ಚಿಸೋಣ ಬನ್ನಿ.

- ಶಿಕ್ಷಕಿ :** ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೇ, ನಮ್ಮ ದೇಶದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಪಾರಕ್ಕಾಗಿ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಕರ ಪ್ರಣಾಲಿಯು ಜಾರಿಗೆಯಲ್ಲಿದೆ ?
ಆಯುಷ : ನಮ್ಮ ದೇಶದಲ್ಲಿ 'ಜಿಎಸ್‌ಟಿ' ಅಂದರೆ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಕರ ಈ ಪದ್ಧತಿಯ ಕರಪ್ರಣಾಲಿ ಜಾರಿಗೆಯಲ್ಲಿದೆ.
ಶಿಕ್ಷಕಿ : ಸರಿಯಾಗಿ ಹೇಳಿದೆ, ಈ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮಗೆ ಯಾವ ಯಾವ ಮಾಹಿತಿ ಗೊತ್ತಿದೆ ?

ಆಯಾಸ : GST ಎಂದರೆ **Goods and Service Tax**.

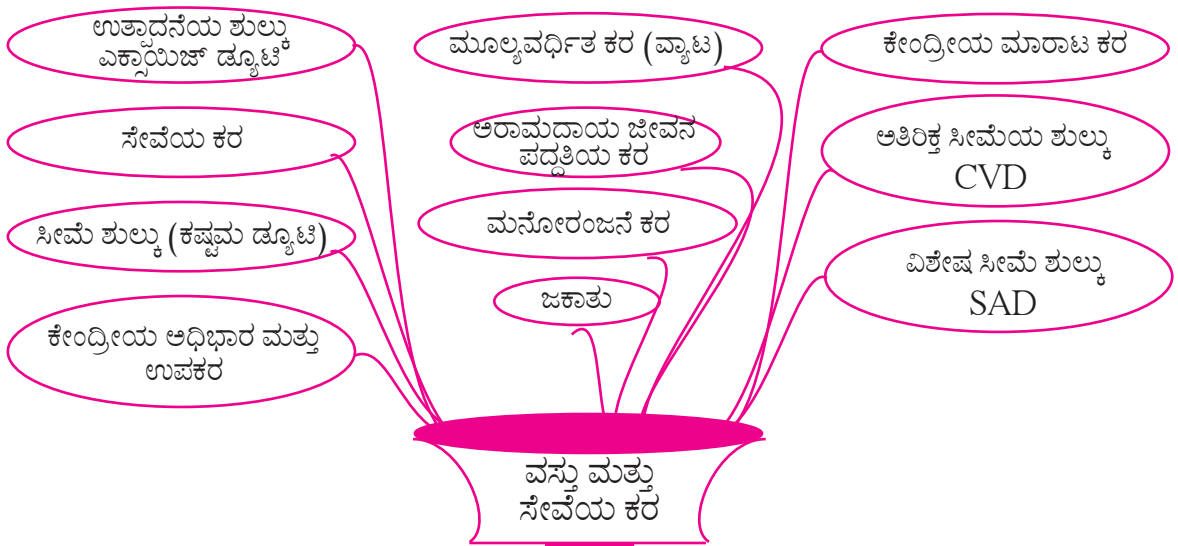
ಆಯಶಾ : ಸಂಪೂರ್ಣ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕರಪ್ರಣಾಲಿಯು ಜಾರಿಯಲ್ಲಿ ಬಂದಿದೆ.



ಶಿಕ್ಷಕಿ : ಸರಿಯಾಗಿ ಹೇಳಿದೆ, ಈ ಮೊದಲು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರಾಜ್ಯಗಳಲ್ಲಿ, ಭಿನ್ನ ಭಿನ್ನ ಕರಗಳನ್ನು, ಭಿನ್ನ ಭಿನ್ನ ಸಮಯಕ್ಕೆ ತುಂಬ ಬೇಕಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಮೊದಲಿನ ಕರದಲ್ಲಿಂದ ಯಾವ ಯಾವ ಕರ ವಸ್ತು ಸೇವಾ ಕರದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ ಇದರ ಮಾಹಿತಿ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರ ನೋಡಿ ಹೇಳಿರಿ.

ಶಫಿಕ : ಉತ್ಪಾದನೆ ಶುಲ್ಕ, ಸೀಮಾ ಶುಲ್ಕ, ವ್ಯಾಟ, ಮನೋರಂಜನೆ ಕರ, ಕೇಂದ್ರೀಯ ಮಾರಟ ಕರ, ಸೇವಾಕರ, ಜಕಾತ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಶಿಕ್ಷಕಿ : ಈ ಎಲ್ಲ ಕರಗಳನ್ನು ರದ್ದು ಪಡಿಸಿ ಕೇವಲ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆ ಈ ಒಂದೇ ಕರ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಗಳ ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿಕೆ- ಮಾರಾಟಮಾಡುವಿಕೆ ಇದರ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದು ಈ ಕರ ಪ್ರಣಾಲಿಯು 1 ಜುಲೈ 2017 ರಿಂದ ಜಾರಿಗೆ ಬಂದಿದೆ, ಈ ಕಾರಣದಿಂದ 'ಒಂದೇ ದೇಶ ಒಂದೇ ಕರ ಪದ್ಧತಿ, ಒಂದೇ ವ್ಯಾಪಾರ ಪದ್ಧತಿ', ನಡೆಯುತ್ತಿದೆ.





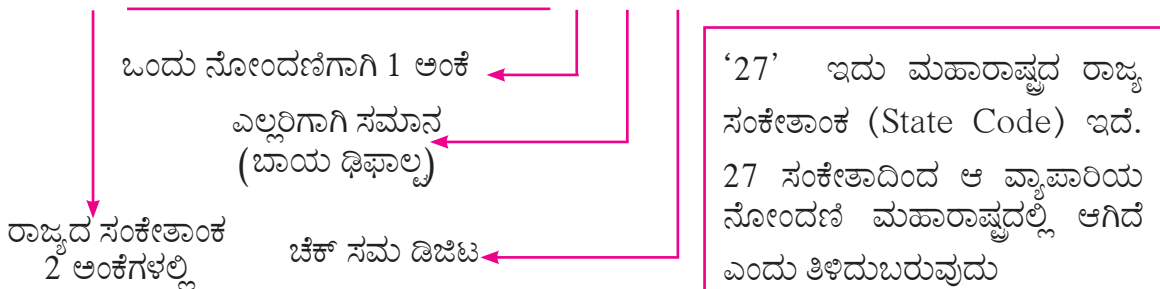
ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಶಿಕ್ಷಕಿ : ಕರ ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ಪಾವತಿ (Tax Invoice)

ವಸ್ತು ಖರೀದಿಸುವ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ನಮೂನೆ										
SUPPLIER : A to Z SWEET MART 143, Shivaji Rasta, Mumbai : 400001 Maharashtra Mob. No. 92636 92111 email : atoz@gmail.com						GSTIN :27ABCDE1234H1Z5				
Invoice No. GST/110						Invoice Date: 31-Jul-2017				
S. No.	HSN code	Name of Product	Rate	Quantity	Taxable Amount	CGST		SGST		Total Rs.
						Rate	Tax	Rate	Tax	
1	210690	ಪೇಡೆ	ರೂ. 400 ಪ್ರತಿ ಕಿಗ್ರಾಂ	500 ಗ್ರಾಂ	200.00	2.5%	5.00	2.5%	5.00	210.00
2	210691	ಚಾಕಲೇಟು	ರೂ. 80	1 ಬಾರು	80.00	14%	11.20	14%	11.20	102.40
3	2105	ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್	ರೂ. 200	1 ಪ್ಯಾಕೆ (500 ಗ್ರಾಂ)	200.00	9%	18.00	9%	18.00	236.00
4	1905	ಬ್ರೆಡ್	ರೂ. 35	1 ಪ್ಯಾಕೆ	35.00	0%	0.00	0%	0.00	35.00
5	210690	ಬೆಣ್ಣೆ	ರೂ. 500 ಪ್ರತಿ ಕಿಗ್ರಾಂ	250 ಗ್ರಾಂ	125.00	6%	7.50	6%	7.50	140.00
ಒಟ್ಟು ರೂಪಾಯಿ						41.70		41.70		723.40

- ವೇದ : ನಮಗೆ ಈ ಪಾವತಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಹೊಸ ಶಬ್ದಗಳು ಕಂಡುಬರುತ್ತಿವೆ ಅವುಗಳ ಅರ್ಥ ಹೇಳಿರಿ.
- ಶಿಕ್ಷಕಿ : **CGST** ಮತ್ತು **SGST** ಇವು GSTಯ ಎರಡು ಪ್ರಕಾರಗಳಿವೆ. **CGST** ಅಂದರೆ (Central Goods and Services Tax) ಅಂದರೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಕರ. ಇದು ಕೇಂದ್ರ ಸರ್ಕಾರದ ಕಡೆ ಸಂಗ್ರಹವಾಗುವುದು. **SGST** ಅಂದರೆ (State Goods & Services Tax) ರಾಜ್ಯ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಕರ ಇದು ರಾಜ್ಯ ಸರ್ಕಾರದ ಕಡೆ ಸಂಗ್ರಹವಾಗುವುದು.
- ರಿಯಾ : ಮೇಲಿನ ಬಲಭಾಗದ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕ ಅಕ್ಷರಗಳ ದೊಡ್ಡದಾದ ಸಾಲು ಕಾಣುತ್ತಿದೆ ಅದು ಏನು ?
- ಶಿಕ್ಷಕಿ : ಅದು GSTIN ಅಂದರೆ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ ಗುರುತು ಕ್ರಮಾಂಕ - (GST Identification Number). ಯಾವ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ ಹಿಂದಿನ ಆರ್ಥಿಕ ವರ್ಷದ ವ್ಯವಹಾರ 20 ಲಕ್ಷಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ವಿರುತ್ತದೆಯೋ, ಅಂತಹ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳಿಗಾಗಿ ಈ ಕ್ರಮಾಂಕ ಪಡೆಯುವುದು ಅನಿವಾರ್ಯವಿರುವುದು. PAN ದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ 10 ಅಂಕಾಕ್ಷರಗಳಿರುವವೋ, ಹಾಗೆಯೇ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳಿಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ GSTIN ದಲ್ಲಿ 15 ಅಂಕ ಅಕ್ಷರಗಳ ಇರುತ್ತವೆ. ಈ 15 ಅಂಕಗಳಲ್ಲಿಯೇ ಆ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ PAN ಕ್ರಮಾಂಕ ಸಮಾವಿಷ್ಟವಿರುವುದು.
- ಉದಾ.: 27 A B C D E 1 2 3 4 H 1 Z 5 (ಕೊನೆಯ ಅಂಕ ಅಥವಾ ಅಕ್ಷರ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ)

10 ಅಂಕಾಕ್ಷರಗಳ PAN



(ಚೆಕ್ ಸಮ ಡಿಜಿಟ ಅಂದರೆ, GSTಯ ವೆಬ್‌ಸೈಟ್‌ನ ಮೇಲೆ GSTIN ಹಾಕಿದಾಗ, ಈ ಕ್ರಮಾಂಕ ವೈಧತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆಯೋ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದು ಬರುವುದು.)

ಜೆವಿ : ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ಕರಪಾವತಿದಲ್ಲಿ HSN ಕೋಡ್ ಈ ಶಬ್ದವೂ ಇದೆ.

ಶಿಕ್ಷಕಿ : HSN ಕೋಡ್ ಅಂದರೆ, ಆ ವಸ್ತುವಿನ ವರ್ಗೀಕರಣದ ವಿಶಿಷ್ಟ ಕ್ರಮಾಂಕ ಇರುವುದು. ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ಕರದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಮಾಡಲು ಬೇಕಾಗುವುದು. HSN ಅಂದರೆ **Harmonized System of Nomenclature**.

ಜೋಸೆಫ್: ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ಕರ ಪಾವತಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಗಡಿಕಾರನ ಹೆಸರು, ವಿಳಾಸ, ದಿನಾಂಕ, ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ಕ್ರಮಾಂಕ, ಮೋಬಾಯಿಲ ಕ್ರಮಾಂಕ ಮತ್ತು ಇ-ಮೇಲ್ ಆಯ್ಕೆ ಇದೆಲ್ಲ ಮಾಹಿತಿ ಇರುವುದು.

ಶಿಕ್ಷಕಿ : ಈಗ ಈ ಪಾವತಿಯಲ್ಲಿ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಕರದ ಅಕರಣೆ ಯಾವ ರೀತಿ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ ಅದನ್ನು ನೋಡೋಣ, ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಮುಂದಿನ ವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿಯ ರಿಕ್ತ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳು ತುಂಬಿರಿ, ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ಪಾವತಿಯಲ್ಲಿ ಪೆಡೆಯ ಬೆಲೆ ರೂ. 400 ಪ್ರತಿ ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಇದೆ ಅರ್ಧ ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಪೆಡೆ ಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ, ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಬೆಲೆ ರೂ. 200 ಆಗುವುದು.

◆ ಪೆಡೆಯ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರದ ಕರ 2.5% ದರದಂತೆ ರೂ., ಅದರಂತೆ ರಾಜ್ಯದ ಕರ ದರದಿಂದ 5 ರೂಪಾಯಿ.

◆ ಇದರಿಂದ ಪೆಡೆಯ ವಸ್ತು-ಸೇವಾಕರದ ದರ 2.5%+2.5% = 5% ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ಕರ 10 ರೂಪಾಯಿ.

◆ ಅದೇ ರೀತಿ ಚಾಕಲೇಟ್‌ನ ಮೇಲೆ ವಸ್ತು-ಸೇವಾಕರದ ದರ % ಅಂದರೆ, ಇದರ ಮೇಲಿನ ಕರ ರೂಪಾಯಿ.

◆ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್‌ನ ಮೇಲೆ, ವಸ್ತು ಸೇವಾಕರದ ದರ % ಇದೆ. ಅಂದರೆ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಮ್‌ನ ಬೆಲೆ ರೂಪಾಯಿ.

◆ ಬೆಣ್ಣೆಯ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರದ ದರ % ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ದರ % ಒಟ್ಟಿಗೆ ವಸ್ತು-ಸೇವೆ ಕರದ ದರ % ಇದೆ.

ಆದಿತ್ಯ : ಬ್ರೆಡ್ಡಿನ ಮೇಲೆ ಕರದ ದರವು 0% ಇದೆ, ಅದೇ ರೀತಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಕರದ ದರ ಸಮಾನ ಇವೆ.

ನಿನಾದ : ವಸ್ತುಗಳಂತೆ, ಕರದ ದರದ ಪ್ರಮಾಣವೂ ಭಿನ್ನ ಭಿನ್ನವಿದೆ, ಉದಾ 0%, 5%, 12%, 18% ಮತ್ತು 28%.

ಶಿಕ್ಷಕಿ : ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಕರದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸರಕಾರ ನಿಶ್ಚಯಿಸುವುದು. ಈಗ ಒಂದು ಸೇವಾ ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ಕರ ಪಾವತಿಯ ನಮೂನೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಸೇವಾ ಪೂರೈಸಿರು ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ಕರ ಪಾವತಿ (ನಮೂನೆ)								
ಆಹಾರ ಸೋನೆರಿ, ಬೇಡ, ಶಿವಾಪುರ ಪುಣೆ					Invoice No. 58			
Mob. No. 7588580000 email - ahar.khed@yahoo.com								
GSTIN : 27 AAAAA5555B1ZA					Invoice Date : 25-Dec-2017			
S A Code (SAC)	Food items	Qty	Rate (in Rs.)	Taxable amount	CGST		SGST	
9963	Coffee	1	20	20.00	2.5%	0.50 ₹	2.5%	...
9963	Masala Tea	1	10	10.00	2.5%	...
9963	Masala Dosa	2	60	...	2.5%
Total			
Grand Total = ----- ರೂಪಾಯಿ								

ಶಿಕ್ಷಕಿ : ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆ ಈ ಎರಡೂ ಪಾವತಿಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿ ಎರಡರಲ್ಲಿರುವ ಕೋಡ್ ಕ್ರಮಾಂಕಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ಯಾಟ್ರಿಕ್ : ವಸ್ತು ಪಾವತಿಯ ಮೇಲೆ HSN ಕೋಡ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಉಪಹಾರ ಗೃಹದ SAC ಕೋಡ ಕಂಡುಬರುತ್ತಿದೆ.

ಶಿಕ್ಷಕಿ : SAC ಅಂದರೆ ಸೇವೆಯ ವರ್ಗೀಕರಣದಲ್ಲಿಯ ವಿಶಿಷ್ಟ ಕ್ರಮಾಂಕ ಇರುವುದು, ಅದಕ್ಕೆ SAC - Service Accounting Code ಎನ್ನುವರು.

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ವಸ್ತು, ಸೇವೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿನಕರದ ದರ ನಮೂನೆ ನೋಂದಣಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಅ.ಕ್ರ.	ಪ್ರಕಾರ	ಕರದ ದರ	ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಪ್ರಕಾರ
I	ಶೂನ್ಯಾಧಾರಿತ (Nil rated)	0%	ವಸ್ತು - ಅನ್ನ ಧಾನ್ಯಗಳೊಂದಿಗೆ, ಜೀವನಾವಶ್ಯಕ ವಸ್ತುಗಳು, ಕಾಯಿಪಲ್ಯೆ, ಹಣ್ಣು-ಹಂಪಲ ಹಾಲು, ಉಪ್ಪು, ಮಣ್ಣಿನ ಪಾತ್ರೆ ಇತ್ಯಾದಿ. ವಸ್ತು - ಧಾರ್ಮಿಕ ಸಂಸ್ಥೆಗಳ ಉಪಕ್ರಮ, ನೀರಿನ ಸಾರಿಗೆ, ರಸ್ತೆ ಮತ್ತು ಪೂಲ್‌ಗಳ ಉಪಯೋಗ, ಶಿಕ್ಷಣ ಮತ್ತು ಆರೋಗ್ಯ ಸೇವೆ, ಸಾರ್ವಜನಿಕ ವಾಚನಾಲಯ, ಬೇಸಾಯ ಸಂಬಂಧದ ಸೇವೆ ಇತ್ಯಾದಿ.
II	ಕನಿಷ್ಠ ದರ	5%	ವಸ್ತು - ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತುಗಳು, ಉದಾ- LPG ಸಿಲಿಂಡರ್, ಚಹಾ, ಎಣ್ಣೆ, ಜೇನುತುಪ್ಪು, ಪ್ರಕ್ರಿಯಗೊಳಿಸಿದ ತರಕಾರಿ, ಲವಂಗ, ಸಾಸಿವೆ, ಮಸಾಲೆ, ಮಿಠಾಯಿ ಇತ್ಯಾದಿ. ವಸ್ತು - ರೈಲು ಸಾರಿಗೆ, ಬಸ್ ಸಾರಿಗೆ, ತೆರಿಗೆ ಸೇವೆ, ವಿಮಾನ ಸಾರಿಗೆ, (ಇಕಾನಾಮಿ ಕ್ಲಾಸ್) ಉಪಹಾರ ಗೃಹದಲ್ಲಿಯ ಖಾಡ್ಯ ಮತ್ತು ಪೇಯ ಪೂರೈಕೆ, ಇತ್ಯಾದಿ.
III	ಪ್ರಮಾಣ ದರ (ಹಂತ I)	12%	ವಸ್ತು - ಗ್ರಾಹಕ ಉಪಯೋಗ ವಸ್ತುಗಳು- ಬೆಣ್ಣೆ, ತುಪ್ಪು, ಒಣ ಖಾಡ್ಯ, ಹಣ್ಣು ಮತ್ತು ತರಕಾರಿಗಳಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ಉಪ್ಪಿನಕಾಯಿ, ಮುರಂಬಾ, ಜ್ಯಾಮು, ಚಿಲಿ, ಚಟ್ನಿಗಳು, ಮೋಬಾಯಿಲ ಇತ್ಯಾದಿ. ವಸ್ತು - ಮುದ್ರಣ ಕಾರ್ಯ, ಗೆಸ್ಟ್ ಹಾವುಸ್, ಕಟ್ಟಡ ನಿರ್ಮಿತಿಯ ಸಂಬಂಧದ ಸೇವೆ ಇತ್ಯಾದಿ.
IV	ಪ್ರಮಾಣ ದರ (ಹಂತ II)	18% (ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆ ಕರ ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಇರುವುದು)	ವಸ್ತು - ಮಾರ್ಬಲ್, ಗ್ರೇನಾಯಿಟ್, ಪರಪ್ಯೂಮ್, ಧಾತುಗಳ ವಸ್ತುಗಳು, ಸಂಗಣಕ, ಪ್ರಿಂಟರ್, ಮಾನಿಟರ್, CCTV ಇತ್ಯಾದಿ. ವಸ್ತು - ಕುರಿಅರ ಸರ್ವಿಸ್, ಆವುಟ್ ಡೋರ ಕೆಟರಿಂಗ್, ಸರ್ಕಸ್, ನಾಟಕ ಪ್ರದರ್ಶನ, ಸಿನೇಮಾ, ಚಲನೆ ವಿನಿಮಯ ಸೇವೆ, ಶೇರು ಖರೀದಿ ವಿಕ್ರಿ, ಸಲುವಾಗಿ ದಲಾಲಿಯ ಸೇವೆ ಇತ್ಯಾದಿ.
V	ಉಚ್ಚ ದರ	28%	ವಸ್ತು - ಆರಾಮದಾಯಕ ವಸ್ತುಗಳು, ಮೋಟಾರು ಸೈಕಲ್‌ಗಳ ಪಾರ್ಟ್ಸ್, ಲಕ್ಷ್ಮಿ ಕಾರು, ಪಾನ ಮಸಾಲೆ, ವೈಕ್ಯುಮ ಕ್ಲೀನರ್, ಡಿಶ್ ವಾಶಿಂಗ್ AC ಯುನಿಟ್, ವಾಶಿಂಗ್ ಮಶಿನ್, ತಂಬಾಕು ಉತ್ಪಾದನೆ, ಶೀತಪೇಯ ಇತ್ಯಾದಿ. ವಸ್ತು - ಫಾಯಿವ್ ಸ್ಟಾರ್ ಹೋಟೆಲ ನಿವಾಸಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆ, ಆಮ್ಬುರೈಮೆಂಟ್ ಪಾರ್ಕ್, ವಾಟರ್ ಪಾರ್ಕ್, ಕೆಸಿನೊ, ರೇಸ ಕೋರ್ಸ್, IPL ದಂತಹ ಆಟ ವಿಮಾನ ಸಾರಿಗೆ)ಬಿಝಿನೆಸ್ ಕ್ಲಾಸ್) ಇತ್ಯಾದಿ.

ಸಂದರ್ಭ : www.cbec.gov.in (Central Board of Excise & Customs) ವೆಬ್‌ಸೈಟಿನ ಇದರ ಹೊರತು 0% ದಿಂದ 5% ರಲ್ಲಿ ಬರುವ ಯಾವ ಯಾವ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲೆ GST ಇರುವುದು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : - ಈ ಪ್ರಕರಣ ಬರೆಯುವಾಗ ಸರ್ಕಾರವು ನಿರ್ದರಿಸಿದ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಮತ್ತು ಆ ಪ್ರಕಾರದ ದರ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯ, ವಿದ್ಯುತ್, ಪೆಟ್ರೋಲ, ಡಿಝೀಲ ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಜಿಎಸ್‌ಟಿಯ ಕಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಕೃತಿ I : ನಿಮಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ಕನಿಷ್ಠ ಹತ್ತು ವಸ್ತುಗಳ ಯಾದಿ ತಯಾರಿಸಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ದರ ಎಷ್ಟು ಇರುವುದು ಅದನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಯಾದಿ, ವೃತ್ತಪತ್ರ, ಇಂಟರ್‌ನೆಟ್, ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಸಂಬಂಧಿತ ಪುಸ್ತಕಗಳು, ಅಥವಾ ಖರೀದಿಸಿದ ವಸ್ತುವಿನ ಪಾವತಿ, ಅದರಿಂದ ಹುಡುಕಿ ಬರೆಯಿರಿ, ಗೆಳೆಯರೊಂದಿಗೆ ಈ ಮಾಹಿತಿಯ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ ತಪಾಸಣೆ ಮಾಡಿ.

ವಸ್ತು	ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ದರ	ವಸ್ತು	ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ದರ
1. ಸೈಚ್ ಬುಕ್		6. - - - - -	
2. ಕಂಪಾಸ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ		7. - - - - -	
3. - - - - -		8. - - - - -	
4. - - - - -		9. - - - - -	
5. - - - - -		10. - - - - -	

ಕೃತಿ II : ಕೃತಿ I ರ ಪ್ರಕಾರ ಕನಿಷ್ಠ ಹತ್ತು ವಿವಿಧ ಸೇವೆಗಳ (ಉದಾ. ರೈಲು ಮತ್ತು ಬಸ್ಸು ಬುಕಿಂಗ್ ಸೇವೆ ಇತ್ಯಾದಿ) ದೊರಕಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ದರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ, ಅಥವಾ ಸೇವೆ ಪೂರೈಸಿದ ಪಾವತಿ ದೊರಕಿಸಿ, ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತಕ್ಷಣ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಸೇವೆ	ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ದರ	ಸೇವೆ	ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ದರ
1. ರೈಲು ಬುಕಿಂಗ್		6. - - - - -	
2. ಕುರಿಅರ ಸರ್ವಿಸ್		7. - - - - -	
3. - - - - -		8. - - - - -	
4. - - - - -		9. - - - - -	
5. - - - - -		10. - - - - -	

ಕೃತಿ III : ಕೆಳಗಿನ ತಕ್ಷಣ ನೋಡಿರಿ, ಮತ್ತು ಇನ್ನಿತರ ವಸ್ತುಗಳು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಕೋಡ್ ಹುಡುಕಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಸೇವೆ	SAC	GSTಯ ದರ	ವಸ್ತು	HSN Code	GSTಯ ದರ
ರೈಲು ಸಾರಿಗೆ ಸೇವೆ	996511	--	ಡ್ಯೂಲಕ್ಸ್ ಪೇಂಟ	3208	28%
ವಿಮಾನ ಸಾರಿಗೆ ಸೇವೆ (ಇಕಾನಮಿ)	996411	--	ಬಾಲಬೇರಿಂಗ್	84821011	28%
ಚಲನ ವಿನಿಮಯ ಸೇವೆ	997157	--	ಸ್ಪಿಡೋಮೀಟರ್	8714	28%
ದಲಾಲಿಗಳ (ಬ್ರೋಕರ್) ಸೇವೆ	997152	--	ಆಲೂಗಡ್ಡೆ	0701	0%
ಟ್ಯಾಕ್ಸಿ ಸರ್ವಿಸ್	996423	--	--	--	--
5-ಸ್ವಾರ ಹೋಟೆಲ ಸೇವೆ	--	--	--	--	--
--	--	--	--	--	--

ಕೃತಿ IV : ಯಾವುದೇ 5 ವಸ್ತು ಮತ್ತು 5 ಸೇವೆಗಳಿಗಾಗಿ HSN ಮತ್ತು SAC ತಕ್ಷಣ ತಯಾರಿಸಿ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ ಆ ತಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಗಳ ಚಿತ್ರ ಅಂಟಿಸಿರಿ, ಆ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಗಳಿಗಾಗಿ GST ದರ ಶೋಧಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಮೇಲಿನ ದರ ಅದರಂತೆ HSN, SAC ಕೋಡ್ ಮೇಲಿಂದ ಕೃತಿ, ಇತ್ಯಾದಿ ಮಾಹಿತಿಗಾಗಿ ಇದೆ. ಇದನ್ನು ಬಾಯಿಪಾಠ ಮಾಡುವ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಉಪಕ್ರಮ : ನೀವು ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರದ ಬಿಲ ಪಾವತಿಗಳನ್ನು ದೊರಕಿಸಿ, ಉದಾ. ವಸ್ತು ಪೂರೈಕೆ ಪಾವತಿ, ಸೇವೆ ಪೂರೈಸಿದ ಪಾವತಿ, ಇತ್ಯಾದಿ, ಆ ಪಾವತಿಗಳ ಜಿಎಸ್‌ಟಿಯ ಸಂದರ್ಭದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಿಂದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿ ಮತ್ತು ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಅದರ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಿರಿ.

ಝಝಝ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆ ಝಝಝ

ಉದಾ. (1) ಆರತಿ ಗ್ಯಾಸ್ ಏಜನ್ಸಿಯು ₹ 545 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆಯ ಒಂದು LPG ಸಿಲಿಂಡರನ್ನು ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ ಮಾರಿದರು. ಜಿಎಸ್‌ಟಿಯ ದರ 5% ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕರ ಇನವ್ವಾಯಿಸ್‌ದಲ್ಲಿ ಕರಪಾವತಿಯಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರದ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಕರ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಇರುವುದು ? ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಕೊಡಬೇಕಾಗುವುದು? ಆರತಿ ಗ್ಯಾಸ್ ಏಜನ್ಸಿಗೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಸೇವೆಯ ಕರ ತುಂಬಬೇಕಾಗುವುದು?

ಉತ್ತರ : ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಕರದ ದರ = 5% ∴ ಸಿಜಿಎಸ್‌ಟಿ ದರ 2.5%, ಎಸ್‌ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ದರ = 2.5%.

$$\text{ಸಿಜಿಎಸ್‌ಟಿ} = \frac{2.5}{100} \times 545 = 13.625 = 13.63 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

∴ ಎಸ್‌ಜಿಎಸ್‌ಟಿ = ಸಿಜಿಎಸ್‌ಟಿ = 13.63 ರೂಪಾಯಿ

$$\begin{aligned} \text{ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಹಣ} &= \text{ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ} + \text{ಕೇಂದ್ರದ} + \text{ರಾಜ್ಯದ ಕರ} \\ &= 545 + 13.63 + 13.63 = 572.26 \text{ ರೂಪಾಯಿ} \end{aligned}$$

ಆರತಿ ಗ್ಯಾಸ್ ಏಜನ್ಸಿಯ ಕೇಂದ್ರದ ಕರ = 13.63 ರೂಪಾಯಿ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಕರ = 13.63 ರೂಪಾಯಿ ತುಂಬಬೇಕಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ ಒಟ್ಟು ಸೇವೆ ಕರವು = 27.26 ರೂಪಾಯಿ ತುಂಬ ಬೇಕಾಗುವುದು.

ಉದಾ. (2) ಕುರಿಅರ ಸೇವೆ ಪೂರೈಸುವ ಒಂದು ಏಜನ್ಸಿಯು ಒಂದು ಪಾರ್ಸಲ್‌ನ್ನು ನಾಶಿಕದಿಂದ ನಾಗಪುರಕ್ಕೆ ಕಳುಹಿಸಲು ಗ್ರಾಹಕರಿಂದ ಒಟ್ಟು 590 ರೂಪಾಯಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರು. ಅದರಲ್ಲಿಯ 500 ರೂಪಾಯಿ ಕರ ಪಾತ್ರ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರದ ಕರ 45 ರೂಪಾಯಿ. ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಕರ 45 ರೂಪಾಯಿ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಆಕರಣೆ ಮಾಡಿದ ವಸ್ತು-ಸೇವಾ ಕರದ ದರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಒಟ್ಟು ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಕರ = ಕೇಂದ್ರದ ಕರ + ರಾಜ್ಯದ ಕರ = 45 + 45 = 90 ರೂಪಾಯಿ

$$\therefore \text{ವಸ್ತು-ಸೇವೆ ಕರದ ದರ} = \frac{90}{500} \times 100 = 18\%$$

ಕುರಿಅರ ಸೇವೆ ಪೂರೈಸುವ ಏಜನ್ಸಿಯು ವಸ್ತು ಸೇವೆಯ ಕರದ ದರ 18% ತೆಗೆದುಕೊಂಡನು.

ಉದಾ. (3) ಶ್ರೀಕರನು 50,000 ರೂಪಾಯಿ ಮುದ್ರಿತ ಬೆಲೆಯ ಲ್ಯಾಪಟಾಪ ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿದನು ಅಂಗಡಿಕಾರನು ಆ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಅವನಿಗೆ 10% ಸೂಟು ಕೊಟ್ಟನು. ಲ್ಯಾಪಟಾಪದ ಮೇಲೆ ವಸ್ತು-ಸೇವೆ ಕರದ ದರ 18% ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಅಂಗಡಿಕಾರನು ಆಕರಣೆ ಮಾಡಿದ ಕೇಂದ್ರದ ಕರ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಕರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಶ್ರೀಕರನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ ಲ್ಯಾಪಟಾಪ ದೊರೆಯಿತು?

ಉತ್ತರ : ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಸೂಟು ತೆಗೆಯೋಣ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಕಳೆದು ಉಳಿದ ಹಣದ ಮೇಲೆ 18% ದರದಿಂದ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆ ಕರದ ಆಕರಣೆ ಮಾಡೋಣ.

$$\text{ಸೂಟು} = 50,000 \text{ ರೂಪಾಯಿಯ ಮೇಲೆ } 10\% = 5,000 \text{ ರೂಪಾಯಿ.}$$

$$\therefore \text{ಲ್ಯಾಪಟಾಪ ಕರ ಪಾತ್ರದ ಬೆಲೆ} = 50,000 - 5,000 = 45,000 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

$$\therefore 18\% \text{ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ದರದಿಂದ ಕೇಂದ್ರದ ಕರ} = 9\%$$

$$45,000 \text{ ರೂಪಾಯಿಯ ಮೇಲೆ } 9\% \text{ ಕೇಂದ್ರದ ಕರ} = \frac{9}{100} \times 45000 = 4050 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

$$\therefore \text{ರಾಜ್ಯದ ಕರ} = 4050 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

$$\therefore \text{ಲ್ಯಾಪಟಾಪದ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ} = 45000 + 4050 + 4050 = 53,100 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

ಉತ್ತರ : ಶ್ರೀಕರನಿಗೆ ಲ್ಯಾಪಟಾಪ 53,100 ರೂಪಾಯಿಗೆ ದೊರೆಯಿತು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ ಅಂದರೆ ಯಾವ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಕರವು ಆಕರಣೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದು ಆ ಬೆಲೆ. ಇನ್ ವ್ಹಾಯಿಸ್ ಮೂಲ್ಯ (ಖರೀದಿ ಮೂಲ್ಯ) ಅಂದರೆ ಕರದೊಂದಿಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೆಲೆ ಇರುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿದಿದ್ದರೆ ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆಯು ಕರಪಾತ್ರ ಇರುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಕೇಂದ್ರದ ಕರವು ಎಷ್ಟು ಇರುವುದು ಅದರಷ್ಟೆ ರಾಜ್ಯದ ಕರ ಇರುವುದು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.1

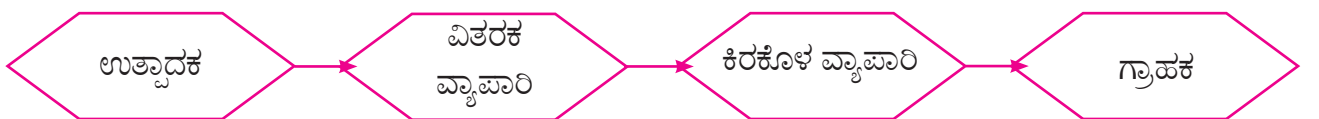
1. ಪವನ ಮೇಡಿಕಲ್ ಔಷಧಿಯ ಪೂರೈಕೆ ಮಾಡುವರು, ಅವರ ಅಂಗಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಔಷಧಿಗಳ ಮೇಲೆ GSTಯ ದರ 12% ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ CGST ಮತ್ತು SGST ಯದರ ಎಷ್ಟು ಇರುವುದು.
2. ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲೆ CGSTಯ ದರ 9% ಇದ್ದರೆ SGSTಯ ದರ ಎಷ್ಟು ? ಅದರಂತೆ GSTಯ ದರ ಎಷ್ಟು ?
3. 'ಮೇ ಸರ್ಸ್ ರಿಆಲ ಪೇಂಟ' ಇವರು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ₹ 2800 ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆಯ ಲಸ್ಟರ್ ಪೇಂಟದ 2 ಡಬ್ಬಗಳನ್ನು ಮಾರಿದರು, GSTಯ ದರ 28% ಇದ್ದರೆ, ಇನ್‌ವ್ಹಾಯಿಸ್ ಕರ ಪಾವತಿಯಲ್ಲಿ CGST ಮತ್ತು SGST ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಆಕರಣೆ ಮಾಡಲಾಯಿತು ?
4. ಒಂದು ರಿಸ್ಪಾನ್ಸಿಬಲ್ ಬೆಲ್ಡ್ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ 586 ರೂಪಾಯಿ ಇದೆ. GSTಯ ದರ 18% ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಬೆಲ್ಡ್ ಗ್ರಾಹಕನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಯಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವುದು ?
5. ಆಟದ ಒಂದು ರಿಮೋಟ ಕಂಟ್ರೋಲ್ ಕಾರದ GST ಕರದೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಬೆಲೆ 1770 ರೂಪಾಯಿ ಇದೆ. GSTಯ ದರ 18% ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಕಾರಿನ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ, ಅದರ ಮೇಲಿನ CGST ಮತ್ತು SGSTಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. 'ಟಿಪ್ ಟಾಪ್ ಇಲೆಕ್ಟ್ರಾನಿಕ್ಸ್' ಇವರು ಒಂದು ಕಂಪನಿಗೆ ಒಂದು ವರೆ ಟನ್ಸ್ ತೂಕದ, ಹಾಗೂ ಕರ ದೊಂದಿಗೆ 51,200 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆವುಳ್ಳ ಏಆರ್ ಕಂಡಿಶನ್ ಪೂರೈಸಿದರು. ಏಆರ್ ಕಂಡಿಶನ್ ಮೇಲಿನ CGSTಯ ದರ 14% ಆಕರಣೆ ಮಾಡಿದರು, ಹಾಗಾದರೆ ಇನ್‌ವ್ಹಾಯಿಸ್ ಕರಪಾವತಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು.
 - (1) SGSTಯ ದರ
 - (2) ಎಸಿ ಮೇಲಿನ GSTಯ ದರ
 - (3) ಎಸಿಯ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ
 - (4) GSTಯ ಒಟ್ಟು ಮತ್ತು
 - (5) CGSTಯ ದರ
 - (6) SGSTಯ ದರ
7. ಪ್ರಸಾದನು 'ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ಇಲೆಕ್ಟ್ರಾನಿಕ್ಸ್ ಗೂಡ್ಸ್' ದಿಂದ 40,000 ರೂಪಾಯಿ ಮುದ್ರಿತ ಬೆಲೆಯ ವಾಶಿಂಗ್ ಮಶಿನ್ ಖರೀದಿ ಮಾಡಿದನು. ಅದರ ಮೇಲೆ ಅಂಗಡಿಕಾರನು 5% ಸೂಟು ಕೊಟ್ಟನು. ಜಿಎಸ್‌ಟಿಯ ದರ 28% ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರಸಾದನಿಗೆ ಆ ವಾಶಿಂಗ್ ಮಶಿನ್ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಯಲ್ಲಿ ದೊರೆಯಿತು? ಇನ್‌ವ್ಹಾಯಿಸ್ ಕರ ಪಾವತಿಯಲ್ಲಿ ಸಿಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಮತ್ತು ಎಸ್‌ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಇರುವುದು ಅದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ವ್ಯವಸಾಯ ಸರಪಳಿಯಲ್ಲಿಯ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ (GST in trading chain)

ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವ್ಯವಸಾಯ ಸರಪಳಿ ಮುಂದಿನಂತೆ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ,



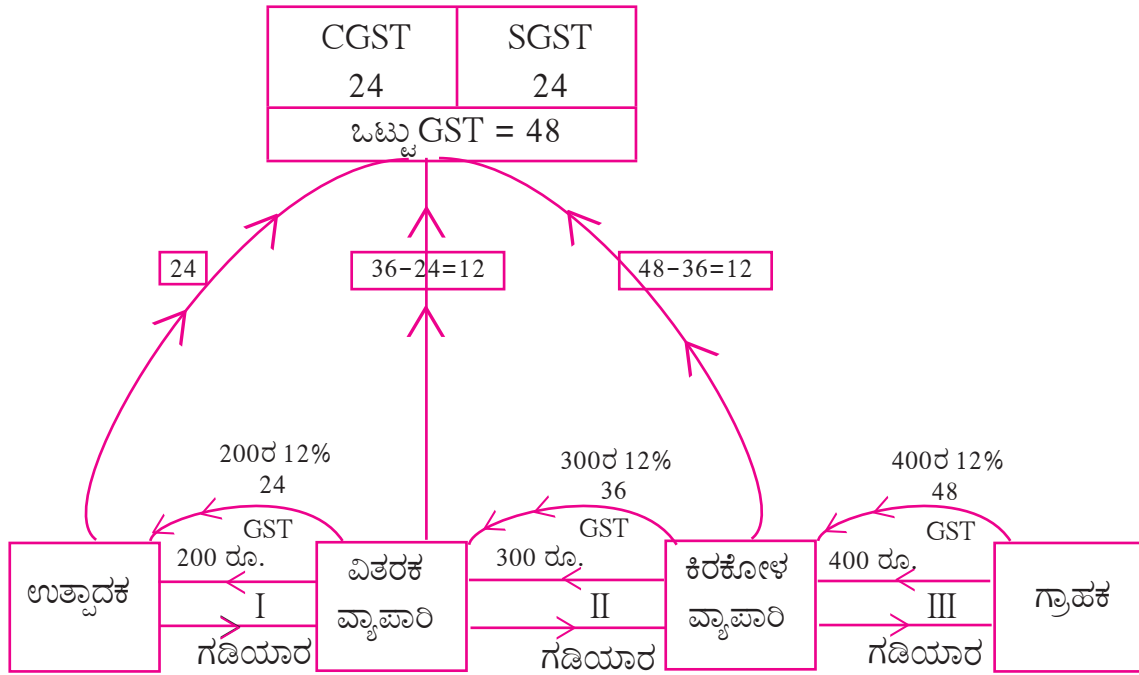
ವ್ಯವಸಾಯ ಸರಪಳಿ (Trading Chain)

ವ್ಯವಸಾಯ ಸರಪಳಿಯಲ್ಲಿ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಯಾವರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಕರಣೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಸರಕಾರದ ಕಡೆ ಸಂಗ್ರಹಣೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದು ಅದನ್ನು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ : ಒಬ್ಬ ಉತ್ಪಾದಕನು ವಿತರಕ ವ್ಯಾಪಾರಿಗೆ ಒಂದು ಗಡಿಯಾರವನ್ನು ಲಾಭದೊಂದಿಗೆ 200 ರೂಪಾಯಿಗೆ ಮಾರಿದನು. ವಿತರಕ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಕಿರಕೋಳ ವ್ಯಾಪಾರಿಗೆ 300 ರೂಪಾಯಿಗೆ, ಮತ್ತು ಕಿರಕೋಳ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಗ್ರಾಹಕನಿಗೆ ಅದೇ ಗಡಿಯಾರವನ್ನು 400 ರೂಪಾಯಿಗೆ ಮಾರಿದನು GSTಯ ದರ 12% ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಉತ್ಪಾದಕ, ವಿತರಕ, ಮತ್ತು ಕಿರಕೋಳ ವ್ಯಾಪಾರಿ ಇವರು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇನ್‌ವುಟ್ ಕಳೆದು ಉಳಿದ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಹೇಗೆ ತುಂಬುದರು ಅದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ತಕ್ತೆಯಿಂದ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ :

ಉತ್ಪಾದಕನ ಕಡೆಯಿಂದ ಗಡಿಯಾರವನ್ನು ಗ್ರಾಹಕನ ವರೆಗೆ ತಲುಪುವ ವರೆಗೆ ಮೂರು ವ್ಯವಹಾರಗಳು ಆಗಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕರ ಆಕರಣೆ, ಒಟ್ಟು ಗೂಡಿದ ಕರ ರಾಜ್ಯ ಸರಕಾರಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರ ಸರಕಾರಕ್ಕೆ ಹೇಗೆ ಮುಟ್ಟುವುದು ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ತಕ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಮೇಲಿನ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಮೂರ ಪ್ರಕಾರದ ಆರ್ಥಿಕ ವ್ಯವಹಾರ ಒಂದೇ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಆಗಿವೆ. ಅವರ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಇನ್‌ವುಟ್ ರ ಪಾವತಿಯಲ್ಲಿಯೂ GSTಯ ಆಕರಣೆ ತಿಳಿಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಳಗೆ ಸ್ಲಬ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಇನ್‌ವುಟ್‌ನ ಕರ ಪಾವತಿಯ I ದಲ್ಲಿಯೂ GST ಆಕರಣೆ ಗಡಿಯಾರದ ಬೆಲೆ = ₹ 200
CGST 6% = ₹ 12
SGST 6% = ₹ 12
ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ = ₹ 224

ಉತ್ಪಾದಕರ ಇನ್‌ವುಟ್‌ನ ಕರ ಪಾವತಿ (B2B)

ಇನ್‌ವುಟ್‌ನ ಕರಪಾವತಿ II ದಲ್ಲಿಯೂ GST ಆಕರಣೆ ಗಡಿಯಾರದ ಬೆಲೆ = ₹ 300
CGST 6% = ₹ 18
SGST 6% = ₹ 18
ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ = ₹ 336

ವಿತರಕ ಇನ್‌ವುಟ್‌ನ ಕರ ಪಾವತಿ (B2B)

ಇನ್‌ವುಟ್‌ನ ಕರಪಾವತಿ III ದಲ್ಲಿಯೂ GST ಆಕರಣೆ ಗಡಿಯಾರದ ಬೆಲೆ = ₹ 400
CGST 6% = ₹ 24
SGST 6% = ₹ 24
ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ = ₹ 448

ಕಿರಕೋಳ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ ಇನ್‌ವುಟ್‌ನ ಕರಪಾವತಿ (B2C)



ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಎರಡು GSTIN ಧಾರಕ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳಲ್ಲಿಯ ಉಂಟಾದ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ Business to Business ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತದಲ್ಲಿ **B2B** ಎಂದು ಹೇಳುವರು, ವಸ್ತುವಿನ ಉತ್ಪಾದನೆ. ಆದ ನಂತರ ಅದು ಗ್ರಾಹಕರ ಕಡೆ ತಲುಪುತ್ತದೆ, ಈ ಸರಪಳಿಯಲ್ಲಿಯ ಅಂತಿಮ ಕೊಡಿಯಲ್ಲಿಯ ವ್ಯವಹಾರಕ್ಕೆ Business to Consumer ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತದಲ್ಲಿ **B2C** ಎನ್ನುವರು.

ಈ ವ್ಯವಸಾಯ ಸರಪಳಿಯಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ತುಂಬಿದ GSTಯ ವಿತರಣೆ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

	CGST	SGST	ಒಟ್ಟು GST
• ಉತ್ಪಾದಕ	₹ 12 +	₹ 12 =	₹ 24 ತುಂಬಿದನು.
• ವಿತರಕ ವ್ಯಾಪಾರಿ	₹ 6 +	₹ 6 =	₹ 12 ತುಂಬಿದನು.
• ಕಿರಕೋಳ ವ್ಯಾಪಾರಿ	₹ 6 +	₹ 6 =	₹ 12 ತುಂಬಿದನು
ಒಟ್ಟು	₹ 24 +	₹ 24 =	₹ 48

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಇದು ನಿಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬಂದಿದೆಯೇ ? ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ತಮ್ಮ ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಗೂಡಿಸಿದ ಕರದಲ್ಲಿಯ ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಕ್ರೆಡಿಟ್ ಅಂದರೆ, ಖರೀದಿಯ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕರವನ್ನು ವಜಾ ಮಾಡಿ ಕೊಡಬೇಕಾದ GST ತುಂಬಿದ್ದಾರೆ, ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಗ್ರಾಹಕನಿಗೆ ಆ ಗಡಿಯಾರ 448 ರೂಪಾಯಿಗೆ ದೊರೆಯಿತು. ಅದರಲ್ಲಿಯ 48 ರೂಪಾಯಿ ಇದು (ನಿವ್ವಳ) ನಿಜ ಕರ ಇರುವುದು. ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಪ್ರಕಾರ ಗ್ರಾಹಕನು ಅದನ್ನು ಅಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗಿ ತುಂಬಿದ್ದಾನೆ, ಆದ್ದರಿಂದ GST ಇದು ಅಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಕರ (Indirect Tax) ಇರುವುದು. ಇದರ ಲೋಕ ವ್ಯಾಪಾರಿ ಮತ್ತು ಕಿರಕೋಳ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳು ಅವರ ಖರೀದಿಯ ಮೇಲೆ ತುಂಬಿದ ಕರ ಅವರಿಗೆ ಹಿಂತಿರುಗಿ ದೊರೆಯುವುದು.

ಖರೀದಿಯ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಕರದ ವ್ಯವಕಲನ (ITC - ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಕ್ರೆಡಿಟ್)

ವಸ್ತುವಿನ ಉತ್ಪಾದನೆ ಆದನಂತರ ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಗ್ರಾಹಕರ ವರೆಗೆ ತಲುಪುವ ವರೆಗೆ ಮಧ್ಯದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ GST ಆಕರಣೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದು. ವಸ್ತುವನ್ನು ಮಾರಾಟಮಾಡುವಾಗ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿದ ಕರ ಎಂದರೆ ಆವುಟ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಇರುವುದು. ಅದೇ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ವಸ್ತು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವಾಗ ತುಂಬಿದ ಕರ ಅದನ್ನು ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಎನ್ನುವರು. ಈ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಅತನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಕರದಿಂದ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕರವನ್ನು ವಜಾ ಮಾಡಿ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳುವನು ಅದಕ್ಕೆ ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಕ್ರೆಡಿಟ್ ಎನ್ನುವರು.

∴ ಕೊಡಬೇಕಾದ GST = ಅವುಟ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ - ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಕ್ರೆಡಿಟ್ (ITC)

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಸ್ವಲ್ಪದರಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಸರಕಾರದ ಕರ ತುಂಬುವಾಗ ಸರಪಳಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಅವನು ಖರೀದಿಸುವಾಗ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕರ, ಇದನ್ನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡುವಾಗ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಕರದಲ್ಲಿ ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡಿ ಉಳಿದ ಕರವನ್ನು ತುಂಬುವನು.

ಶಶಶ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಶಶಶ

ಉದಾ. (1) ಶ್ರೀ ರೋಹಿತ ಇವನು ಕಿರಕೋಳ ವ್ಯಾಪಾರಿ ಇದ್ದಾರೆ. ಅವರು ವಸ್ತುವಿನ ಖರೀದಿಯ ಸಮಯದಲ್ಲಿ 6500 ರೂಪಾಯಿ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ತುಂಬಿದರು ಮತ್ತು ವಿಕ್ರಿ ಮಾಡಿ 8000 ರೂಪಾಯಿ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಒಟ್ಟು ಗೂಡಿಸಿದನು. ಹಾಗಾದರೆ (i) ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಮತ್ತು ಅವುಟ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಎಷ್ಟು? (ii) ಶ್ರೀ ರೋಹಿತ ಇವರಿಗೆ ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಕ್ರೆಡಿಟ್ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ದೊರೆಯುವುದು? (iii) ಅವರು ಕೊಡಬೇಕಾಗುವ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. (iv) ಅವರು ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯಕ್ಕೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಕರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಶ್ರೀ ರೋಹಿತ ಇವರು ಕೊಡಬೇಕಾದ ಕರ ಎಂದರೆ ಸರಕಾರದ ಕಡೆ ತುಂಬ ಬೇಕಾದ ಕರ

(i) ಮಾರಾಟ ಮಾಡುವಾಗ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕರ (ಅವುಟ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್) = 8000 ರೂಪಾಯಿ

(ii) ಖರೀದಿಸುವಾಗ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕರ (ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್) = 6500 ರೂಪಾಯಿ

ಅಂದರೆ ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಕ್ರೆಡಿಟ್ (ITC) = 6500 ರೂಪಾಯಿ

(iii) ತುಂಬಬೇಕಾದ ಕರ = ಮಾರಾಟ ಮಾಡುವಾಗ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕರ - ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ (ITC)

$$= 8000 - 6500 = 1500 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

(iv) \therefore ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ತುಂಬ ಬೇಕಾದ ಕರ = $\frac{1500}{2} = 750$ ರೂಪಾಯಿ, ರಾಜ್ಯಕ್ಕೆ ತುಂಬುವ ಕರ = 750 ರೂಪಾಯಿ.

ಉದಾ. (2) ಮೆಸರ್ಸ್ ಜಯ ಕೆಮಿಕಲ್ಸ್ ಇವರು 8000 ರೂಪಾಯಿಗೆ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆಯ ಲಿಕ್ವಿಡ್ ಸೋಪ ಖರೀದಿಸಿದರು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ 10000 ರೂಪಾಯಿ ಈ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆಗೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದರು. GSTಯ ದರ 18% ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಮೆಸರ್ಸ್ ಜಯ ಕೆಮಿಕಲ್ಸ್ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ತುಂಬ ಬೇಕಾದ ಕರ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯಕ್ಕೆ ತುಂಬ ಬೇಕಾದ ಕರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಖರೀದಿಯ ಸಮಯದಲಿಲ ತುಂಬಿರುವ ಕರ (ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್) = 8000 ರೂಪಾಯಿ ಖರೀದಿಯ ಮೇಲೆ 18% ದರದಿಂದ ತುಂಬಿದ ಕರ

$$= \frac{18}{100} \times 8000$$

$$= 1440 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

\therefore ITC = 1440 ರೂಪಾಯಿ

ಅವುಟ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ = ಮಾರಾಟದ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಗ್ರಾಹಕರಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಕರ

$$= \frac{18}{100} \times 10000$$

$$= 1800 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

ತುಂಬ ಬೇಕಾಗುವ ಕರ = ಅವುಟ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ - ITC

$$= 1800 - 1440 = 360 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

ಮೆ. ಜಯ ಕೆಮಿಕಲ್ಸ್ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ತುಂಬ ಬೇಕಾದ ಕರ = 180 ರೂ. ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯಕ್ಕೆ ತುಂಬ ಬೇಕಾದ ಕರ = 180 ರೂ.

ಉದಾ. (3) ಮೆ. ಜಯ ಕೆಮಿಕಲ್ಸ್‌ನು 8000 ರೂಪಾಯಿಗಳ (ಕರಯುಕ್ತ ಬೆಲೆ) ಲಿಕ್ವಿಡ್ ಸೋಪ ಖರೀದಿಸಿ ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ 10,000 ರೂಪಾಯಿಗೆ (ಕರ ಸಹಿತ ಬೆಲೆ) ಮಾರಿದರು, ಹಾಗಾದರೆ ಜಯ ಕೆಮಿಕಲ್ಸ್‌ನು ತುಂಬ ಬೇಕಾದ ಕೇಂದ್ರದ ಕರ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಕರ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಕರದ ದರ 18% ಇದೆ.

ಉತ್ತರ : ಇದರಲ್ಲಿ ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆಕರದೊಂದಿಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

ವಸ್ತುವಿನ ಕರದೊಂದಿಗೆ ಬೆಲೆ = ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ + ಕರ

ಲಿಕ್ವಿಡ್ ಸೋಪದ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ 100 ರೂಪಾಯಿ, ಇದ್ದರೆ ಕರದೊಂದಿಗೆ ಅದರ ಬೆಲೆ 118 ರೂ. ಆಗುವುದು.

ಕರದೊಂದಿಗೆ ಬೆಲೆ

ಕರ ಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ ಈ ಗುಣೋತ್ತರ ಸ್ಥಿರ ಇರುವುದು.

118 ರೂಪಾಯಿ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಯಕ್ಕೆ 100 ರೂಪಾಯಿ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ ಇದ್ದರೆ 8000 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆಗಾಗಿ x ರೂಪಾಯಿ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ ತಿಳಿಯುವಾ

$$\therefore \frac{x}{8000} = \frac{100}{118}$$

$$\therefore x = \frac{8000}{118} \times 100 = 6779.66 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

$$\therefore \text{ಖರೀದಿಯ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದ GST} = 8000 - 6779.66$$

$$\therefore \text{ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್} = 1220.34 \text{ ರೂಪಾಯಿ. } \therefore \text{ITC} = 1220.34 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

ಆದೇ ರೀತಿ 10,000 ರೂ. ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಗಾಗಿ, y ರೂಪಾಯಿ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ ತಿಳಿಯುವಾ

$$\therefore \frac{y}{10000} = \frac{100}{118}$$

$$\therefore y = \frac{10,00,000}{118} = 8474.58 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

$$\therefore \text{ಮಾರಾಟ ಮಾಡುವಾಗ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಕರ (ಆವುಟ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್)} = 10000.00 - 8474.58 \\ = 1525.42 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

$$\therefore \text{ತುಂಬ ಬೇಕಾದ ಕರ} = \text{ಆವುಟ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್} - (\text{I.T.C}) \text{ ಕಳೆದುಳಿದ ರಕಮು} = 1525.42 - 1220.34 \\ = 305.08 \text{ ರೂಪಾಯಿ.}$$

$$\therefore \text{ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ತುಂಬ ಬೇಕಾದ ಕರ} = \text{ರಾಜ್ಯಕ್ಕೆ ತುಂಬ ಬೇಕಾದ ಕರ} = 305.08 \div 2 = 152.54 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

ಉತ್ತರ: ಜಯ ಕೆಮಿಕಲ್ಸ್‌ಗೆ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ತುಂಬುವ ಕರ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯಕ್ಕೆ ತುಂಬುವ ಕರ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಂತೆ 152.54 ರೂಪಾಯಿ ಇದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಉದಾ. 2 ಮತ್ತು 3 ಕಾಳಜಿ ಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರಿ. ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ಎರಡೂ ಪ್ರಕಾರದ ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ಕರ ಪಾವತಿ ನೋಡಲು ದೊರೆಯುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂಗಡಿಕಾರನು ವಸ್ತುಗಳ ಮುದ್ರಿತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕರದೊಂದಿಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವನೋ ಅಥವಾ ಮುದ್ರಿತ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಕರವನ್ನು ಆಕರಣೆ ಮಾಡುವನೋ? ಇದನ್ನು ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ, ಮತ್ತು ಆ ಮೇಲೆ ಖರೀದಿಸಿರಿ.

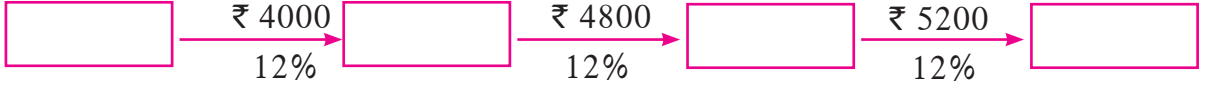


ICT Tools or Links

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪಡಿಸಿದ ದಿನಾಂಕದ ವರೆಗೆ ಕರವನ್ನು ತುಂಬಿ, ಅದರ ನಂತರ ಸೂಚಿಸಿದ ದಿನಾಂಕಕ್ಕೆ ಕರ ವಿವರಣ ಪತ್ರ (GST Returns) ಅರ್ಪಿಸುವುದು ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಈ ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳು ಈಗ online ಮಾಡಲು ಬರುವುದು. www.gst.gov.in ಈ ವೆಬ್‌ಸೈಟ್‌ನ ಮೇಲೆ ಎಲ್ಲ ವಿವರಣ ಪತ್ರಗಳನ್ನು ನಿಮಗೆ ನೋಡಲು ದೊರೆಯುವವು. (ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ವಿವರಣ ಪತ್ರಗಳನ್ನು ತಯಾರ ಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಅಫ್‌ಲಾಯಿನ್ ಯುಟಿಲಿಟಿ ಸಹ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವುದು)

ಉದಾ. (4) ಒಬ್ಬ ಸಾಯಕಲ್ ಉತ್ಪಾದಕನು, ಠೋಕ ವ್ಯಾಪಾರಿಗೆ 4000 ರೂಪಾಯಿ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಸಾಯಕಲ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದರು. ಆ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಆ ಸಾಯಕಲ್‌ನ್ನು 4800 ರೂಪಾಯಿಗೆ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಅಂಗಡಿಕಾರನಿಗೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದರು ಮತ್ತು ಅಂಗಡಿಕಾರನು ಅದನ್ನು 5200 ರೂಪಾಯಿಗೆ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದನು. GST ಯ ದರ 12%, ಇದು ಮಾರಾಟದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲಿ ಕೊಡಬೇಕಾದ CGST ಮತ್ತು SGST ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿಯನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ: ವ್ಯವಸಾಯದ ಸರಪಳಿ



ಉತ್ಪಾದಕನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡುವಾಗ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಕರ = 4000ರ 12% = $\dots \times \frac{\dots}{\dots}$ =

ಉತ್ಪಾದಕನು ಕೊಡಬೇಕಾದ ಕರ = 480 ರೂ.

ಠೋಕ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಮಾರಾಟದ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಕರ = 4800ರ 12% = 576 ರೂಪಾಯಿ

∴ ಠೋಕ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ತುಂಬ ಬೇಕಾದ ಕರ = ಠೋಕ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಕರ - ಅವನು ಪಡೆದ ಕಳೆದುಕೊಂಡ ರಕಮು (ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಕ್ರೆಡಿಟ್)

= 576 - 480

= 96 ರೂಪಾಯಿ

ಅಂಗಡಿ ಕಾರನು ಮಾರಾಟ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಕರ = 5200ರ 12% =

∴ ಅಂಗಡಿಕಾರನು ಕೊಡಬೇಕಾದ GST = ಅಂಗಡಿಕಾರನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿದ ಕರ - ಅಂಗಡಿಕಾರನಿಂದ ಪಡೆದು ಕಳೆದುಕೊಂಡ ರಕಮು

= -

=

ವ್ಯವಸಾಯ ಸರಪಳಿಯಲ್ಲಿಯ GST ತುಂಬಿದ ವಿತರಣೆ.

ವ್ಯಕ್ತಿ	ತುಂಬ ಬೇಕಾದ GST	ತುಂಬ ಬೇಕಾದ CGST	ತುಂಬ ಬೇಕಾದ SGST
ಉತ್ಪಾದಕ	₹480	₹240	₹ <input type="text"/>
ಠೋಕ ವ್ಯಾಪಾರಿ	₹96	₹ <input type="text"/>	₹ <input type="text"/>
ಅಂಗಡಿಕಾರ	₹ <input type="text"/>	₹ <input type="text"/>	₹ <input type="text"/>
ಒಟ್ಟು	₹ <input type="text"/>	₹ <input type="text"/>	₹ <input type="text"/>



ಯೋಚನೆ ಮಾಡೋಣ ಬನ್ನಿ.

- ಒಂದು ವೇಳೆ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಒಟ್ಟು ಗೂಡಿಸಿದ ಜುಲೈ ತಿಂಗಳಿನ ಒಟ್ಟು ಗೂಡಿಸಿದ ಕರ ಮತ್ತು ಇದು ಅದರ ಕಳೆದುಳಿದ ರಕಮುಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ, ಇಂತಹ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಕರ ಗಣನೆ ಹೇಗೆ ಆಗುವುದು.
- ಒಂದು ವೇಳೆ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ ಜುಲೈ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿಯ ಒಟ್ಟು ಗೂಡಿಸಿದ ಕರ ಮತ್ತು ಕಳೆದುಳಿದ ರಕಮಿನ ಸಮಾನ ಇದ್ದರೆ ಅವನು ತುಂಬ ಬೇಕಾದ ಕರ ಎಷ್ಟು ಬರುವುದು ?

ಉದಾಹರಣೆ ಸಂಗ್ರಹ 4.2

- (1) ಚೇತನ ಸ್ಟೋರ್ಸ್ 01 ಜುಲೈ 2017 ರಿಂದ 31 ಜುಲೈ 2017 ಈ ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಖರೀದಿಯ ಮೇಲೆ 1,00,500 ರೂಪಾಯಿ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಕೊಟ್ಟರು ಮತ್ತು ಮಾರಾಟದ ಮೇಲೆ 1,22,500 ರೂಪಾಯಿ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಸಂಗ್ರಹ ಮಾಡಿದರು. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಚೇತನ ಸ್ಟೋರ್ಸ್‌ಗೆ ತುಂಬ ಬೇಕಾದ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (2) ನರ್ಮಮಾ ಈ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಕಾಯ್ದೆ ಅಂತರ್ಗತ ನೋಂದಣಿಕೃತ ಅಂಗಡಿಯ ಒಡತಿ ಇದ್ದಾರೆ, ಅವರು ಖರೀದಿಯ ಮೇಲೆ ಒಟ್ಟು ಜಿಎಸ್‌ಟಿ 12,500 ರೂ. ಕೊಟ್ಟರು. ಮತ್ತು ಮಾರಾಟದ ಮೇಲೆ ಒಟ್ಟು ಜಿಎಸ್‌ಟಿ 14,750 ರೂ. ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದರು, ಹಾಗಾದರೆ ಅವರಿಗೆ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಕ್ರೆಡಿಟ್ ದೊರೆಯುವುದು? ಮತ್ತು ಅವರು ಕೊಡಬೇಕಾದ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (3) ಅಮೀರ ಎಂಟರ್‌ಪ್ರೈಸಿಸ್ ಚಾಕಲೇಟ ಸಾಸ್ ಬಾಟಲಿಗಳ ಖರೀದಿ ಮಾಡುವಾಗ 3800 ರೂಪಾಯಿ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ತುಂಬಿದರು. ಅದನ್ನು ಅಕಬರಿ ಬ್ರದರ್ಸ್ ಕಡೆಯಿಂದ ಆ ಬಾಟಲಿಗಳನ್ನು 4100 ರೂಪಾಯಿ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಒಟ್ಟು ಗೂಡಿಸಿದರು. ಮುಂಚೆ ಫುಡ್ ಕಾರ್ನರ್ ಇವರು ಅಕಬರಿ ಬ್ರದರ್ಸ್ ಕಡೆಯಿಂದ ಆ ಬಾಟಲಿಗಳನ್ನು 4500 ರೂಪಾಯಿ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಕೊಟ್ಟು ಖರೀದಿಸಿದರು, ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ತುಂಬ ಬೇಕಾಗುವ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ತುಂಬ ಬೇಕಾಗುವ ಕೇಂದ್ರದ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಕರ (CGST) ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಕರ (SGST) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (4) ಚಂದೀಗಢ ಇದು ಸಂಘ ರಾಜ್ಯವಿದೆ. ಇಲ್ಲಿಯ ಮಲೀಕ ಗ್ಯಾಸ ಏಜನ್ಸಿಯ ವ್ಯವಸಾಯಕ ಉಪಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು ಗ್ಯಾಸ ಟಾಂಕಿಗಳನ್ನು 24,500 ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗೆ ಖರೀದಿಸಿದರು ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿಯ ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ 26,500 ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದರು, ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ 5% ದರದಿಂದ ತುಂಬ ಬೇಕಾಗುವ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ತುಂಬುವ ಕರ (CGST) ಮತ್ತು ಸಂಘರಾಜ್ಯಕ್ಕೆ ತುಂಬ ಬೇಕಾದ ಕರ (UTGST) ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ (ಸಂಘರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ SGST ಬದಲಾಗಿ UTGST ಇರುವುದು).
- (5) ಮೇ. ಬ್ಯುಟಿ ಪ್ರೊಡಕ್ಟ್ಸ್ 6000 ರೂಪಾಯಿಯ ಮೇಲೆ 18% ದರದಿಂದ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಕೊಟ್ಟು ಸೌಂದರ್ಯ ಪ್ರಸಾದನೆಗಳು ಖರೀದಿಸಿದರು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಗ್ರಾಹಕನಿಗೆ ಅದನ್ನೆಲ್ಲ 10,000 ರೂಪಾಯಿಗೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದರು ಹಾಗಾದರೆ ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಮೇ. ಬ್ಯುಟಿ ಪ್ರೊಡಕ್ಟ್ಸ್ ತಯಾರಿಸಿದ ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ಕರ ಪಾವತಿಯಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರದ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ (CGST ಮತ್ತು SGST) ತುಂಬ ಬೇಕಾಗಿರುವ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಕರದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ತೋರಿಸಿರಬಹುದು ಅದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- (6) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಅಂಗಡಿಕಾರರಿಂದ ಗ್ರಾಹಕ (B2C) ಇದರ ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ಕರ ಪಾವತಿ ತಯಾರಿಸಿ, ಹೆಸರು, ವಿಳಾಸ, ದಿನಾಂಕ, ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಅನಿಸಿಕೆಯಂತೆ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ (Tax Invoice)

ಪೂರೈಸುವವರನು : ಮೇ. - - - - ವಿಳಾಸ - - - - - ರಾಜ್ಯ - - - - - ದಿನಾಂಕ

ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ಕ್ರ. - - - - - GSTIN - - - - -

ವಸ್ತುಗಳ ವಿವರ : ಮೊಬಾಯಿಲ್ ಬ್ಯಾಟರಿ ದರ - ₹ 200 GSTಯ ದರ 12% HSN 8507, 1 ನಗ

ಹೆಡ್‌ಫೋನ್ ದರ - ₹ 750 GSTಯ ದರ 18% HSN 8518, 1 ನಗ

(7) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ, ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ ಇನ್ನೊಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ ಸಲುವಾಗಿ (B2B) ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ಕರ ಪಾವತಿ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

ಹೆಸರು, ವಿಳಾಸ, ದಿನಾಂಕ, ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಅನಿಸಿಕೆಯ ಪ್ರಕಾರ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ.

ಪೂರೈಸುವವರು - ಹೆಸರು, ವಿಳಾಸ, ರಾಜ್ಯ, GSTIN, ಪಾವತಿ ಕ್ರಮಾಂಕ ಮತ್ತು ದಿನಾಂಕ

ಪಡೆಯುವವರು - ಹೆಸರು, ವಿಳಾಸ, ರಾಜ್ಯ GSTIN.

ವಸ್ತುಗಳ ವಿವರಣೆ : (1) ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಬಾಕ್ಸ್ 100, HSN 3924, ದರ 20 ರೂ., GST 12%,

(2) ಜಿಗ್ ಸಾ ಪರುಲ್ಸ್ 50, HSN 9503, ದರ 100 ರೂ. GST 12%

ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಗಾಗಿ

ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಯುಕ್ತ ಯೋಜನೆ (Composition Scheme)

ಯಾವ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವ್ಯವಸಾಯದಿಲ್ಲದ ವ್ಯವಹಾರ ಕಳೆದ ಆರ್ಥಿಕ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 1.5 ಕೋಟಿ ರೂಪಾಯಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ ಅವರ ಸಲುವಾಗಿ ಒಂದಾಣಿಕೆ ಯುಕ್ತ ಯೋಜನೆ (Composition Scheme) ಇದೆ. ಈ ಯೋಜನೆಯ ಅಂತರ್ಗತ ಕರದಾತನು ನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸಿದ ದರದಿಂದ ಕರವನ್ನು ತುಂಬುವನು.

ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಯುಕ್ತ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಕರದ ದರ (GST rates for composition Scheme)

ಅ. ಕ್ರ.	ಪೂರೈಸುವವರು	ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ದರ	(CGST + SGST)
1.	ಉಪಹಾರ ಗೃಹ	5%	2.5% + 2.5%
2.	ಉತ್ಪಾದಕ ಮತ್ತು ಮಾರಾಟಗಾರ	1%	0.5% + 0.5%

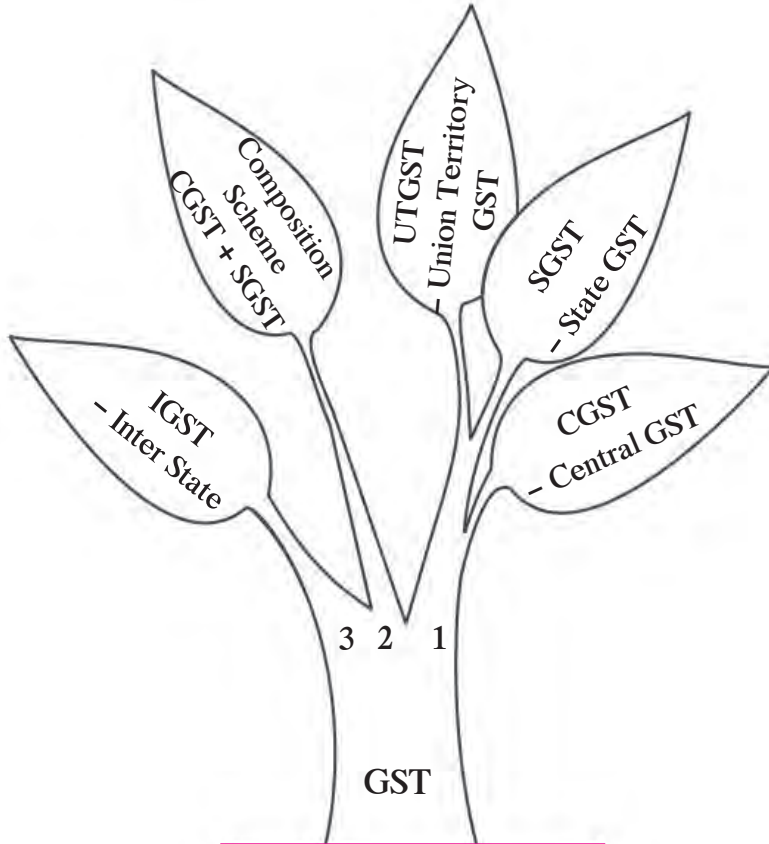
ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಯುಕ್ತ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ನಿಯಮ

- ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಯುಕ್ತ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳಿಗೆ ಗ್ರಾಹಕರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಕರ ಸಂಗ್ರಹಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಈ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಪಾರಿಗೆ ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ ಕರ ಕೊಡಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅವನು ಪೂರೈಸಿದ ಪಾವತಿ (Bill of Supply) ಕೊಡಬೇಕಾಗುವುದು.
- ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಪ್ರತಿ 3 ತಿಂಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಕೋಷ್ಟಕದಂತೆ ಸರ್ಕಾರದ ಕಡೆ, ಮಾರಾಟದ ಮೇಲಿನ ಕರವನ್ನು ತುಂಬ ಬೇಕಾಗುವುದು.
- ಈ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಇನ್ನೊಂದು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ ಆದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ರಾಜ್ಯದಿಂದ ಖರೀದಿಯನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.
- ಈ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳಿಗೆ ಕರ ಮರಳಿ ಪಡೆಯುವ (ITC) ಯ ಲಾಭ ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲ.
- ಈ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳಿಗೆ ಅವರ ಅಂಗಡಿಯ ಹೆಸರು ಫಲಕದ ಮೇಲೆ “ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಯುಕ್ತ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಾಪಾರಿ” (Composition taxable person) ಎಂದು ಬರೆಯ ಬೇಕಾಗುವುದು.
- ಈ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳಿಗೆ ಪೂರೈಕೆಯ ಪಾವತಿಯ ಮೇಲೆ (Bill of supply) ದಪ್ಪ ಆಕರಗಳಲ್ಲಿ “ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಯುಕ್ತ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಮಾರಾಟದ ಮೇಲೆ ಕರ ಆಕರಣೆಗೆ ಅಪಾತ್ರ” (Composition taxable person not eligible to collect tax on supplies) ಹೀಗೆ ಮುದ್ರಿಸ ಬೇಕಾಗುವುದು.

GST ಯ ಪ್ರಮುಖ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳು (Features of GST)

- ವಿವಿಧ ಅಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ ಕರಗಳು ಇಲ್ಲದಂತಾಗಿವೆ.
- ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಕರಗಳ ಸಂಬಂಧವಾದ ವಿವಾದ ಇಲ್ಲದಂತಾಗಿದೆ.
- ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳ ರಾಜ್ಯಕ್ಕನುಸಾರ ನೋಂದಣಿ.
- GSTIN ಇರುವ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳಿಗೆ ವ್ಯವಹಾರದ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ನೋಂದಣಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಸಮಯಕ್ಕನುಸಾರ GST ತುಂಬ ಬೇಕಾಗುವುದು.
- ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಪಾರದರ್ಶಕತೆ.
- ಸರಳ ಮತ್ತು ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಲು ಸುಲಭವಾದ ಕರ ಪ್ರಣಾಲಿ ಇದೆ.
- ಕರದ ಮೇಲೆ ಕರವನ್ನು ತುಂಬ ಬೇಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ, ಇದರಿಂದ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದು.
- ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪೇಟೆಯಲ್ಲಿಯ ಹೋಲಿಕೆಯಿಂದ ಗುಣಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಳ ವಾಗುವುದು.
- 'ಮೇಕ್ ಇನ್ ಇಂಡಿಯಾ' ಇದಕ್ಕೆ ಗತಿ ದೊರೆಯುವುದು.
- ಈ ಕರ ಪ್ರಣಾಲಿಯು ತಂತ್ರಜ್ಞಾನ ಆಧಾರಿತ ಕರ ಮಾಡಿರುವುದರಿಂದ ತ್ವರಿತ ನಿರ್ಣಯ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ.
- ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಕರ ಈ ದ್ವಿಮಾದರಿ (Dual model) ಇದೆ ಅಂದರೆ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಸಲುವಾಗಿ ಒಂದೇ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಕರ ಆಕರಣೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದು.

ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವಾಕರಗಳ ಅಂತರ್ಗತ ಬರುವ ಕರೆ



1. CGST-SGST (UTGST):

ಒಂದು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿಯ ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರೆ- ಮಾರಾಟ ಈ ವ್ಯವಹಾರ ಮಾಡುವ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳಿಗೆ.

2. ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯುಕ್ತ ಯೋಜನೆ (composition Scheme) :

ಯಾವ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ ವ್ಯವಹಾರ 20 ಲಕ್ಷದಿಂದ 1.5 ಕೋಟಿ ರೂಪಾಯಿ ವರೆಗೆ ಇದೆ, ಇಂತಹ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳಿಗೆ ಈ ಯೋಜನೆಯ ಲಾಭ ಪಡೆಯಲು ಬರುವುದು. ಅವರಿಗೆ SGST ಮತ್ತು CGST, ಈ ಭಿನ್ನದರಿಂದ ಕೊಡಬೇಕಾಗುವುದು.

3. IGST :

ಅಂತರ-ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ (Inter State) ವ್ಯವಹಾರ ಮಾಡುವ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳಿಗಾಗಿ

ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಗಾಗಿ

ಏಕಾತ್ಮಿಕ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವಾ ಕರ - IGST (Integrated GST)

ಯಾವಾಗ ಮಾರಾಟದ ವ್ಯವಹಾರ ಎರಡು ರಾಜ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಆಗುವುದು (Inter state) ಆಗ ಯಾವ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಆಕರಣೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದು ಅದಕ್ಕೆ ಏಕತ್ರಿತ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವಾ ಕರ (IGST) ಎನ್ನುವರು. ಅದನ್ನು ಕೇಂದ್ರ ಸರ್ಕಾರದ ಕಡೆಗೆ ತುಂಬಲಾಗುವುದು.

ಒಂದು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಇನ್ನೊಂದು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳಿಂದ ವಸ್ತು ಖರೀದಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ತಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದಾಗ ಅವನಿಗೆ IGST ಎಂದು ತುಂಬಿದ ಕರವನ್ನು ವಜಾ ಮಾಡಿ (ITC) ಹೇಗೆ ಪಡೆಯಲು ಬರುವುದು ಅದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ: ವ್ಯಾಪಾರಿ M (ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿಯ) ಅವನು 20,000 ರೂ.ಗಳಿಗೆ ಸ್ಕೂಟರಿನ ಬಿಡಿ ಭಾಗಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಪಾರಿ P (ಪಂಜಾಬದಲ್ಲಿಯ) ಇವರಿಂದ ಕೊಂಡು ಕೊಂಡನು. ಆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ 28% ದರದಿಂದ 5600 ರೂಪಾಯಿ ಏಕಾತ್ಮಿಕ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಕರ (IGST) ವ್ಯಾಪಾರಿ P ಗೆ ಕೊಟ್ಟನು.

M ನು ಎಲ್ಲ ಬಿಡಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾನಿಕ ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ 25,000 ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗೆ ಮಾರಿದನು ಆಗ 28% ದರದಿಂದ 7000 ರೂಪಾಯಿ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಸಂಗ್ರಹ ಮಾಡಿದನು.

GST 7000 ರೂಪಾಯಿ = CGST 3500 ರೂಪಾಯಿ + SGST 3500 ರೂ. ಗ್ರಾಹಕರ ಕಡೆಯಿಂದ ಸಂಗ್ರಹ ಮಾಡಿದ ಈಗ ಸರ್ಕಾರದ ಕಡೆ ಕರ ತುಂಬುವಾಗ 5600 ರೂಪಾಯಿಯ ವಜಾ ಮಾಡಿ, ITC ಹೇಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: IGSTಯ ಕ್ರೇಡಿಟ್ ಪಡೆಯುವಾಗ, ಮೊದಲು IGST ಸಲುವಾಗಿ, ನಂತರ CGST ಸಲುವಾಗಿ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಕ್ರೇಡಿಟ್ SGST ಯ ಸಲುವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವರು. ಇಲ್ಲಿ M ಇತನ ಮಾರಾಟದ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ IGST ಇರುವುದಿಲ್ಲ, ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲು CGST ಸಲುವಾಗಿ ಕ್ರೇಡಿಟ್ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಉಳಿದದ್ದನ್ನು SGST ಯ ಸಲುವಾಗಿ ಕ್ರೇಡಿಟ್ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು.

∴ ಇಲ್ಲಿ CGST = 3500 - 3500 = 0 ರೂಪಾಯಿ

ಅಂದರೆ 5600 ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿಯ 3500 ರೂಪಾಯಿ ಕ್ರೇಡಿಟ್ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆಯಿತು. ಉಳಿದದ್ದನ್ನು 5600 - 3500 = 2100 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಕ್ರೇಡಿಟ್ SGSTಯ ಸಲುವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದು.

∴ ಇಲ್ಲಿ SGST = 3500 - 2100 = 1400 ರೂಪಾಯಿ

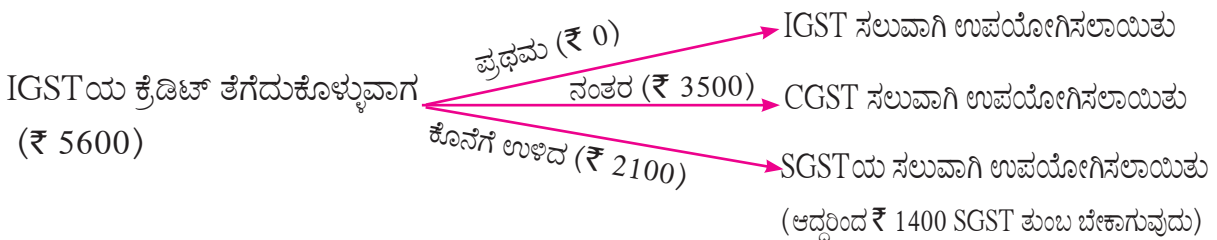
'M' ಇವರಿಗೆ 1400 ರೂಪಾಯಿಯ SGST ತುಂಬ ಬೇಕಾಗುವುದು.

ವ್ಯಾಪಾರಿ M ಇತನಿಗೆ ಖರೀದಿಯ ಸಮಯದಲ್ಲಿ 5600 ರೂಪಾಯಿಯ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ವಜಾಗೊಳಿಸಿ (ITC) ದೊರೆಯಿತು. (ಆದ್ದರಿಂದ ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಪೂರ್ಣ ಕ್ರೇಡಿಟ್ ದೊರೆಯುವುದು).

ITC ಹೀಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ

ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕರ (ITC)

ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಕರ (Output Liability)





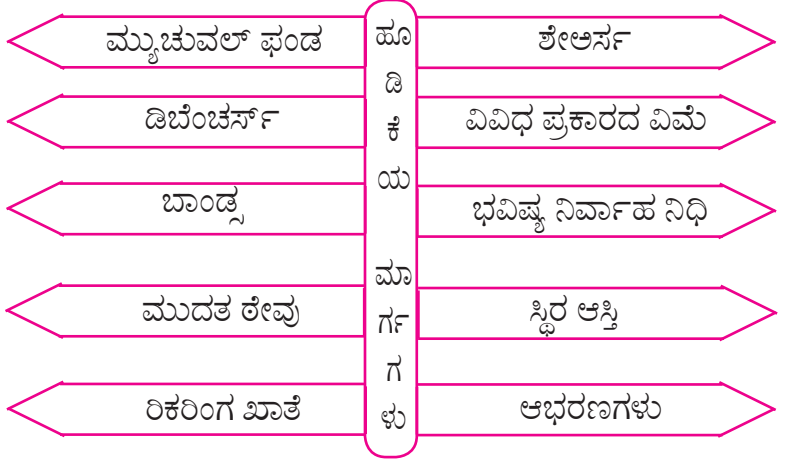
ಸ್ವಲ್ಪ ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ.

ನಾವು ಹಿಂದಿನ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಉಳಿತಾಯ ಮತ್ತು ಉಳಿತಾಯದ ಮಹತ್ವವನ್ನು ಅರಿತುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಅದರಂತೆ ಯಾವುದು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೋ ಅದನ್ನು ನೀವು ಅಳವಡಿಸಿರಬೇಕು. ಕಾರಣ ಯಾವಾಗಲೂ ನಿರೋಧಿ ಯಾಗಿರಲು ಹೇಗೆ ಉತ್ತಮ ಆರೋಗ್ಯದಾಯಿ ಹವ್ಯಾಸಗಳನ್ನಿಟ್ಟು ಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆಯೋ ಹಾಗೆ ಆರ್ಥಿಕ ಮಟ್ಟ ಉತ್ತಮಗೊಳ್ಳಲು ಉಳಿತಾಯದ ಹವ್ಯಾಸ ಅಂಗೀಕರಿಸಬೇಕಾಗುವುದು. ಈಗ ಉಳಿತಾಯದ ಪ್ರಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ವೈವಿಧ್ಯತೆಯು ಇದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಅನುಭವ ಇವೆರಡೂ ಮಹತ್ವದ್ದಾಗಿವೆ.



ಚರ್ಚೆ ಮಾಡೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಶ್ವೇತಾ ಒಂದು ಕಂಪನಿಯಲ್ಲಿ ನೌಕರಿ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಬೋನಸ್ ಕೂಡಾ ದೊರೆಯುವುದಿದೆ ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಅವಳು ಸಂಬಳದಲ್ಲಿಯ ಕೆಲವು ಹಣ ಯೋಗ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಯೋಜನೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾಳೆ ಅವಳ ಗೆಳತಿ ನೇಹಾ, ಆರ್ಥಿಕ ಸಲಹೆಗಾರರಕಡೆ ನೌಕರಿಗೆ ಇದ್ದಾಳೆ ಇದರಿಂದ ಅವಳು ಯೋಗ್ಯ ಆರ್ಥಿಕ ಸಲಹೆಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತಾಳೆ. ನೇಹಾ ಹೇಳುವಳು, “ನಮ್ಮ ಉಳಿತಾಯದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧತೆ ಇರುವುದು ಅತೀ ಅವಶ್ಯಕ. ಜೀವನ ವಿಮೆ, ಆರೋಗ್ಯ ವಿಮೆ, ಸ್ವತಃದ ಮನೆ, ಬ್ಯಾಂಕ ಎಫ್‌ಡಿ ಮತ್ತು ರಿಕರಿಂಗ್ ಖಾತೆಗಳು ಇರುವುದು ಈ ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಶ್ವೇತಾ ಹೇಳುವಳು,” ನನ್ನ ಕಡೆವಿಮೆ ಇದೆ, ಮತ್ತು ಬ್ಯಾಂಕ ಎಫ್‌ಡಿ ಇದೆ, ಅದರಂತೆ ಸಂಬಳದ ಮೂಲಕ ಫಂಡ್ ಕೂಡ ಉಳಿತಾಯ ಆಗುತ್ತದೆ, ಇನ್ನೂ ಯಾವ ಯಾವ ಉಳಿತಾಯದ ಮಾರ್ಗಗಳಿವೆ? ಎಂದು ಕೇಳಿದಾಗ. ನೇಹಾ ಹೇಳುವಳು “ಈಗ ಸದ್ಯಕ್ಕೆ ಶೇರು, ಮ್ಯೂಚುವಲ್ ಫಂಡ್ (MF), ಡಿಬೆಂಚರ್ಸ್, ಬಾಂಡ್ಸ್ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಲ್ಲಿ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಲಿದೆ, ಅದರಂತೆ ಎಸ್‌ಐಪಿ ಮಾಡುವುದರಕಡೆ ಜನರ ಗಮನ ಹೆಚ್ಚಿದೆ. ನಿನಗೆ ಈಗ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹಣವನ್ನು ಅಂದರೆ ನಿಯಮಿತ ಆವರ್ತಿ ಉಳಿತಾಯ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ (SIP - Systematic Investment Plan) ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಕೂಡಿ ಇಡಲು ಬರುವುದು.”



ಪಿಗಿ ಬ್ಯಾಂಕ್ ಉಳಿತಾಯ

ಇಂತಹ ಸಂಭಾಷಣೆಗಳನ್ನು, ಆಗಾಗ ಕೇಳುತ್ತಿರುತ್ತೇವೆ, ಈ ಕುರಿತು ಸರಿಯಾದ ಮಾಹಿತಿ ಇರುವುದು ಅಗತ್ಯ, ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಹಿತಕರ, ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಸುಖಕರ ಗೊಳಿಸುವ ವಾಗುವಂತೆ ಇರಬೇಕು ಇದನ್ನು ಅರಿತುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ನಾವು ಶೇರು, ಮ್ಯೂಚುವಲ್ ಫಂಡ್ SIP ಈ ಬಗ್ಗೆ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ.



ಶೇಅರುಗಳು (Shares)

ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಸ್ವಂತದ ಅಂಗಡಿ ಇರುವುದು ಅಂದರೆ ಅಂಗಡಿಯ ಮಾಲಕ ಪ್ರೊಪ್ರಾಯಟರ ಇರುವುದು. ಎರಡು-ನಾಲ್ಕು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು ಒಂದುಗೂಡಿ ವ್ಯಾಪಾರ ಮಾಡುವುದು ಅಂದರೆ ಪಾಲುದಾರಿಕೆ, (ಪಾರ್ಟನರ್‌ಶಿಪ್), ಇದರ ಸಾಲುವಾಗಿ ಬಂಡವಾಳ ಕಡಿಮೆ ಬೇಕಾಗುವುದು. ಆದರೆ ಯಾವುದೇ ಕಂಪನಿ, ಉದ್ಯೋಗ ಅಥವಾ ಕಾರಖಾನೆ ಆರಂಭ ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ ದೊಡ್ಡ ಬಂಡವಾಳದ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಬಂಡವಾಳ ಸಮಾಜದ ಕಡೆಯಿಂದ ಬಂಡವಾಳ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುವುದು.

ಕಾರಖಾನೆ ಅಥವಾ ಕಂಪನಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಲು ಇಚ್ಛೆಯಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಬರುತ್ತಾರೆ. ಮತ್ತು ಸಮಾಜದಿಂದ ಬಂಡವಾಳ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕಂಪನಿ ಸ್ಥಾಪಿಸುತ್ತಾರೆ. ಭಾರತೀಯ ಕಂಪನಿ ಕಾಯ್ದೆ 1956ರ ಅನುಸಾರ ಕಂಪನಿಯ ನೋಂದಣಿ ಆಗುವುದು ಕಂಪನಿ ಸ್ಥಾಪನೆ ಮಾಡುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಕಂಪನಿಯ **ಪ್ರವರ್ತಕರು (ಪ್ರಮೋಟರ್ಸ್)** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಮತ್ತು ಕಂಪನಿ ಎಂದರೆ ಮರ್ಯಾದಿತ (**ಪಬ್ಲಿಕ್ ಲಿಮಿಟೆಡ್**) ಕಂಪನಿ ಆಗಿರುವುದು.

ಕಂಪನಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ಹಣಕ್ಕೆ '**ಬಂಡವಾಳ**' ಎನ್ನುವರು. ಈ ಬಂಡವಾಳದ ಸಣ್ಣಸಣ್ಣ ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದ ಬೆಲೆಯು ₹ 1, ₹ 2, ₹ 5, ₹ 10 ಮತ್ತು ₹ 100 ಇತ್ಯಾದಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಕ್ಕೆ ಎನ್ನುವರು ಈ **ಶೇಅರನ್ನು** ಮಾರಿ ಕಂಪನಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಬಂಡವಾಳ ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಗುವುದು.

ಶೇಅರು (Share) : "ಕಂಪನಿಯ ಬಂಡವಾಳದ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಭಾಗವೆಂದರೆ ಷೇರು" ಶೇಅರ ಸರ್ಟಿಫಿಕೇಟ (share certificate)ದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಶೇಅರಿನ ಬೆಲೆ, ಶೇರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅನುಕ್ರಮಾಂಕ ಇತ್ಯಾದಿಯ ಮುದ್ರಣ ಮಾಡಿರುತ್ತಾರೆ.

ಭಾಗಿದಾರ ಅಥವಾ ಶೇರುದಾರ - (Share holder) : ಕಂಪನಿಯ ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ವ್ಯಕ್ತಿ ಆ ಕಂಪನಿಯ ಭಾಗಿದಾರ ಅಂದರೆ ಶೇಅರಧಾರಕ ನಾಗುವನು. ಭಾಗಿದಾರನು ತನ್ನ ಕಡೆ ಇರುವ ಶೇಅರುಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಆ ಕಂಪನಿಯ ಮಾಲಿಕನಿರುವನು.

ಸ್ಟಾಕ್ ಎಕ್ಸ್ಚೇಂಜ (Stock Exchange) : ಎಲ್ಲ ಶೇಅರುಗಳ ಮಾರುವ ಮತ್ತು ಕೊಳ್ಳುವ ವ್ಯವಹಾರ ನಡೆಯುವದೋ ಅದಕ್ಕೆ ಶೇಅರ್ ಬರ್ಯಾರ (ಸ್ಟಾಕ್ ಎಕ್ಸ್ಚೇಂಜ ಅಥವಾ ಸ್ಟಾಕ್ ಮಾರ್ಕೇಟ, ಅಥವಾ ಇಕ್ವಿಟಿ ಮಾರ್ಕೇಟ ಅಥವಾ ಶೇಅರ ಮಾರ್ಕೇಟ) ಎನ್ನುವರು. ಸಮಾಜದಿಂದ ಬಂಡವಾಳ ಪಡೆದುಕೊಂಡು ಆರಂಭಿಸಿದ ಅಂದರೆ, ಪಬ್ಲಿಕ್ ಲಿಮಿಟೆಡ್ ಕಂಪನಿ ಶೇಅರ ಬರ್ಯಾರದಲ್ಲಿ ನೋಂದಣಿಕೃತ (listed company) ಇರುವುದು ಅವಶ್ಯಕವಿದೆ.

ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ ಅಥವಾ ಮುಖ ಬೆಲೆ (Face Value - FV) : ಕಂಪನಿಯ ಶೇಅರು ಸರ್ಟಿಫಿಕೇಟಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಮುದ್ರಿತ ಬೆಲೆಗೆ ಆ ಶೇಅರಿನ ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ (FV) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ (Market Value - MV) : ಯಾವ ಕಂಪನಿಯು ಶೇಅರ ಬರ್ಯಾರದಲ್ಲಿಯ ಶೇರಿನ ಮಾರುವ-ಕೊಳ್ಳುವ ವ್ಯವಹಾರ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆ ಕಂಪನಿಗೆ ಆ ಶೇಅರಿನ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ (MV) ಎನ್ನುವರು.

ಕಂಪನಿ ಸ್ಥಿರವಾದ ಮೇಲೆ ಅದರ ಕೆಲಸ ಅಪೇಕ್ಷೆಗಿಂತ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಆದರೆ ಆ ಶೇಅರಿನ ಬೇಟಿಕೆ ಪೇಟಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವುದು. ಶೇಅರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಇರುವುದು. ಅಂದರೆ ಪೂರೈಕೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವದಿಲ್ಲ ಅದರಿಂದ ಆ ಕಂಪನಿಯ ಶೇಅರುಗಳ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವವು. ಇದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧ ಕಂಪನಿಯ ಕೆಲಸ ಕಡಿಮೆ ಆದರೆ ಶೇಅರುಗಳ ಬೆಲೆ ಕಡಿಮೆ ಆಗುವವು. ಈ ಏರಿಕೆ-ಇಳಿಕೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ▲, ▼ ಈ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಈ ಏರಿಕೆ-ಇಳಿಕೆ ಪರಿಣಾಮದಿಂದ ಪೇಟಿಯಲ್ಲಿಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆ ಆಗುವುದು.

ಶೇಅರು ಪೇಟಿಯಲ್ಲಿ ಶೇಅರುಗಳ ದರ ಪ್ರತಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುತ್ತಿರುತ್ತದೆ.

ಲಾಭಾಂಶ (Dividend) : ಕಂಪನಿಗೆ ಆರ್ಥಿಕ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಆದ ಲಾಭದ ಹಂಚಿಕೆ ಶೇಅರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅನುಸಾರ ಭಾಗಿದಾರನಿಗೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದು ಭಾಗಿದಾರಗಳಿಗೆ ದೊರೆಯುವ ಲಾಭದ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಲಾಭಾಂಶ ಎನ್ನುವರು.

ಕಂಪನಿಯ ಕೆಲಸ ಒಳ್ಳೆಯದಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಕಂಪನಿಯ ಆಸ್ತಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು ಅಂದರೆ ಶೇಅರುಗಳ ಮೇಲಿನ ಲಾಭಾಂಶ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಸಿಗುವುದು.

ಶೇರುದಾರನಿಗೆ ದೊರೆತ ಲಾಭಾಂಶದ ಮೇಲೆ ಆದಾಯಕರ ತುಂಬ ಬೇಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ.



ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ.

ಶೇರಿನ ಪೇಟಿಯ ದರ ಎಷ್ಟೇ ಹೆಚ್ಚು-ಕಡಿಮೆ ಆದರೆ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಗೆ ಘೋಷಿತ ಲಾಭಾಂಶ ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ಶೇಅರಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ (ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ) ಸಿಗುವುದು.

ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಯ ಸಲುವಾಗಿ:

ಮುಂಬಯಿಯಲ್ಲಿಯ ಮುಂಬಯಿ ಶೇರು ಬರ್ಯಾರ (ಬಾಂಬೆ ಸ್ಟಾಕ್ ಎಕ್ಸ್ಚೇಂಜ್ **BSE**) ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶೇರು ಬರ್ಯಾರ (ನ್ಯಾಶನಲ್ ಸ್ಟಾಕ್ ಎಕ್ಸ್ಚೇಂಜ್ **NSE**) ಇವು ಭಾರತದಲ್ಲಿಯ ಎರಡು ಮುಖ್ಯ ಶೇಅರ ಬರ್ಯಾರಗಳಿವೆ. ಮುಂಬಯಿ ಶೇಅರು ಬರ್ಯಾರ ಇದು ಏಶಿಯಾದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶೇಅರು ಬರ್ಯಾರ ಇದು ಭಾರತದಲ್ಲಿಯ ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಶೇಅರ ಬರ್ಯಾರ ಇದೆ.

ಶೇಅರು ಬರ್ಯಾರದಲ್ಲಿಯ ಏರಿಕೆ-ಇಳಿಕೆ ತಿಳಿಯುವ ಸಲುವಾಗಿ SENSEX (ಸೆನ್ಸೆಕ್ಸ್) ಮತ್ತು NIFTY (ನಿಫ್ಟಿ) ಹೀಗೆ ಎರಡು ಮುಖ್ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ (Index) ಇವೆ. SENSEX = **SENS**itive + ind**EX** ಈ ಎರಡು ಶಬ್ದಗಳಿಂದ ತಯಾರಾಗಿದೆ BSE ಯಿಂದ 1-1-1986 ರಲ್ಲಿ SENSEX ಕೊಡುವ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಭಾಗ-ಬಂಡವಾಳ ಇರುವ ನಾಮಾಂಕಿತ ಮತ್ತು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿತ ಹೀಗೆ 30 ಕಂಪನಿಗಳ ದರಗಳ ಏರಿಕೆ-ಇಳಿಕೆ SENSEX ನಿಶ್ಚಯಿಸುವುದು.

'ನಿಫ್ಟಿ' ಈ ಶಬ್ದ ಅದರ ಹೆಸರಿನಂತೆ ಎರಡು ಶಬ್ದಗಳಿಂದ ತಯಾರಾಗಿದೆ. **NIFTY = NSE + FIFTY**. ನಿಫ್ಟಿ ಇದು NSE ದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಉದ್ದಮ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವ 50 ಕಂಪನಿಗಳಿಂದ ನಿಶ್ಚಯವಾಗುವುದು.



ICT Tools or Links

SEBIದ ವೆಬ್‌ಸೈಟ್‌ಕ್ಕೆ ಭೆಟ್ಟಿ ಕೊಡಿರಿ ಅದರಂತೆ ಮುಂಬಯಿ ಶೇಅರ ಬರ್ಯಾರ, ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶೇಅರ ಬರ್ಯಾರ ಮತ್ತು ದೂರದರ್ಶನದ ಮೇಲಿನ ಚೆನಲ್ ಅಥವಾ ನೆಟ್ ಮೇಲಿನ ಶೇಅರು ಬಜಾರದ ಮಾಹಿತಿ ಕೊಡುವ ವಿಡಿಯೋ ನೋಡಿರಿ. ಮತ್ತು ಶೇಅರ ಬಜಾರ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ ಶೇಅರನಲ್ಲಿಯ ದರದ ಏರಿಕೆ-ಇಳಿಕೆ ದೂರದರ್ಶನದ ಮೇಲೆ ಸತತವಾಗಿ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿ ಮುಂಬಯಿ ಶೇಅರು ಬರ್ಯಾರದಲ್ಲಿಯ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶೇಅರು ಬರ್ಯಾರದ ದರ ತೋರಿಸುವವು ಶೇಅರುಗಳ ಬುಕ್‌ವ್ಯಾಲ್ಯೂ (Book Value) ಅಂದರೆ ಏನು ಅದರ ಮಾಹಿತಿ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಉದಾ. (2) ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ = 100 ರೂಪಾಯಿ ಅಧಿಮೂಲ್ಯ = 65 ರೂಪಾಯಿ ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಶೇರಿನ MV = ?

ಉತ್ತರ : ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ = ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ + ಅಧಿಮೂಲ್ಯ = 100 + 65 = 165 ರೂಪಾಯಿ

∴ ಶೇರಿನ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ 165 ಪ್ರತಿ ಶೇರಿಗೆ

ಉದಾ. (3) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ಯೋಗ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಶಬ್ದ ಬರೆದು ಪೂರ್ಣಮಾಡಿರಿ.

ಉದಾ ಕ್ರ	ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ	ಮೂಲ್ಯ ಪ್ರಕಾರ	ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ
(i)	₹ 10	ಅಧಿಮೂಲ್ಯ ₹ 7	
(ii)	₹ 25		₹ 16
(iii)		ಸಮಮೂಲ್ಯ	₹ 5

ಉತ್ತರ : (i) 10 + 7 = 17 ರೂಪಾಯಿ, (ii) ಅಮೂಲ್ಯ 25 - 16 = 9 ರೂಪಾಯಿ (iii) 5 ರೂಪಾಯಿ

ಉದಾ.(4) ನೀಲಭಾಯಿಯು ಹೂಡಿಕೆ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಶೇಅರಿನಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ ಹಾಗಾದರೆ ಅವರು ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಿದರು ?

ಕಂಪನಿ A : 350 ಶೇಅರುಗಳು ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ = 10 ರೂಪಾಯಿ ಪ್ರತಿ ಶೇಅರಿನ ಅಧಿಮೂಲ್ಯ = 7 ರೂಪಾಯಿ

ಕಂಪನಿ B : 2750 ಶೇಅರುಗಳು ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ = 5 ರೂಪಾಯಿ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ = 4 ರೂಪಾಯಿ

ಕಂಪನಿ C : 50 ಶೇಅರುಗಳು ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ = 100 ರೂಪಾಯಿ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ = 150 ರೂಪಾಯಿ

ಉತ್ತರ : ಕಂಪನಿ A : ಅಧಿಮೂಲ್ಯ = 7 ರೂಪಾಯಿ ಆದ್ದರಿಂದ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ = ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ + ಅಧಿಮೂಲ್ಯ
= 10 + 7 = 17 ರೂ.

∴ ಕಂಪನಿ A ಯಲ್ಲಿ ಹೂಡಿಕೆ = ಶೇಅರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ × ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ = 350 × 17 = 5950 ರೂಪಾಯಿ

ಕಂಪನಿ B : ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ = 5 ರೂಪಾಯಿ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ = 4 ರೂಪಾಯಿ

∴ ಕಂಪನಿ B ಯಲ್ಲಿ ಹೂಡಿಕೆ = ಶೇಅರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ × , ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ = 2750 × 4 = 11,000 ರೂಪಾಯಿ

ಕಂಪನಿ C : ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ = 100 ರೂಪಾಯಿ ಪೇಟೆಯ ದರ = 150 ರೂಪಾಯಿ

∴ ಕಂಪನಿ C ಯಲ್ಲಿ ಹೂಡಿಕೆ = ಶೇಅರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ × , ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ = 50 × 150 = 7500 ರೂಪಾಯಿ

ಉತ್ತರ : ನೀಲಭಾಯಿಯು ಮೂರು ಕಂಪನಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಒಟ್ಟು = 5950 + 11000 + 7500
= 24,450 ರೂಪಾಯಿ

ಉದಾ. (5) ಸ್ವೀತಾಳು 12,000 ರೂ. ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಿ 10 ರೂಪಾಯಿ ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆಯ ಶೇಅರುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು

ಸಲುವಾಗಿ 2 ರೂಪಾಯಿ ಅಧಿಮೂಲ್ಯದಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಳು ಹಾಗಾದರೆ ಅವಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಶೇರುಗಳು

ದೊರೆಯುವವು. ಇದನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ = 10 ರೂಪಾಯಿ ಅಧಿಮೂಲ್ಯ = 2 ರೂಪಾಯಿ

∴ ಪೇಟೆಯ ದರ = ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ + = + =

∴ ಶೇಅರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $\frac{\text{ಒಟ್ಟು ಹೂಡಿಕೆ}}{\text{ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ}} = \frac{12000}{\text{}} = \text{}$ ಶೇರುಗಳು

ಉತ್ತರ : ಸ್ವೀತಾಳಿಗೆ ಶೇಅರುಗಳು ದೊರೆಯುವವು.

ಉದಾ. (6) 10 ರೂಪಾಯಿ ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆಯ 50 ಶೇಅರುಗಳನ್ನು 25 ರೂಪಾಯಿ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಕೊಂಡುಕೊಂಡರು ಅದರ ಮೇಲೆ ಕಂಪನಿಯು 30% ಲಾಭಾಂಶ ಘೋಷಣೆ ಮಾಡಿದರೆ. (1) ಒಟ್ಟು ಹೂಡಿಕೆ (2) ದೊರೆತ ಲಾಭಾಂಶ (3) ಹೂಡಿಕೆಯ ಮೇಲೆ ಮರಳಿ ಸಿಗುವದರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಶೇಅರಿನ ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ = 10 ರೂ. ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ = 25 ರೂಪಾಯಿ ಶೇಅರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 50.

∴ ಒಟ್ಟು ಹೂಡಿಕೆ $25 \times 50 = 1250$ ರೂಪಾಯಿ

ಲಾಭಾಂಶ = $10 \times \frac{30}{100} = 3$ ರೂ. ಪ್ರತಿ ಶೇಅರಿಗೆ

∴ 50 ಶೇಅರುಗಳ ಒಟ್ಟು ಲಾಭಾಂಶ = $50 \times 3 = 150$ ರೂಪಾಯಿ

∴ ಮರಳಿ ಸಿಗುವ ದರ = $\frac{\text{ದೊರೆತ ಒಟ್ಟು ಲಾಭಾಂಶ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಹೂಡಿಕೆ}} \times 100$
 $= \frac{150}{1250} \times 100 = 12\%$

ಉತ್ತರ : (1) ಒಟ್ಟು ಹೂಡಿಕೆ 1250 ರೂ. (2) 50 ಶೇಅರುಗಳ ಮೇಲೆ ದೊರೆತ ಲಾಭಾಂಶ 150 ರೂ.
 (3) ಮರಳಿ ಸಿಗುವ ದರ 12%.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.3

1. ಮುಂದಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಯೋಗ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ಉದಾಕ್ರ	ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ	ಮೂಲ್ಯ ಪ್ರಕಾರ	ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ
(1)	100 ರೂ.	ಸಮಮೂಲ್ಯ	...
(2)	...	ಅಧಿಮೂಲ್ಯ = 500 ರೂ.	575 ರೂ.
(3)	10 ರೂ.	...	5 ರೂ.

2. ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ 80 ರೂಪಾಯಿ ಇದ್ದಾಗ ಆಗ ಅಮೋಲನು 100 ರೂಪಾಯಿ ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆಯ 50 ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು. ಆ ವರ್ಷ ಕಂಪನಿಯು 20% ಲಾಭಾಂಶ ಕೊಟ್ಟಿತು. ಹಾಗಾದರೆ, ಹೂಡಿಕೆಯ ಮೇಲೆ ದೊರೆತ ಮರಳಿ ಸಿಗುವ ದರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಜೋಸೇಫ್ ಇವರು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಶೇಅರುಗಳಲ್ಲಿ ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಿದರು, ಹಾಗಾದರೆ, ಅವರು ಮಾಡಿದ ಒಟ್ಟು ಹೂಡಿಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಕಂಪನಿ A : ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ 2 ರೂಪಾಯಿ ಮತ್ತು ಅಧಿಮೂಲ್ಯ 18 ರೂಪಾಯಿ ಇರುವ 200 ಶೇಅರುಗಳು.

ಕಂಪನಿ B : ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ 500 ರೂಪಾಯಿ ಇರುವ 45 ಶೇಅರುಗಳು.

ಕಂಪನಿ C : ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ 10,540 ರೂಪಾಯಿ ಇರುವ 1 ಶೇಅರು.

4. ಶ್ರೀಮತಿ ದೇಶಪಾಂಡೆ ಇವರು 20,000 ರೂ. ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಿ 5 ರೂಪಾಯಿ ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆಯ ಶೇಅರುಗಳು 20 ರೂಪಾಯಿ ಅಧಿಮೂಲ್ಯ ಕೊಟ್ಟು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಶೇಅರುಗಳು ದೊರೆಯುವವು ?

5. ಕಂಪನಿಯು 7% ಲಾಭಾಂಶ ಜಾಹೀರ ಮಾಡಿದರೆ, ಶ್ರೀ ಶಾಂತಿಲಾಲ ಇವರು 100 ರೂಪಾಯಿ ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆಯ 150 ಶೇಅರುಗಳನ್ನು 120 ರೂಪಾಯಿ ಈ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಖರೀದಿಸಿದರು ಹೂಡಿಕೆಯ ಮೇಲಿನ ಮರಳಿ ಸಿಗುವ ದರ ಎಷ್ಟು?

6. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಹೂಡಿಕೆ-ಲಾಭದಾಯಕ ಇದೆ ? ಎರಡೂ ಕಂಪನಿಗಳ ಶೇಅರುಗಳ ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ ಸಮಾನ ಇದೆ. ಕಂಪನಿ Aದ ಸಲುವಾಗಿ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ 80 ರೂ. ಇದ್ದು ಲಾಭಾಂಶ 16% ಇದೆ. ಮತ್ತು ಕಂಪನಿ Bಯ ಸಲುವಾಗಿ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ 120 ರೂ. ಇದ್ದು ಲಾಭಾಂಶ 20% ಇದೆ



ICT Tools or Links

ಯಾವುದೇ ಐದು ಕಂಪನಿಗಳ ಶೇಅರುಗಳ ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ ಇಂಟರ್‌ನೆಟ್‌ನಿಂದ ಅಥವಾ ಬೇರೆ ಮೂಲಗಳಿಂದ ಶೋಧಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಜೋಡಿಸ್ತಂಭಾಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ತುಲನೆ ಮಾಡಿರಿ (ಶಕ್ಯವಿದ್ದರೆ ▲, ▼ ಹೇಗೆ ಎರಡೂ ಪ್ರಕಾರದ ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ)



ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಶೇರಿನ ಮಾರುವ-ಕೊಳ್ಳುವ ವ್ಯವಹಾರದ ಮೇಲೆ ದಲ್ಲಾಳಿ ಮತ್ತು ಕರ (Brokerage and taxes on share trading)

ದಲಾಲಿ (Brokerage) : ಶೇಅರಿನ ಕೊಳ್ಳುವ-ಮಾರುವದು ಖಾಜಗಿ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಲು ಬರುವದಿಲ್ಲ. ಅದನ್ನು ಶೇರ ಬರ್ಯಾರದಲ್ಲಿಯ ಅಧಿಕೃತ ವ್ಯಕ್ತಿ ಅಥವಾ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಕಡೆಯಿಂದ ಮಾಡಲಾಗುವದು. ಅವರಿಗೆ 'ಶೇಅರ ದಲ್ಲಾಳಿ' (Share Broker) ಎನ್ನುವರು ಶೇಅರಿನ ಮಾರುವ ಮತ್ತು ಕೊಳ್ಳುವ ವ್ಯವಹಾರ ಮಾಡುವಾಗ ಅವನಿಗೆ ನಿಶ್ಚಿತ ದರದಲ್ಲಿ ಮಾರುವವನು ಮತ್ತು ಕೊಳ್ಳುವವನು ಹಣ ಕೊಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ದಲಾಲನಿಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಹಣಕ್ಕೆ 'ದಲಾಲಿ (ಬ್ರೋಕರ್)' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾ. (1) 100 ರೂ. ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆಯ ಶೇಅರಿನ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ 150 ರೂ. ಇದೆ. ದಲ್ಲಾಳಿಯ ದರ 0.5%

ಇದೆ. ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಹೀಗೆ 100 ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವಾಗ ಎಷ್ಟು ರಕಮು ಕೊಡಬೇಕಾಗುವದು? 100 ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಮಾರಿದರೆ ಎಷ್ಟು ರಕಮು ದೊರೆಯುವದು ?

ಈ ಶೇರು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವಾಗ -

$$\begin{aligned} \text{ಒಂದು ಶೇರಿನ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ} &= \text{ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ} + \text{ದಲಾಲಿ} \\ &= 150 \text{ ರೂ.} + 150 \text{ ರೂ.ಗಳ } 0.5\% = 150 + 0.75 \end{aligned}$$

∴ ಒಂದು ಶೇಅರಿನ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ = 150.75 ರೂ.ಗಳು.

ಹೀಗೆ 100 ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡಾಗ ಒಟ್ಟು ಹೂಡಿಕೆ- $100 \times 150.75 = 15075$ ರೂ.ಗಳು ಇದರಲ್ಲಿ 15000 ರೂ.ಗಳ ಶೇಅರುಗಳು + 75 ರೂ.ಗಳ ದಲಾಲಿ ಇದೆ.

ಈ ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಮಾರುವಾಗ -

$$\begin{aligned} \text{ಒಂದು ಶೇಅರಿನ ಮಾರುವ ಬೆಲೆ} &= \text{ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ} - \text{ದಲಾಲಿ} \\ &= 150 \text{ ರೂ.ಗಳ} - 150 \text{ ರೂ.ಗಳ } 0.5\% = 150 - 0.75 \end{aligned}$$

∴ ಒಂದು ಶೇಅರಿನ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = 149.25 ರೂ.

∴ 100 ಶೇಅರುಗಳ ಮಾರಿದ ಬೆಲೆ = $149.25 \times 100 = 14925$ ರೂ.

∴ 100 ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಮಾರಿದರೆ 14925 ರೂ. ದೊರೆಯುವವು.



ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿ.

- ದಲಾಲಿ ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಆಕರಣೆ ಮಾಡಲಾಗುವದು.
- ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವ-ಮಾರುವ ವಿವರಣೆಯಲ್ಲಿ ದಲಾಲಿ ಹಿಡಿದು ಒಂದು ಶೇರಿನ ಬೆಲೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಲಾಗುವದು.

ಉಪಕ್ರಮ I : ನಿಮ್ಮ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯ ಶೇಅರಿನ ದಲಾಲಿ ಸೇವೆ ಕೊಡುವ ವ್ಯಕ್ತಿ ಅಥವಾ ಸಂಸ್ಥೆಗಳ ಮಾಹಿತಿ ದೊರಕಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅವರು ಆಕರಿಸುವ ದಲಾಲಿಗಳ ದರಗಳ ಮಾಹಿತಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ ಹಾಗೂ ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಿರಿ.

ಉಪಕ್ರಮ II : ಡಿ-ಮ್ಯಾಟ್ರಿ ಖಾತೆ (Demat A/c) ಮತ್ತು ಟ್ರೇಡಿಂಗ್ ಖಾತೆಯ ವಿವರಣೆ ಪತ್ರ (ಸ್ಟೇಟಮೆಂಟ್) ದೊರಕಿಸಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಯಾವ ಬಾಬಿಗಳ ಸಮಾವೇಶ ಇರುವದು ಅದರ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ನೆಟ್ ಮೇಲಿಂದ/ದಲಾಲಿಯನ್ನು ಭೇಟಿ ಮಾಡಿ/ಹಿರಿಯರಿಂದ ಪಡೆಯಿರಿ. ಗೆಳೆಯರ ಜೊತೆ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡಿರಿ.

ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಯ ಸಲುವಾಗಿ : ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಶೇಅರ ದಲಾಲ ಸೆಬಿ (SEBI - Securities and Exchange Board of India) ಕಾಯ್ದೆ 1992 ಅಂತರ್ಗತ ನೋಂದಣಿ ಕೃತ ಇರುವದು ಹಾಗೂ ಅದರ ಮೇಲೆ ಸೆಬಿಯ ನಿಯಂತ್ರಣ ಇರುವದು.

ಶೇರುಗಳು ಬಾಂಡುಗಳು ಮ್ಯುಚುವಲ್ ಫಂಡ ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ನೋಂದಣಿ ಇಡಲು ಡಿ-ಮ್ಯಾಟ್ರಿ ಖಾತೆಹಾಗೂ ಮಾರುವ-ಕೊಳ್ಳುವ ಸಲುವಾಗಿ ಟ್ರೇಡಿಂಗ್ ಖಾತೆ (Dematerialized Account, Trading Account) ತೆಗೆಯುವದು ಅವಶ್ಯಕ ಇದೆ. ಈ ಖಾತೆ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಶೇಅರು ದಲಾಲಿನ ಕಡೆಗೆ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವದು. DP ಎಂದರೆ Depository Participants ಎನ್ನುವರು. ಈ DPs NSDL ಮತ್ತು CDSL ಈ ಎರಡು Depositories ಗಳ ಆಧೀನದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಡಿ-ಮ್ಯಾಟ್ರಿ ಖಾತೆಯಲ್ಲಿ ಶೇರಿನ ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವ-ಮಾರುವ ಲೆಕ್ಕ ಇಡಲಾಗುವದು. ಇದು ಬ್ಯಾಂಕಿನ ಖಾತೆಯ ಹಾಗೆ ಇರುವದು. ಮಾರಿದ ಶೇರುಗಳ ಖರ್ಚನ್ನು ಬದಿಗೆ (Debit) ನೋಂದಣಿ ಮಾಡುವರು. ಖರೀದಿ ಮಾಡಿದ ಶೇಅರುಗಳು ಜಮಾದ ಬದಿಗೆ (Credit) ನೋಂದಣಿ ಮಾಡುವರು ಅದರ ವಿವರಣೆ ಪತ್ರ ಬೇಡಿಕೆ ಮಾಡಿದರೆ ಸಿಗುವದು ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ನಿಶ್ಚಿತ ಶುಲ್ಕ ತುಂಬ ಬೇಕಾಗುವದು ಆ ಖಾತೆಯಲ್ಲಿ ನಿಮ್ಮ ಶೇರುಗಳು ಇಲೆಕ್ಟ್ರಾನಿಕ್ ಫಾರ್ಮದಲ್ಲಿ ಜಮಾ ಇರುವವು. ಈ ಎರಡೂ ಖಾತೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿಮ್ಮ ಬ್ಯಾಂಕಿನ ಸೇವಿಂಗ್ ಖಾತೆ ಜೋಡಿಸ ಬೇಕಾಗುವದು. ಶೇಅರಿನ ಖರೀದಿ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಬೇಕಾಗುವ ಹಣ ಅವ್ಯಕತೆಗೆ ಅನುಸಾರ ಟ್ರೇಡಿಂಗ್ ಖಾತೆಯಲ್ಲಿ ಅದರಲ್ಲಿಂದ ವರ್ಗ ಮಾಡಲು ಬರುವದು. ಅದರಂತೆ, ಮಾರಾಟದ ನಂತರ ದೊರೆತ ಹಣ ಅದರಲ್ಲಿ ಜಮಾ ಆಗುವದು. ಶೇರು ದಲಾಲಿ ಮತ್ತು ಬ್ಯಾಂಕುಗಳು ಈ ಎಲ್ಲ ಸಂಗತಿಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಇಚ್ಛಿತ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ.



ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ದಲಾಲಿಯ ಮೇಲೆ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಕರ (GST on brokerage services)

ಶೇಅರು ದಲಾಲನು ಅವನ ಖಾತೆದಾರನ ವತಿಯಿಂದ ಶೇರುಗಳು ಖರೀದಿ-ವಿಕ್ರ ಮಾಡಿಕೊಡುವ ಸೇವೆಯನ್ನು ಪೂರೈಸುತ್ತಾನೆ. ದಲಾಲಿ ಸೇವೆಯ ಮೇಲಿನ ಕರದ ದರ 18% ಇದೆ. ಅದರ SAC ಕ್ರಮಾಂಕ ಶೋಧಿಸಿರಿ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ :- ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಕರ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತ ಗ್ರಾಹಕನ ಸುರಕ್ಷಿತೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಶೇಅರುಗಳ ಕೊಳ್ಳುವ-ಮಾರುವ ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಅಲ್ಪದರದ ಕರಗಳಿವೆ ಉದಾ. ಸೆಕ್ಯೂರಿಟಿ ಟ್ರಾಂಜಕ್ಷನ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ (STT), SEBI ಶುಲ್ಕ, ಸ್ಟ್ಯಾಂಪ್ ಡ್ಯೂಟಿ, ಇತ್ಯಾದಿ ಅವುಗಳನ್ನು

ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ. ಕೇವಲ ಬ್ಯೂಕರೇಜದ ಮೇಲಿನ ವಸ್ತು ಸೇವೆಯ ಕರ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವುದೇ.

ಉದಾ. (2) ಉದಾಹರಣ 1ರ ಅನುಸಾರ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು 15075 ರೂಪಾಯಿ ಶೇಅರಿನ ಖರೀದಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟನು. ಈ ರಕಮಿನಲ್ಲಿ 75 ರೂಪಾಯಿ ದಲಾಲಿ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರಿಗೆ 75 ರೂಪಾಯಿ ಮೇಲೆ 18% ದರದಿಂದ ಎಷ್ಟು? ಕರ ಕೊಡಬೇಕಾಗುವುದು. ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದರ ವಿವರಣೆಯ ಪತ್ರ ತಯಾರಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : 18% ದರದಿಂದ 75 ರೂಪಾಯಿ ಮೇಲಿನ GST = $\frac{18}{100} \times 75$
= 13.50 ರೂಪಾಯಿ

ಶೇಅರಿನ ಖರೀದಿ ವಿವರಣೆಯ ಪತ್ರ (B ಎಂದರೆ ಖರೀದಿ ಮಾಡಿದರು)

ಶೇಅರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಶೇಅರಿನ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ	ಶೇಅರಿನ ದರ್ಶನ ಬೆಲೆ	ದಲಾಲಿ 0.5%	ದಲಾಲಿಯ ಮೇಲೆ 9% CGST	ದಲಾಲಿಯ ಮೇಲೆ 9% SGST	ಶೇಅರಿನ ಒಟ್ಟು ಖರೀದಿ ಬೆಲೆ
100(B)	150 ರೂ.	15000 ರೂ.ಗಳು	75 ರೂ.	6.75 ರೂ.	6.75 ರೂ.	15088.50 ರೂ.

ಉದಾ. (3) ಬಶೀರ ಖಾನ ಇವರು 40 ರೂ. ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯ 100 ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡರು. ದಲಾಲಿಯ ದರ 0.5% ಮತ್ತು ದಾಲಾಲಿಯ ಮೇಲೆ ವಸ್ತು ಸೇವೇಕರ ದರ 18% ಇದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಅವರಿಗೆ 100 ಶೇಅರುಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚು ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು ?

ಉತ್ತರ : 100 ಶೇಅರುಗಳ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಗೆ ಅನುಸಾರ ಬೆಲೆ $40 \times 100 = 4000$ ರೂ.

ಒಂದು ಶೇಅರ ಮೇಲಿನ ದಲಾಲಿ = $\frac{0.5}{100} \times 40 = 0.20$ ರೂ.

\therefore ಒಂದು ಶೇಅರಿನ ಖರೀದಿ ಬೆಲೆ = ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ + ದಲಾಲಿ
= $40 + 0.20 = 40.20$ ರೂ.ಗಳು

\therefore 100 ಶೇಅರುಗಳ ಖರೀದಿ ಬೆಲೆ = $40.20 \times 100 = 4020$ ರೂ.ಗಳು

100 ಶೇಅರುಗಳ ದಲಾಲಿ $0.20 \times 100 = 20$ ರೂ.

\therefore ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆಯಕರ = $\frac{18}{100} \times 20$
= 3.60 ರೂ.

ಉತ್ತರ : ಬಶೀರ ಖಾನ ಇವರು 100 ಶೇಅರುಗಳ ಖರೀದಿ ಸಲುವಾಗಿ ಬಂದ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು
= $4020 + 3.60 = 4023.60$ ರೂಪಾಯಿ

ಉದಾ. (4) ಪಂಕಜರಾವನು 1,25,295 ರೂ. ಹೂಡಿಕೆಮಾಡಿ 10 ರೂ. ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆಯ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ 125 ರೂ. ಇದ್ದಾಗ 100 ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು. ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ದಲಾಲಿಯ ದರ 0.2% ಮತ್ತು ದಲಾಲಿಯ ಮೇಲೆ 18% GST ಕೊಟ್ಟರೆ (1) ಎಷ್ಟು ಶೇಅರು ಕೊಂಡುಕೊಂಡರು ? (2) ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ದಲಾಲಿ ಕೊಟ್ಟರು (3) ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ವಸ್ತು ಸೇವೆಯ ಕರ ಎಷ್ಟು ಕೊಟ್ಟರು ?

ಉತ್ತರ : ಹೂಡಿಕೆ = 1,25,295 ರೂಪಾಯಿ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ = 125 ರೂ. ದಲಾಲಿ = 0.2%, ಕರದ ದರ = 18%.

ಒಂದು ಶೇಅರ ಮೇಲಿನ ದಲಾಲಿ = $125 \times \frac{0.2}{100} = 0.25$ ರೂಪಾಯಿ

ಒಂದು ಶೇಅರಿನ ದಲಾಲಿಯ ಕರ = 0.25 ರ 18% = 0.045 ರೂ.ಗಳು

∴ ಒಂದು ಶೇಅರಿನ ಖರೀದಿಯ ಬೆಲೆ = ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ + ದಲಾಲಿ + ಕರ

$$= 125 + 0.25 + 0.045 = 125.295 \text{ ರೂ.ಗಳು}$$

$$\therefore \text{ಶೇಅರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ} = \frac{125295}{125.295} = 1000$$

ಒಟ್ಟು ದಲಾಲಿ = ಪ್ರತಿ ಶೇರ ದಲಾಲಿ × ಶೇಅರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$$\therefore = 0.25 \times 1000 = 250 \text{ ರೂ.}$$

ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ಕರ = 1000 × 0.045 = 45 ರೂ.ಗಳು

ಉತ್ತರ (1) 1000 ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಂಡನು. (2) ದಲಾಲಿ 250 ರೂ. ಕೊಟ್ಟನು. (3) ದಲಾಲಿ ಮೇಲಿನ ಕರ 45 ರೂ. ಕೊಟ್ಟನು.

ಉದಾ. (5) ನಲಿನಿತಾಯಿಯು 10 ರೂ. ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆಯ ಶೇಅರಿನ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ 60 ರೂ. ಇದ್ದಾಗ 6024 ರೂ. ತೊಡಗಿಸಿದರು. ಅದರ ಮೇಲೆ 60% ಲಾಭಾಂಶ ದೊರೆತ ನಂತರ 50 ರೂ. ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಎಲ್ಲ ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಮಾರಿದರು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ 0.4% ದಲಾಲಿ ಕೊಟ್ಟರು. ಹಾಗಾದರೆ, ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಅವರಿಗೆ ಆದ ಲಾಭ ಅಥವಾ ಹಾನಿ ಎಷ್ಟು? ತೆಗೆಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿ.

ಉತ್ತರ : ಇಲ್ಲಿ ಕರದ ದರ ಇಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿದು, ಶೇಅರದ ಖರೀದಿ-ವಿಕ್ರಿಯ ವೆಳೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡುವ ಕರದ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿಲ್ಲ.

10 ರೂ. ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆಯ ಶೇಅರುಗಳನ್ನು 60 ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಂಡರು.

$$\text{ಪ್ರತಿ ಶೇಅರಿನ ದಲಾಲಿ} = \frac{0.4}{100} \times 60 = \boxed{} \text{ ರೂ.ಗಳು.}$$

$$\therefore \text{ಒಂದು ಶೇಅರಿನ ಬೆಲೆ} = 60 + 0.24 = \boxed{} \text{ ರೂ.ಗಳು.}$$

$$\therefore 6024 \text{ ರೂ.ಗಳಿಗೆ } \frac{6024}{60.24} = 100 \text{ ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡನು.}$$

10 ರೂ. ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆಯ ಶೇಅರುಗಳು 50 ರೂ. ಮಾರಾಟ ದರದಿಂದ ಮಾರಿದರು

$$\therefore \text{ಪ್ರತಿ ಶೇಅರಿನ ದಲಾಲಿ} = \frac{0.4}{100} \times 50 = 0.20 \text{ ರೂ.ಗಳು}$$

$$\therefore \text{ಒಂದು ಶೇಅರಿನ ವಿಕ್ರಿಯ ಬೆಲೆ} = 50 - 0.20 = \boxed{} \text{ ರೂ.ಗಳು}$$

$$\therefore 100 \text{ ಶೇಅರುಗಳ ಮಾರುವ (ವಿಕ್ರಿಯ) ಬೆಲೆ} = 100 \times 49.80 = \boxed{} \text{ ರೂ.ಗಳು}$$

ಲಾಭಾಂಶ 60% ದೊರೆಯಿತು.

$$\therefore 1 \text{ ಶೇಅರಿನ ಮೇಲೆ ಲಾಭಾಂಶ} = \frac{60}{100} \times 10 = 6 \text{ ರೂ.ಗಳು}$$

$$\therefore 100 \text{ ಶೇಅರುಗಳ ಮೇಲಿನ ಲಾಭಾಂಶ} = 6 \times 100 = \boxed{} \text{ ರೂ.ಗಳು}$$

$$\therefore \text{ಆದರೆ ನಲಿನಿತಾಯಿಯು ಶೇಅರ ವಿಕ್ರಿಯ ಮತ್ತು ಲಾಭಾಂಶದ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನ} = \boxed{} + \boxed{} = 5580 \text{ ರೂ.ಗಳು}$$

ನಲಿನಿತಾಯಿ ಮಾಡಿದ ಹೂಡಿಕೆ = 6024 ರೂ.ಗಳು ಇತ್ತು.

$$\therefore \text{ನಲಿನಿತಾಯಿಗೆ ಆದ ಹಾನಿ} = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{} \text{ ರೂ.ಗಳು}$$

ಉತ್ತರ : ನಲಿನಿತಾಯಿಗೆ ಈ ಬೊರುವ-ಕೊಳ್ಳುವ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ 444 ರೂ. ಹಾನಿಯಾಯಿತು.

ಉದಾಹರಣೆ 5 ರಲ್ಲಿ ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿಕೆ-ಮಾರಾಟ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಕರ 18% ದರದಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಹಾನಿ ಎಷ್ಟಾಗುವುದು ಅದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರ 451.92 ರೂಪಾಯಿ ಬರುವುದೇ ? ಅದನ್ನು ತಾಳೆಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.



ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಮ್ಯುಚುವಲ್ ಫಂಡ್ (Mutual Fund - MF)

ಶೇಅರು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವಾಗ ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ, ಕಂಪನಿಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪನೆ ಮಾಡುವಾಗ, ಆಸಕ್ತಿಯುಳ್ಳ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಬಂದು, ಸಮಾಜದ ಸಹಭಾಗ ಪಡೆದು ದೊಡ್ಡ ಬಂಡವಾಳ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಕಂಪನಿ ಸ್ಥಾಪಿಸುವರು. ಕಂಪನಿಯ ಕಾರ್ಯ ಉತ್ತಮಗೊಂಡರೆ ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಅದರ ಲಾಭವಾಗುವುದು, ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಅದರ ಲಾಭಾಂಶ ದೊರೆಯುವುದು. ಶೇಅರುಗಳ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚುವುದು. ಲಾಭ ಹೆಚ್ಚುವುದು. ಕಂಪನಿಯ ಬಂಡವಾಳ ಹೆಚ್ಚುವುದು, ಇದರೊಂದಿಗೆ ದೇಶದ ಪ್ರಗತಿ ಸಹಕರಿಸುವಂತಾಗುವುದು. ಇದೊಂದು ಸಮಾಜ ಶಾಸ್ತ್ರದ ತತ್ವವಿದೆ. 'Together we can progress', ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಾಣ್ಯಕ್ಕೆ ಎರಡು ಮುಖಗಳಿದ್ದಂತೆ ಕೆಲವೊಂದು ಸಲ ಶೇರುಗಳಿಂದ ಲಾಭವಾಗದೆ ಹಾನಿಯೂ ಆಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇರುವುದು. ಈ ಹಾನಿ ಹೇಗೆ ಕಡಿಮೆ ಗೊಳಿಸಲು ಬರುವುದು ? ಉಳಿತಾಯದ ಸಲುವಾಗಿ ಈ ಅಪಾಯ ತಪ್ಪಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆ? ಖಂಡಿತ ಹೌದು, ಅದಕ್ಕಾಗಿಯೇ ಈಗ ಹೆಚ್ಚಿನ ಜನ ಮ್ಯುಚುವಲ್ ಫಂಡಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ.

ಮ್ಯುಚುವಲ್ ಫಂಡ್ ಅಂದರೆ ಅನೇಕ ಉಳಿತಾಯದಾರರ ಹಣ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಮಾಡಿ ಇಟ್ಟಿರುವ ಮೊತ್ತ. ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಒಂದೇ ಶೇರಿನಲ್ಲಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದೇ, ಉಳಿತಾಯದ ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸುವರು. ಇದರಿಂದ ಹಾನಿಯಾಗುವ ಅಪಾಯ ತಪ್ಪುವುದು. ಅದರೊಂದಿಗೆ ಒಟ್ಟು ಲಾಭಾಂಶವನ್ನು ಉಳಿತಾಯದಾರರಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗುವುದು. ಮ್ಯುಚುವಲ್ ಫಂಡಿನಲ್ಲಿ ಉಳಿತಾಯ ಹೇಗೆ ಮಾಡುವುದು ? ಅದರ ಮರಳಿ ಹಣ ಹೇಗೆ ದೊರೆಯುವುದು ? ಎಷ್ಟು ಕಾಲಾವಧಿಯ ವರೆಗೆ ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡುವುದು? ಅದರ ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರಗಳೆ ಯಾವವು ? ಅದರ ಅನೇಕ ಪ್ರಕಾರದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸವಿಸ್ತಾರವಾದ ಉತ್ತರ ಸಲಹೆಗಾರರು ನೀಡುವರು.

Investments in Mutual Funds are subject to Market risks. Read all scheme related documents carefully. ಈ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ನೀವು ಅನೇಕಸಲ ಓದಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಕೇಳಿರಬಹುದು. ಇದರ ಅರ್ಥ ಸರಿಯಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿ. ಕಿಂಚಿತ ಪ್ರಸಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಮ್ಯುಚುವಲ್ ಫಂಡದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಉಳಿತಾಯದ ಮೇಲೆ ಲಾಭವಾಗದೆ ಹಾನಿ ಯಾಗುವುದು ಅದನ್ನು ಉಳಿತಾಯ ದಾರನಿಗೆ ಸಹಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಮ್ಯುಚುವಲ್ ಫಂಡ್ ಅಂದರೆ ತಜ್ಞ ವ್ಯವಸಾಯಿಕ ಜನರಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಿದ ಫಂಡ ಯೋಜನೆ. ಈ ತಜ್ಞ ಜನರಿಗೆ AMC ಅಂದರೆ ಅಸೆಟ್ ಮ್ಯಾನೇಜಮೆಂಟ್ ಕಂಪನಿ ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಅವರು ಮಾರ್ಕೆಟಿನ ಅಂದಾಜು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇಷ್ಟಪಡುವ ಜನರಿಂದ ಹಣವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ ಉದಾ. ಇಕ್ವಿಟಿ ಫಂಡ್, (ಶೇರ್ಸ್) ಡೆಬ್ಟ್ ಫಂಡ್, ಡಿಬೆಂಚರ್ಸ್, ಬಾಂಡ್ಸ್ ಅಥವಾ ಎರಡರ ಬ್ಯಾಲನ್ಸ್ ಫಂಡದಲ್ಲಿ ಉಳಿತಾಯದಾರರ ಸೂಚನೆಯಂತೆ ಹಣ ತೊಡಗಿಸುವರು.

ನಾವು ಶೇಅರು ಬಜಾರದಲ್ಲಿ ಹಣ ತೊಡಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಅರು ದೊರೆಯುವುದು, ಹಾಗೆಯೇ ಮ್ಯುಚುವಲ್ ಫಂಡ್ ಹಣ ತೊಡಗಿಸಿದಾಗ 'ಯುನಿಟ್ಸ್' ದೊರೆಯುವುದು.

ಪ್ರತಿ ಯುನಿಟ್ ಇದು ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ ಇರುವುದು. ಅದಕ್ಕೆ ಆ ಯುನಿಟಿನ ನಿಜ ಮೂಲ್ಯ (Net asset value - NAV)

ಒಂದು ಯುನಿಟಿನ ಒಟ್ಟು ನಿಜಮೂಲ್ಯ × ಯುನಿಟಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = ಮ್ಯುಚುವಲ್ ಫಂಡ್ ಕಂಪನಿಯ ಒಟ್ಟು ಉಳಿತಾಯದ ಮೂಲ್ಯ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಶೇಅರುಗಳ ಬೆಲೆಯ ಪ್ರಕಾರ ಮ್ಯೂಚುವಲ್ ಫಂಡಿನ ಯುನಿಟಿನ ನಿಜ ಮೂಲ್ಯ ಸತತ ಬದಲಾಗುತ್ತಿರುತ್ತದೆ. ಅಗತ್ಯವಿದ್ದಾಗ ಯುನಿಟ್ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು.

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯಕೃತ ಬ್ಯಾಂಕ ಇರಲಿ ಅಥವಾ ಪ್ರೌಢ ಸೇವೆ ಇರಲಿ ಇದರಲ್ಲಿಯ ಹೂಡಿಕೆ ಇದು ಹೆಚ್ಚು ಸುರಕ್ಷಿತ ಇರುವುದು. ಆದರೆ ಈ ಹೂಡಿಕೆಯಿಂದ ಹಿಂತಿರುಗಿ ದೊರೆಯುವ ಹಣದಿಂದ ಬೆಲೆ ಏಕರಿಕೆಯ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಎದುರಿಸಲು ಅಸಮರ್ಥವಾರುವುದು. ಯೋಗ್ಯ ರೀತಿಯಿಂದ ಮಾಡಿದ ಹಣದ ಹೂಡಿಕೆಯು ಹೆಚ್ಚಿನ ಹಣ ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಈ ಸಂಗತಿ ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟು ಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಬೇಕಾಗುವುದು ಹಣದ ನಿಯೋಜನೆ ಅಂದರೆ ಅರ್ಥ ನಿಯೋಜನೆ (Financial Planning)

ಸರಾಸರಿ ವಿಚಾರಮಾಡಲಾಗಿ ಹೂಡಿಕೆಯ ಯೋಗ್ಯ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯ ನಿರ್ಣಯ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಮಹತ್ವದ್ದಾಗಿದೆ ಅದರ ನಿರಂತರ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದು ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ನಿಯಮಿತ ಆವರ್ತಿ ಹಣ ಹೂಡಿಕೆ ಯೋಜನೆ (SIP –Systematic Investment Plan)

ಒಂದು ವೇಳೆ ನಮಗೆ ಮ್ಯೂಚುವಲ್ ಫಂಡಿನಲ್ಲಿ ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಮೊತ್ತದ ಹಣ ಹೂಡಿಕೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಆಗ ಸಣ್ಣ ಕಂತುಗಳಲ್ಲಿ ಹಣ ಹೂಡಿಕೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಕನಿಷ್ಠ 500 ರೂ. ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿನಂತೆ ಮ್ಯೂಚುವಲ್ ಫಂಡಿನಲ್ಲಿ ಹಣ ತೊಡಗಿಸಲು ಬರುವುದು. ಈ ಯೋಜನೆಯಿಂದ ಹಣ ಉಳಿತಾಯದ ಶಿಸ್ತು ಉಂಟಾಗುವುದು ಇದರಿಂದ ಭವಿಷ್ಯದ ಆರ್ಥಿಕ ಕಾಲಾವಧಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಲಾಭದಾಯಕ ವಾಗುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಶೇರುಬಜಾರಿನಲ್ಲಿಯ ಏರು-ಇಳಿತ. ಈ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿಯ ಹಣ ಹೂಡಿಕೆಯ ಪರಿಣಾಮ ಕಡಿಮೆ ಆಗುವುದು. ಕಡಿಮೆ ಎಂದರೆ 3 ರಿಂದ 5 ವರ್ಷಗಳು ಶಕ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ 10-15 ವರ್ಷದ ಸಲುವಾಗಿ ಈ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಹಣ ಹೂಡಿಕೆ ಉತ್ತಮವಾಗಿರುವುದು.

ಮ್ಯೂಚುವಲ್ ಫಂಡದ ಲಾಭಗಳು

- ಅನುಭವಿ, ತಜ್ಞ ಫಂಡ ಮ್ಯಾನೇಜರ್ಸ್
- ಪಾರದರ್ಶಕತೆ-ಹಣ ಹೂಡಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸುರಕ್ಷಿತತೆ
- ಮರ್ಯಾದಿತವಾದ- ಹೊಣೆ (ರಿಸ್ಕ)
- ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಫಂಡಗಳಲ್ಲಿ (ELSS) ದಲ್ಲಿಯ ಹಣ ಹೂಡಿಕೆಯ ಮೇಲೆಕರದ ಕಲಮು 80Cಯ ರಂತೆ ಸವಲತ್ತು ದೊರೆಯುವುದು.
- ಹೂಡಿಕೆಯ ವೈವಿಧ್ಯತೆ (diversifications of funds)
- ಸುಲಭವಾಗಿ ಹಣಕ್ಕೆ ಮಾರ್ಪಡಿಸಲಾಗುವಿಕೆ ಬೇಕಾದಾಗ ಮಾರುವ ಅವಕಾಶ
- ಅಲ್ಪ ಮತ್ತು ದೀರ್ಘ ಅವಧಿಯ ಲಾಭ ದೊರೆಯುವುದು.

ಛಛಛ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆ ಛಛಛ

ಉದಾ. (1) ಮ್ಯೂಚುವಲ್ ಫಂಡ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿಯ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ ರೂಪಾಯಿ 200 ಕೋಟಿ ಇದ್ದು ಕಂಪನಿಯು 8 ಕೋಟಿ ಯುನಿಟ ಮಾಡಿದರೆ, ಒಂದು ಯುನಿಟಿನ ಒಟ್ಟು ನಿಜಮೂಲ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಒಂದು ಯುನಿಟಿನ ಒಟ್ಟು ನಿಜ ಮೂಲ್ಯ = 200 ಕೋಟಿ ರೂಪಾಯಿ / 8 ಕೋಟಿ ಯುನಿಟ್ಸ್ = 25 ರೂಪಾಯಿ ಪ್ರತಿ ಯುನಿಟ.

ಉದಾ. (2) ಉದಾ. 1 ರಲ್ಲಿಯ ಕಂಪನಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು 10,000 ರೂಪಾಯಿ ಹಣ ಹೂಡಿದರೆ ನಿಮಗೆ ಎಷ್ಟು ಯುನಿಟ್ಸ್ ದೊರೆಯುವುದು.

ಉತ್ತರ : ಯುನಿಟಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = ಮಾಡಿದ ಹಣ ಹೂಡಿಕೆ / ಒಂದು ಯುನಿಟಿನ ಒಟ್ಟು ನಿಜಮೂಲ್ಯ = 10,000/25 = 400 ಯುನಿಟ್ಸ್ ದೊರೆಯುವವು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.4

1. ಒಂದು ಶೇಅರಿನ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ 200 ರೂ. ಇದೆ. ಅದನ್ನು ಖರೀದಿಸುವಾಗ 0.3% ದಲಾಲಿಯನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಯಿತು, ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಶೇಅರಿನ ಕೊಂಡು ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?
2. ಒಂದು ಶೇಅರಿನ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ 1000 ರೂಪಾಯಿ ಇದ್ದಾಗ ಶೇರನ್ನು ಮಾರಲಾಯಿತು, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲೆ 0.1% ದಲಾಲಿ ಕೊಡಲಾಯಿತು ಹಾಗಾದರೆ ಮಾರಾಟದ ನಂಥರ ದೊರೆಯುವ ಹಣ ಎಷ್ಟು ?
3. ಕೆಳಗಿನ ಶೇರುಗಳ ಖರೀದಿಯ ವಿತರಣೆ ತಕ್ಷೆಯ ಬಿಟ್ಟು ಸ್ಥಳ ತುಂಬಿ (B - ಕೊಂಡು ಕೊಳುವಿಕೆ S - ಮಾರಾಟ ಮಾರಲಾಯಿತು)

ಶೇಅರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಶೇಅರುಗಳ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ	ಶೇಅರಿನ ಬೆಲೆ	ದಲಾಲು ದರ 0.2%	ದಲಾಲು ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರದ ಕರ CGST 9%	ದಲಾಲು ಮೇಲೆ ರಾಜ್ಯದ ಕರ SGST 9%	ಶೇಅರು ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ
100 B	45 ರೂ.					
75 S	200 ರೂ.					

4. ಶ್ರೀಮತಿ ದೇಸಾಯಿ ಇವರು 100 ರೂಪಾಯಿ ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆಯ ಶೇಅರ್ಸ ಮಾರಾಟ ದರ 50 ರೂಪಾಯಿ ಇದ್ದಾಗ ಮಾರಿದರು ಆವಾಗ ಅವರಿಗೆ 4988.20 ರೂ. ದೊರೆತವು. ದಲಾಲಿಯ ದರ 0.2% ಮತ್ತು ದಲಾಲಿಯ ಮೇಲಿನ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ದರ 18% ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರು ಎಷ್ಟು ಶೇಅರ್ಸಗಳನ್ನು ಮಾರಿದರು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಮಿಸ್ಟರ್ ಡಿಸೋಜಾ ಇವರು 50 ರೂಪಾಯಿ ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆಯ 200 ಶೇಅರ್ಸಗಳನ್ನು 100 ರೂಪಾಯಿ ಅಧಿಮೂಲ್ಯದ ಖರೀದಿಸಿದರು. ಅದರ ಮೇಲೆ ಕಂಪನಿಯು 50% ಲಾಭಾಂಶ ಕೊಟ್ಟಿತು. ಲಾಭಾಂಶ ಸಿಕ್ಕಿದ ಮೇಲೆ ಅದರಲ್ಲಿಯ 100 ಶೇಅರ್ಸ 10 ರೂಪಾಯಿ ಅವಮೂಲ್ಯದಿಂದ ಮಾರಿದರು. ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಶೇಅರ್ಸಗಳು 75 ರೂ. ಅಧಿಮೂಲ್ಯದಿಂದ ಮಾರಿದರು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ 20 ರೂಪಾಯಿ ದಲಾಲಿ ಕೊಟ್ಟರೆ ಅವರಿಗೆ ಆ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಲಾಭ ಅಥವಾ ಹಾನಿ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಆಯಿತು ?

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 4 A

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉತ್ತರಗಳಲ್ಲಿ ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ.
 - (1) ಜೀವನಾವಶ್ಯಕ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲೆ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವಾ ಕರ ಇರುವುದು.
(A) 5% (B) 12% (C) 0% (D) 18%
 - (2) ಒಂದೇ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಾಪಾರ ಕೇಂದ್ರ ಸರ್ಕಾರದಿಂದ ಆಕರಣೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದು.
(A) IGST (B) CGST (C) SGST (D) UTGST
 - (3) ನಮ್ಮ ದೇಶದ ಈ ದಿನಾಂಕದಿಂದ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವಾ ಕರ ಪ್ರಣಾಲಿಯು ಜಾರಿಗೆ ಬಂದಿತು.
(A) 31 ಮಾರ್ಚ್ 2017 (B) 1 ಎಪ್ರಿಲ್ 2017
(C) 1 ಜನವರಿ 2017 (D) 1 ಜುಲೈ 2017
 - (4) ಸ್ಟೀಲ್ ಪಾತ್ರೆಯ ಮೇಲಿನ ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವಾ ಕರದ ದರ 18% ಇದೆ, ಹಾಗಾದರೆ ಆ ರಾಜ್ಯದ ವಸ್ತು ಸೇವೆ ಕರದ ದರ ಆಕರಿಸಲಾಗುವುದು.
(A) 18% (B) 9% (C) 36% (D) 0.9%
 - (5) GSTIN ದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಅಂಕಾಕ್ಷರಗಳು ಇರುವವು.
(A) 15 (B) 10 (C) 16 (D) 9

(6) ಯಾವಾಗ ಒಂದು ನೋಂದಣೀಕೃತ ವ್ಯಾಪಾರಿ ಇನ್ನೊಂದು ನೋಂದಣೀಕೃತ ವ್ಯಾಪಾರಿಗೆ ವಸ್ತುವನ್ನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡುವನು ಆಗ ಅವನಿಗೆ GST ಅಂತರ್ಗತ ವ್ಯವಹಾರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(A) BB (B) B2B (C) BC (D) B2C

2. 25,000 ರೂ. ಬೆಲೆಯ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲೆ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು 10% ರಷ್ಟು ಸೂಟು ಕೊಟ್ಟು 28% GST ಆಕರಣೆ ಮಾಡಿದನು, ಹಾಗಾದರೆ ಒಟ್ಟು ಬಿಲ್ ಪಾವತಿ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಇರುವುದು? ಅದರಲ್ಲಿ CGST ಮತ್ತು SGST ಇವುಗಳ ಎಷ್ಟು ಇರಬೇಕಾಗುವುದು ?

3. ಒಂದು ರೇಡಿಯೋ ಬಟ್ಟೆ ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ 1000 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆಗಳ ಬಟ್ಟೆಯ ಮೇಲೆ 5% ಸೂಟು ಕೊಟ್ಟು ಉಳಿದ ರಕಮಿನ ಮೇಲೆ 5% GST ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮಾರಿದಾಗ, ಹಾಗಾದರೆ ಅದು ಗ್ರಾಹಕನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಗೆ ದೊರೆಯುವುದು ?

4. ಸೂರತ, ಗುಜರಾತಿನಲ್ಲಿಯ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು 2.5 ಲಕ್ಷ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆಯ ನೂಲಿನ ಬಟ್ಟೆ ರಾಜಕೋಟ ಗುಜರಾತಿಗೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದ, ಹಾಗಾದರೆ ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ರಾಜಕೋಟದಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಾಪಾರಿಗೆ 5% ದರದಿಂದ ಎಷ್ಟು ವಸ್ತು ಸೇವಾ ಕರ ಕೊಡಬೇಕಾಗುವುದು ?

5. ಶ್ರೀಮತಿ ಮಲ್ಟೋತ್ರಾ ಇವರು 85,000 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆಯ ಸೋಲಾರ ಶಕ್ತಿಯ ಸಂಚನ್ನು ಕೊಂಡು ಕೊಂಡರು ಮತ್ತು 90,000 ರೂ.ಗಳಿಗೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದರು. ವಸ್ತು-ಸೇವಾ ಮಾರಾಟ ಕರದ ದರ 5% ಇದ್ದರೆ ಅವರಿಗೆ ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಕರ ರೂಪಾಯಿಗಳ (ITC) ಕಳೆದುಳಿದ ರಕಮು ದೊರೆಯುವುದು ?

6. Z-ಸಿಕ್ಯೂರಿಟಿ ಸರ್ವಿಸನ್ನು ಒದಗಿಸುವ ಕಂಪನಿಯು 64,500 ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆಯ ಸೇವೆಯನ್ನು ಪೂರೈಸಲಾಯಿತು, ವಸ್ತು-ಸೇವಾ ಕರದ ದರ 18% ಇದೆ. ಈ ಸಿಕ್ಯೂರಿಟಿ ಸರ್ವಿಸ್ ಒದಗಿಸಲು ಕಂಪನಿಯು ಲಾಂಡ್ರಿ ಸರ್ವಿಸೆಸ್ ಮತ್ತು ಯುನಿಫಾರ್ಮ್ ಸರ್ವಿಸೆಸ್ ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಗತಿಗಳ ಮೇಲೆ ಒಟ್ಟು 1550 ರೂ. ವಸ್ತು ಸೇವಾ ಕರ ತುಂಬಿದರು, ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಕಂಪನಿಯು (ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್) ITC ಎಷ್ಟು? ಇದರಿಂದ ಕೊಡಲಾಗಿದ ಕರದಲ್ಲಿಯ (CGST) ಕೇಂದ್ರದ ಹಾಗೂ ರಾಜ್ಯದ (SGST) ಪಾಲು ಎಷ್ಟು ?

7. ಒಂದು ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಪೋಲಿಸ್ ನಿಯಂತ್ರಣ ಕಕ್ಷೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಸೇವಾ ಕರದೊಂದಿಗೆ 84,000 ರೂ. ಬೆಲೆಯ ವಾಕಿ ಟಾಕಿ ಪೂರೈಸಿದನು ವಸ್ತು-ಸೇವಾ ಕರದ ದರ 12% ಇರುವುದರಿಂದ, ಅವನು ಆಕರಣೆ ಮಾಡಿದ ಕರದಲ್ಲಿಯ ಕೇಂದ್ರದ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಪಾಲು ಎಷ್ಟು? ವಾಕಿಟಾಕಿ ಸಂಟದ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಬ್ಬ ದೊಡ್ಡ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು 1,50,000 ರೂ. ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆಯ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಂಪನ್ಮುಖ ಖರೀದಿ ಮಾಡಿದನು ಆ ಎಲ್ಲ ಸಾಹಿತ್ಯ ಕಿರಕೋಳ ವ್ಯಾಪಾರಿಗೆ 1,80,000 ರೂ. ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆಗೆ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದನು. ಕಿರಕೋಳ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಆ ಎಲ್ಲ ಸಾಹಿತ್ಯಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ 2,20,000 ರೂಪಾಯಿ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ ಮಾಡಿದನು. ಹಾಗಾದರೆ 18% ದರದಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಇನ್‌ವ್ಹಾಯಿಸ್ ಕರ ಪಾವತಿಯಲ್ಲಿ (ಸಿಜಿಎಸ್‌ಟಿ) ಕೊಡಲಾದ ಮತ್ತು (ಎಸ್‌ಜಿಎಸ್‌ಟಿ) ಕರ ಗಣನೆ ಮಾಡಿರಿ. ಅದರಂತೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳ ಕೇಂದ್ರದ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಪಾಲು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

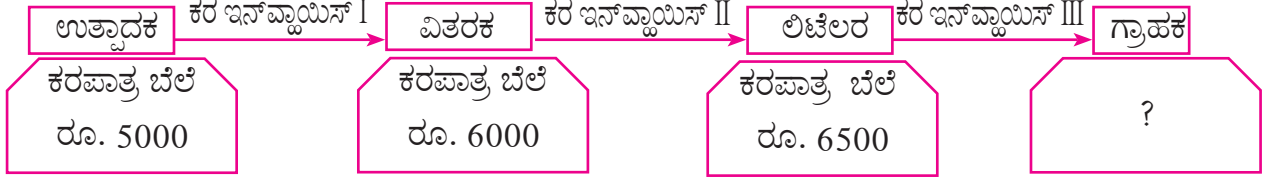
9. ಅಣ್ಣಾ ಪಾಟೀಲ (ಠಾಣೆ-ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ) ಇವರು 14,000 ರೂ. ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆಯ ಒಂದು ವೈಕ್ಯೂಮ ಕ್ಲಿನರ ವಸಯಿ ಮುಂಬಯಿದಿಂದ ಒಬ್ಬ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಗೆ 28% GST ದರದಿಂದ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದರು, ವಸಯಿ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಗ್ರಾಹಕನಿಗೆ ಆ ವೈಕ್ಯೂಮ ಕ್ಲಿನರನ್ನು 16,800 ರೂ. ಕರ ಪಾತ್ರದಿಂದ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದರು, ಹಾಗಾದರೆ ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿಯ ಕೆಳಗಿನ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) ಅಣ್ಣಾ ಪಾಟೀಲರು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಇನ್‌ವ್ಹಾಯಿಸ್ ಕರ ಪಾವತಿಯಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರದ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಕರ ಎಷ್ಟು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(2) ವಸಯಿ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಗ್ರಾಹಕರಿಂದ ಎಷ್ಟು ಕೇಂದ್ರದ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಕರ ಆಕರಣೆ ಮಾಡಿರಬಹುದು.

(3) ವಸಯಿ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಸರಕಾರದ ಕಡೆ ಕರ ತುಂಬುವಾಗ ಕೇಂದ್ರದ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಕರ ಎಷ್ಟು ಬರುವುದು ಅದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಕೆಳಗೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ವಿತರಣೆ ವ್ಯವಸಾಯ ಸರಪಳಿಯಲ್ಲಿ ಕರ ಇನ್‌ವಾಯಿಸ್ A, B, C ಯಲ್ಲಿ ವಸ್ತು-ಸೇವೆ ಕರ ಆಕರಣೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. GST ದರ 12% ಇದೆ.



- (1) ಉತ್ಪಾದಕನು, ವಿತರಕರು ಮತ್ತು ಕಿರಕೋಳ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಸರಕಾರದ ಕಡೆ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಯ ವಸುತ ಮತ್ತು ಸೇವೆಯ ಕರ ಯಾವ ಹೆಸರಿನ ಕೆಳಗೆ ತುಂಬಿದನು. ಅದನ್ನು ತೋರಿಸುವ ವಿತರಣ ಪತ್ರಿಕ ತಯಾರಿಸಿರಿ.
- (2) ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಗ್ರಾಹಕನಿಗೆ ಆ ವಸ್ತು ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಯಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವುದು ?
- (3) ಈ ಸರಪಳಿಯಲ್ಲಿ B2B ಮತ್ತು B2C ಯಾವವು ಬರೆಯಿರಿ.

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ 4 B

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗಾಗಿ ಸರಿಯಾದ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ.

- (1) ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ 100 ರೂ. ಇರುವ ಶೇಅರಿನ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ 75 ರೂ. ಇದೆ.ಹಾಗಾದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಾಕ್ಯ ಯೋಗ್ಯ ಇದೆ ?
 - (A) ಈ ಶೇಅರು 175 ರೂಪಾಯಿ ಅಧಿಮೂಲ್ಯದಲ್ಲಿ ಇದೆ. (B) ಈ ಶೇಅರು 25 ರೂಪಾಯಿ ಅವಮೂಲ್ಯದಲ್ಲಿ ಇದೆ.
 - (C) ಈ ಶೇಅರು 25 ರೂಪಾಯಿ ಅಧಿಮೂಲ್ಯದಲ್ಲಿ ಇದೆ. (D) ಈ ಶೇಅರು 75 ರೂಪಾಯಿ ಅವಮೂಲ್ಯದಲ್ಲಿ ಇದೆ.
- (2) 50% ಲಾಭಾಂಶ ಘೋಷಣೆ ಮಾಡಿರುವ ಕಂಪನಿಯ 10 ರೂಪಾಯಿ ಮುಖ ಬೆಲೆಯ ಒಂದು ಶೇಅರಿನ ಎಷ್ಟು ಲಾಭಾಂಶ ದೊರೆಯುವುದು ?
 - (A) 50 ರೂಪಾಯಿ (B) 5 ರೂಪಾಯಿ (C) 500 ರೂಪಾಯಿ (D) 100 ರೂಪಾಯಿ
- (3) ಒಂದು ಮ್ಯೂಚುವಲ್ ಫಂಡಿನ ಒಂದು ಯುನಿಟಿನ ಒಟ್ಟು ನಿಜಮೂಲ್ಯ 10.65 ರೂ. ಇದ್ದರೆ 500 ಯುನಿಟಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಬೇಕಾಗುವ ಹಣ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಇರುವುದು ?
 - (A) 5325 (B) 5235 (C) 532500 (D) 53250
- (4) ದಲಾಲಿಯ ಮೇಲೆ ವಸ್ತು ಸೇವೆ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆಯ ದರ ಇರುತ್ತದೆ.
 - (A) 5% (B) 12% (C) 18% (D) 28%
- (5) ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಮಾರುವಾಗ ಒಂದು ಶೇಅರಿನ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಲು ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ, ದಲಾಲಿ ಹಾಗೂ GST ಇವುಗಳ
 - (A) ಬೇರೀಜು ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು (B) ವಜಾಬಾಕಿ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು.
 - (C) ಗುಣಕಾರ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು (D) ಭಾಗಕಾರ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು.

2. 100 ರೂ. ಮುಖ ಬೆಲೆಯ ಶೇಅರು 30 ರೂ. ಅಧಿಮೂಲ್ಯದಲ್ಲಿ ಕೊಂಡುಕೊಂಡರು, ದಲಾಲಿಯ ದರ 0.3% ಇದ್ದರೆ ಒಂದು ಶೇಅರಿನ ಕೊಂಡ ಬೆಲೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

3. ಪ್ರಶಾಂತನು 100 ರೂಪಾಯಿ ಮುಖ ಬೆಲೆಯ 50 ಶೇಅರುಗಳನ್ನು 180 ರೂ. ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಕೊಂಡುಕೊಂಡನು. ಅದರ ಮೇಲೆ ಕಂಪನಿಯು 40% ಲಾಭಾಂಶ ಕೊಟ್ಟರೆ ಪ್ರಶಾಂತನ ಹೊಡಿಕೆಯ ಮೇಲಿನ ಮರಳಿ ಸಿಗುವ ದರ ತೆಗೆಯಿರಿ.
4. 100 ರೂ. ಮುಖ ಬೆಲೆಯ 300 ಶೇಅರುಗಳನ್ನು 30 ರೂ. ಅವಮೂಲ್ಯದಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದರೆ. ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಗಳು ದೊರೆಯುವವು ?
5. 100 ರೂ. ಮುಖ ಬೆಲೆಯ ಹಾಗೂ 120 ರೂ. ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯ ಶೇಅರುಗಳಲ್ಲಿ 60,000 ರೂ. ಹೊದಿಗೆ ಮಾಡಿದರೆ ಎಷ್ಟು ಶೇಅರುಗಳು ದೊರೆಯುವವು.
6. ಶ್ರೀಮತಿ ಮೀತಾ ಅಗ್ರವಾಲ ಇವರು 100 ರೂ. ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯಿಂದ 10,200 ರೂ.ಗಳ ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡರು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 60 ಶೇಅರುಗಳನ್ನು 125 ರೂ. ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಮಾರಿದರು ಹಾಗೂ ಉಳಿದ ಶೇಅರುಗಳನ್ನು 90 ರೂ. ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಮಾರಿದರು. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಲಾಭದಾಯಕ ಅಥವಾ ಹಾನಿಯಾಯಿತು? ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ?
7. ಶೇಅರು ಪೇಟೆಯಲ್ಲಿ 100 ರೂ. ಮುಖ ಬೆಲೆಯ ಎರಡು ಕಂಪನಿಗಳ ಶೇಅರುಗಳು ಕೆಳಗಿನ ಹಾಗೆ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಹಾಗೂ ಲಾಭಾಂಶ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಕೊಡುವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಯಾವ ಕಂಪನಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಹೊಡಿ ಸಕಾರಣ ಬರೆಯಿರಿ. ಲಾಭದಾಯಕ ಆಗುವದು ?
- ★ (1) ಕಂಪನಿ A - 132 ರೂಪಾಯಿ 12% (2) ಕಂಪನಿ B - 144 ರೂಪಾಯಿ 16%
8. ಶ್ರೀ ಆದಿತ್ಯ ಸಂಘವಿ ಇವನು 100 ರೂಪಾಯಿ ಮುಖ ಬೆಲೆಯ ಶೇಅರುಗಳನ್ನು 50 ರೂಪಾಯಿ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ ಇರುವಾಗ 50118 ರೂಪಾಯಿ ಹೊಡಿಕೆಮಾಡಿ ಕೊಂಡುಕೊಂಡನು. ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಅವರು 0.2% ದಲಾಲಿ ಕೊಟ್ಟರು. ದಲಾಲಿಯ ಮೇಲೆ 18% ದರದಿಂದ GST ಕೊಟ್ಟರೆ.
- ★ ದಲಾಲಿ ಕೊಟ್ಟರು. ದಲಾಲಿಯ ಮೇಲೆ 18% ದರದಿಂದ GST ಕೊಟ್ಟರೆ.
9. ಶ್ರೀ ಬಾಟಲಿವಾಲಾ ಇವರು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 30,350 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆಯ ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದರು ಹಾಗೂ 69,650 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆಯ ಶೇಅರುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡುಕೊಂಡರು. ಆ ದಿನದ ಒಟ್ಟು ಕೊಂಡುಕೊಂಡ ಮಾರಾಟದ ಮೇಲೆ 0.1% ದರದಿಂದ ದಲಾಲಿ ಹಾಗೂ ದಲಾಲಿಯ ಮೇಲೆ 18% ವಸ್ತು ಮತ್ತು ಸೇವೆ ಕರ ಹಾಗೂ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ ಕೊಟ್ಟರು ಹಾಗಾದರೆ ಆ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ದಲಾಲಿ ಹಾಗೂ ವಸ್ತು
- ★ ಸೇವೆ ಕರಹಾಗೂ ಆಗುವ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟು ?
10. ಶ್ರೀಮತಿ ಅರುಣಾ ರಕ್ಕರ ಇವರು ಒಂದು ಕಂಪನಿಯ ದರ್ಶಿನಿ ಬೆಲೆಯ 100 ಶೇಅರುಗಳನ್ನು 100 ಶೇಅರುಗಳನ್ನು 1200 ರೂಪಾಯಿ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಕೊಂಡುಕೊಂಡರು. ಪ್ರತಿ ಶೇಅರು 0.3% ದಲಾಲಿ ಹಾಗೂ ದಲಾಲಿಯ ಮೇಲೆ 18% GST ಕೊಟ್ಟರೆ.
 - (1) ಒಟ್ಟು ಹೋದಿಗೆ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಗಳು ಮಾಡಿದರು ? (2) ಹೋದಿಗೆಯ ಮೇಲೆ ದಲಾಲಿ ಎಷ್ಟು ಕೊಟ್ಟರು ?
 - (3) ದಲಾಲಿಯ ಮೇಲಿನ (ಜಿಎಸ್‌ಟಿ) ವಸ್ತು ಸೇವೆ ಹಾಗೂ ಮಾರಾಟ ತೆರಿಗೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
 - ★ (4) 100 ಶೇಅರುಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಖರ್ಚಾಯಿತು ?
11. ಶ್ರೀಮತಿ ಅನಘಾ ದೋಶಿ ಇವರು 660 ರೂಪಾಯಿ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯ 22 ಶೇಅರುಗಳು ಕೊಂಡರು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರು ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಹೋದಿಗೆ ಮಾಡಿದರು ? ಆ ಶೇಅರುಗಳ ಮೇಲೆ 20% ಲಾಭಾಂಶ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ 650 ರೂ. ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಮಾರಿದರು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ 0.1% ದಲಾಲಿ ಕೊಟ್ಟರು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಅವರಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರತಿಶತ ಲಾಭ ಅಥವಾ ಹಾನಿಯಾಯಿತು ಎಂಬುದನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. (ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮೀಪದ ಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ)





ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

- ಸಂಭಾವ್ಯತೆ: ಪರಿಚಯ
- ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ ಮತ್ತು ನಿಷ್ಪತ್ತಿ
- ನಮೂನೆಯ ಅವಕಾಶ ಮತ್ತು ಘಟನೆ
- ಘಟನೆಯ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ



ಚರ್ಚಿಸೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಶಿಕ್ಷಕ : ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಗೆಳೆಯರೆ, ನಮ್ಮ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಕಾರ್ಡುಗಳನ್ನು ಈ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ಒಂದು ಕಾರ್ಡನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆಡುಗಳ ಮೇಲೆ ಬೇರೆಬೇರೆ ವನಸ್ಪತಿಗಳ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕಾರ್ಡುಗಳ ಮೇಲೆ ಒಂದೇ ವನಸ್ಪತಿಯ ಹೆಸರು ಕಾಣಿಸುವದಿಲ್ಲ. ತುಳಸಿ ಈ ವನಸ್ಪತಿಯ ಕಾರ್ಡು ಯಾರಿಗೆ ದೊರೆಯುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಎಲ್ಲರೂ ಹಜರಿ ಕ್ರಮಾಂಕದ ಹಾಗೆ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಿರಿ. ಕೊನೆಯ ಕಾರ್ಡು ಹೊರತೆಗೆಯುವ ವರೆಗೆ ಯಾರು ಕಾರ್ಡನ್ನು ತೆಗೆದು ನೋಡಬಾರದು.

ಅರುಣಾ : ಸರ, ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ನಾನು ಇದ್ದೆನೆ, ಅದರೆ ನಾನು ಮೊದಲು ಕಾರ್ಡನ್ನು ಎತ್ತುವದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಇಷ್ಟು ಎಲ್ಲ ಕಾರ್ಡುಗಳಿಂದ ಆ ಕಾರ್ಡು ನನಗೆ ದೊರೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಬಹಳಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಇದೆ.

ಝರೀನಾ: ಸರ, ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ನಾನು ಕೊನೆಗೆ ಇದ್ದೆನೆ, ನಾನು ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಡನ್ನು ಎತ್ತುವದಿಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ ತುಳಸಿ ಈ ಹೆಸರು ಇರುವ ಕಾರ್ಡು ಬಹುತೇಕವಾಗಿ ನಾನು ಎತ್ತುವಕ್ಕಿಂತ ಮುಂಚೆ ಯಾರಾದರೂ ಎತ್ತಿರಬಹುದು.

ಸ್ವಲ್ಪ ದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಹಾಗೂ ಕೊನೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ತುಳಸಿ ಈ ಹೆಸರು ಇರುವ ಕಾರ್ಡು ದೊರೆಯುವ ಶಕ್ಯತೆ ಬಹಳ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ ಎಂದು ಅನ್ನಿಸುವದು.

ಮೇಲಿನ ಸಂಭಾಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಬಹುಶಃ ಕಡಿಮೆ ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವ ವಿಚಾರವಾಯಿತು.

ನಾವು ದೈನಂದಿನ ಸಂಭಾಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ಶಬ್ದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

- ಸಂಭಾವ್ಯತೆ: • ಬಹುತೇಕವಾಗಿ • ಶಕ್ಯತೆ
- ನಿಶ್ಚಿತ • ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ • 50 - 50

ಭವಿಷ್ಯದಲ್ಲಿಯ ಶಕ್ಯತೆಯ ವಿಷಯಗಳ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

- ಬಹುತೇಕವಾಗಿ ಇಂದಿನಿಂದ ಮಳೆಯಾಗಲಿದೆ.
- ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವ ಸಂಭವ ಬಹಳ ಇದೆ.
- ಭಾರತಕ್ಕೆ ಮುಂದಿನ ಕ್ರಿಕೆಟ ಸ್ಪರ್ಧೆಯಲ್ಲಿ ಸೋಲಿಸುವದು ಅಶಕ್ಯ ಇದೆ.
- ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ನನಗೆ ಪ್ರಥಮ ಶ್ರೇಣಿ ದೊರೆಯುವದು.
- ಬಾಲಕರಿಗೆ ಸರಿಯಾದ ಸಮಯಕ್ಕೆ ಪೋಲಿಯೋದ ಲಸಿಕೆ ಕೊಟ್ಟರೆ ಅವರಿಗೆ ಪೋಲಿಯೋ ಆಗುವ ಸಂಭವ ಇರುವದಿಲ್ಲ.

ಬದಿಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕ್ರಿಕೇಟ ಆಟಗಾರರು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಎಸೆಯುತ್ತಿದ್ದಾರೆ.

ಯಾವ ಯಾವ ಶಕೃತೆ ಇರುವುದು ?

ಅಥವಾ



ಅಂದರೆ, ನಾಣ್ಯ ಎಸೆಯುವದಕ್ಕೆ ಶಕೃತೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

ಕೃತಿ 1 ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದು ನೋಡಿರಿ. ನಿಮಗೆ ಏನು ಕಾಣಿಸುವುದು ? (ಶಿಕ್ಷಕರು ಬೋರ್ಡ್ ಮೇಲೆ ಕಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸುವರು ಹಾಗೂ ಅದನ್ನು ಬರೆದು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡುವರು)

ಶಕೃತೆ	ಚಿತ್ತು (H)	ಟಪ್ಪು (T)
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

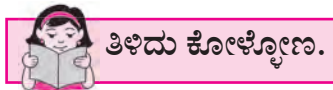
ಕೃತಿ 2 ಈಗ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ಆನಾಣ್ಯವನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಎಸೆದು ನೋಡಿರಿ. ಯಾವ ಯಾವ ಶಕೃತೆಗಳು ಬರುವವು ?

ಶಕೃತೆ	HH	HT	TH	TT
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ				

ಕೃತಿ 3 ನಿಮ್ಮ ಹತ್ತಿರ ವಿರುವ ದಾಳವನ್ನು ಒಂದುಸಲ ಎಸೆಯಿರಿ, ಮೇಲಿನ ಪ್ರಷ್ಯಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಬಿಂದು ಬರುವ ಯಾವ ಯಾವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಬರುವವು? ಇವುಗಳ ವಿಚಾರ ಮಾಡಿರಿ.



(ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಕೃತೆ ಅಂದರೆ, ದಾಳ ಎಸೆಯುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಇದೆ).



ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪ್ರಯೋಗ (Random Experiment)

ಯಾವ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಸಂಭಾವ್ಯ ಪರಿಣಾಮಗಳು ಮೊದಲೇ ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುತ್ತವೆ. ಅದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಪರಿಣಾಮದ ಬಗ್ಗೆ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ ಊಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಎಲ್ಲ ಪರಿಣಾಮಗಳು ಸತ್ಯವಾಗಿರುವ ಶಕೃತೆ ಸಮಾನವಿರುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕೆ ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪ್ರಯೋಗ (ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ) ಎನ್ನುವರು. ಉದಾ. ನಾಣ್ಯ ಎಸೆಯುವುದು, ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆಯುವುದು, 1 ರಿಂದ 50 ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆದಿರುವ ಕಾರ್ಡುಗಳ ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು, ಆಟದಲ್ಲಿಯ ಇಸ್ಪೀಕ ಎಲೆಗಳಿಂದ ಸರಿಯಾಗಿ ಬೆರೆಸಿದ ಇಸ್ಪೀಕ ಎಲೆಗಳಿಂದ ಒಂದ ಎಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು ಇತ್ಯಾದಿ.

ನಿಷ್ಪತ್ತಿ (Outcome)

ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪ್ರಯೋಗದ ಪರಿಣಾಮಕ್ಕೆ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾಹರಣಾರ್ಥ(1) ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಎಸೆಯುವುದು ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗದ ಎರಡು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳಿವೆ.

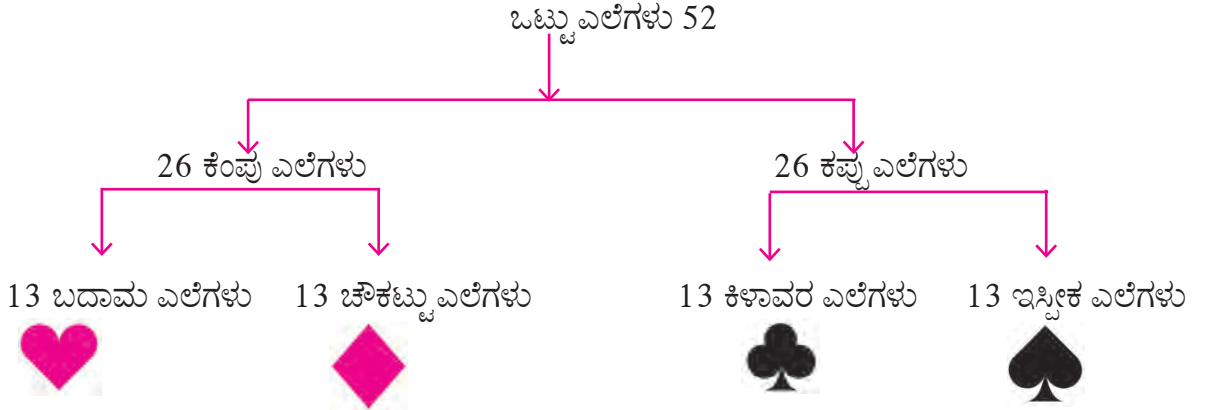
ಚಿತ್ತು (H) ಅಥವಾ ಟಪ್ಪು (T)

(2) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆಯುವುದು ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗದ ಅದರ 6 ಪ್ರಷ್ಠಭಾಗಗಳ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲಿಂದ 6 ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಸಾಧ್ಯ ಇವೆ.

1 ಅಥವಾ 2 ಅಥವಾ 3 ಅಥವಾ 4 ಅಥವಾ 5 ಅಥವಾ 6

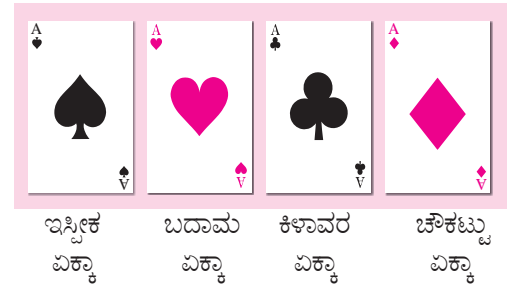
(3) 1 ರಿಂದ 50 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿರುವ ಕಾರ್ಡುಗಳ ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡು ತೆಗೆಯುವುದು, ಈ ಪ್ರೋಗದಲ್ಲಿ 50 ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಸಾಧ್ಯ ಇವೆ.

(4) ಆಟದ ಇಸ್ವೀಕ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಬೆರೆಸಿದ ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು ಈ ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ 52 ಎಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಅದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಎಲೆಗಳ ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಚೌಕಟ್ಟು, ಬದಾಮ, ಕಿಳಾವರ ಮತ್ತು ಇಸ್ವೀಕ ಹೀಗೆ ನಾಲ್ಕು ಗುಂಪುಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ರಾಜಾ, ರಾಣಿ, ಗುಲಾಮ ಮತ್ತು 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 ಮತ್ತು ಏಕ್ವಾ ಹೀಗೆ 13 ಎಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ರಾಜಾ, ರಾಣಿ, ಗುಲಾಮ ಇವುಗಳಿಗೆ ಚಿತ್ರಯುಕ್ತ ಎಲೆಗಳು ಎನ್ನುವರು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ರಾಜಾ ಚಿತ್ರದ ನಾಲ್ಕು, ರಾಣಿ ಚಿತ್ರದ ನಾಲ್ಕು ಮತ್ತು ಗುಲಾಮ ಚಿತ್ರದ ನಾಲ್ಕು ಹೀಗೆ 12 ಚಿತ್ರಯುಕ್ತ ಎಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.



ಸಮಸಂಭವನೀಯ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ (Equally likely outcomes)

ನಾವು ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದರೆ, ದಾಳದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ದೊರೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಸಮಾನ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಆ ಸಮಸಂಭಾವ್ಯ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ 1 ರಿಂದ 6 ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಸಿಗುವುದು. ಆದರೆ ಒಂದು ವೇಳೆ ಒಂದೇ ವಿಶಿಷ್ಟ ಅಂಕವು ಮೇಲಿನ ಪ್ರಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಮೆಲ್ಲಿಂದ ಮೇಲೆ ಕಾಣಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ. ಆ ದಾಳವು ಅಸಮತೋಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು ಸಮಸಂಭವನೀಯ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ದಾಳ ಸಮತೋಲ (fair ಅಥವಾ unbiased) ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಯಾವುದೇ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ವಿಶಿಷ್ಟ ಪ್ರಕಾರದ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ ದೊರೆಯದೆ ಇದ್ದರೆ. ಸಮಾನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳ ಶಕ್ಯತೆ ದೊರೆತರೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಸಂಭಾವ್ಯ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು ಎನ್ನುವರು. ಉದಾ. ನಾವು ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ಚಿತ್ತು ಅಥವಾ ಟಪ್ಪು ದೊರೆಯುವ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಸಮಸಂಭಾವ್ಯ ಇರುತ್ತದೆ. ಅದರಂತೆ 1 ರಿಂದ 6 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವಿವಿಧ ಪ್ರಪಂಗಳ ಮೇಲಿರುವ ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದರೆ ಯಾವುದೇ ಅಂಕ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಪಂಗಳ ಮೇಲೆ ಬರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಪರಿಕ್ಷಿಸಿರಿ, ಈ ಎಲ್ಲ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು ಸಮಸಂಭಾವ್ಯ ಇರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ ಸಂಗ್ರಹ 5.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಬತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ ?

(1) ವನಿತಾಳಿಗೆ ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿಯ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರೇಕ್ಷಣೀಯ ಸ್ಥಳಗಳು ಮಾಹಿತಿ ಇದೆ. ಅದರಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಮೇ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿನಲ್ಲಿಯ ರಜೆಗೆ ಹೋಗುವವಳಿದ್ದಾಳೆ.

ಆಜೆಂಟಾ, ಮಹಾಬಳ್ಳೇಶ್ವರ, ಲೋಣಾರ ಸರೋವರ, ತಾಡೋಬಾ ಅಭ್ಯರಣ್ಯ, ಅಂಭೊಲಿ, ರಾಯಗಡ, ಮಾಥೆರಾನ, ನಂದನವನ.

(2) ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿಯ ವಾರವನ್ನು ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಆರಿಸುವುದಿದೆ.

(3) ಎಲೆಗಳ ಕ್ಯಾಟದಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ಆರಿಸುವುದಿದೆ.

(4) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ 10 ರಿಂದ 20ರ ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದರಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಆರಿಸುವುದಿದೆ.



ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಪ್ರಯೋಗದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ, ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ದೊರೆಯುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ.

(1) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದು 1 ಪಡೆಯುವುದು.

(2) ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಎಸೆದು ಚಿತ್ತು ಪಡೆಯುವುದು.



ತಿಳಿದು ಕೋಳ್ಕೊಣ ಬನ್ನಿ.

ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ (Sample Space)

ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ “ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ” ಎನ್ನುವರು.

ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ ‘S’ ಅಥವಾ ‘Ω’ (ಇದು ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರವಿದ್ದು ಉಚ್ಚಾರ ಓ ಮೆಗಾ ಇದೆ) ಈ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಗಣದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕಕ್ಕೆ ಮಾದರಿ ಘಟಕ ಎನ್ನುವರು. ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ ‘S’ ದಲ್ಲಿಯ ಒಟ್ಟು ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $n(S)$ ದಿಂದ ದರ್ಶಿಸುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ $n(S)$ ಸಾಂತ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಸಾಂತ ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ ಎನ್ನುವರು. ಸಾಂತ ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶಗಳ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಅ. ಕ್ರ.	ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪ್ರಯೋಗ	ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ	ಮಾದರಿ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1	ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ.	$S = \{H, T\}$	$n(S) = 2$
2	ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ.	$S = \{HH, HT, TH, TT\}$	$n(S) = \square$
3	ಮೂರು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ.	$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$	$n(S) = 8$
4	ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಹಾಕಲಾಗಿದೆ.	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$n(S) = \square$
5	ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಹಾಕಲಾಗಿದೆ.	$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$	$n(S) = 36$
6	1 ರಿಂದ 25 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದ ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳ ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್‌ನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು.	$S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 25\}$	$n(S) = \square$
7	ಯೋಗ್ಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬೆರೆಸಿದ 52 ಎಲೆಗಳ ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು.	ಚೌಕಟ : ಏಕೈಕ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ಗುಲಾಮ, ರಾಣಿ, ರಾಜಾ ಇಸ್ಪೀಕ : ಏಕೈಕ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ಗುಲಾಮ, ರಾಣಿ, ರಾಜ ಬದಾಮು: ಏಕೈಕ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ಗುಲಾಮ, ರಾಣಿ, ರಾಜ ಕಿಳಾವರ : ಏಕೈಕ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ಗುಲಾಮ, ರಾಣಿ, ರಾಜ	$n(S) = 52$



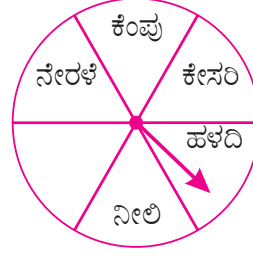
ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ಇಡೋಣ ಬನ್ನಿ.

- (i) ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಹಾರಿಸುವುದು ಅಥವಾ ಎರಡೂ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಸಲ ಹಾರಿಸುವುದು. ಈ ಎರಡು ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವ ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಇದೆ ಸಂಗತಿಯು ಮೂರು ನಾಣ್ಯಗಳ ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.
- (ii) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಎಸೆಯುವುದು ಅಥವಾ ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಸಲ ಎಸೆಯುವುದು ಈ ಎರಡು ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ ಒಂದೇ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ ಸಂಗ್ರಹ 5.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ 'S' ಹಾಗೂ ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಮಾದರಿ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n(S)$ ಬರೆಯಿರಿ.
- (1) ಒಂದು ದಾಳ ಹಾಗೂ ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಒಂದೇ ಸಲ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ.
- (2) 2, 3, 5 ಈ ಅಂಕಗಳಿಂದ ಅಂಕಗಳ ಪುನಾವರ್ತಿತಿ ಮಾಡದೆ ಎರಡಂಕ ಸಂಖ್ಯೆನ್ನು ತಯಾರಿಸುವುದು.

2. ಆರು ಬಣ್ಣಗಳ ತಟ್ಟೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಾಣವ ತಿರುಗಿ ಸಿದ್ಧಾಗ ಅದು ಯಾವ ಬಣ್ಣದ ಮೇಲೆ ಸ್ಥಿರ ಆಗುವದು ಅದನ್ನು ನೋಡುವುದು.



MARCH - 2019						
M	T	W	T	F	S	S
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

3. 2019 ನೇ ವರ್ಷದ ಮಾರ್ಚ್ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿಯ 5ರ ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಬರುವ ದಿನಾಂಕಗಳ ವಾರವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು (ಬದಿಯ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರದ ಪೇಜ್ ನೋಡಿರಿ)

4. ಇಬ್ಬರು ಹುಡುಗರು (B_1, B_2) ಹಾಗೂ ಇಬ್ಬರು ಹುಡುಗಿಯರು (G_1, G_2) ಇವರಿಂದ ಇಬ್ಬರ ಒಂದು ರಸ್ತೆ ಸುರಕ್ಷತೆ ಸಮಿತಿ ತಯಾರಿಸುವುದಿದೆ. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ ಬರೆಯಿರಿ ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ.

(1) ಇಬ್ಬರು ಹುಡುಗರ ಸಮಿತಿ = (2) ಇಬ್ಬರು ಹುಡುಗಿಯರ ಸಮಿತಿ =

(3) ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ ಹಾಗೂ ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗಿ ಇವರಿಂದ ಕೂಡಿ ತಯಾರಾಗುವ ಸಮಿತಿ = B_1, G_1

\therefore ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ = $\{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \}$



ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಘಟನೆ (Event)

ವಿಶಿಷ್ಟ ಕರಾರನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳಿಗೆ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ (favourable outcome) ಎನ್ನುವರು.

ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಅಪೇಕ್ಷಿತ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳ ಗಣಕೆ “ಘಟನೆ” ಎನ್ನುವರು. ಘಟನೆ ಇದು ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶದ ಉಪಗಣ ಇರುತ್ತದೆ.

ಈ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ವರ್ಣಮಾಲೆಯ ದೂಡ್ಡಲಿಪಿಯ ಅಕ್ಷರಗಳಾದ A, B, C, D ಗಳಿಂದ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾ. ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಎಸೆದಾಗ, ಘಟನೆ A ಇದು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಒಂದು ಟಪ್ಪು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ

$$A = \{TT, TH, HT\}$$

ಘಟನೆ A ದಲ್ಲಿಯ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $n(A)$ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ $n(A) = 3$

ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಗಾಗಿ

(i) ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆ (Certain event)

(ii) ಅಸಾಧ್ಯ ಘಟನೆ (Impossible event)

(iii) ಏಕ ಘಟಕವಿರುವ ಘಟನೆ (Simple event)

ಘಟನೆಗಳ ಪ್ರಕಾರಗಳು

(iv) ಪೂರಕ ಘಟನೆ (Complement of an event)

(v) ಪರಸ್ಪರ ನಿಷೇಧಕ ಘಟನೆಗಳು (Mutually exclusive event)

(vi) ಸರ್ವ ಸಮಾವೇಶ ಘಟನೆ (Exhaustive event)

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಉದಾ. (1) ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಹಾರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ 'S' ಬರೆಯಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿಯೂ ಮಾದರಿ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n(S)$ ಬರೆಯಿರಿ. ಈ ಪ್ರಯೋಗದ ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಗಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿಯೂ ಮಾದರಿ ಘಟಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

- (i) A ಈ ಘಟನೆಯು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಚಿತ್ತು ಪಡೆಯುವುದಾಗಿದೆ.
- (ii) B ಈ ಘಟನೆಯು ಒಂದೇ ಒಂದು ಚಿತ್ತು ಪಡೆಯುವುದಾಗಿದೆ.
- (iii) C ಈ ಘಟನೆಯು ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿದರೆ ಒಂದು ಟಪ್ಪು ಪಡೆಯುವುದಾಗಿದೆ.
- (iv) D ಈ ಘಟನೆಯು ಒಂದೂ ಚಿತ್ತು ಇರಲಾರದ ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ.

ಉತ್ತರ : ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಹಾರಿಸಿದಾಗ,

$$S = \{HH, HT, TH, TT\} \quad n(S) = 4$$

- (i) A ಈ ಘಟನೆಯು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಚಿತ್ತು ಪಡೆಯುವುದಾಗಿದೆ.

$$A = \{HH, HT, TH\} \quad n(A) = 3$$

- (ii) B ಈ ಘಟನೆಯು ಒಂದೇ ಒಂದು ಚಿತ್ತು ಪಡೆಯುವುದಾಗಿದೆ.

$$B = \{HT, TH\} \quad n(B) = 2$$

- (iii) C ಈ ಘಟನೆಯು ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿದರೆ ಒಂದು ಟಪ್ಪು ಪಡೆಯುವುದಾಗಿದೆ.

$$C = \{HH, HT, TH\} \quad n(C) = 3$$

- (iv) D ಈ ಘಟನೆಯು ಒಂದೂ ಚಿತ್ತು ಇರಲಾರದ ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ.

$$D = \{TT\} \quad n(D) = 1$$

ಉದಾ. (2) ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 50 ಕಾರ್ಡುಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಾರ್ಡಿನ ಮೇಲೆ 1 ರಿಂದ 50 ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಆ ಚೀಲದಿಂದ ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡು ತೆಗೆದರೆ ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ 'S' ಬರೆಯಿರಿ.

ಘಟನೆ A, B ಹಾಗೂ ಅವುಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಮಾದರಿ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆಯಿರಿ.

- (i) A ಈ ಘಟನೆಯು ಕಾರ್ಡಿನ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 6 ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ಘಟನೆ ಇದೆ.

- (ii) B ಈ ಘಟನೆಯು ಕಾರ್ಡಿನ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು 'ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ' ಆಗಿದೆ.

ಉತ್ತರ : ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ $S = \{1, 2, 3, \dots, 49, 50\} \quad n(S) = 50$

- (i) ಘಟನೆ A ವು ಕಾರ್ಡಿನ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 6 ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವುದಾಗಿದೆ.

$$A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}, \quad n(A) = 8$$

- (ii) ಘಟನೆ B ವು ಕಾರ್ಡಿನ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

$$B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}, \quad n(B) = 7$$

ಉದಾ. (3) 3 ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು 2 ಹುಡುಗಿಯರು ಇವರಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ 'ಸ್ವಚ್ಛತೆ' ಸಮಿತಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮದಂತೆ ರಚಿಸುವುದಿದೆ. ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ 'S' ಹಾಗೂ ಮಾದರಿ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆಯಿರಿ. ಅದರಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಗಣದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಮಾದರಿ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆಯಿರಿ.

- (i) A ಘಟನೆಯು ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿ ಇರಬೇಕು, ಇದಾಗಿದೆ.
- (ii) B ಘಟನೆಯು ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಹುಡುಗ ಹಾಗೂ ಒಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿ ಇರುವದಾಗಿದೆ.
- (iii) C ಘಟನೆಯು ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಹುಡುಗರು ಇರುವದಾಗಿದೆ.
- (iv) D ಘಟನೆಯು ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿನ ಒಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿ ಇರುವದಾಗಿದೆ.

ಉತ್ತರ : B_1, B_2, B_3 ಇವರು ಮೂರು ಹುಡುಗರು ಹಾಗೂ G_1, G_2 ಇವರು ಇಬ್ಬರೂ ಹುಡುಗರು ಇದ್ದಾರೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಹುಡುಗ, ಹುಡುಗಿಯರಲ್ಲಿಂದ ಇಬ್ಬರು ಸದಸ್ಯರಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಸಂವರ್ಧನೆ ಸಮಿತಿ ರಚಿಸುವುದಿದೆ.

$$S = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\} \quad n(S) = 10$$

(i) A ಘಟನೆಯು ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿ ಇರಲೇಬೇಕು ಎಂಬುದಾಗಿದೆ.

$$A = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\} \quad n(A) = 7$$

(ii) B ಘಟನೆಯು ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗ ಹಾಗೂ ಒಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿ ಇರುವದಾಗಿದೆ.

$$B = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\} \quad n(B) = 6$$

(iii) ಘಟನೆ C ಇದು ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಹುಡುಗರಿರುವದಾಗಿದೆ.

$$C = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3\} \quad n(C) = 3$$

(iv) D ಈ ಘಟನೆಯು ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಒಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿ ಇರುವದಾಗಿದೆ.

$$D = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\} \quad n(D) = 9$$

ಉದಾ. (4) ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ತಯಾರಾಗುವ ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ 'S' ಹಾಗೂ ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿಯ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n(S)$ ಬರೆಯಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಕರಾರುಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಗಣದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಅದರಲ್ಲಿಯ ಮಾದರಿ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆಯಿರಿ.

- (i) ಮೇಲಿನ ಪ್ರತ್ಯಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಬರುವ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ವಿರುತ್ತದೆ.
- (ii) ಮೇಲಿನ ಪ್ರತ್ಯಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಬರುವ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು 5 ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿದೆ.
- (iii) ಮೇಲಿನ ಪ್ರತ್ಯಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಬರುವ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು 25 ಇದೆ.
- (iv) ಮೊದಲನೆಯ ದಾಳದ ಮೇಲಿರುವ ಅಂಕಿಯು ಎರಡನೆಯ ದಾಳದ ಮೇಲಿರುವ ಅಂಕಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದಿದೆ.

ಉತ್ತರ : ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \quad n(S) = 36$$

(i) ಮೇಲಿನ ಪೃಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಬರುವ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವ ಘಟನೆ E ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), \\ (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\} \quad n(E) = 15$$

(ii) ಮೇಲಿನ ಪೃಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಬರುವ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು 5 ರ ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿರು ಘಟನೆ F ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$$F = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4)\} \quad n(F) = 7$$

(iii) G ಈ ಘಟನೆಯು ಮೇಲಿನ ಪೃಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಬರುವ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು 25 ಇರುವದಾಗಿದೆ.

$$G = \{ \} = \phi \quad n(G) = 0$$

(iv) H ಈ ಘಟನೆಯು ಮೊದಲನೆಯ ದಾಳದ ಮೇಲಿನ ಅಂಕವು ಎರಡನೆಯ ದಾಳದ ಮೇಲಿನ ಅಂಕಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಿರುವದಾಗಿದೆ.

$$H = \{(1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6) \\ (3, 4) (3, 5) (3, 6) (4, 5) (4, 6) (5, 6)\} \quad n(H) = 15$$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.3

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ 'S' ಅದರಲ್ಲಿಯ ಮಾದರಿ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n(S)$ ಅದರಂತೆ ಘಟನೆ A, B, C ಗಣದ ಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು $n(A)$, $n(B)$ ಮತ್ತು $n(C)$ ಬರೆಯಿರಿ.

(1) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ

A ಘಟನೆಯು ಮೇಲಿನ ಪೃಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವದಾಗಿದೆ.

B ಘಟನೆಯು ಮೇಲಿನ ಪೃಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ ವಿಷಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವದಾಗಿದೆ.

C ಘಟನೆಯು ಮೇಲಿನ ಪೃಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವದಾಗಿದೆ.

(2) ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಸಲ ಎಸೆದಾಗ

A ಈ ಘಟನೆಯು ಮೇಲಿನ ಪೃಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲಿನ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು 6 ರ ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಇರುವದಾಗಿದೆ.

B ಈ ಘಟನೆಯು ಮೇಲಿನ ಪೃಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲಿನ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಕನಿಷ್ಠ 10 ಇರುವದಾಗಿದೆ.

C ಈ ಘಟನೆಯು ಎರಡು ದಾಳಗಳ ಮೇಲಿನ ಅಂಕಗಳು ಸಮಾನ ಇರುವದಾಗಿದೆ.

(3) ಮೂರು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಹಾರಿಸಿದಾಗ,

A ಈ ಘಟನೆಯು ಕನಿಷ್ಠ ಎರಡು ಚಿತ್ತುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವದಾಗಿದೆ.

B ಈ ಘಟನೆಯು ಒಂದು ಚಿತ್ತು ಇರಲಾರದ ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ.

C ಈ ಘಟನೆಯು ಎರಡನೆಯ ನಾಣ್ಯದ ಮೇಲೆ ಚಿತ್ತು ಪಡೆಯುವದಾಗಿದೆ.

(4) ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ 0, 1, 2, 3, 4, 5 ಈ ಅಂಕಗಳಿಂದ ಎರಡಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಲಾಗಿದೆ.

A ಈ ಘಟನೆಯು ತಯಾರಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವದಾಗಿದೆ.

B ಈ ಘಟನೆಯು ತಯಾರಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 3 ರಿಂದ ಭಾಗ ಹೋಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

C ಈ ಘಟನೆಯು ತಯಾರಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯು 50ರ ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವದಾಗಿದೆ.

(5) 3 ಪುರುಷರು ಹಾಗೂ 2 ಸ್ತ್ರೀಯರು ಇವರಲ್ಲಿಂದ ಇಬ್ಬರು ಸದಸ್ಯರಿರುವ 'ಪರ್ಯಾವರಣ' ಸಮಿತಿಯನ್ನು ಸಂಯೋಜಿಸುವುದಿದೆ.

A ಈ ಘಟನೆಯು ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಬ್ಬಳು ಸ್ತ್ರೀ ಇರುವುದು ಎಂದು ಇದೆ.

B ಈ ಘಟನೆಯು ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಪುರುಷ ಮತ್ತು ಒಬ್ಬ ಸ್ತ್ರೀ ಇರುವುದಾಗಿದೆ.

C ಈ ಘಟನೆಯು ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಸ್ತ್ರೀ ಕೂಡ ಇರಬಾರದಾಗಿದೆ.

(6) ಒಂದು ನಾಣ್ಯ ಮತ್ತು ಒಂದು ದಾಳ ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ.

A ಘಟನೆಯು ಚಿತ್ತು ಮತ್ತು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವದಾಗಿದೆ.

B ಘಟನೆಯು H ಅಥವಾ T ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವದಾಗಿದೆ.

C ಘಟನೆಯು ದಾಳದ ಮೇಲೆ 7 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ನಾಣ್ಯದ ಮೇಲೆ ಟಪ್ಪು ಪಡೆಯುವದಾಗಿದೆ.



ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಘಟನೆಯ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ (Probability of an event)

ಒಂದು ಸರಳ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಆಕಾರದ ನಾಲ್ಕು ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಬಿಳಿ ಹಾಗೂ ಒಂದು ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಅದರಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಕಣ್ಣು ಮುಚ್ಚಿ ತೆಗೆಯುವುದಿದೆ.

ತೆಗೆದು ಚೆಂಡು ಬಿಳಿದಾಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ ಎಂಬುದು ಸಹಜವಾಗಿ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಘಟನೆಯ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಎನ್ನುವರು. ಅದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಅಥವಾ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು.

ಯಾವುದೇ ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ S ಇದ್ದರೆ ಮತ್ತು A ಇದು ಆ ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಘಟನೆ ಇದ್ದರೆ. ಆ ಘಟನೆಯ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ 'P(A)' ದಿಂದ ತೋರಿಸುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ ನಿಶ್ಚಯಿಸುತ್ತಾರೆ.

$$P(A) = \frac{\text{ಘಟನೆ 'A' ದಲ್ಲಿಯ ಮಾದರಿ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿಯ ಒಟ್ಟು ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ, ತೆಗೆದ ಚೆಂಡು ಬಿಳಿ ಇರುವುದು ಈ ಘಟನೆ A ಇದ್ದರೆ $n(A) = 3$, ಎಕೆಂದರೆ ಬಿಳಿಯ ಚೆಂಡು ಮೂರು ಇವೆ ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ನಾಲ್ಕು ಚೆಂಡುಗಳು ಇರುವುದರಿಂದ $n(S) = 4$

$$\therefore \text{ತೆಗೆದ ಚೆಂಡು ಬಿಳಿ ಇರುವುದರ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ಅದರಂತೆ ತೆಗೆದ ಚೆಂಡು ಕಪ್ಪು ಇರುವುದು ಈ ಘಟನೆ B ಇದ್ದರೆ } n(B) = 1 \therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

ಝಝಝ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಝಝಝ

ಉದಾ. (1) ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಹಾರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

- (i) ಚಿತ್ತು ದೊರೆಯುವುದು (ii) ಟಪ್ಪು ದೊರೆಯುವುದು

ಉತ್ತರ : 'S' ಇದು ಮಾದರಿಯ ಅವಕಾಶ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$$S = \{H, T\} \quad n(S) = 2$$

(i) A ಈ ಘಟನೆಯ ಕರಾರು ಚಿತ್ತು ದೊರೆಯುವುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$$A = \{H\} \quad n(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

(ii) B ಈ ಘಟನೆಯು ಟಪ್ಪು ದೊರೆಯುವುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$$B = \{T\} \quad n(B) = 1$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

ಉದಾ. (2) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಹಾರಿಸಿದಾಗ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕರಾರು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡುವ ಘಟನೆಯ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಮೇಲಿನ ಪೃಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವುದು

(ii) ಮೇಲಿನ ಪೃಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ ದೊರೆತ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮ ಇದೆ.

ಉತ್ತರ : 'S' ಇದು ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad n(S) = 6$$

(i) ಘಟನೆ A : ಮೇಲಿನ ಪೃಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊರೆಯುವುದು.

$$A = \{2, 3, 5\} \quad n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) ಘಟನೆ B : ಮೇಲಿನ ಪ್ರತ್ಯಭಾಗದ ಮೇಲೆ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯುವುದಾಗಿದೆ.

$$B = \{2, 4, 6\} \quad n(B) = 3$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ಉದಾ. (3) ಯೋಗ್ಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬೆರೆಸಿದ 52 ಇಸ್ಟೇಟ್ ಎಲೆಗಳ ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆ ಹೊರತೆಗೆದರೆ ಘಟನೆಗಳ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಆ ಎಲೆ ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದಾಗಿರುವುದು

(ii) ಆ ಎಲೆ ಚಿತ್ರಯುಕ್ತವಾಗಿರುವುದಾಗಿದೆ

ಉತ್ತರ : 'S' ಇದು ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶವೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ

$$\therefore n(S) = 52$$

(i) ಘಟನೆ A : ಹೊರತೆಗೆದ ಎಲೆ ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದಾಗಿರುವುದು.

$$\text{ಒಟ್ಟು ಕೆಂಪು ಎಲೆಗಳು} = 13 \text{ ಚೌಕಟ್ಟು ಎಲೆ} + 13 \text{ ಬದಾಮ ಎಲೆ}$$

$$n(A) = 26$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) ಘಟನೆ B : ಹೊರತೆಗೆದು ಎಲೆ ಚಿತ್ರಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ.

ಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ರಾಜಾ, ರಾಣಿ, ಗುಲಾಮ ಈ ಚಿತ್ರಯುಕ್ತ ಎಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಒಟ್ಟು 12 ಚಿತ್ರಯುಕ್ತ ಎಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore n(B) = 12$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

ಉದಾ. (4) ಒಂದು ಡಬ್ಬಿಯಲ್ಲಿ 5 ಸ್ವಾಭೇರಿಯ, 6 ಕಾಫಿ ಹಾಗೂ 2 ಪೇಪರಮಿಂಟದ ಚಾಕಲೇಟ್‌ಗಳಿವೆ. ಆ ಡಬ್ಬಿಯಿಂದ ಒಂದು ಚಾಕಲೇಟ್ ಹೊರ ತೆಗೆದರೆ. - (i) ತೆಗೆದ ಚಾಕಲೇಟ್ ಕಾಫಿಯದು ಇರುವುದು. ಮತ್ತು

(ii) ಹೊರತೆಗೆದು ಚಾಕಲೇಟ್ ಪೇಪರಮಿಂಟದ ಇರುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ 'S' ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$$\therefore n(S) = 5 + 6 + 2 = 13$$

ಘಟನೆ A : ತೆಗೆದ ಚಾಕಲೇಟ್ ಕಾಫಿಯದಿದ್ದೆ

$$n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{6}{13}$$

ಘಟನೆ B : ತೆಗೆದ ಚಾಕಲೇಟ್ ಪೇಪರಮಿಂಟದಿದೆ

$$n(B) = 2$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{2}{13}$$



ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ.

- ಸಂಭಾವ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೇಳುವಾಗ ಅಥವಾ ಬರೆಯುವಾಗ ಅಪೂರ್ಣಕದ ಅಥವಾ ಶತಮಾನದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡುತ್ತರೆ.
- ಯಾವುದೇ ಘಟನೆಯ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಇದು 0 ದಿಂದ 1 ಅಥವಾ 0% ದಿಂದ 100% ಇರುತ್ತದೆ
ಅಂದರೆ $0 \leq P(E) \leq 1$ ಅಥವಾ $0\% \leq P(E) \leq 100\%$ ಉದಾ. $\frac{1}{4}$ ಈ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ 25% ಹೀಗೆ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು.
- ಪಾಠದ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ವನಸ್ಪತಿಗಳ ಹೆಸರಿನ ಕಾರ್ಡನ್ನು ತೆಗೆಯಲು ಹೇಳಿದಾಗ ತುಳಸಿ ಈ ಹೆಸರುಇರುವ ಕಾರ್ಡು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ದೊರೆಯುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆಯ ವಿಚಾರ ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಒಂದೇ ಕಾರ್ಡು ಮೇಲೆ ತುಳಸಿ ಈ ಹೆಸರಿದೆ. 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೆ ಒಂದು ಕಾರ್ಡನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೆ ತುಳಸಿ ಈ ಹೆಸರು ಬರುವಿರುವ ಕಾರ್ಡು ಬರುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ $\frac{1}{40}$ ಇದೆ. ಮೊದಲನೆಯ, ಅದರಂತೆ ಮಧ್ಯದ ಯಾರಾದರೂ ಅಥವಾ ಕೊನೆಗೆ ಕಾರ್ಡು ತೆಗೆಯುವವರಿಗೆ ಆ ಕಾರ್ಡು ದೊರೆಯುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಅಷ್ಟೇ ಇರುವುದು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.4

1. ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
(1) ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಟಪ್ಪು ದೊರೆಯುವುದು (2) ಒಂದು ಸಹ ಟಪ್ಪು ದೊರೆಯದ
2. ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
(1) ಪ್ರಷ್ಯಭಾಗದ ಮೇಲಿನ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು ಕನಿಷ್ಠ 10 ಇರುವುದು.
(2) ಪ್ರಷ್ಯಭಾಗದ ಮೇಲಿನ ಅಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು 33 ಇರುವುದು.
(3) ಮೊದಲನೆಯ ದಾಳದ ಮೇಲಿನ ಅಂಕವು ಎರಡನೆಯ ದಾಳದ ಮೇಲಿನ ಅಂಕಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿರುವುದು.
3. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 15 ಟಿಕೇಟುಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಟಿಕೇಟಿನ ಮೇಲೆ 1 ರಿಂದ 15 ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಆ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಟಿಕೇಟನ್ನು ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ತೆಗೆದರೆ ಟಿಕೇಟಿನ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ.
(1) ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವುದು (2) ಸಂಖ್ಯೆ 5ರ ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಇರುವುದು; ಈ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
4. 2, 3, 5, 7, 9 ಈ ಅಂಕಗಳಿಂದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಬರೆಯದೆ ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆ ತಯಾರಿಸಿದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
(1) ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ವಿಷಮವಿದ್ದರೆ (2) ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 5ರ ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ
5. ಯೋಗ್ಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬೆರೆಸಿದ 52 ಇಸೇಟ ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆ ಹೊರ ತೆಗೆದರೆ, ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
(1) ಎಕ್ಸಾ ದೊರೆಯುವುದು (2) ಇಸ್ಪೀಕ ಎಲೆ ದೊರೆಯುವುದು

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗಾಗಿ ಯೋಗ್ಯ ಪರ್ಯಾಯ ಆರಿಸಿರಿ.

(1) ಕೆಳಗಿನ ಪರ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(A) $\frac{2}{3}$ (B) 1.5 (C) 15 % (D) 0.7

(2) ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ 3 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಇರುತ್ತದೆ.

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

(3) 1 ರಿಂದ 100 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಆರಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಇರುವುದು.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{6}{25}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{13}{50}$

(4) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಾರ್ಡಿನ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ, ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ 1 ರಿಂದ 40 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿರುವ 40 ಕಾರ್ಡುಗಳು ಒಂದು ಕೈಚೀಲದಲ್ಲಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಾರ್ಡನ್ನು ಎತ್ತಿದಾಗ ಆ ಕಾರ್ಡಿನ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ರ ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಇರುವುದು.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

(5) $n(A) = 2$, $P(A) = \frac{1}{5}$, ಇದರ $n(S) = ?$

(A) 10 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

2. ಬಾಸ್ಕೆಟ್‌ಬಾಲ್ ಆಟಗಾರ ಜಾನ್, ವಾಸಿಮ ಹಾಗೂ ಆಕಾಶ ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಬಾಸ್ಕೆಟ್‌ದಲ್ಲಿ ಬಾಲ್ ಹಾಕುವ ಸರಾವ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರು. ಬಾಸ್ಕೆಟ್‌ದಲ್ಲಿ ಬಾಲ್ ಬೀಳುವ ಜಾನನ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ $\frac{4}{5}$, ವಾಸಿಮನ 0.83 ಹಾಗೂ ಆಕಾಶನ 58% ಇದೆ. ಯಾರ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ.

3. ಒಂದು ಹಾಕಿ ತಂಡದಲ್ಲಿ 6 ರಕ್ಟಿಸುವ, 4 ಆಕ್ರಮಣ ಮಾಡುವ ಹಾಗೂ ಒಬ್ಬ ಗೋಲರಕ್ಷಕ ಹೀಗೆ ಆಟಗಾರರಿದ್ದಾರೆ. ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಅದರಲ್ಲಿಯ ಒಬ್ಬ ಆಟಗಾರನನ್ನು ತಂಡ ನಾಯಕವೆಂದು ಆರಿಸುವುದಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(1) ಗೋಲರಕ್ಷಕ ಇವನು ತಂಡದ ನಾಯಕನಿದ್ದಾನೆ.

(2) ರಕ್ಟಿಸುವ ಆಟಗಾರ ತಂಡದ ನಾಯಕನಿದ್ದಾನೆ.

4. ಜೋಸೆಫನು ಒಂದು ಟೋಪಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಾರ್ಡಿನ ಮೇಲೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ವರ್ಣಮಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಅಕ್ಷರ ಹೀಗೆ 26 ಅಕ್ಷರಗಳ 26 ಕಾರ್ಡುಗಳನ್ನು ಇಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. ಅದರಿಂದ ಅಕ್ಷರದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡು ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ತೆಗೆದರೆ, ತೆಗೆದ ಅಕ್ಷರ ಸ್ವರ ಇರುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

5. ಬಲೂನು ಮಾರಾಟಗಾರ 2 ಕೆಂಪು, 3 ನೀಲಿ ಮತ್ತು 4 ಹಸಿರು ಹೀಗೆ ಬಣ್ಣದ ಬಲೂನುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಬಲೂನು ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕೊಡುತ್ತಾನೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(1) ದೊರೆತ ಬಲೂನು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದಿರುವುದು.

(2) ದೊರೆತ ಬಲೂನು ನೀಲಿ ಬಣ್ಣದಿರುವುದು.

(3) ದೊರೆತ ಬಲೂನು ಹಸಿರು ಬಣ್ಣದಿರುವುದು.

6. ಒಂದು ಡಬ್ಬಿಯಲ್ಲಿ 5 ಕೆಂಪು ಪೆನ್ನು, 8 ನೀಲಿ ಪೆನ್ನು ಮತ್ತು 3 ಹಸಿರು ಪೆನ್ನುಗಳಿವೆ. ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಋತುಜನಿಗೆ ಒಂದು ಪೆನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ತೆಗೆದ ಪೆನ್ನು ನೀಲಿ ಇರುವುದರ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ದಾಳದ ಆರು ಪ್ರಷ್ಠಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.



ಈ ದಾಳವನ್ನು ಒಂದೇ ಸಲ ಎಸೆದಾಗ ಮುಂದಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

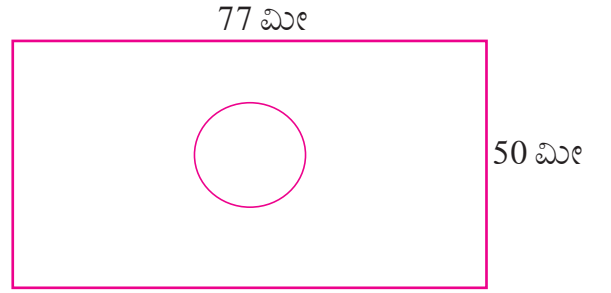
(1) ಮೇಲಿನ ಪ್ರಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ 'A' ದೊರೆಯುವುದು (2) ಮೇಲಿನ ಪ್ರಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ 'D' ದೊರೆಯುವುದು.

8. ಒಂದು ಡಬ್ಬಿಯಲ್ಲಿ 30 ಟಿಕೇಟುಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಟಿಕೇಟಿನ ಮೇಲೆ 1 ರಿಂದ 30 ರಲ್ಲಿಯ ಒಂದೇ ಅಂಕ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಟಿಕೇಟನ್ನು ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ತೆಗೆದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(1) ಟಿಕೇಟಿನ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ವಿಷಮವಿರುವುದು (2) ಟಿಕೇಟಿನ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಿರುವುದು.

9. ಒಂದು ತೋಟದ ಉದ್ದ ಹಾಗೂ ಅಗಲ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 77

ಮೀ ಹಾಗೂ 50 ಮೀ. ಇವೆ. ತೋಟದಲ್ಲಿ 14 ಮೀಟರ ವ್ಯಾಸದ ಹಬಂಡ ಇದೆ. ತೋಟದ ಹತ್ತಿರದ ಕಟ್ಟಡದಿಂದ ಒಣಗಿಸಲು ಹಾಕಿದ ಟಾವೇಲ ಗಾಳಿಯಿಂದ ಹಾರಿ ತೋಟದಲ್ಲಿ ಬಿದ್ದಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಅದು ತೋಟದಲ್ಲಿಯ ಹೊಂಡದಲ್ಲಿ ಬೀಳುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.



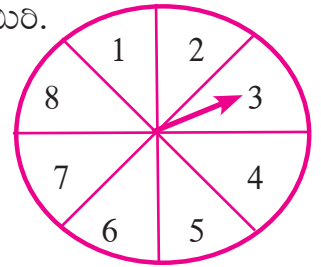
10. ಅವಕಾಶಯುಕ್ತ ಆಟದಲ್ಲಿ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಅಂಕಿಯ ಮೇಲೆ ಬಾಣ ಸ್ಥಿರವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅವು ಸಮಸಂಭಾವ್ಯ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳಿವೆ. ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(1) ಆ ಬಾಣ 8 ಈ ಅಂಕದ ಮೇಲೆ ಸ್ಥಿರವಾಗುವುದು.

(2) ಆ ಬಾಣ ವಿಷಮ ಅಂಕದ ಮೇಲೆ ಸ್ಥಿರವಾಗುವುದು.

(3) ಬಾಣವು ದರ್ಶಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿದೆ.

(4) ಬಾಣವು ದರ್ಶಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ 9 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿರುವುದು.



11. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಾರ್ಡ್ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಹೀಗೆ 0 ದಿಂದ 5 ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು ತಯಾರಿಸಿದ ಆರು ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಡಬ್ಬಿಯಲ್ಲಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.

(1) ತೆಗೆದ ಕಾರ್ಡ್‌ನ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದು ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ವಿರುವುದು.

(2) ತೆಗೆದ ಕಾರ್ಡ್‌ನ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕ ದಿರುವುದು.

(3) ತೆಗೆದ ಕಾರ್ಡ್‌ನ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ವಿರುವುದು.

(4) ತೆಗೆದ ಕಾರ್ಡ್‌ನ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದು 5 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವುದು.

12. ಒಂದು ಬ್ಯಾಗಿನಲ್ಲಿ 3 ಕೆಂಪು, 3 ಬಿಳಿ ಹಾಗೂ 3 ಹಸಿರು ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಬ್ಯಾಗಿನಿಂದ 1 ಚೆಂಡನ್ನು ಕ್ರಮವಿಲ್ಲದ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ತೆಗೆದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
- (1) ತೆಗೆದ ಚೆಂಡು ಕೆಂಪು ಇರುವುದು (2) ತೆಗೆದ ಚೆಂಡು ಕೆಂಪು ಇರುವದಿಲ್ಲ
(3) ತೆಗೆದ ಚೆಂಡು ಕೆಂಪು ಅಥವಾ ಬಿಳಿ ಇರುವುದು.
13. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಾರ್ಡಿನ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಹೀಗೆ mathematics ಈ ಶಬ್ದದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಮತ್ತು ಆ ಕಾರ್ಡುಗಳನ್ನು ಬುಡಮೇಲಾಗಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರಿಂದ ಒಂದು ಕಾರ್ಡ್ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಆ ಅಕ್ಷರ 'm' ಇರುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
14. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ 200 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 135 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಬಡ್ಡಿ ಈ ಆಟ ಇಷ್ಟವಾಗುವುದು ಹಾಗೂ ಇತರರಿಗೆ ಈ ಆಟ ಇಷ್ಟವಾಗುವದಿಲ್ಲ. ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ಆರಿಸಿದರೆ ಅವನಿಗೆ ಕಬಡ್ಡಿ ಈ ಆಟ ಇಷ್ಟವಾಗುವದಿಲ್ಲ. ಇದರ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
15. 0, 1, 2, 3, 4 ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಂಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆ ತಯಾರಿಸುವವಿದೆ. ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಪುನಃ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ನಡೆಯುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
- (1) ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು (2) ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ರ ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಇರುವುದು
(3) ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 11 ರ ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಇರುವುದು
16. ಒಂದು ದಾಳದ ಪ್ರಷ್ಠಭಾಗದ ಮೇಲೆ 0, 1, 2, 3, 4, 5, ಈ ಅಂಕಗಳಿವೆ. ಆ ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಸಲ ಎಸೆದರೆ, ಮೇಲಿನ ಪ್ರಷ್ಠದ ಮೇಲೆ ದೊರೆಯುವ ಅಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಶೂನ್ಯವಿರುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ತೆಗೆಯಿರಿ.
17. ಕೆಳಗಿನ ಕೃತಿ ಮಾಡಿರಿ.

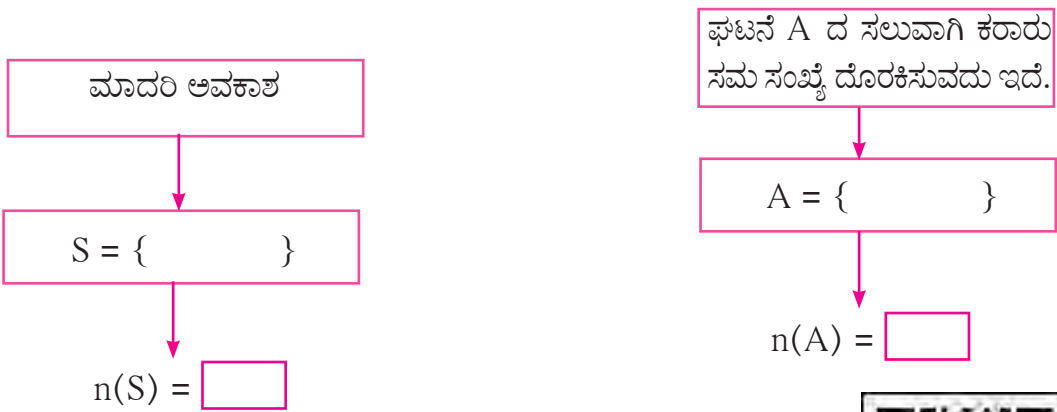
ಕೃತಿ I : ನಿಮ್ಮ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಒಟ್ಟು ಪಟ $n(S) = \square$

ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡಕ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಯಾದ್ಯಚ್ಛಕ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಆರಿಸುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ $n(A) = \square$

ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿಂದ ಕನ್ನಡಕ ಹಾಕದೇ ಇರುವ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಯಾದ್ಯಚ್ಛಕ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಆರಿಸುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ $P(A) = \square$

ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿಂದ ಕನ್ನಡಕ ಹಾಕದೇ ಇರುವ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಯಾದ್ಯಚ್ಛಕ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಆರಿಸುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ $P(B) = \square$

ಕೃತಿ II : ಮಾದರಿ ಅವಕಾಶ ಸ್ವತಃ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಚೌಕಟ್ಟುಗಳನ್ನು ತುಂಬಿರಿ.



$$P(A) = \frac{\square}{\square} = \square$$





ಕಲಿಯೋಣ ಬನ್ನಿ.

- ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣಗಳು - ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಮಧ್ಯ ಮಧ್ಯಕ, ಬಹುಜಾಂಕ (ಬಹುಲಕ)
- ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಸಾಮಗ್ರಿಯನ್ನು ಆಲೇಖದಿಂದ ಮಂಡಿಸುವುದು - ಆಯತಾಲೇಖ, ಆವೃತ್ತತೆಯ ಬಹುಭುಜ, ವೃತ್ತಾಲೇಖ

ಮಾನವನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವು ಅನೇಕ ಶಾಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಕೃಷಿ, ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ, ವಾಣಿಜ್ಯ, ಔಷಧಶಾಸ್ತ್ರ, ವನಸ್ಪತಿಶಾಸ್ತ್ರ, ಜೈವಿಕ ತಂತ್ರಜ್ಞಾನ, ಭೌತಿಕಶಾಸ್ತ್ರ, ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರ, ಶಿಕ್ಷಣ ಶಾಸ್ತ್ರ, ಸಮಾಜಶಾಸ್ತ್ರ, ವ್ಯವಸ್ಥಾಪನೆ, ಇತ್ಯಾದಿ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ನಂತರ ದೊರೆಯುವ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯ ಅನೇಕ ಶಕೃತೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಯಾವು ಅವುಗಳ ಶಕೃತೆಯನ್ನು ಪರಿಚ್ಛಿಸುವುದು ಇರುತ್ತದೆ. ಆವಾಗ, ದೊಡ್ಡ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಎಲ್ಲ ಬಾಬತ್ತುಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ನೋಂದಣಿ ಮಾಡಲಾಗುವುದು. ಈ ನೋಂದಣಿಯ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿ ವಿವಿಧ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಪರಿಚ್ಛಿಸಲು ಬರುವುದು. ಇದರ ಸಲುವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ, ಸಾಂಖ್ಯಿಕಿಯಲ್ಲಿ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ.

ಫ್ರಾನ್ಸಿಸ್ ಗಾಲ್ಟ್ಸ್ (1822-1911) ಈ ಬ್ರೀಟೀಶ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಮೂಲಭೂತಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮಾಡಿದನು ಅದರ ಪ್ರಶ್ನಾವಳಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ ಅದನ್ನು ಅನೇಕ ಜನರಲ್ಲಿ ಹಂಚುತ್ತಿದ್ದನು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ತುಂಬಿ ಕೊಡಲು ವಿನಂತಿಸುತ್ತಿದ್ದನು. ಈ ರೀತಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಜನರ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ, ಅದರ ಪೂರ್ವ ಪೀಠಿಕೆ, ಆರ್ಥಿಕಶಿಕ್ಷಿ, ಅಭಿರುಚಿ, ಆರೋಗ್ಯ ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ದೊಡ್ಡ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ನೋಂದಾಯಿಸುತ್ತಿದ್ದನು. ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಜನರ ಬೆರಳುಗಳ ಮುದ್ರೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಎಂಬ ಮಾಹಿತಿ ಆಯಿತು ಗಾಲ್ಟ್ಸ್ನು ಅನೇಕ ಜನರ ಬೆರಳುಗಳ ಮುದ್ರೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚ್ಛಿಸಿ ಅವುಗಳ ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿದನು. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಉಪಯೋಗಮಾಡಿ ಇಬ್ಬರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಬೆರಳುಗಳ ಮುದ್ರೆ ಒಂದೇ ಇರುವುದು. ಎಂಬ ಶಕೃತೆ ಶೂನ್ಯ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟನು ಆದರಿಂದ ಬೆರಳುಗಳ ಮುದ್ರೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಯಾವುದೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು. ಶಕೃತವಾಯಿತು. ಅಪರಾಧಿಯನ್ನು ಶೋಧಿಸುವ ಈ ಪದ್ಧತಿ ನ್ಯಾಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ಮನ್ನಣೆ ಪಡೆಯಿತು. ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಮತ್ತು ಮಾನವನ ಅನುವಂಶಿಕ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಆತನು ಬಹಳ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದ್ದಾನೆ.



ಫ್ರಾನ್ಸಿಸ್ ಗಾಲ್ಟ್ಸ್



ನೆನಪಿಸಿ ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ಸರ್ವೇಕ್ಷಣದಿಂದ ದೊರಿತ ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಸಾಮಗ್ರಿಯಲ್ಲಿ ಸರ್ವಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಒಂದು ಗುಣಧರ್ಮ ದೊರೆಯುವುದು. ಅದಾವದೆಂದರೆ, ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಸೂತ್ರಲು ಕೇಂದ್ರೀಕೃತ ಆಗುವ ಪ್ರವೃತ್ತಿಗೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಎನ್ನುವರು. ಈ ವಿಶಿಷ್ಟವಾದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಕ್ಕೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ ಎನ್ನುವರು.

ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಮಧ್ಯ, ಮಧ್ಯಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕ (ಬಹುಜಾಂಕ) ಇವುಗಳ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ನಾವು ಮೊದಲೇ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆ 1 : ನಿಮ್ಮ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಹುಡುಗಗಳ ಎತ್ತರ ಅಳೆದು ಅದನ್ನು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ನೋಂದಾಯಿಸಿರಿ. ಅನೇಕ ಹುಡುಗರ ಎತ್ತರ ಇದು ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸೂತ್ರ ಅಥವಾ ಅದರ ಹತ್ತಿರ ಕೇಂದ್ರೀಕೃತ ಆಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುವುದು.

ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆ 2 : ಅರಳಿಗಿಡದ ಕೆಳಗೆ ಬಿದ್ದ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಒಂದೊಂದು ಎಲೆ ಕೊಡಿರಿ. ನಿಮ್ಮಿಗೆ ಎಲೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು ದೇಟಿನಿಂದ ತುದಿಯ ತನಕ ಅಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ನೋಂದಣಿ ಮಾಡಿರಿ. ಎಲ್ಲ ನಿರೀಕ್ಷಣಗಳನ್ನು (ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು) ನೋಂದಣಿ ಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ ಒಂದು

ಈಗ ನಾವು ಸಾಂಖ್ಯಿಕ-ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣಗಳ 'ಮಧ್ಯ', 'ಮಧ್ಯಕ' ಮತ್ತು 'ಬಹುಲಕ' ಇವುಗಳ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವವರಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ಸಲುವಾಗಿ ಅದರಲ್ಲಿಯ ಪರಿಭಾಷೆ ಮತ್ತು ಚಿನ್ನೆ ಇವುಗಳ ಮಾಹಿತಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\text{ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯ} = \frac{\text{ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಬೇರೀಜು}}{\text{ಒಟ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (\text{ಇಲ್ಲಿ } x_i \text{ ಇದು } i \text{ ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಇದೆ})$$

ಮಧ್ಯ \bar{X} ದಿಂದ ದರ್ಶಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅದು ಕೊಟ್ಟ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಸರಾಸರಿ ಇರುತ್ತದೆ

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$



ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ ಮೇಲಿಂದ- ಮಧ್ಯ (Mean from classified frequency distribution)

ಯಾವಾಗ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊಡ್ಡದಿರುತ್ತದೆ, ಆವಾಗ, ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಬೇರೀಜು ಮಾಡುವುದು ಕಠಿಣ ಎನಿಸುವುದು ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ನಾವು ಬೇರೆ ಪದ್ಧತಿಯ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಲವು ಸಲ ದೊಡ್ಡ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಪ್ರಯೋಗದ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ವರ್ಗೀಕೃತ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುತ್ತಾರೆ. ಇಂತಹ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಮಾಹಿತಿ ಪರಿಶೀಲನೆ, ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಧ್ಯ ತಪ್ಪದೇ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಪದ ಸಂಖ್ಯೆ ತೆಗೆಯುವ ಅಥವಾ ಅಂದಾಜು ಮಧ್ಯ ತೆಗೆಯುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೋಣ.

ಸರಳ ಪದ್ಧತಿ (Direct Method)

ಈಗ ನಾವು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಎಂದರೆ ವರ್ಗ ಹಾಗೂ ಆವೃತ್ತತೆ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯವನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವುದು ಎಂಬುದರ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೋಣ.

ಉದಾ. : ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಮಾಡಲು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಕೆಲಸಗಾರನಿಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ವೇಳೆಯ ಆವೃತ್ತಿತೆ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಆ ಕೆಲಸ ಪೂರ್ಣಮಾಡಲು ಒಬ್ಬ ಕೆಲಸಗಾರನಿಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ವೇಳೆಯ ಮಧ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೆ ಕೆಲಸ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಲು ಬೇಕಾಗುವ ವೇಳೆ (ತಾಸು)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	10	15	12	8	5

ಉತ್ತರ :

- (1) ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಪ್ರಕಾರ ಲಂಬ ಸ್ತಂಭ ತೆಗೆದುಕೊಂಡೆವು.
- (2) ಮೊದಲನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಬರೆದವು
- (3) ಎರಡನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ x_i ಬರೆದವು.
- (4) ಮೂರನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ಆ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಕೆಲಸಗಾರರ ಆವೃತ್ತತೆ (f_i) ಬರೆದವು.
- (5) ನಾಲ್ಕನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗದ ಸಲುವಾಗಿ ($x_i \times f_i$) ಈ ಗುಣಾಕಾರ ಬರೆಯಿರಿ.
- (6) ನಂತರ $\sum_{i=1}^N x_i f_i$ ಬರೆದೆನು.
- (7) ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಧ್ಯ ತೆಗೆದೆನು.

ವರ್ಗ (ವೇಳೆ ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ)	ವರ್ಗ ಮಧ್ಯ x_i	ಆವೃತ್ತತೆ (ಕೆಲಸಗಾರರ) ಸಂಖ್ಯೆ f_i	ವರ್ಗ \times ಆವೃತ್ತತೆ $x_i f_i$
15-19	17	10	170
20-24	22	15	330
25-29	27	12	324
30-34	32	8	256
35-39	37	5	185
ಒಟ್ಟು		$\sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 1265$

$$\text{ಮಧ್ಯ} = \bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{1265}{50} = 25.3 \quad \because \sum f_i = N$$

ಒಬ್ಬ ಕೆಲಸಗಾರರಿಗೆ ಒಂದು ಕೆಲಸದನ್ನು ಪೂರ್ಣಮಾಡಲು ಬೇಕಾಗುವ ವೇಳೆಯ ಮಧ್ಯ = 25.3 ಗಂಟೆಗಳು (ಅಂದಾಜು)

ಛಛಛ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಛಛಛ

ಉದಾ. (1) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಘಟಕ ಪರಿಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿಯ ಗುಣಗಳ ಶೇಕಡಾವಾರು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಗುಣಗಳ ಶೇಕಡಾವಾರಿನ ಮಧ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗುಣಗಳ ಶೇಕಡಾವಾರು	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಖ್ಯೆ	3	7	15	20	5

ಉತ್ತರ : ಹಂತಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿರಿ.

ವರ್ಗ (ಗುಣಗಳ ಶೇಕಡಾವಾರು)	ವರ್ಗಮಧ್ಯ x_i	ಆವೃತ್ತತೆ (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಖ್ಯೆ) f_i	ವರ್ಗಮಧ್ಯ \times ಆವೃತ್ತತೆ $x_i f_i$
0-20	10	3	30
20-40	30	7	210
40-60	50	15	750
60-80	70	20	1400
80-100	90	5	450
ಒಟ್ಟು		$N = \sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 2840$

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} \\ &= \frac{2840}{50} \\ &= 56.8 \\ \therefore \text{ಗುಣಗಳ} \\ \text{ಶೇಕಡಾವಾರು} \\ \text{ಮಧ್ಯ} &= 56.8 \end{aligned}$$

ಉದಾ. (2) ಕಳೆದ ಬೇಸಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿಯ 30 ವಿವಿಧ ಗ್ರಾಮಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ದಿವಸದ ಹೆಚ್ಚಿನ ಉಷ್ಣತಾಮಾನ °C ದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿನ ಉಷ್ಣತಾಮಾನದ ಮಧ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗರಿಷ್ಠ ಉಷ್ಣತಾಮಾನ	24-28	28-32	32-36	36-40	40-44
ಪಟ್ಟಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	5	7	8	6

ಉತ್ತರ :

ವರ್ಗ (ಉಷ್ಣತಾಮಾನ °C)	ವರ್ಗ ಮಧ್ಯ x_i	ಪಟ್ಟಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ f_i	ವರ್ಗಮಧ್ಯ \times ಆವೃತ್ತತೆ $x_i f_i$
24-28	26	4	104
28-32	30	5	150
32-36	34	7	238
36-40	38	8	304
40-44	42	6	252
ಒಟ್ಟು		$N = \sum f_i = 30$	$\sum x_i f_i = 1048$

$$\text{ಮಧ್ಯ} = \bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{1048}{30} = 34.9 \text{ } ^\circ\text{C}$$

ಗೃಹಿತ ಮಧ್ಯ ಪದ್ಧತಿ (Assumed Mean Method)

ಮೇಲೆ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೇಲಿಂದ ನಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವದೇನೆಂದರೆ ಕೆಲವು ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ $x_i f_i$ ದ ಗುಣಾಕಾರ ಇದು ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಅದರಿಂದ ಸರಳ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಮಧ್ಯ ತೆಗೆಯುವುದು ಸ್ವಲ್ಪ ಕಠಿಣ ವೆನಿಸುವುದು. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ನಾವು ಇನ್ನೊಂದು ಪದ್ಧತಿಯಾದ 'ಗೃಹಿತಮಧ್ಯ ಪದ್ಧತಿ' ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಮಧ್ಯ ತೆಗೆಯುವಾಗ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೇರೀಜು ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡುವದರಿಂದ ಕೆಲಸ ಸರಳವಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ; 40, 42, 43, 45, 47, 48 ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿವೆ ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯ ತೆಗೆಯುವುದಿದೆ.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಿರೀಕ್ಷಣೆಯಿಂದ ನಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವ ದೇನೆಂದರೆ, ಈ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯ 40 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು 40 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಮಧ್ಯ ವೆಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ಇದು ಗೃಹಿತ ಮಧ್ಯ ಇದೆ. $40-40 = 0$, $42 - 40 = 2$, $43-40 = 3$, $45-40 = 5$, $47 - 40 = 7$, $48 - 40 = 8$ ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ನೋಡಿರಿ. ಇವುಗಳಿಗೆ ವಿಚಲನ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯ ತೆಗೆಯುವಾ ಅದು 40 ಈ ತಿಳಿದ ಗೃಹಿತ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಕೊಡಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಈ ಸಾಮಗ್ರಿ ದೊರೆಯುವುದು.

ಅಂದರೆ, ಮಧ್ಯ = ಗೃಹಿತಮಧ್ಯ + ಗೃಹಿತಮಧ್ಯದಿಂದ ವಿಚಲನದ ಮಧ್ಯ

$$\bar{X} = 40 + \left(\frac{0+2+3+5+7+8}{6} \right) = 40 + \frac{25}{6} = 40 + 4\frac{1}{6} = 44\frac{1}{6}$$

ಗೃಹತಮಧ್ಯದ ಸಲುವಾಗಿ A , ಮಧ್ಯದಿಂದ ವಿಚಲನದ ಸಲುವಾಗಿ d ಮತ್ತು ವಿಚಲನದ ಮಧ್ಯದ ಸಲುವಾಗಿ \bar{d} ಈ ಚಿನ್ಹೆ ತಿಳಿದುಕೊಂಡು $\bar{X} = A + \bar{d}$ ಈ ಸೂತ್ರಿಸಿಗುವುದು.

ಇದೆ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನಾವು ಗೃಹತಮಧ್ಯ 43 ತೆಗೆದುಕೊಂಡಲಿ ನೋಡೋಣ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದಿಂದ 43 ನ್ನು ವಜಾಬಾಕಿ ಅಂದರೆ ಗೃಹಿತಮಧ್ಯ ವಿಚಲನೆ ದೊರಕಿಸುವುದು.

$$40 - 43 = -3, 42 - 43 = -1, 43 - 43 = 0, 45 - 43 = 2, 47 - 43 = 4, 48 - 43 = 5$$

$$\text{ಗೃಹಿತಮಧ್ಯದಿಂದ ವಿಚಲನಗಳ ಬೇರೀಜು} = -3 - 1 + 0 + 2 + 4 + 5 = 7$$

$$\begin{aligned} \text{ಈಗ } \bar{X} &= A + \bar{d} \\ &= 43 + \left(\frac{7}{6}\right) \quad (\text{ಇಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ವಿಚಲನೆ 6 ದೆ}) \\ &= 43 + 1\frac{1}{6} \\ &= 44\frac{1}{6} \end{aligned}$$

ನಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುವದೇನೆಂದರೆ, ಈ ಪ್ರಕಾರ ಗೃಹಿತಮಧ್ಯ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಕಡಿಮೆ ಆಗುವುದು. ಅದರಂತೆ, ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಲ್ಲಿಯ ಅಥವಾ ಅನುಕೂಲಕರ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಗೃಹಿತಮಧ್ಯ ತಿಳಿದುಕೊಂಡರೆ, ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯ ಬದಲಾಗುವದಿಲ್ಲ.

ಈಗ ನಾವು ಕೊಟ್ಟ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಕೋಷ್ಟಕದ ಸಲುವಾಗಿ ಈ ಪದ್ಧತಿ ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಬರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಅಭ್ಯಸಿಸೋಣ.

ಉದಾ. : 100 ತರಕಾರಿ ಮಾರಾಟಗಾರರ ಪ್ರತಿದಿನ ಮಾರಿದ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಗೃಹಿತಮಧ್ಯ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ದೈನಂದಿನ ಮಾರಾಟದ ಮಧ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೈನಂದಿನ ಮಾರಾಟ (ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
ಮಾರಾಟಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	15	20	35	30

ಉತ್ತರ : ಗೃಹಿತಮಧ್ಯ $A = 2250$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ $d_i = x_i - A$ ಈ ವಿಚಲನೆ ಇದೆ.

ವರ್ಗ ದೈನಂದಿನ ಮಾರಾಟ (ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)	ವರ್ಗಮಧ್ಯ x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2250$	ಆವೃತ್ತತೆ (ಮಾರಾಟಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ) f_i	ಆವೃತ್ತತೆ \times ವಿಚಲನೆ $f_i d_i$
1000-1500	1250	-1000	15	-15000
1500-2000	1750	-500	20	-10000
2000-2500	2250 $\rightarrow A$	0	35	0
2500-3000	2750	500	30	15000
ಒಟ್ಟು			$N = \sum f_i = 100$	$\sum f_i d_i = -10000$

ಹಂತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರ ಮಾಡಿದೆವು.

- (1) ಗೃಹತಮಧ್ಯ $A = 2250$ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡೆವು (ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿನ ಆವೃತ್ತತೆ ಇರುವ ವರ್ಗದ ವರ್ಗತಮಧ್ಯ ಗೃಹಿತಮಧ್ಯ ತಿಳಿಯುವರು).
- (2) ಮೊದಲನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿಮಾರಾಟದ ವರ್ಗ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬರೆದೆವು.
- (3) ಎರಡನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ವರ್ಗತಮಧ್ಯ ಬರೆದೆವು.
- (4) ಮೂರನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ $d_i = x_i - A = x_i - 2250$ ದ ಬೆಲೆ ಬರೆದೆವು.
- (5) ನಾಲ್ಕನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಮಾರಾಟಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆದೆವು ಮತ್ತು ಬೇರೀಜು $\sum f_i$ ಬರೆದೆವು.
- (6) ಐದನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ $(f_i \times d_i)$ ಈ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಿ ಅದರ ಬೇರೀಜು $\sum f_i d_i$ ಮಾಡಿವೆವು ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈಗ \bar{d} ಮತ್ತು \bar{X} ತೆಗೆದೆವು.

$$\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = -\frac{10000}{100} = -100 \quad \therefore \text{ಮಧ್ಯ } \bar{X} = A + \bar{d} = 2250 - 100 = 2150$$

ದೈನಂದಿನಮಾರಾಟದ ಮಧ್ಯ = 2150 ರೂ. ಇದೆ.

ಕೃತಿ :- ಈ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಸರಳ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಝಝಝ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಝಝಝ

ಉದಾ. (1) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವ್ಯವಸಾಯಕ ಕಡೆಯ 50 ಕೆಲಸಗಾರರ ದೈನಂದಿನ ಸಂಬಳದ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಒಬ್ಬ ಕೆಲಸಗಾರನ ದೈನಂದಿನ ಸಂಬಳದ ಮಧ್ಯ ಗೃಹಿತಮಧ್ಯ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಕೆಲಸಗಾರನ ದಿವಸದ ಸಂಬಳ (ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)	200-240	240-280	280-320	320-360	360-400
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ (ಆವೃತ್ತತೆ)	5	10	15	12	8

ಉತ್ತರ : ಗೃಹಿತಮಧ್ಯ $A = 300$ ತಿಳಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗ (ಸಂಬಳ ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)	ವರ್ಗತಮಧ್ಯ x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 300$	ಆವೃತ್ತತೆ (ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ) f_i	ಆವೃತ್ತತೆ \times ವಿಚಲನೆ $f_i d_i$
200-240	220	-80	5	-400
240-280	260	-40	10	-400
280-320	300 \rightarrow A	0	15	0
320-360	340	40	12	480
360-400	380	80	8	640
ಒಟ್ಟು			$\sum f_i = 50$	$\sum f_i d_i = 320$

$$\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = \frac{320}{50} = 6.4$$

$$\begin{aligned} \text{ಮಧ್ಯ } \bar{X} &= A + \bar{d} \\ &= 300 + 6.4 \\ &= 306.40 \end{aligned}$$

ಕೆಲಸಗಾರರ ದೈನಂದಿನ ಸಂಬಳದ ಮಧ್ಯ = 306.40 ರೂಪಾಯಿ ಇದೆ.

ಮಧ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ ವಿಚಲನ ಪದ್ಧತಿ (Step deviation method)

ಈಗ ಮಧ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸರಳ ಪದ್ಧತಿ ಮತ್ತು ಗೃಹಿತಮಧ್ಯ ಪದ್ಧತಿ ಇವುಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಇನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಧ್ಯ ತೆಗೆಯುವ ಇನ್ನೊಂದು ಪದ್ಧತಿಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸೋಣ.

- ಪ್ರಥಮವಾಗಿ A ಗೃಹಿತಮಧ್ಯ ವಜಾಮಾಡಿ d_i ದ ಸ್ತಂಭ ತಯಾರಿಸೋಣ.
- ಎಲ್ಲ d_i ದ ಮಸಾವಿ g ಇದು ಸಹಜವಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತಿದ್ದರೆ $u_i = \frac{d_i}{g}$ ದ ಸ್ತಂಭ ತಯಾರಿಸುವಾ.
- ಎಲ್ಲ u_i ಈ ಸ್ತಂಭದ ಮಧ್ಯ \bar{u} ತೆಗೆಯುವಾ.
- $\bar{X} = A + \bar{u} g$ ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಮಧ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಾ.

ಉದಾ. : 100 ಕುಟುಂಬಗಳು ಆರೋಗ್ಯ ವಿಮೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ತೋಡಗಿಸಿದ ವಾರ್ಷಿಕ ರಕಮನ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಮಧ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ ವಿಚಲನ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕುಟುಂಬಗಳ ವಾರ್ಷಿಕ ರಕಮು ತೋಡಗಿಸಿದ ಮಧ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕುಟುಂಬದ ವಿಮೆಯ ರಕಮು (ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)	800-1200	1200-1600	1600-2000	2000-2400	2400-2800	2800-3200
ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	3	15	20	25	30	7

ಉತ್ತರ : A = 2200 ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ ಎಲ್ಲ d_i ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ $g = 400$ ಇದೆ

ವರ್ಗ ವಿಮೆಯ ರಕಮು (ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)	ವರ್ಗಮಧ್ಯ x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2200$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	ಆವೃತ್ತತೆ (ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ) f_i	$f_i u_i$
800-1200	1000	-1200	-3	3	-9
1200-1600	1400	-800	-2	15	-30
1600-2000	1800	-400	-1	20	-20
2000-2400	2200 → A	0	0	25	0
2400-2800	2600	400	1	30	30
2800-3200	3000	800	2	7	14
ಒಟ್ಟು				$\sum f_i = 100$	$\sum f_i u_i = -15$

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಹಂತಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ಮಾಡಿದೆ.

- (1) ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೊದಲನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ವಿಮೆಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿದ ರಕಮಿನ ವರ್ಗ ಬರೆದಿದೆ.
- (2) ಎರಡನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ವರ್ಗಮಧ್ಯ x_i ಬರೆದವು.
- (3) ಮೂರನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ $d_i = x_i - A$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ಬರೆದವು.
- (4) ಈ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆ 400 ರ ಪಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $g = 400$ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡವು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ $u_i = \frac{d_i}{g} = \frac{d_i}{400}$ ದ ಬೆಲೆ ಬರೆದವು.
- (5) ಐದನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ (ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ) ಬರೆದವು.
- (6) ಆರನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ $f_i \times u_i$ ಈ ಗುಣಾಕಾರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗದ ಸಲುವಾಗಿ ಬರೆದವು.

u_i ದ ಮಧ್ಯ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ ತೆಗೆದವು.

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{-15}{100} = -0.15$$

$$\bar{X} = A + \bar{u} g$$

$$= 2200 + (-0.15) (400)$$

$$= 2200 + (-60.00)$$

$$= 2200 - 60 = 2140$$

∴ ಕುಟುಂಬಗಳ ವಿಮೆಯ ವಾರ್ಷಿಕ ಹೂಡಿಕೆಯ ರಕಮಿನ ಮಧ್ಯ 2140 ರೂಪಾಯಿ ಇದೆ.

ಕೃತಿ : ಸರಳ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ, ಗೃಹಿತಮಧ್ಯ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ ಬಿಡಿಸಿರಿ ಯಾವುದೇ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ತೆಗೆದ ಮಧ್ಯವು ಒಂದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಎಂಬುದನ್ನು ಅನುಭವಿಸಿರಿ.

ಛಛಛ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಛಛಛ

ಉದಾ. (1) ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪೂರಗೃಹಸ್ತರ ಸಲುವಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿರುವ ಸಹಾಯ ಧನದ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿರುವ ಸಹಾಯ ಧನದ ಮಧ್ಯ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನಿಧಿ ರೂ. ಗಳಲ್ಲಿ	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ	2	4	24	18	1	1

ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರುವ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಬಹಳೇ ಕಡಿಮೆ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಕೂಡಿ ಒಂದು ವರ್ಗ ಮಾಡುವದು ಸುಲಭವಾಗುವದು. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ 0 - 500 ಮತ್ತು 500 - 1000 ಇದರ ಒಂದು ವರ್ಗ ಮತ್ತು 2000 - 2500 ಮತ್ತು 2500 - 3000 ಇವುಗಳು ಒಂದು ವರ್ಗ ಮಾಡಿದೆ.

ನಿಧಿ (ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)	0-1000	1000-1500	1500-2000	2000-3000
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	24	18	2

ಉತ್ತರ : A = 1250 ತಿಳಿಯುವಾ, ಎಲ್ಲ d_i ಅಭ್ಯಸಿಸಿ $g = 250$

ವರ್ಗ ನಿಧಿ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ)	ವರ್ಗಮಧ್ಯ x_i	$d_i = x_i - A = x_i - 1250$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	ಆವೃತ್ತತೆ f_i	$f_i u_i$
0-1000	500	-750	-3	6	-18
1000-1500	1250 → A	0	0	24	0
1500 - 2000	1750	500	2	18	36
2000-3000	2500	1250	5	2	10
ಒಟ್ಟು				$\sum f_i = 50$	$\sum f_i u_i = 28$

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{28}{50} = 0.56,$$

$$\bar{u} g = 0.56 \times 250 = 140$$

$$\bar{X} = A + g \bar{u} = 1250 + 140 = 1390$$

∴ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ, ನಿಧಿಯ ಮಧ್ಯ 1390 ರೂಪಾಯಿಗಳು ಇದೆ.

ಕೃತಿ -

1. ಇದೇ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಸರಳ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.
2. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದ ಮಧ್ಯ ಗೃಹಿತ ಮಧ್ಯ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ತೆಗೆದು ತಾಳೆ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.
3. A = 1750 ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೇಲಿನ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.1

1. ಹತ್ತನೆಯ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿಯ 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಪ್ರತಿದಿನದ ಅಭ್ಯಾಸದ ಸಲುವಾಗಿ ಕಳೆದ ಮಾಡಿದ ಗಂಟೆಗಳು ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿವರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅಭ್ಯಾಸದ ಸಲುವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ವೇಳೆಯ ಮಧ್ಯ ಸರಳ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೇಳೆ (ಗಂಟೆ)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	18	12	10	3

2. ಒಂದು ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಹೆದ್ದಾರಿಯ ಮೇಲಿನ ಜಕಾತಿ ನಾಕಾದ ಮೇಲಿನ ಮುಂಜಾನೆ 6 ರಿಂದ ಸಂಜೆ 6 ರ ಈ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ವಾಹನಗಳ ಕಡೆಯಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಕರ (ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಕರದ ಮಧ್ಯವನ್ನು ಗೃಹಿತಮಧ್ಯ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಕರ (ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	80	110	120	70	40

3. ಒಂದು ದಿನದ ಹಾಲು ಮಾರಾಟ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 50 ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ ವಿತರಣೆ ಮಾಡಿದ ಹಾಲಿನ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ವಿತರಣೆ ಮಾಡಿದ ಹಾಲಿನ ಮಧ್ಯ ಸರಳ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಾಲು ವಿತರಣೆ (ಲೀಟರಗಳಲ್ಲಿ)	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
ಗ್ರಾಹಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	17	13	10	7	3

4. ಕೆಲವು ತೋಟಗಾರರ ಕಿತ್ತಳೆ ಉತ್ಪನ್ನದ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಧ್ಯವನ್ನು ಗೃಹಿತಮಧ್ಯ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ಪನ್ನ (ಸಾವಿರು ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
ತೋಟಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	20	25	15	10	10

5. ಒಂದು ಕಂಪನಿಯಲ್ಲಿ 120 ಕೆಲಸಗಾರರ ಕಡೆಯಿಂದ ಬರಗಾಲ ಪೀಡಿತರ ಸಲುವಾಗಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ನಿಧಿಯ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಕೆಲಸಗಾರರು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ನಿಧಿಯ ಮಧ್ಯವನ್ನು 'ಮಧ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ ವಿಚಲನ' ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನಿಧಿ (ರೂ.ಗಳು)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	35	28	32	15	10

6. ಒಂದು ಕಾರಖಾನೆಯಲ್ಲಿಯ 150 ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಾಪ್ತಾಹಿಕ ಸಂಬಳದ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಾಪ್ತಾಹಿಕ ಸಂಬಳದ ಮಧ್ಯವನ್ನು 'ಮಧ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ ವಿಚಲನ' ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಪ್ತಾಹಿಕ ಸಂಬಳ (ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	25	45	50	30



ವಿಜ್ಞಾನ ಪ್ರದರ್ಶನದಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಂದ ಎರಡು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎರಡು ದಿವಸದ ಸಲುವಾಗಿ ಬೇರೆ ಪಟ್ಟಣಕ್ಕೆ ಹೋಗಿದ್ದರು. ಅವರಿಗೆ ಅವರ ಸಾಯಂಕಾಲದ ಊಟ ಎಲ್ಲಿ ಮಾಡುವದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸುವದಿತ್ತು ಕೆಲಸದ ಸ್ಥಳದಿಂದ ಒಂದು ಕಿಲೋಮೀಟರ ಅತರದ ಒಳಗೆ ಊಟ ಸಿಗುವ ಹತ್ತು ಭೋಜನಾಲಯಗಳಿವೆ ಅವರ ಊಟದ ದರ ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇವೆ.

40, 45, 60, 65, 70, 80, 90, 100 ಮತ್ತು 500

ಎಲ್ಲ ಭೋಜನಾಲಯಗಳಲ್ಲಿ ಊಟದ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆ $\frac{1130}{10} = 113$ ರೂ. ಇತ್ತು.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಯಾವ ಭೋಜನಾಲಯದಲ್ಲಿ ಊಟ ಮಾಡುವದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಬಹುದು ? 500 ರೂ. ದರದ ಊಟ ಕೊಡುವ ಭೋಜನಾಲಯ ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಎಲ್ಲ ಖಾನಾವಳಿಗಳಲ್ಲಿ 113 ರೂ. ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇತ್ತು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮಧ್ಯಮ ದರದ ಭೋಜನಾಲಯವನ್ನು ಆರಿಸಿದರು. ಮೊದಲನೆಯ ದಿವಸ 70 ರೂ. ದರದಿಂದ, ಎರಡನೆಯ ದಿವಸ 80 ರೂ. ದರದಿಂದ ಊಟ ಮಾಡಿದರು. ಮಧ್ಯದ ಬದಲಾಗಿ ಕೆಲವುಸಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಗಿಂತ ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಕ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಎಂಬುದರ ಉದಾಹರಣೆ ಇದೆ.

ಹಿಂದಿನ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಆ ವರ್ಗೀಕೃತ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಸಲುವಾಗಿ 'ಮಧ್ಯಕ' ಈ ಸಂಕಲ್ಪನೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ್ದೇವೆ.

- ಕೊಟ್ಟ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ, ಏರಿಕೆಯ ಅಥವಾ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ, ಮಂಡಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯಕ ಎನ್ನುವರು.
- ಮಧ್ಯಕ ಇದು ಕೊಟ್ಟ ಸಾಮಗ್ರಿಯನ್ನು ಎರಡು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಕೊಟ್ಟ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಮಧ್ಯಕದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗೆ ಎರಡು ಬದಿಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.
- ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ $k_1 \leq k_2 \leq k_3 \dots \dots \leq k_n$ ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯುವುದು.
- ಸಾಮಗ್ರಿಯಲ್ಲಿಯ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ವಿಷಮ ವಿದ್ಯಾಗ $\frac{n+1}{2}$ ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯಕ ಇರುವುದು, ಕಾರಣ $k_{\frac{n+1}{2}}$ ದ ಮೊದಲು $\frac{n-1}{2}$ ರಷ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಮತ್ತು ಅದರ ನಂತರವು $\frac{n-1}{2}$ ರಷ್ಟು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಇರುವುದು. $n = 2m + 1$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇದನ್ನತಾಳೆ ಹಾಕಿರಿ.
- ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ n ಇದು ಸಮ ಇದ್ದಾಗ ಮಧ್ಯಕ ಇದು ಮಧ್ಯದ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸರಾಸರಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಕಾರಣ $k_{\frac{n}{2}}$ ದ ಮೊದಲು ಮತ್ತು $k_{\frac{n+2}{2}}$ ದ ನಂತರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು $\frac{n-2}{2}$ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಇರುತ್ತವೆ. $n = 2m$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇದನ್ನು ತಾಳೆ ಹಾಕಿರಿ.
- ಅಂದರೆ $\frac{n}{2}$ ನೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು $\frac{n+2}{2}$ ನೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳ ಸರಾಸರಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಳದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದು ಆ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯಕ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ. (1) 32, 33, 38, 40, 43, 48, 50 ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮಂಡಣೆಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕನೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಮಧ್ಯದ ಮೇಲೆ ಬರುವುದು ಅಂದಾಗ ಕೊಟ್ಟ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯಕ = 40

ಉದಾ. (2) 61, 62, 65, 66, 68, 70, 74, 75 ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ. 8 ಅಂದರೆ ಸಮ ಇದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ ನಾಲ್ಕನೇಯ ಮತ್ತು ಐದನೇಯ ಹೀಗೆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಧ್ಯದ ಮೇಲೆ ಇವೆ. ಅವು 66 ಮತ್ತು 68 ಇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯಕ = $\frac{66+68}{2} = 67$



ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ, ಮಧ್ಯಕ (Median from grouped frequency distribution)

ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊಡ್ಡದಿದ್ದರೆ, ಆವಾಗ ಈ ರೀತಿ ಮಂಡನೆ ಮಾಡಿ ಮಧ್ಯಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು ಕ್ಲಿಷ್ಟಕರ ವೆನಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ನಾವು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆಯ ಅಂದಾಜು ಮಧ್ಯಕ ತೆಗೆಯುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಭ್ಯಸಿಸೋಣ.

ಉದಾ. 6, 8, 10.4, 11, 15.5, 12, 18 ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ವರ್ಗೀಕೃತ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಮುಂದೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ವರ್ಗ	ತಾಳೆಯಗುರುತು	ಆವೃತ್ತತೆ
6-10		2
11-15		2
16-20		1

ವರ್ಗ	ತಾಳೆಯಗುರುತು	ಆವೃತ್ತತೆ
5.5-10.5		3
10.5-15.5		2
15.5-20.5		2

ಮೊದಲನೆಯ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 10.4 ಮತ್ತು 15.5 ಈ ಎರಡು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಾವಿಷ್ಟ ಮಾಡಲು ಬರಲಿಲ್ಲ. ಕಾರಣ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 6-10, 11-15, 16-20 ಈ ಪೈಕಿ ಯಾವ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಸಮಾವಿಷ್ಟವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಇಂತಹ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ನಿರಂತರ ಮಾಡುವರು. ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

ಈ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಮರ್ಯಾದೆ 0.5 ನಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು 0.5 ರಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿದಾಗ ದೊರೆತ ಎರಡನೆಯ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಾಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ 15.5 ಈ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 15.5 - 20.5 ಈ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಸಮಾವಿಷ್ಟವಾಗುವುದು.

ನಿರಂತರ ಪದ್ಧತಿ ಬದಲಾದರೆ, ಆವೃತ್ತತೆ ಬದಲಾಗುವುದು. ಇದು ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ ಗಮನದಲ್ಲಿ ಬರುವುದು.



ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿ.

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 6-10 ಈ ವರ್ಗದ ಸಲುವಾಗಿ ವರ್ಗಮಧ್ಯ = $\frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8$;

ಅದರಂತೆ 5.5-10.5 ಈ ವರ್ಗದ ಸಲುವಾಗಿ = $\frac{5.5+10.5}{2} = \frac{16}{2} = 8$.

ಅಂದರೆ ವರ್ಗದ ರಚನೆಯನ್ನು ಬೇರೆ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಮಾಡಿದರೂ ಸಹ ವರ್ಗ ಮಧ್ಯ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಇದನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಡಿ.

ಮಾದರಿಯ ಉದಾಹರಣೆ

10ನೇ ಇಯತ್ತೆಯ ಸರಾವ ಪರಿಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪಡೆದ 100 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗುಣಗಳ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಮುಂದೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗುಣಗಳ ಮಧ್ಯಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗುಣಗಳು	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	20	30	40	6

ಉತ್ತರ : N = 100

$\frac{N}{2} = 50$ ಆದ್ದರಿಂದ 50ನೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದು ಅಂದಾಜು ಮಧ್ಯಕ ಇದೆ. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ 50ನೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತದೆ ಇದನ್ನು ನಮಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದಿದೆ. 'ಮೇಲಿನ ವರ್ಗ ಮರ್ಯಾದೆಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ' ಪ್ರಕಾರದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಇದನ್ನು ಶೋಧಿಸಲು ಬರುವುದು. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ನಾವು ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ 'ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ' ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ' ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸುವಾ.

ವರ್ಗ (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗುಣಗಳು)	ಆವೃತ್ತತೆ (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ) f_i	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ (ಕ್ರಿಂತ ಕಡಿಮೆ) cf
0-20	4	4
20-40	20	24
40-60	30	54
60-80	40	94
80-100	6	100

ಈ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ

- $\frac{N}{2} = 50$ ಈ ಕ್ರಮಾಂಕದ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 40-60 ಈ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಇದೆ ಯಾವ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಕ ಬರುವುದೋ ಆ ವರ್ಗಕ್ಕೆ 'ಮಧ್ಯಕವರ್ಗ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ 40 - 60 ಇದು ಮಧ್ಯಕವರ್ಗ ಇದೆ.
- 40-60 ಈ ವರ್ಗದ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗ ಮರ್ಯಾದೆ 40 ಇದೆ ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತತೆ 30 ಇದೆ.
- ಈ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಮೊದಲಿನ 50 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಪೈಕಿ 24 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು 40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇವೆ. ಉಳಿದ $50 - 24 = 26$ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ (40 - 60) ಈ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಅದರಲ್ಲಿಂದ 50 ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ಅಂದಾಜನ್ನು ಮುಂದಿನಂತೆ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ.
- ಈ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಒಟ್ಟು 30ರ ಪೈಕಿ 26 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 50ನೇಯ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದ ವರೆಗೆ ಇವೆ. ಮತ್ತು ವರ್ಗಾಂತರ 20 ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 50 ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 40 ಕ್ಕಿಂತ $\frac{26}{30} \times 20$ ರಿಂದ ದೊಡ್ಡದಿದೆ. ಹೇಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತಾರೆ.

$$\text{ಆ ಅಂದಾಜು } 40 + \frac{26}{30} \times 20 = 40 + \frac{52}{3} = 57\frac{1}{3} \text{ ಇದೆ.}$$

$$\therefore \text{ ಮಧ್ಯಕ } = 57\frac{1}{3}$$

- ಸೂತ್ರರೂಪದಿಂದ ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\text{ಮಧ್ಯಕ} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \right] \times h$$

ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ L = ಮಧ್ಯಕ ವರ್ಗದ ಕೆಳಗಿನ ಸೀಮೆ. N = ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತತೆ

h = ಮಧ್ಯಕ ವರ್ಗದ ವರ್ಗಾಂತರ f = ಮಧ್ಯಕ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ

cf = ಮಧ್ಯಕ ವರ್ಗದ ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಗದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ; $\frac{N}{2} = 50$, $cf = 24$, $h = 20$, $f = 30$, $L = 40$,

$$\begin{aligned} \text{ಮಧ್ಯಕ} &= L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \right] \times h \dots \dots \dots (\text{ಸೂತ್ರ}) \\ &= 40 + \left(\frac{50 - 24}{30} \right) \times 20 \\ &= 40 + \frac{26 \times 20}{30} \\ &= 40 + 17\frac{1}{3} \\ &= 57\frac{1}{3} \end{aligned}$$



ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ.

- ◆ ಮಧ್ಯಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗಗಳು ನಿರಂತರ ಇರದಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ನಿರಂತರ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುವುದು.
- ◆ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅತಿ ದೊಡ್ಡದಿದ್ದರೆ ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ ಬರೆಯುವುದು ಕಠಿಣ ವೆನಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮಂಡನೆಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕೃತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮಾಡುವರು. ಇಂತಹ ವರ್ಗೀಕೃತ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯಕ ತಪ್ಪದೇ ತೆಗೆಯುವುದು ಶಕ್ಯವಿರುವುದಿಲ್ಲ ಆದರೆ, ಅಂದಾಜು ಮಧ್ಯಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಮುಂದಿನ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ.

$$\text{ಮಧ್ಯಕ} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \right] \times h$$

ಛಛಛ ಬಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಛಛಛ

ಉದಾ. (1) ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಸಾಂಗಸಂಪರ್ಕ ಸೇವೆಯ 60 ಬಸ್ಸುಗಳು ಒಂದು ದಿವಸದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸಿದ ಅಂತರ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಬಸ್ಸುಗಳು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸಿದ ಅಂತರದ ಮಧ್ಯಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರತಿದಿನ ಕ್ರಮಿಸಿದ ಅಂತರ (ಕಿಮೀ)	200-209	210-219	220-229	230-239	240-249
ಬಸ್ಸುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	14	26	10	6

ಉತ್ತರ : (1) ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗಗಳು ನಿರಂತರ ಇಲ್ಲ.

ಒಂದು ವರ್ಗದ ಮೇಲಿನ ಮಾರ್ಯಾದೆ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ವರ್ಗದ ಕೆಳಗಿನ ಮಾರ್ಯಾದೆ ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1 ಇದೆ.

∴ $1 \div 2 = 0.5$ ಈ ಬೆಲೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗದ ಕೆಳಗಿನ ಮಾರ್ಯಾದೆಯಿಂದ ವಜಾ ಮಾಡೋಣ ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ವರ್ಗ ಮಾರ್ಯಾದೆಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿ ವರ್ಗ ಸೀಮೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸುವುದು. ಅದರ ಅನುಸಾರ ನಿರಂತರ ವರ್ಗ ಮಾಡುವಾ ಮತ್ತು ಹೊಸ ಕೋಷ್ಟಕ ಬರೆಯುವಾ.

(2) ನಂತರ ಅದರಲ್ಲಿ 'ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ'ಯ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಸ್ತಂಭ ತಯಾರಿಸುವಾ.

ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗ	ನಿರಂತರ ಮಾಡಿದ ವರ್ಗ	ಆವೃತ್ತತೆ f_i	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ (ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ)
200-209	199.5-209.5	4	4
210-219	209.5-219.5	14	18 → cf
220-229	219.5-229.5	26 → f	44
230-239	229.5-239.5	10	54
240-249	239.5-249.5	6	60

ಇಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಆವೃತ್ತತೆ = $\sum f_i = N = 60$ ∴ $\frac{N}{2} = 30$. ∴ ಅಂದಾಜು ಮಧ್ಯಕ ಇದು 30 ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ

ಮೊದಲು 18ನೇ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 219.5 ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ $30 - 18 = 12$ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 219.5 - 229.5 ಈ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಮಧ್ಯಕ ವರ್ಗ ಇದೆ.

219.5-229.5 ಈ ವರ್ಗದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ 44 ಇದೆ.

ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ

$L =$ ಮಧ್ಯಕ ವರ್ಗದ ಕೆಳಗಿನ ಮಿತಿ = 219.5, $h =$ ಮಧ್ಯಕ ವರ್ಗದ ವರ್ಗಾಂತರ = 10

$cf =$ ಮಧ್ಯಕ ವರ್ಗದ ಮುಂಚಿನ ಸಂಚಿತ (ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ) ಆವೃತ್ತತೆ = 18,

$f =$ ಮಧ್ಯಕ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ = 26

$$\text{ಮಧ್ಯಕ} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \right] \times h$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{ಮಧ್ಯಕ} &= 219.5 + \left(\frac{30-18}{26}\right) \times 10 \\
&= 219.5 + \left(\frac{12 \times 10}{26}\right) \\
&= 219.50 + 4.62 \\
&= 224.12
\end{aligned}$$

ಬಸ್ಸುಗಳ ದೈನಂದಿನ ಅಂತರದ ಮಧ್ಯಕ = 224.12 ಕಿಮೀ

ಉದಾ. (2) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಸ್ತು ಸಂಗ್ರಾಹಾಲಯಕ್ಕೆ ಭೆಟ್ಟಿ ಕೊಡುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ವಯಸ್ಸು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ವಯಸ್ಸುಗಳ ಮಧ್ಯಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು ವರ್ಷಗಳು	ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	3
20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	10
30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	22
40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	40
50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	54
60 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	71

ಉತ್ತರ : ಇಲ್ಲಿ ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರಥಮ ಈ ಎಲ್ಲ ವರ್ಗಗಳ ನಿಜವರ್ಗ ಮಾರ್ಯಾದೆ ದೊರಕಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ನಮಗೆ ಗೂತ್ತಿದ್ದಂತೆ 'ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ' ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ ಈ ವರ್ಗದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗ ಮಾರ್ಯಾದೆಗೆ ಸಂಬಂಧ ಇರುವುದು. ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಗದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗ ಮಾರ್ಯಾದೆ 10 ಇದೆ. ಯಾವುದೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವಯಸ್ಸು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಗ 0-10 ಹೀಗೆ ಇರಬಹುದು ಎರಡನೆಯ ವರ್ಗದ ಮೇಲಿನ ಮಾರ್ಯಾದೆ 20 ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡನೆಯ ವರ್ಗ 10-20 ಆಗುವುದು. ಈ ಪ್ರಕಾರ ವರ್ಗಾಂತರ 10 ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕ್ರಮದಿಂದ ವರ್ಗ ತಯಾರಿಸಿದರು. ಈ ಪ್ರಕಾರ ಕೊನೆಯ ವರ್ಗ 50-60 ಆಗುವುದು. ಈ ಪ್ರಕಾರ ನಮಗೆ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವರ್ಗ ಬರೆಯಲು ಬರುವುದು.

ವಯಸ್ಸು ವರ್ಷ	ವರ್ಗ	ಆವೃತ್ತತೆ (ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ)	ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ
10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	0-10	3	3
20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	10-20	10 - 3 = 7	10
30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	20-30	22 - 10 = 12	22 → cf
40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	30-40	40 - 22 = 18 → f	40
50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	40-50	54 - 40 = 14	54
60 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	50-60	71 - 54 = 17	71

$$\text{ಇಲ್ಲಿ } N = 71 \therefore \frac{N}{2} = 35.5 \text{ ಮತ್ತು } h = 10$$

35.5 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 30-40 ಈ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಮಧ್ಯಕ ವರ್ಗ ಇದೆ. ಅದರ ಮುಂಚಿನ ವರ್ಗದ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆ 22 ಇದೆ. ಅದರಿಂದ $cf = 22$, $L = 30$, $f = 18$.

$$\begin{aligned} \text{ಮಧ್ಯಕ} &= L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \right] \times h \\ &= 30 + (35.5 - 22) \frac{10}{18} \\ &= 30 + (13.5) \frac{10}{18} \\ &= 30 + 7.5 \\ &= 37.5 \end{aligned}$$

\therefore ಭೆಟ್ಟಿ ಕೊಡುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ವಯಸ್ಸಿನ ಮಧ್ಯಕ = 37.5 ವರ್ಷಗಳು

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಾಪ್ಲವೇರ ಕಂಪನಿಯಲ್ಲಿ ದೈನಂದಿನ ಕೆಲಸದ ಗಂಟೆ (ತಾಸು) ಮತ್ತು ಅಷ್ಟೇ ವೇಳೆಯ ಕೆಲಸಮಾಡುವ ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಕಂಪನಿಯಲ್ಲಿಯ ಕೆಲಸಗಾರರ ದೈನಂದಿನ ಕೆಲಸದ ಗಂಟೆಗಳ ಮಧ್ಯಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ದೈನಂದಿನ ಕೆಲಸದ ಗಂಟೆ	8-10	10-12	12-14	14-16
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	150	500	300	50

2. ಒಂದು ತೋಟದಲ್ಲಿಯ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಗಿಡಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಿಡದಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300
ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	33	30	90	80	17

3. ಮುಂಬಯಿ-ಪುಣೆ ದೃಶಗತಿ ಮಾರ್ಗದ ಸಾರಿಗೆಯ ನಿಯಂತ್ರಣ ಮಾಡುವ ಪೋಲಿಸ್ ತಾಣೆಯ ಮೇಲಿನ ಸರ್ವೇಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನೀರಿಕ್ಷಣ ದೊರೆತಿದೆ. ಕೊಟ್ಟ ನೊಂದಣಿಯ ಮಧ್ಯಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಾಹನಗಳ ಗತಿ ಕಿಮೀ/ತಾಸು	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89
ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	10	34	55	85	10	6

4. ವಿವಿಧ ಕಾರಖಾನೆಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದನೆ ಆಗುವ ದೀಪಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ (ಸಾವಿರದಲ್ಲಿ) ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ದೀಪಗಳ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಮಧ್ಯಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೀಪಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಸಾವಿರದಲ್ಲಿ)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ಕಾರಖಾನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	12	35	20	15	8	7	8



ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆ ಬಹುಜಾಂಕ (Mode from grouped frequency distribution)

ಕೊಟ್ಟ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಸಲಬಂದಿರುವ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವೇ 'ಬಹುಜಾಂಕ' ಆಗಿರುವುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

ಉದಾ.- ಹರಣಾರ್ಥ ಯಾವುದೇ ದ್ವಿಚಕ್ರ ಉತ್ಪಾದಕ ಕಂಪನಿಯು ವಿವಿಧ ಬಣ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ದ್ವಿಚಕ್ರ ವಾಹನಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುವುದು. ಯಾವ ಬಣ್ಣದ ವಾಹನದ ಬೇಡಿಕೆ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ. ಇದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಲುವಾಗಿ ಆ ಕಂಪನಿಗೆ ಬಣ್ಣದ ಬಹುಜಾಂಕ ಗೊತ್ತಿರುವುದು ಅವಶ್ಯಕವಿದೆ. ಅದೇ ಪ್ರಕಾರ ವಿವಿಧ ಉತ್ಪಾದನೆ ಇರುವ ಯಾವುದೇ ಕಂಪನಿಗೆ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬೇಡಿಕೆ ಯಾವ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಇದೆ. ಇದನ್ನು ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳುವ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಯಾಗುವುದು ಇಂತಹ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಆ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಬಹುಜಾಂಕ ತೆಗೆಯ ಬೇಕಾಗುವುದು.

ಈಗ ನಾವು ಅವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ ಬಹುಜಾಂಕ ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

ಈಗ ನಾವು ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಅಂದಾಜು ಬಹುಜಾಂಕ ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸೋಣ.

ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಮುಂದಿನ ಸೂತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ.

$$\text{ಬಹುಜಾಂಕ} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h$$

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ, L = ಬಹುಜಾಂಕ ವರ್ಗದ ಕೆಳಗಿನಮಿತಿ

$$f_1 = \text{ಬಹುಜಾಂಕ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ}$$

$$f_0 = \text{ಬಹುಜಾಂಕ ವರ್ಗದ ಮುಂಚಿನ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ}$$

$$f_2 = \text{ಬಹುಜಾಂಕ ವರ್ಗದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ}$$

$$h = \text{ಬಹುಜಾಂಕ ವರ್ಗದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ}$$

ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಂದಾಜು ಬಹುಜಾಂಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೇಲಿಂದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೋಣ.

ಶಶಶ ಬಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಶಶಶ

ಉದಾ. (1) ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕ್ರೀಡಾಂಗಣದ ಮೇಲೆ ಆಡಲು ಬರುವ ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅವರ ವಯಸ್ಸಿನ ಗುಂಪು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಕ್ರೀಡಾಂಗಣದ ಮೇಲೆ ಆಡುವ ಹುಡುಗರ ವಯಸ್ಸಿನ ಬಹುಜಾಂಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹುಡುಗರ ವಯಸ್ಸಿನ ಗುಂಪು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆ	43	58 $\rightarrow f_0$	70 $\rightarrow f_1$	42 $\rightarrow f_2$	27

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ ಹೀಗೆ ಗಮನದಲ್ಲಿ ಬರುವುದು, 10-12 ಈ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ.

ಉತ್ತರ: ಇಲ್ಲಿ $f_1 = 70$, 10-12 ಇದು ಬಹುಜಾಂಕದ ವರ್ಗ ಇದೆ.

\therefore ಕೊಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ

$$L = \text{ಬಹುಜಾಂಕ ವರ್ಗದ ಕೆಳಗಿನ ಮಿತಿ} = 10$$

$$h = \text{ಬಹುಜಾಂಕ ವರ್ಗದ ವರ್ಗಾಂತರ} = 2$$

$$f_1 = \text{ಬಹುಜಾಂಕ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ} = 70$$

$$f_0 = \text{ಬಹುಜಾಂಕ ವರ್ಗದ ಮುಂಚಿನ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ} = 58$$

$$f_2 = \text{ಬಹುಜಾಂಕ ವರ್ಗದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ} = 42$$

$$\begin{aligned} \text{ಬಹುಜಾಂಕ} &= L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h \\ &= 10 + \left[\frac{70 - 58}{2(70) - 58 - 42} \right] \times 2 \\ &= 10 + \left[\frac{12}{140 - 100} \right] \times 2 \\ &= 10 + \left[\frac{12}{40} \right] \times 2 \\ &= 10 + \frac{24}{40} \\ &= 10 + 0.6 \\ &= 10.6 \end{aligned}$$

\therefore ಕ್ರೀಡಾಂಗಣದ ಮೇಲೆ ಆಡುವ ಹುಡುಗರ ವಯಸ್ಸಿನ ಬಹುಜಾಂಕ = 10.6 ವರ್ಷಗಳು.

ಉದಾ. (2) ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟೋಲ ಪಂಪಿನ ಮೇಲಿನ ಪೆಟ್ಟೋಲ ತುಂಬಿಕೊಳ್ಳುವ ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ವಾಹನಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದ ಪೆಟ್ಟೋಲ ಇವುಗಳ ಮಾಹಿತಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ವಾಹನಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದ ಪೆಟ್ಟೋಲದ ಘನಪರಿಮಾಣದ ಬಹುಜಾಂಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತುಂಬಿದ ಪೆಟ್ಟೋಲ (ಲೀಟರಗಳಲ್ಲಿ)	1-3	4-6	7-9	10-12	13-15
ವಾಹನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	33	40	27	18	12

ಉತ್ತರ : ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗಗಳು ನಿರಂತರ ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ನಾವು ನಿರಂತರ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ ವರ್ಗ ನಿರಂತರ ವಿರದಿದ್ದರೆ ಸಾಮಗ್ರಿಯಲ್ಲಿಯ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಅಂತರ್ಭೂತ ಆಗುತ್ತವೆ ಎಂದಲ್ಲ ಮೊದಲು ವರ್ಗಗಳನ್ನು ನಿರಂತರ ಮಾಡಿ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸುವಾ.

ವರ್ಗ	ನಿರಂತರ ಮಾಡಿದ ವರ್ಗ	ಆವೃತ್ತತೆ
1-3	0.5-3.5	33 $\rightarrow f_0$
4-6	3.5-6.5	40 $\rightarrow f_1$
7-9	6.5-9.5	27 $\rightarrow f_2$
10-12	9.5-12.5	18
13-15	12.5-15.5	12

ಇಲ್ಲಿ $f_1 =$ ಬಹುಜಾಂಕ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ = 40, ಬಹುಜಾಂಕದ ವರ್ಗ 3.5-6.5

$$\begin{aligned} \text{ಬಹುಜಾಂಕ} &= L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h \\ \text{ಬಹುಜಾಂಕ} &= 3.5 + \left[\frac{40 - 33}{2(40) - 33 - 27} \right] \times h \\ &= 3.5 + \left[\frac{7}{80 - 60} \right] \times 3 \\ &= 3.5 + \frac{21}{20} \\ &= 3.5 + 1.05 \\ &= 4.55 \end{aligned}$$

\therefore ವಾಹನದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದ ಪೆಟ್ಟೋಲದ ಘನಪರಿಮಾಣದ ಬಹುಜಾಂಕ = 4.55 ಲೀಟರ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.3

1. ಒಂದು ಹಾಲಿನ ಸಂಕಲನ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಒಕ್ಕಲಿಗರ ಕಡೆಯಿಂದ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ ಆಕಳ ಹಾಲು ಮತ್ತು ಲ್ಯಾಕ್ಟೋಮೀಟರನಿಂದ ಆಳಿದ ಹಾಲಿನ ಕೊಬ್ಬಿನಾಂಶದ ಪ್ರಮಾಣ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಹಾಲಿನಲ್ಲಿಯ ಕೊಬ್ಬಿನಾಂಶದ ಪ್ರಮಾಣದ ಬಹುಜಾಂಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಾಲಿನಲ್ಲಿಯ ಕೊಬ್ಬಿನಾಂಶ (%)	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
ಸಂಕಲಿತ ಹಾಲು (ಲೀಟರ)	30	70	80	60	20

2. ಕೆಲವು ಕುಟುಂಬದ ಮಾಸಿಕ ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಕೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಕೆಯ ಬಹುಜಾಂಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಕೆ (ಯುನಿಟಗಳು)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	13	50	70	100	80	17

3. ಚಹಾದ 100 ಹೋಟೆಲಗಳಿಗೆ ಪೂರೈಸಿದ ಹಾಲು ಮತ್ತು ಹೋಟೆಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳ ವರ್ಗೀಕೃತ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಪೂರೈಸಿದ ಹಾಲಿನ ಬಹುಜಾಂಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಹಾಲು ಲೀಟರಗಳಲ್ಲಿ	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
ಅಂಗಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	5	15	20	35	18

4. ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 200 ರೋಗಿಗಳ ವಯಸ್ಸು ಮತ್ತು ಉಪಚಾರ ಮಾಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ರೋಗಿಗಳ ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ರೋಗಿಗಳ ವಯಸ್ಸಿನ ಬಹುಜಾಂಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷ)	5 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29
ರೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	38	32	50	36	24	20

ಕೃತಿ :-

- ನಿಮ್ಮ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ 20 ಹುಡುಗರ ತೂಕದ ಮಧ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ನಿಮ್ಮ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಹುಡುಗರ ಶರ್ತುಗಳ ಅಳತೆಯ ಬಹುಜಾಂಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.
- ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತಮ್ಮ ನಾಡಿಯ ಒಂದು ಮಿನಿಟಿನಲ್ಲಿ ನಾಡಿ ಬಡಿತ ಅಳೆಯಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದರ ನೋಂದಣಿ ಮಾಡಿರಿ. ಈ ನೋಂದಣಿಯ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸಿರಿ. ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ನಾಡಿಯ ಬಡಿತದ ಬಹುಜಾಂಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.
- ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಉತ್ತರದ ನೋಂದಣಿ ಮಾಡಿರಿ. ಆ ನೋಂದಿಯ ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡಿರಿ. ಉತ್ತರದ ಮಧ್ಯಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಮಧ್ಯ, ಮಧ್ಯಕ ಮತ್ತು ಬಹುಜಾಂಕ ಇವುಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದೆವು. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಯಾವ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಅರಿಸಬೇಕು ಇದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಅದನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಉದ್ದೇಶ ನಮಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಮಾಹಿತಿ ಇರುವುದು ಅವಶ್ಯಕ ಇದೆ.

ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ 10ನೇಯ ಐದು ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವ ವಿಭಾಗ ಅಂತರ್ಗತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಇದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸುವಾಗ ಆ ಐದು ವಿಭಾಗಗಳ ಅಂತರ್ಗತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿಯ ಗುಣಗಳ 'ಮಧ್ಯ' ತಗೆಯ ಬೇಕಾಗುವುದು.

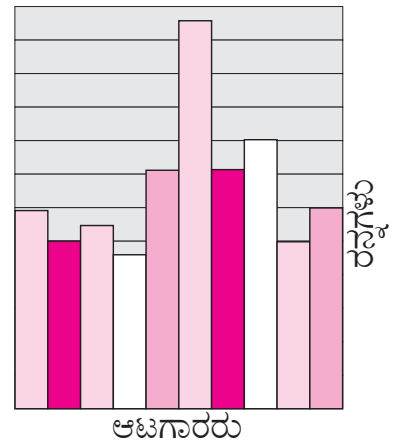
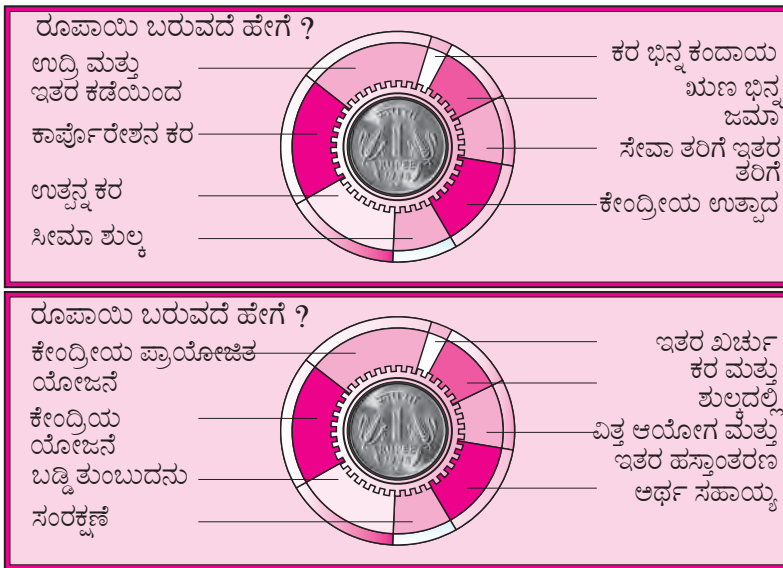
ಯಾವುದೇ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ಹುಡುಗರ ಅವರ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿಯ ಗುಣಗಳ ಮೇಲಿಂದ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡುವದಿದ್ದರೆ. ಆ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿಯ ಹುಡುಗರ ಗುಣಗಳ 'ಮಧ್ಯಕ' ಈ ಪರಿಮಾಣ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುವುದು.

ಖಡು (ಬಳಪ) ತಯಾರಿಸುವ ಯಾವುದೇ ಬಚತ ಗುಂಪಿಗೆ ಯಾವ ಪ್ರಕಾರದ ಬಣ್ಣದ ಬಡುಗಳ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೇಡಿಕೆ ಇದೆ. ಎಂಬುದನ್ನು ಶೋಧಿಸುವದಿದ್ದರೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ 'ಬಹುಜಾಂಕ' ಈ ಪರಿಮಾಣ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳ ಬೇಕಾಗುವುದು.

ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಚಿತ್ರರೂಪ ಸಾದರಿಕರಣ (Pictorial representation of statistical data)

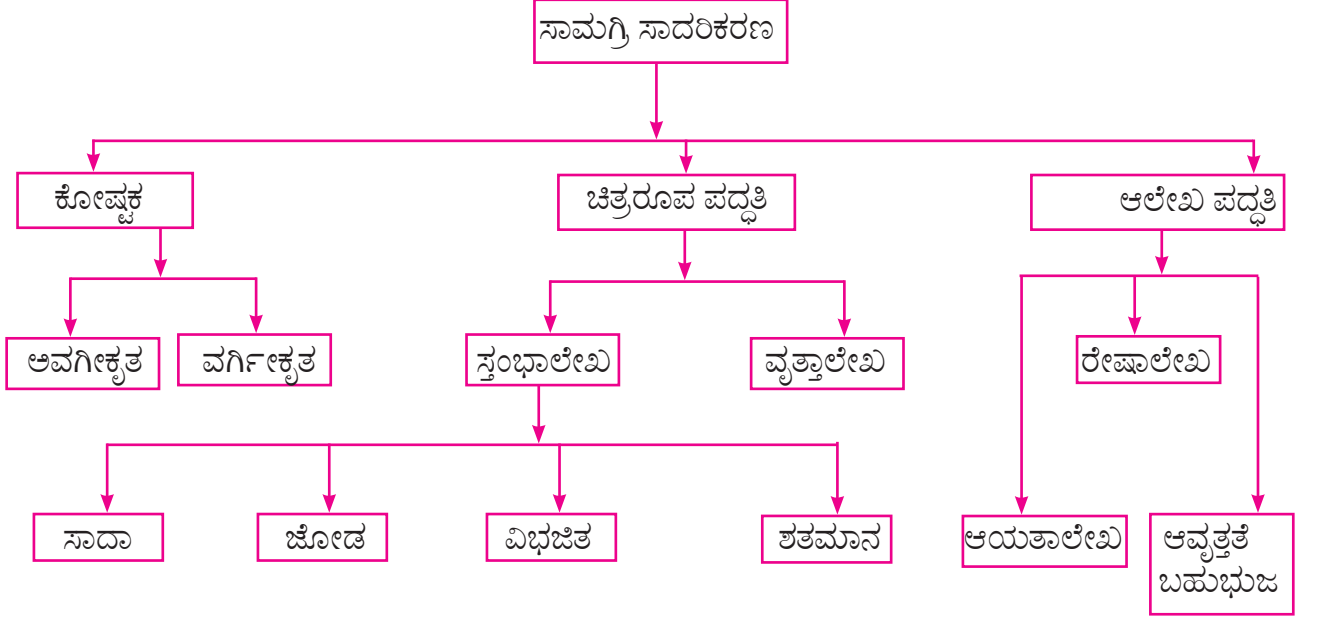
ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಮಾಹಿತಿಯ ಮಧ್ಯ, ಮಧ್ಯಕ, ಬಹುಜಾಂಕ ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಅಥವಾ ಮಾಹಿತಿಯ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡಿ ಅದರ ಉಪಯೋಗವು ಕೆಲವು ವಿಶಿಷ್ಟ ನಿಷ್ಕರ್ಷೆ ದೊರಕಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಆಗುವುದು.

ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಾದರ ಪಡಿಸುವ ಒಂದು ಪದ್ಧತಿ. ಅಂದರೆ, ಕೋಷ್ಟಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಾಮಗ್ರಿಯನ್ನು ಮಂಡಿಸುವುದು. ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಆದರೆ, ಕೋಷ್ಟಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುವುದರಿಂದ ಕೆಲವು ಬಾಬತ್ತುಗಳು ಬೇಗನೆ ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಬರುವದಿಲ್ಲ. ಸಾಮಾನ್ಯ ಜನರಿಗೆ, ತಿಳಿಯುವ ಸಲುವಾಗಿ, ಅದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜನರ ಲಕ್ಷವನ್ನು ಸಾಮಗ್ರಿಯಲ್ಲಿಯ ಮಹತ್ವದ ಅಂಶಗಳ ಕಡೆಗೆ ವೇಧಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ. ಆ ಮಾಹಿತಿಯ ಸಾದರಕರಣವನ್ನು ಬೇರೆ ಪ್ರಕಾರದಲ್ಲಿ ಮಾಡಲು ಬರುವುದು. ಎಂಬುದರ ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಅರ್ಥ ಸಂಕಲ್ಪದಲ್ಲಿಯ ಸಂಗತಿಗಳು. ಆಟದಲ್ಲಿ ಮಾಹಿತಿ ಇತ್ಯಾದಿ.



ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಪ್ರತಿರೂಪಣೆ (Presentation of Data)

ಚಿತ್ರರೂಪ ಮತ್ತು ಆಲೇಖರೂಪ ಪ್ರತಿರೂಪಣೆ ಇದು ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಅರ್ಥಬೋಧ. ಆಗುವ ಸಲುವಾಗಿ ಒಂದು ಲಕ್ಷ್ಯ ವೇದಿ ಪ್ರಕಾರ ಆಗಿದೆ. ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಸಾದರಿಕರಣದ ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರದ ಪದ್ಧತಿ ದರ್ಶಿಸುವ ಶಾಖಾಕೃತಿ (tree chart) ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದೆ.



ಹಿಂದಿನ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಇವುಗಳಲ್ಲಿಯ ಕೆಂಪು ಪದ್ಧತಿಗಳ ಮತ್ತು ಆಲೇಖಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ಆಯತಾಲೇಖ, ಆವೃತ್ತತೆಯ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಾಲೇಖಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಪ್ರತಿರೂಪಣೆ ಹೇಗೆ ಮಾಡಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಫ್ಲಾರೆನ್ಸ್ ನೈಟಿಂಗೇಲ (1820-1910) ಸ್ತ್ರೀಗೆ ಉತ್ಕೃಷ್ಟ ಮತ್ತು ಧೈಯ ನಿಷ್ಠೆ ಪರಿಚಾರಿಕೆ ಎಂದು ಗುರುತಿಸುವರು. ಸೀಮಿಯನ್ ಯುದ್ಧದಲ್ಲಿ ಗಾಯಗೊಂಡ ಸೈನಿಕರಿಗೆ ಶೂಶ್ರೂಷಮಾಡಿ ಅವರು ಅನೇಕರ ಪ್ರಾಣ ಉಳಿಸಿದರು. ಸಂಖ್ಯಾ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ ಫ್ಲಾರೆನ್ಸ್ ನೈಟಿಂಗೇಲ ಇವರು ಮೂಲಭೂತ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ. ಅನೇಕ ಸೈನಿಕರ ಆವಸ್ಥೆ ಅವರ ಮೇಲೆ ಮಾಡಿದ ಉಪಚಾರ ಮತ್ತು ಅದರ ಉಪಯೋಗ ಆ ಎಲ್ಲವುಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ನೋಂದಣಿಮಾಡಿ ಮಹತ್ವದ ನಿಷ್ಕರ್ಷ ತೆಗೆದರು. ಸೈನಿಕರ ಮರಣಕ್ಕೆ ಅವರಿಗೆ ಆದ ಗಾಯಗಳಿಗಿಂತ, ವಿಷಮ ಜ್ವರ, ಕಾಲಾರಾ, ಇಂತಹ ರೋಗಗಳು ಕಾರಣಭೂತವಾಗಿದ್ದವು. ಅವುಗಳ ಕಾರಣಗಳು ಪರಿಸರದ ಅಸ್ವಚ್ಛತೆ, ಕುಡಿಯುವ ದೂಷಿತ ನೀರು, ರೋಗಿಗಳು ಜನದಟ್ಟಣೆಯಿಂದ ಇರುವುದು, ಈ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಬೇಗನೇ ಗಮನ ಮತ್ತು ಸ್ವಚ್ಛತೆಯ ನಿಯಮ ಪಾಲಿಸಿ ಅವರು ಸೈನಿಕರ ಮೃತ್ಯುದರವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರು. ಪಟ್ಟಣದ ಆರೋಗ್ಯ ಸುಧಾರಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ. ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಮಲ ನಿಸ್ಸಾರಣ ಮಾಡುವ ಚರಂಡಿ ಮತ್ತು ಅನೇಕ ನೀರಿಕ್ಷಣೆಯಿಂದ ಮಾಡಿದ ಉತ್ತಮ ನೋಂದಣಿ, ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಆಧಾರ ವಿಶ್ಲಾರ್ಷತೆ ನಿಷ್ಕರ್ಷ ತೆಗೆಯಲು ಸಹಾಯ ಆಗುವುದು. ಇದು ಅವರ ಕೆಲಸದಿಂದ ಕಾಣಿಸುವುದು.





ಆಯತಾಲೇಖ: Histogram

ಆಯತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ನಾವು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ

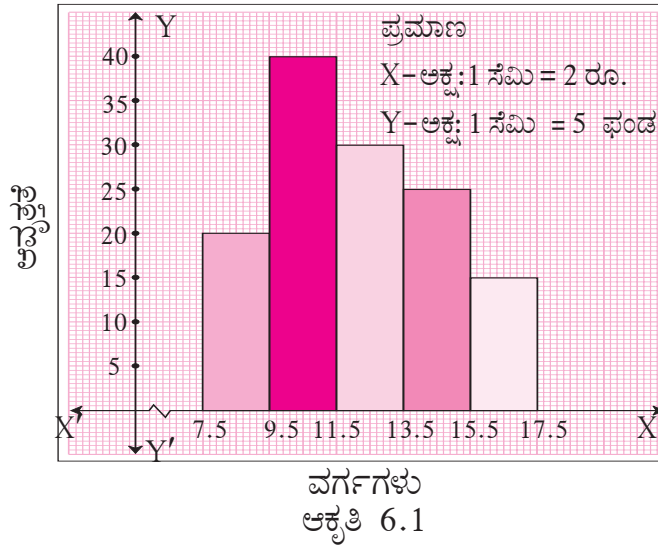
ಉದಾ. : ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಕಂಪನಿಗಳು ಮ್ಯೂಚುವಲ್ ಫಂಡ್‌ದ ಒಂದು ಯುನಿಟದ (Net asset value) ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಆಯತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಸ್ಥಿರ ಆಸ್ತಿ ಮೂಲ್ಯ (ರೂ.ಗಳು) (NAV)	8-9	10-11	12-13	14-15	16-17
ಮ್ಯೂಚುವಲ್ ಫಂಡ್‌ದ ಸಂಖ್ಯೆ	20	40	30	25	15

ಉತ್ತರ : ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದ ಸಲುವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗಗಳು ನಿರಂತರ ಇಲ್ಲ ಅದನ್ನು ನಾವು ನಿರಂತರ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ವರ್ಧಿತ ವರ್ಗರೂ	7.5-9.5	9.5-11.5	11.5-13.5	13.5-15.5	15.5-17.5
ಆವೃತ್ತತೆ	20	40	30	25	15



ಆಲೇಖ ತೆಗೆಯುವ ಕೃತಿ

1. ವರ್ಗಗಳು ನಿರಂತರ ಇರದಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ನಿರಂತರ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು. ಅಂತಹ ವರ್ಗಗಳಿಗೆ ವರ್ಧಿತ ವರ್ಗ (extended class intervals) ಎನ್ನುವರು.
2. ಈ ವರ್ಧಿತ ವರ್ಗಗಳು. X- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಯೋಗ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ದರ್ಶಿಸಿರಿ.
3. Y- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಆವೃತ್ತತೆ ಯೋಗ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ ತೋರಿಸಿರಿ.
4. X- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಧಿತ ವರ್ಗ ಇದು ತಳ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆಯತ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಆಯತದ ಎತ್ತರ ಸಂಗತ ಆವೃತ್ತತೆ ಯಷ್ಟು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಗಮನದಲ್ಲಿಡಿರಿ

X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಆರಂಭ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ '—|—' ಹೀಗೆ ಗುರುತು ಇದೆ. (ಈ ಗುರುತಿಗೆ ಅಕ್ಷ ಸಂಕೋಚ, krink mark ಹೀಗೆ ಅನ್ನುವರು) ಇದರ ಅರ್ಥ ಆರಂಭ ಬಿಂದು ವಿನಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಗದ ತನಕ ಯಾವ ನೀರಿಕ್ಷಣೆಗಳು ಇಲ್ಲ. ಅದರಿಂದ X-ಅಕ್ಷದ ಮಡಿಕೆ ಹಾಕಿದಂತೆ ಈ ಗುರುತು ಇದೆ. ಅವಶ್ಯಕತೆಗೆ ಅನುಸಾರ Y- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಈ ಗುರುತನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ ಅದರಿಂದ ಯೋಗ್ಯ ಆಕಾರದ ಆ ಲೇಖ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವುದು.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.4

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಾಮಗ್ರಿಯನ್ನು ಆಯತಾಲೇಖದಿಂದ ತೋರಿಸಿರಿ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರ (ಸೆಮಿ)	135-140	140-145	145-150	150-155
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	12	16	8

2. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಜೋಳದ ಎಕರೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಆಯತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಉತ್ಪನ್ನ (ಕ್ವಿಂಟಲಗಳಲ್ಲಿ) ಎಕರೆಗಳಲ್ಲಿ	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11
ಒಕ್ಕಲಿಗರ ಸಂಖ್ಯೆ	30	50	55	40	20

3. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 210 ಕುಟುಂಬಗಳ ವಾರ್ಷಿಕ ಹೂಡಿಕೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಆಯತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಹಣದ ಹೂಡಿಕೆ (ಸಾವಿರು ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
ಕುಟುಂಬದ ಸಂಖ್ಯೆ	30	50	60	55	15

4. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರು ಪರೀಕ್ಷೆಯ ತಯಾರಿಸಲು ವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟ ವೇಳೆ ದರ್ಶಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಆಯತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ವೇಳೆ (ಮಿನಿಟುಗಳಲ್ಲಿ)	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	14	20	24	22	16



ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

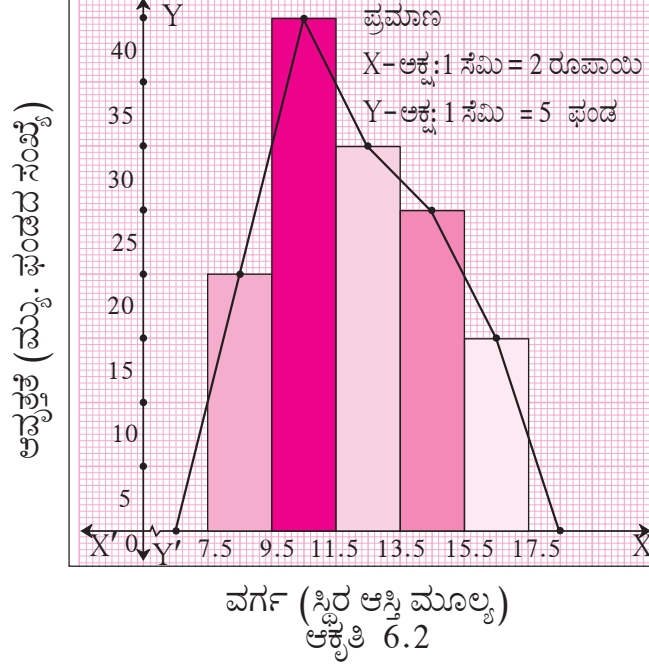
ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ (Frequency polygon)

ಆವೃತ್ತತೆಯ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ದರ್ಶಿಸಲು ಬರುವುದು. ನಾವು ಆಲೇಖದ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಎರಡನೇಯ ಪ್ರಕಾರ 'ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ' ಇದೆ.

ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ತೆಗೆಯುವ ಎರಡು ಪದ್ಧತಿಗಳ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವಾ.

(1) ಆಯತಾಲೇಖದ ಸಹಾಯದಿಂದ (2) ಆಯತಾಲೇಖ ಉಪಯೋಗಿಸದೆ

(1) ಆಯತಾಲೇಖದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ತೆಗೆಯುವ ಪದ್ಧತಿ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳುವ ಸಲುವಾಗಿ ನಾವು 6.1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಆಲೇಖದ ಉಪಯೋಗ ಮಾಡೋಣ.



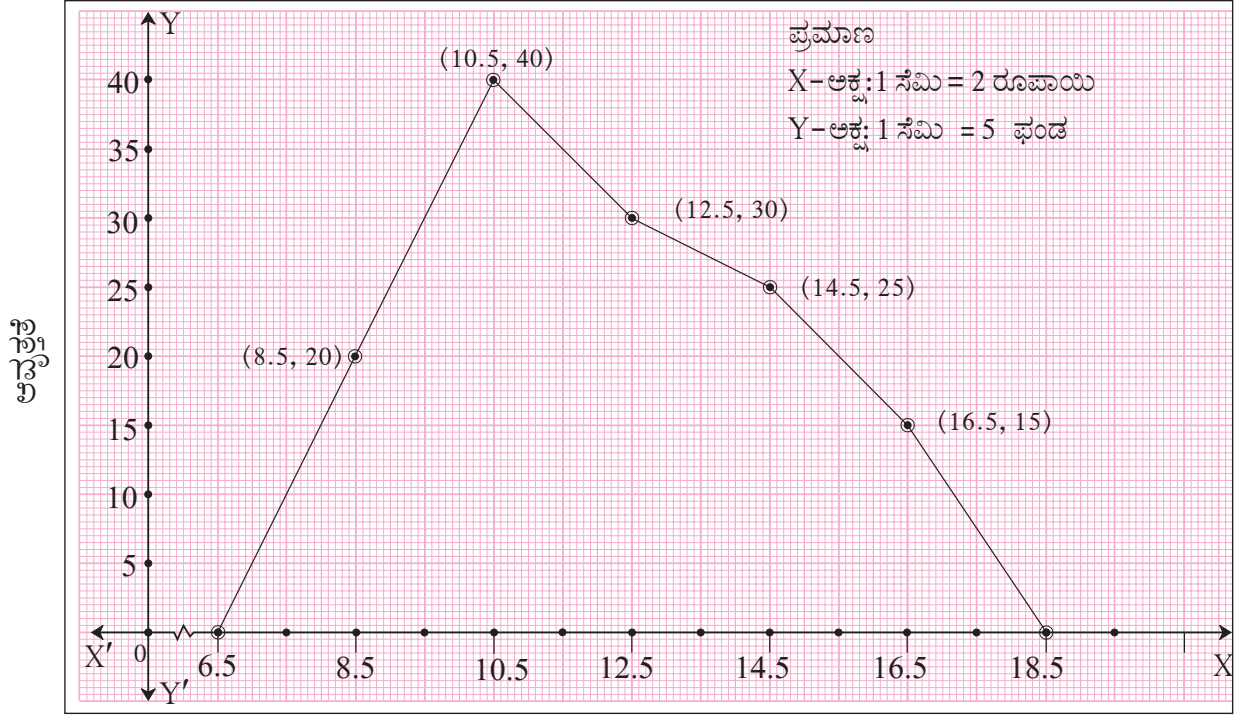
1. ಆಯತಾಲೇಖದಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಯತದ ಮೇಲಿನ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ದರ್ಶಿಸಿರಿ.
2. ಮೊದಲನೆಯ ಆಯತದ ಮೊದಲು ಶೂನ್ಯ ಎತ್ತರದ ಆಯತ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಬಿಂದು ದರ್ಶಿಸಿರಿ. ಆದರಂತೆ ಕೊನೆಯ ಆಯತದ ನಂತರ ಒಂದು ಶೂನ್ಯ ಎತ್ತರದ ಆಯತ ತಿಳಿದು ಅದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಗುರುತು ಮಾಡಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುಗಳು X- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಬರುವವು.
3. ಎಲ್ಲ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಜೋಡಿಸಿರಿ.

ತಯಾರಾದ ಬಂದಿಸ್ತ ಆಕೃತಿ ಎಂದರೆ ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಇರುವುದು.

- (2) ಆಯತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯದೇ ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ತೆಗೆಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ ಹೇಗೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸುವರು ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ವರ್ಗ	ನಿರಂತರ ವರ್ಗ	ವರ್ಗಮಧ್ಯ	ಆವೃತ್ತತೆ	ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕ
6 - 7	5.5 - 7.5	6.5	0	(6.5, 0)
8 - 9	7.5 - 9.5	8.5	20	(8.5, 20)
10 - 11	9.5 - 11.5	10.5	40	(10.5, 40)
12 - 13	11.5 - 13.5	12.5	30	(12.5, 30)
14 - 15	13.5 - 15.5	14.5	25	(14.5, 25)
16 - 17	15.5 - 17.5	16.5	15	(16.5, 15)
18 - 19	17.5 - 19.5	18.5	0	(18.5, 0)

ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿಯ ಐದನೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿಯ ನಿರ್ದೇಶಕದೊಂದಿಗೆ ಸಂಗತ ಬಿಂದು ಆಲೇಖ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಸ್ಥಾಪನೆ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ಅದೇ ಕ್ರಮದಿಂದ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ದೊರೆಯುವುದು. ಈ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಆಕೃತಿ 6.3 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ನೀರಿಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿರಿ.

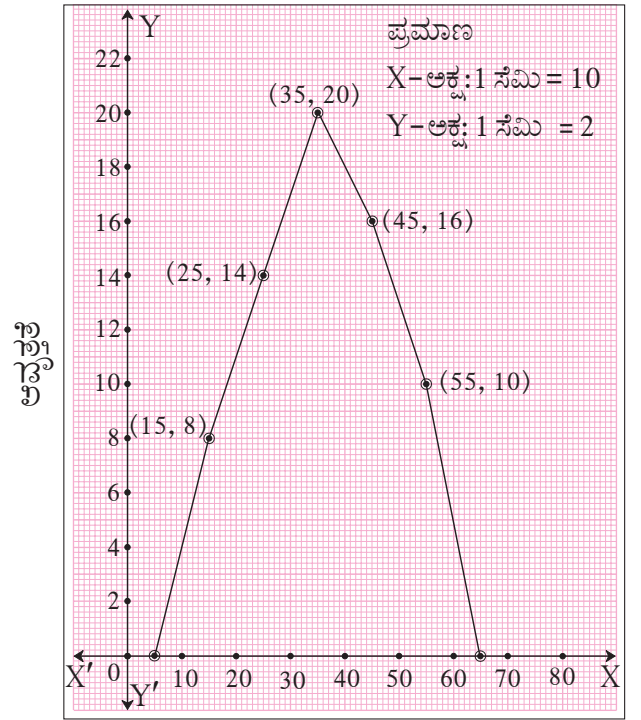


ವರ್ಗಮಧ್ಯ
ಆಕೃತಿ 6.3

ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆ

ಉದ. (1) ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಆಧಾರದಿಂದ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.

- (1) 50-60 ಈ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ ಬರೆಯಿರಿ.
- (2) ಯಾವ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ 14 ಇದೆ ಇಂತಹ ವರ್ಗ ಬರೆಯಿರಿ.
- (3) ವರ್ಗ ಮಧ್ಯ 55 ಇರುವ ವರ್ಗ ಬರೆಯಿರಿ.
- (4) ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆವೃತ್ತತೆ ಇರುವ ವರ್ಗ ಬರೆಯಿರಿ.
- (5) ಶೂನ್ಯ ಆವೃತ್ತತೆ ಇರುವ ವರ್ಗ ಬರೆಯಿರಿ.



ವರ್ಗಮಧ್ಯ
ಆಕೃತಿ 6.4

ಉತ್ತರ :

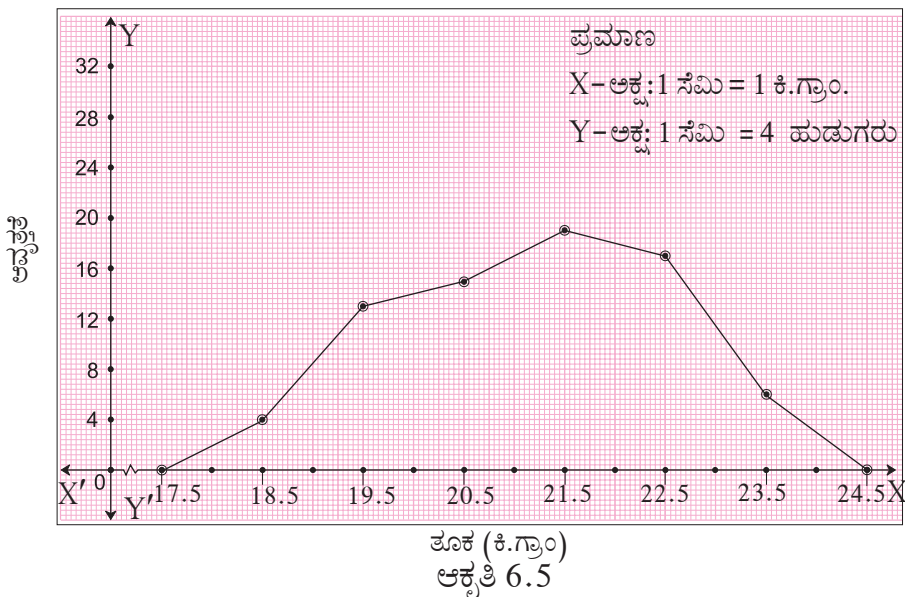
- (1) 50-60 ಈ ವರ್ಗದ ಮಧ್ಯ 55 ಇದೆ. 55ರ ಗುರುತಿನಿಂದ y - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಲಂಬ ತೆಗೆದಾಗ, ಅದು 10 ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ದರ್ಶಿಸುವದು. ಆದ್ದರಿಂದ 50-60 ಈ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ 10 ಇದೆ.
- (2) Y - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ 14 ಈ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಗುರುತ ನೋಡಿ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ x - ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಲಂಬ ತೆಗೆದಾಗ ಅದು 20-30 ಈ ವರ್ಗದ ವರ್ಗ ಮಧ್ಯದ ಮೇಲೆ x -ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಕೂಡುವದು. ಅದ್ದರಿಂದ ಆವೃತ್ತತೆ 14 ಇರುವ ವರ್ಗ 20-30 ಇದೆ.
- (3) 55 ಈ ವರ್ಗಮಧ್ಯ 50-60 ಈ ವರ್ಗದ್ದು ಇದೆ.
- (4) ಆವೃತ್ತತೆ Y -ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ದರ್ಶಿಸಲಾಗಿದೆ. ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಮೇಲೆ y - ನಿರ್ದೇಶಕದ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೆಲೆ 20 ಇದೆ. ಅದರ ಸಂಗತ x - ನಿರ್ದೇಶಕ 35 ಇದೆ. ವರ್ಗಮಧ್ಯ 35 ಇರುವ ವರ್ಗ 30-40 ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 30-40 ಈ ವರ್ಗದ ಆವೃತ್ತತೆ ಎಲ್ಲಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ಇದೆ.
- (5) ಶೂನ್ಯ ಆವೃತ್ತತೆ ಇರುವ ವರ್ಗಗಳು 0-10 ಮತ್ತು 60-70 ಇವು ಇವೆ.

ಉದಾ. (2) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಹುಡುಗರ ತೂಕ ಮತ್ತು ಅವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮೇಲಿಂದ ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಹುಡುಗರ ತೂಕ (ಕಿ.ಗ್ರಾಂ)	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆ	4	13	15	19	17	6

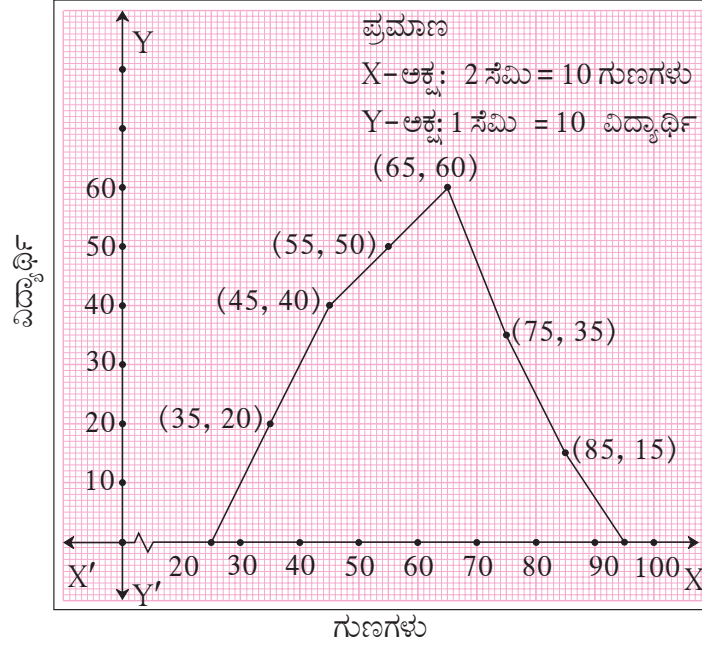
ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ತೆಗೆಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಅವಶ್ಯಕ ಬಿಂದು ಸಹ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ ತಯಾರಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ತೆಗೆಯೋಣ.

ವರ್ಗ	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
ವರ್ಗಮಧ್ಯ	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5
ಆವೃತ್ತತೆ	4	13	15	19	17	6
ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ	(18.5, 4)	(19.5,13)	(20.5,15)	(21.5,19)	(22.5,17)	(23.5,6)



ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.5

1. ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ನಿರೀಕ್ಷಣೆ ಮಾಡಿ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.



- (1) ಅತೀಹೆಚ್ಚು ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಯಾವ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾರೆ
- (2) ಶೂನ್ಯ ಆವೃತ್ತತೆ ಇರುವ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
- (3) 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವ ವರ್ಗದ ಮಧ್ಯ ಎಷ್ಟು ?
- (4) ವರ್ಗಮಧ್ಯ 85 ಇರುವ ವರ್ಗದ ಕೆಳಗಿನ ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಮಿತಿ ಬರೆಯಿರಿ.
- (5) 80-90 ಗುಣ ಪಡೆಯುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟು ?

2. ಕೆಳಗಿನ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ವಿದ್ಯುತ್ ಬಿಲ್ (ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)	0-200	200-400	400-600	600-800	800-1000
ಕುಟುಂಬಗಳು	240	300	450	350	160

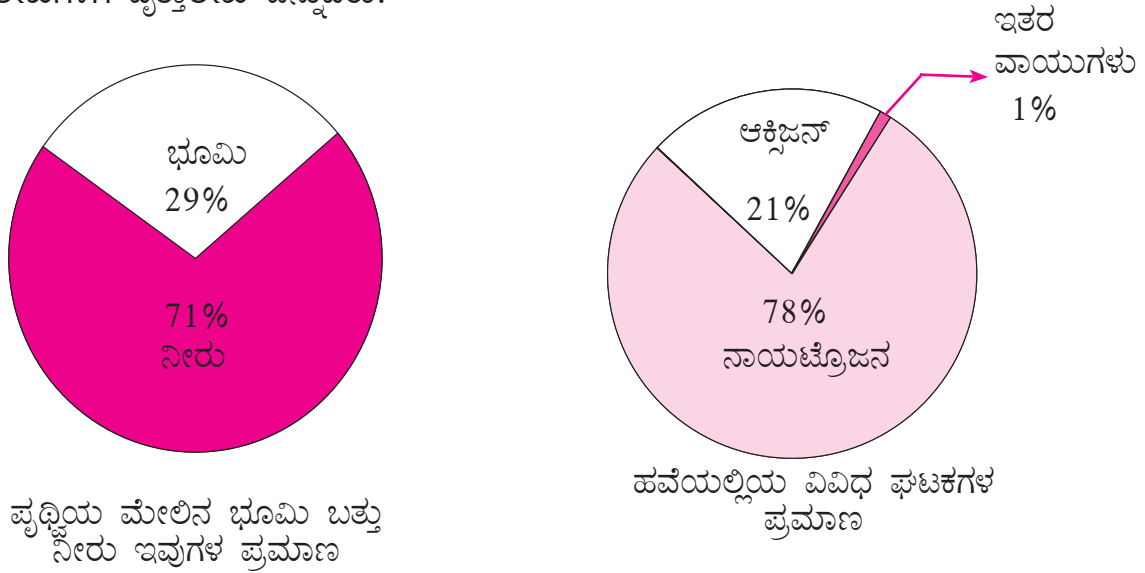
3. ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಫಲಿತಾಂಶದ ಶೇಕಡಾವಾರು ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಆ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಇರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೇಲಿಂದ ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಫಲಿತಾಂಶ (ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಖ್ಯೆ	7	33	45	65	47	18	5



ವೃತ್ತಾಲೇಖ (Pie diagram)

ಹಿಂದಿನ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಭೂಗೋಲ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನ ಈ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಆಲೇಖಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಂತಹ ಆಲೇಖಗಳಿಗೆ ವೃತ್ತಾಲೇಖ ಎನ್ನುವರು.



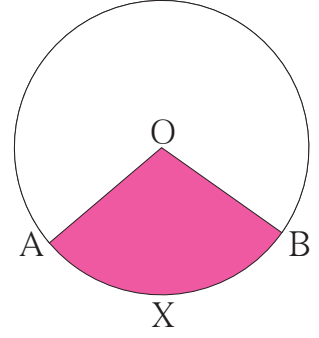
ಆಕೃತಿ 6.7

ವೃತ್ತಾಲೇಖದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಸಾಮಗ್ರಿ ಸಂಪೂರ್ಣ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ದರ್ಶಿಸುತ್ತಾರೆ. ಸಾಮಗ್ರಿಯಲ್ಲಿಯ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಟಕಗಳು ಪ್ರಮಾಣಬದ್ಧ ವರ್ತುಳಾಂಶಗಳಿಂದ ತೋರಿಸಿರುತ್ತಾರೆ.

ಆಕೃತಿ 6.8ರಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳ ಕೇಂದ್ರ O ಇರುವ ವರ್ತುಳದ OA ಮತ್ತು OB ಇವು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿವೆ.

$\angle AOB$ ಇದು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಇದೆ.

O - AXB ಇದು ಛಾಯಾಂಕಿತ ಭಾಗ ಅಂದರೆ, ವರ್ತುಳಾಂಶ (sector of a circle) ಇದೆ.



ಆಕೃತಿ 6.8



ವೃತ್ತಾಲೇಖದ ವಾಚನ Reading of Pie diagram

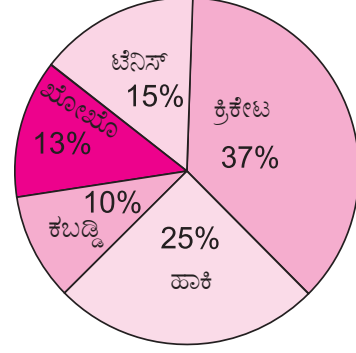
ವೃತ್ತಾಲೇಖದಿಂದ ದೃಷ್ಟಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ ಮಾಹಿತಿ ಹೇಗೆ ಸಿಗುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ: 10ನೇ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿಯ120 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ನಿಮ್ಮ ನೆಚ್ಚಿನ ಆಟ ಯಾವದು? ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಕೇಳಲಾಯಿತು. ದೊರೆತ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ವೃತ್ತಾಲೇಖದಿಂದ ದರ್ಶಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಯಾವ ಆಟವು ಅತೀ ನೆಚ್ಚಿನದು ಇದೆ ?

ಎಷ್ಟು ಪ್ರತಿಶತ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಖೋ-ಖೋ ಹಿಡಿಸುವದು?

ಕಬಡ್ಡಿ ಆಟದಲ್ಲಿ ರುಚಿ ಇರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಪ್ರತಿಶತ ಎಷ್ಟು ?



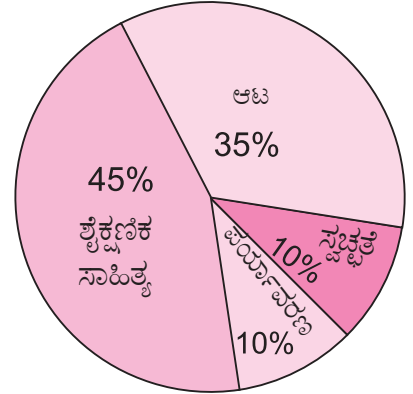
ಆಕೃತಿ 6.9

ಇಂತಹ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉತ್ತರ ನಮಗೆ ಒಂದು ದೃಷ್ಟಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ ಈ ವೃತ್ತಾಲೇಖದಿಂದ ದೊರೆಯುವವು.

ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತಾಲೇಖ ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿಯ ವೃತ್ತಾಲೇಖವು ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ವಾರ್ಷಿಕ ಅರ್ಥ ನಿರೀಕ್ಷನದ್ದು ಇದೆ. ಈ ವೃತ್ತಾಲೇಖದ ಮೇಲಿಂದ ನಮಗೆ ತಿಳಿದು ಬರುವದೆಂದರೆ.

- 45% ರಕಮು ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಾಹಿತ್ಯದ ಸಲುವಾಗಿ ಕಾಯ್ದಿರಿಸಲಾಗಿದೆ.
- 35% ರಕಮು ಆಟದ ಸಾಹಿತ್ಯದ ಸಲುವಾಗಿ ದರ್ಶಿಸಲಾಗಿದೆ
- 10% ರಕಮು ಸ್ವಚ್ಛತೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ.
- 10% ರಕಮು ಪರ್ಯಾವರಣದ ರಕ್ಷಣೆಯ ಸಲುವಾಗಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ.



ಆಕೃತಿ 6.10

ಇಂತಹ ಪ್ರಕಾರದ ಮಾಹಿತಿ ವೃತ್ತಾಲೇಖದಿಂದ ನಮ್ಮ ಒಂದು ದೃಷ್ಟಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವದು.

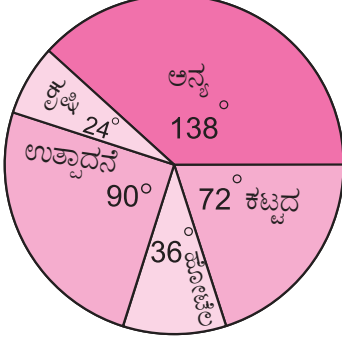
ನಾವು ವೃತ್ತಾಲೇಖದ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿ ಪಡೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಅನೇಕ ಸಲ ನಾವು ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರದ ಮಾಹಿತಿ ವೃತ್ತಾಲೇಖದಿಂದ ಕೊಟ್ಟದ್ದನ್ನು ನಾವು ವೃತ್ತಪತ್ರಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ವಾರ್ಷಿಕ ಅಂದಾಜು ಪತ್ರಿಕೆ. ಓಲಿಂಪಿಕ್ ಸ್ಪರ್ಧೆಯಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ದೇಶಗಳ ಸಾಧನೆ, ದೇಶದಲ್ಲಿ ಹಣ ಹೇಗೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಹೇಗೆ ಖರ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಇತ್ಯಾದಿಗಳು.

ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಮಾಹಿತಿ- ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವದು. ಇದನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ

ಮಾದರಿಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

ಒಂದು ಸರ್ವೇಕ್ಷಣೆಯಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಕಾರ್ಯಕುಶಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ವರ್ಗ ವಿಭಾಗಣೆ ಕೆಳಗಿನ ವೃತ್ತಾಲೇಖದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಉತ್ಪಾದನೆ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಯರತವಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು 4500 ಇದ್ದರೆ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.



ಆಕೃತಿ 6.12

- (i) ಎಲ್ಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಕಾರ್ಯಕುಶಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು ಎಷ್ಟು ಇದ್ದಾರೆ ?
- (ii) ಕಟ್ಟಡ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿಯ ಕಾರ್ಯಕುಶಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?
- (iii) ಕೃಷಿ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಯಕುಶಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು ಎಷ್ಟು ?
- (iv) ಉತ್ಪಾದನೆ ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡದಲ್ಲಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಯ ಕುಶಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರ : (i) ಎಲ್ಲ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿಯ ಒಟ್ಟು ಕಾರ್ಯಕುಶಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

$$\therefore x \text{ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ} = 360^\circ$$

$$\text{ಉತ್ಪಾದನೆ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿಯ ಕಾರ್ಯಕುಶಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ} = \frac{\text{ಉತ್ಪಾದನೆ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿ}}{\text{ಒಟ್ಟು ವ್ಯಕ್ತಿ}} \times 360$$

$$90 = \frac{4500}{x} \times 360$$

$$\therefore x = 18000$$

$$\therefore \text{ಎಲ್ಲ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿಯ ಕಾರ್ಯಕುಶಲ ವ್ಯಕ್ತಿ} = 18000.$$

(ii) ಕಟ್ಟಡ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಸಲುವಾಗಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 72° ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

$$72 = \frac{\text{ಕಟ್ಟಡ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿ}}{18000} \times 360$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ಕಟ್ಟಡ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿ} &= \frac{72 \times 18000}{360} \\ &= 3600 \end{aligned}$$

(iii) ಕೃಷಿ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ = 24° ಇದೆ.

$$24 = \frac{\text{ಕೃಷಿ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಕಾರ್ಯಕುಶಲ ವ್ಯಕ್ತಿ}} \times 360$$

$$24 = \frac{\text{ಕೃಷಿ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿ}}{18000} \times 360$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ಕೃಷಿ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು} &= \frac{24 \times 18000}{360} \\ &= 1200 \end{aligned}$$

(iv) ಉತ್ಪಾದನೆ ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿಯ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ = $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

$$\therefore \text{ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ} = \frac{\text{ಎರಡೂ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಕಾರ್ಯಕುಶಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು}} \times 360$$

$$18 = \frac{\text{ಎರಡೂ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿಯ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ}}{18000} \times 360$$

$$\begin{aligned} \text{ಉತ್ಪಾದನೆ ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಕುಶಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ} &= \frac{18 \times 18000}{360} \\ &= 900 \end{aligned}$$



ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ.

- ಸಾಮಗ್ರಿಯಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕವನ್ನು ಅದರ ಸಂಬಂಧಿತ ವರ್ತುಳಾಂಶದಿಂದ ತೋರಿಸಿರುತ್ತಾರೆ.
- ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಅದರ ವಿಶಿಷ್ಟ ಘಟಕಗಳ ನೋಂದಿಯ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.
- ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಅಳತೆ (θ) = $\frac{\text{ಕೊಟ್ಟ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಒಟ್ಟು ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} \times 360$
- ಯೋಗ್ಯ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ತುಳವನ್ನು ತೆಗೆದು ಎಷ್ಟು ಘಟಕಗಳಿವೆ. ಅಷ್ಟೇ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಅನುಸಾರ ವರ್ತುಳಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳದ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡಲಾಗಿರುವದು.



ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ ಬನ್ನಿ.

ವೃತ್ತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯುವದು (To draw Pie diagram)

ತೆಗೆದ ವೃತ್ತಾಲೇಖದ ಮೇಲಿಂದ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಓದುವದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ವೃತ್ತಾಲೇಖ ಹೇಗೆ ತೆಗೆಯುವರು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

1. ವೃತ್ತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯುವಾಗ ಸಂಪೂರ್ಣ ವರ್ತುಳದ ವಿಭಜನೆ ಪ್ರಮಾಣಬದ್ಧ ವರ್ತುಳಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ.
2. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕದೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿತ ವರ್ತುಳಾಂಶಗಳ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ ತೆಗೆಯುವರು.

$$\text{ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಅಳತೆ } \theta = \frac{\text{ಆ ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿಯ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಎಲ್ಲ ಘಟಕಗಳಲ್ಲಿಯ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ}} \times 360$$

ಯೋಗ್ಯ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆದು ಸಾಮಗ್ರಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಘಟಕಗಳಿವೆ ಅಷ್ಟೇ ವರ್ತುಳಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳದ ವಿಭಜನೆ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ.

ವೃತ್ತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಕೃತಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ತಿಳಿದು ಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಛಛಛ ಬಿಡಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆ ಛಛಛ

ಉದಾ. (1) ಒಂದು ದ್ವಿಚಕ್ರ ವಾಹನದ ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ವಾಹನದ ಖರೀದಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಇಷ್ಟಭಾಗ ಒಣ್ಣೆಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇವೆ. ಈ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ವೃತ್ತಾಲೇಖ ತೋರಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕ ದರ್ಶಿಸುವ ವರ್ತುಳಾಂಶಗಳ ಕೇಂದ್ರಸ್ಥ ಕೋನದ ಅಳತೆ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿರಿ.

ಉತ್ತರ : ದ್ವಿಚಕ್ರದ ಒಟ್ಟು ಬೇಡಿಕೆ 36 ಇದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ 10 ದ್ವಿಚಕ್ರಗಳು ಬಿಳಿಯಬಣ್ಣದ್ದು ಇವೆ.

∴ ಬಿಳಿಯ ಬಣ್ಣದ ದ್ವಿಚಕ್ರ ದರ್ಶಿಸುವ ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಅಳತೆ.

$$= \frac{\text{ಬಿಳಿಯ ದ್ವಿಚಕ್ರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಒಟ್ಟು ದ್ವಿಚಕ್ರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} \times 360$$

$$= \frac{10}{36} \times 360 = 100$$

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ ಇತರ ಬಣ್ಣಗಳ ದ್ವಿಚಕ್ರಗಳ ಸಂಗತ ವರ್ತುಳಾಂಶಗಳ ಕೇಂದ್ರಸ್ಥ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

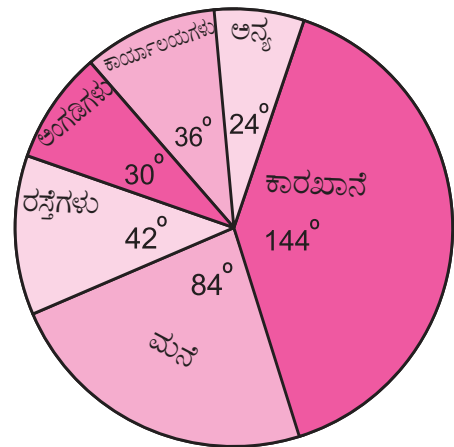
ಬಣ್ಣ	ದ್ವಿಚಕ್ರದ ಬೇಡಿಕೆ	ವರ್ತುಳಾಂಶದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ
ಬಿಳಿ	10	$\frac{10}{36} \times 360 = 100^\circ$
ಕಪ್ಪು	9	$\frac{9}{36} \times 360 = 90^\circ$
ನೀಲಿ	6	60°
ಬೂದಿ	7	70°
ಕೆಂಪು	4	40°
ಒಟ್ಟು	36	360

ಉದಾ. (2) ಒಂದು ಊರಿನಲ್ಲಿಯ ವಿವಿಧ ಸ್ಥಳಗಳಿಗೆ ಆಗುವ ವಿದ್ಯುತ್ ಪೂರೈಕೆ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಮಾಹಿತಿಯ ವೃತ್ತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಸ್ಥಳಗಳು	ಕಾರಖಾನೆಗಳು	ಮನೆಗಳು	ರಸ್ತೆಗಳು	ಅಂಗಡಿಗಳು	ಕಾರ್ಯಾಲಯಗಳು	ಅನ್ಯ
ವಿದ್ಯುತ್ ಪೂರೈಕೆ ಸಾವಿರ ಮೂಲಮಾನಗಳಲ್ಲಿ	24	14	7	5	6	4

ಉತ್ತರ : ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯುತ್ ಪೂರೈಕೆ 60 ಸಾವಿರ ಮೂಲಮಾನಗಳಿವೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೇಂದ್ರಸ್ಥ ಕೋನದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರಿ.

ವಿದ್ಯುತ್ ಪೂರೈಕೆ	ಯುನಿಟ್	ಕೇಂದ್ರಸ್ಥ ಕೋನದ ಅಳತೆ
ಕಾರಖಾನೆಗಳು	24	$\frac{24}{60} \times 360 = 144^\circ$
ಮನೆ	14	$\frac{14}{60} \times 360 = 84^\circ$
ರಸ್ತೆಗಳು	7	$\frac{7}{60} \times 360 = 42^\circ$
ಅಂಗಡಿಗಳು	5	$\frac{5}{60} \times 360 = 30^\circ$
ಕಾರ್ಯಾಲಯಗಳು	6	$\frac{6}{60} \times 360 = 36^\circ$
ಅನ್ಯ	4	$\frac{4}{60} \times 360 = 24^\circ$
ಒಟ್ಟು	60	360°



ಆಕೃತಿ 6.13

ವೃತ್ತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯುವ ಹಂತಗಳು :

- (1) ಮೊದಲು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ವರ್ತುಳ ತೆಗೆದು ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆದನು. ನಂತರ ಕೋಷ್ಠದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ವರ್ತುಳಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಂದರ ನಂತರ ಒಂದು (144°, 84°, 42°, 30°, 36°, ಮತ್ತು 24°) ಈ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಗಡಿಯಾರದ ಮುಳ್ಳಿನ ದಶೆಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದವು. ವರ್ತುಳಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಮುಂದೆ ಒಂದು ತೆಗೆಯುವಾಗ ಅವುಗಳ ಕ್ರಮ ಬದಲಾದರೆ ನಡೆಯುವದು.
- (2) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ತುಳಾಂಶದಲ್ಲಿ ಸಂಬಂಧಿತ ಘಟಕಗಳನ್ನು ನೋಂದಾಯಿಸಿರಿ.

ಕೃತಿ :

ಒಂದು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿಯ ವಿವಿಧ ಬಾಬತ್ತುಗಳ ಮೇಲೆ ಆಗುವ ತಿಂಗಳ ಖರ್ಚು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ತೆಗೆದು ವೃತ್ತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ವಿವಿಧ ಬಾಬತ್ತುಗಳು	ಪ್ರತಿಶತ ಖರ್ಚು	ಕೇಂದ್ರಸ್ಥ ಕೋನದ ಅಳತೆ
ಆಹಾರ	40	$\frac{40}{100} \times 360 = \square$
ಅರಿವೆ	20	$\square \times \square = \square$
ಮನೆಬಾಡಿಗೆ	15	$\square \times \square = \square$
ಶಿಕ್ಷಣ	20	$\square \times \square = \square$
ಇತರ ಖರ್ಚು	05	$\square \times \square = \square$
ಒಟ್ಟು	100	360°

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.6

1. ಒಂದು ರಕ್ತದಾನ ಶಿಬಿರದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ವಯಸ್ಸಿನ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿಯ 200 ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು ಮಾಡಿದ ರಕ್ತದಾನ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ವೃತ್ತಾಲೇಖ ರಚಿಸಿರಿ.

ವಯಸ್ಸಿನ ಗುಂಪು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	20-25	25-30	30-35	35-40
ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	80	60	35	25

2. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ 100ಕ್ಕೆ ಪಡೆದ ಗುಣಗಳು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈಮಾಹಿತಿಯ ಮೇಲಿಂದ ವೃತ್ತಾಲೇಖ ರಚಿಸಿರಿ.

ವಿಷಯ	ಇಂಗ್ಲಿಷ್	ಮರಾಠಿ	ವಿಜ್ಞಾನ	ಗಣಿತ	ಸಾ. ಶಾಸ್ತ್ರ	ಹಿಂದಿ
ಗುಣಗಳು	50	70	80	90	60	50

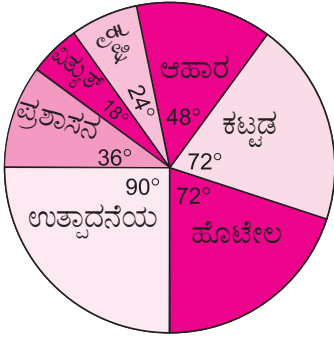
3. ವ್ಯಕ್ತಾರೋಪಣೆಯ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯೂ ವಿವಿಧ ಇಯತ್ತೆಯಲ್ಲಿಯೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು (ನೆಟ್ಟ) ಹಚ್ಚಿದ ಆ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ವೃತ್ತಾಲೇಖದಿಂದ ತೋರಿಸಿರಿ.

ಇಯತ್ತೆ	5 ನೇ	6 ನೇ	7 ನೇ	8 ನೇ	9 ನೇ	10 ನೇ
ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	40	50	75	50	70	75

4. ಒಬ್ಬ ಹಣ್ಣು ಮಾರುವವನ ಕಡೆಗೆ ವಿವಿಧ ಹಣ್ಣುಗಳ ಬೇಡಿಕೆಗಳ ಪ್ರತಿಶತ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಮಾಹಿತಿಯ ವೃತ್ತಾಲೇಖ ರಚಿಸಿರಿ.

ಹಣ್ಣುಗಳು	ಮಾವು	ಮೋಸಂಬಿ	ಸೇಬು	ಚಿಕ್ಕು	ಕಿತ್ತಳೆ
ಬೇಡಿಕೆಯ ಪ್ರತಿಶತ	30	15	25	20	10

5. ವಿವಿಧ ವ್ಯವಸಾಯದ ಅನುಸಾರ ಒಂದು ಊರಿನಲ್ಲಿಯೂ ವ್ಯವಸಾಯ ಮಾಡುವವರ ಪ್ರತಿಶತ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ.

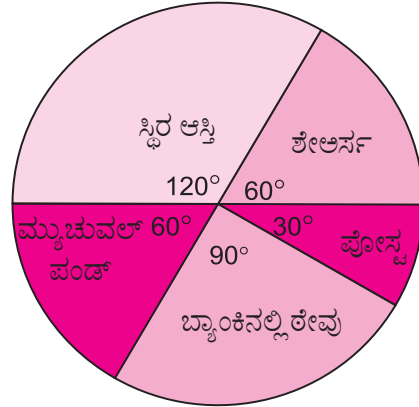


ಆಕೃತಿ 6.13

(1) ಒಟ್ಟು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 10000 ಇದ್ದರೆ ಕಟ್ಟಡ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವ್ಯವಸಾಯಕರು ಇದ್ದಾರೆ ? (2) ಪ್ರಶಾಸನ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವ್ಯವಸಾಯಕರು ಕಾರ್ಯರತ ಇದ್ದಾರೆ ? (3) ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪ್ರತಿಶತ ವ್ಯವಸಾಯಕರು ಇದ್ದಾರೆ ?

6. ಒಂದು ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿಯೂ ವಾರ್ಷಿಕ ಬಂಡವಾಳ ಹೂಡಿಕೆಯ ವೃತ್ತಾಲೇಖ ಬದಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಿರಿ.

- (1) ಶೇಅರದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿದ ರಕಮು ರೂ. 2000 ಇದ್ದರೆ ಒಟ್ಟು ಹೂಡಿಕೆ ಎಷ್ಟು ?
- (2) ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿಯೂ ಠೇವಿನಿ ರಕಮು ಎಷ್ಟು ?
- (3) ಮ್ಯುಚುವಲ್ ಫಂಡಿಂಗ್ ಸ್ಥಿರ ಆಸ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಹೆಚ್ಚು ತೊಡಗಿಸಿದ್ದಾರೆ ?
- (4) ಪೋಸ್ಟಿನಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿದ ಹಣ ಎಷ್ಟು ?



ಆಕೃತಿ 6.14

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ 6

1. ಬಹು ಪರ್ಯಾಯಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಪರ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿಂದ ಆರಿಸಿ.

(1) ವಿವಿಧ ರಕ್ತ ಗುಂಪುಗಳ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ರಕ್ತ ಗುಂಪಿಗೆ ಅನುಸಾರ ವರ್ಗೀಕರಣ ವೃತ್ತಾಲೇಖ ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. O- ರಕ್ತ ಗುಂಪು ಇರುವ ವ್ಯಕ್ತಿ 40% ಇದ್ದರೆ O- ರಕ್ತ ಗುಂಪು ಇರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ವೃತ್ತಾಲೇಖದಲ್ಲಿಯೂ ಕೇಂದ್ರಸ್ಥ ಕೋನ.

- (A) 114° (B) 140° (C) 104° (D) 144°

(2) ಇಮಾರತಿಯ ಕಟ್ಟಡ ಕೆಲಸದ ವಿವಿಧ ಖರ್ಚು ವೃತ್ತಾಲೇಖದಿಂದ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಿಮೆಂಟ್ ಖರ್ಚು 75° ದ ಕೇಂದ್ರಸ್ಥ ಕೋನದಿಂದ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಿಮೆಂಟ್‌ನ ಖರ್ಚು ರೂ. 45,000 ಇದ್ದರೆ ಇಮಾರತಿಯ ಕಟ್ಟಡ ಕೆಲಸದ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಗಳು?

- (A) 2,16,000 (B) 3,60,000 (C) 4,50,000 (D) 7,50,000

(3) ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಉಪಯೋಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸಲುವಾಗಿ ಆಗುವದು.

- (A) ಮಧ್ಯ (B) ಮಧ್ಯಕ (C) ಬಹುಲಕ (D) ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಎಲ್ಲವು

(4) ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಮಧ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಮುಂದಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $\bar{X} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$

$\times g$ ರಲ್ಲಿ $u_i = \dots$

- (A) $\frac{x_i + A}{g}$ (B) $(x_i - A)$ (C) $\frac{x_i - A}{g}$ (D) $\frac{A - x_i}{g}$

(5)

ಪ್ರತಿ ಲೀಟರ್ ಕ್ರಮಿಸಿದ ಅಂತರ (ಕಿಮಿ)	12-14	14-16	16-18	18-20
ಕಾರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	11	12	20	7

ಮೇಲಿನ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಕಾರಿನ ಪ್ರತಿ ಲೀಟರ್ ಕ್ರಮಿಸಿದ ಅಂತರದ ಮಧ್ಯಕ ಈ ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಇದೆ.

- (A) 12-14 (B) 14-16 (C) 16-18 (D) 18-20

(6)

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಹೆಚ್ಚಿದ ಗಿಡಗಳು	1-3	4-6	7-9	10-12
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	8	6	4

ಮೇಲಿನ ಆವೃತ್ತತೆ, ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಅವುಗಳು ಬಹುಜಾಂಕ ತೆಗೆಯುವದಿದೆ. 4-6 ಈ ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ದರ್ಶಿಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕ ಇದೆ.

- (A) (4, 8) (B) (3, 5) (C) (5, 8) (D) (8, 4)

2. ಒಂದು ದ್ರಾಕ್ಷೆಯ ಹಂಗಾಮಿನಲ್ಲಿ ತೋಟಗಾರರಿಗೆ ದೊರೆತ ಉತ್ಪನ್ನದ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಧ್ಯ ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ಪನ್ನ ಸಾವಿರ ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ತೋಟಗಾರರು	10	11	15	16	18	14

3. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ ಹೊಂಡಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ಉಪಲಬ್ಧ ಮಾಡಿಕೊಂಡ ಸಾಲ (ಸಾವಿರ ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ) ತೊಡಲಾಗಿದೆ ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಬ್ಯಾಂಕು ಕೊಟ್ಟ ರಕಮಿನ ಮಧ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಾಲ (ಸಾವಿರ ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
ಕೃಷಿ ಹೊಂಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	13	20	24	36	7

4. ಒಂದು ಕಾರಖಾನೆಯಲ್ಲಿಯ 120 ಕೆಲಸಗಾರರ ವಾರದ ಸಂಬಳದ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಕೋಷ್ಟಕ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಲಸಗಾರರವಾರದ ಸಂಬಳದ ಮಧ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಾರದ ಸಂಬಳ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ)	0-2000	2000-4000	4000-6000	6000-8000
ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	15	35	50	20

5. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 50 ಪೂರಗೃಹಸ್ತರ ಕುಟುಂಬಕ್ಕೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಹಾಯ ಧನದ ರಕಮು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಸಹಾಯ ಧನದ ರಕಮಿನ ಮಧ್ಯ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಹಾಯ ಧನದ ರಕಮು (ಸಾವಿರ ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ)	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	7	13	20	6	4

6. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗೀಕೃತ ವಿತರಣೆಯ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಬಸ್ಸಿನ ಸೇವೆಯ 250 ಬಸ್ಸುಗಳು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸಿದ ಅಂತರ (ಕಿಮೀ) ಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ಒಂದು ದಿವಸದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸಿದ ಅಂತರದ ಮಧ್ಯಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಂತರ (ಕಿಮೀ)	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
ಬಸ್ಸುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	40	60	80	50	20

7. ಒಂದು ಜನರಲ್ ಸ್ಟೋರ್‌ನಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಆ ವಸ್ತುಗಳ ಬೇಡಿಕೆ ಇವುಗಳ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಮೇಲಿಂದ ಬೆಲೆಗಳ ಮಧ್ಯಕ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಬೆಲೆ (ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ)	20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	20-40	40-60	60-80	80-100
ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	140	100	80	60	20

8. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಿಠಾಯಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿಯ ವಿವಿಧ ತೂಕಗಳ ಮಿಠಾಯಿಯ ಬೇಡಿಕೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ತೂಕದ ಬೇಡಿಕೆಯ ಬಹುಜಾಂಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮಿಠಾಯಿಯ ತೂಕ (ಗ್ರಾಮ)	0-250	250-500	500-750	750-1000	1000-1250
ಗ್ರಾಹಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	10	60	25	20	15

9. ಕೆಳಗಿನ ಆವೃತ್ತತೆಯ ವಿತರಣೆ ಸಲುವಾಗಿ ಆಯತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಕೆ (ಯುನಿಟು)	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170
ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	150	400	460	540	600	350

10. ಒಂದು ಕೈಮಗ್ಗಿನ ಕಾರಖಾನೆಯಲ್ಲಿ 140 ಕೂಲಿಕಾರರಿಗೆ ಒಂದು ಸೀರೆ ತಯಾರಿಸಲು ತಗಲುವ ದಿವಸಗಳ ಮತ್ತು ಕೂಲಿಕಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಸಾಮಗ್ರಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ದಿವಸಗಳು	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
ಕೂಲಿಕಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	5	16	30	40	35	14

11. ಒಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿಯ ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪ್ರಯೋಗ ಮಾಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಬೇಕಾಗುವ ವೇಳೆಯ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಮಾಹಿತಿಯ ಸಲುವಾಗಿ ಆಯತಾಲೇಖ ತೆಗೆದು ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕೆ ತಗಲುವ ವೇಳೆ (ಮಿನಿಟುಗಳಲ್ಲಿ)	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	8	16	22	18	14	12

12. ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗೀಕೃತ ಆವೃತ್ತತೆ ಕೋಷ್ಟಕದ ಸಲುವಾಗಿ ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.

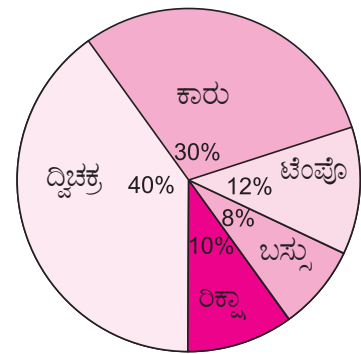
ರಕ್ತದಾನಿಯರ ವಯಸ್ಸು	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
ರಕ್ತದಾನಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ	38	46	35	24	15	12

13. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 150 ಊರಿನಲ್ಲಿಯ ಮಳೆಯ ವಾರ್ಷಿಕ ಸರಾಸರಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಸಲುವಾಗಿ ಆವೃತ್ತತೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಸರಾಸರಿ ಮಳೆ (ಸೆಮೀ.ಗಳಲ್ಲಿ)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
ಊರಿನ ಸಂಖ್ಯೆ	14	12	36	48	40

14. ಮುಂಜಾನೆ 8 ರಿಂದ 10 ಈ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಣದಲ್ಲಿಯ ಒಂದು ಚೌಕೋನಾಕೃತಿ ಸಿಗ್ನಲ್ ಮೇಲಿಂದ ಮುಂದೆ ಹೋಗುವ ವಿವಿಧ ವಾಹನಗಳ ವೃತ್ತಾಲೇಖ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಹಾಗಾದರೆ.

- (1) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಕಾರದ ವಾಹನಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ಕೇಂದ್ರಸ್ಥ ಕೋನ ತೆಗೆಯಿರಿ.
(2) ದ್ವಿಚಕ್ರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1200 ಇದ್ದರೆ ವಾಹನಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

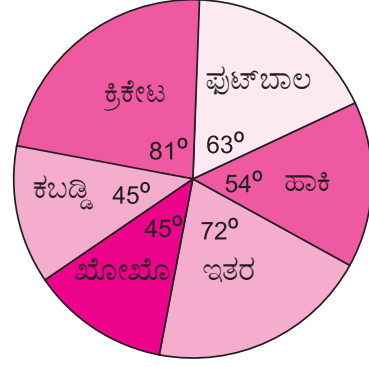


ಆಕೃತಿ 6.15

15. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಧ್ವನಿ ಪ್ರದೂಷಣ ನಿರ್ಮಾಣ ಮಾಡುವ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಮೇಲಿಂದ ವೃತ್ತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಕಟ್ಟಡ	ರಹದಾರಿ	ವಿಮಾನ ಉಡ್ಡಾಣ	ಔದ್ಯೋಗಿಕ	ರೈಲು ಗಾಡಿಗಳು
10%	50%	9%	20%	11%

16. ಒಂದು ಸರ್ವೇಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ವಿವಿಧ ಆಟದಲ್ಲಿಯ ಅಭಿರುಚಿ ಬರುವ ಸಲುವಾಗಿ ಮಾಡಿದ ಸರ್ವೇಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಮಾಹಿತಿ ಕೆಳಗಿನ ವೃತ್ತಾಲೇಖದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1000 ಇದ್ದರೆ.



ಆಕೃತಿ 6.16

- (1) ಕ್ರಿಕೇಟ ಇಷ್ಟಪಡುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟು?
- (2) ಪುಟ್‌ಬಾಲ್ ಆಟ ಎಷ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಇಷ್ಟ ಇರುವುದು.
- (3) ಇತರ ಆಟಗಳಿಗೆ ಇಷ್ಟಪಡುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎಷ್ಟು?

17. ಒಂದು ಊರಿನಲ್ಲಿಯ ಆರೋಗ್ಯ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 180 ಸ್ತ್ರೀಯರ ತಪಾಸಣೆ ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಅದರಲ್ಲಿಯ 50 ಸ್ತ್ರೀಯರ ಹೆಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್ ಕಡಿಮೆ ಇತ್ತು. 10 ಸ್ತ್ರೀಯರಿಗೆ ಮೋತಿಬಿಂದುವಿನ ತ್ರಾಸವಿತ್ತು. 25 ಸ್ತ್ರೀಯರಿಗೆ ಶ್ವಸನದ ವಿಕಾರ ಇತ್ತು. ಉಳಿದ ಸ್ತ್ರೀಯರು ನಿರೋಗಿ ಇದ್ದರು. ಈ ಮಾಹಿತಿ ದರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ.

18. ವನೀಕರಣದ ಪ್ರಕಲ್ಪದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪರ್ಯಾವರಣದ ದಿನದ ನಿಮಿತ್ಯ 120 ಗಿಡಗಳನ್ನು ಹಚ್ಚಿದರು ಅದರ ಮಾಹಿತಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಮಾಹಿತಿ ದರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಾಲೇಖ ತೆಗೆಯಿರಿ.

ಗಿಡಗಳ ಹೆಸರು	ಹಲಗಲಿ	ತಾರೆಯಕಾಯಿ	ಅರ್ಜುನ	ಬಕುಲ	ಬೇವು
ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	20	28	24	22	26



ಉತ್ತರಸೂಚಿ

1. ದ್ವಿಚಲ ರೇಷಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.1

2. (1) (2, 4) (2) (3, 1) (3) (6, 1) (4) (5, 2)
 (5) (-1, 1) (6) (1, 3) (7) (3, 2) (8) (7, 3)

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.2

1. (1)

x	3	-2	0
y	0	5	3
(x, y)	(3, 0)	(-2, 5)	(0, 3)

(2)

x	4	-1	0
y	0	-5	-4
(x, y)	(4, 0)	(-1, -5)	(0, -4)

2. (1) (5, 1) (2) (4, 1) (3) (3, -3) (4) (-1, -5) (5) (1, 2.5) (6) (8, 4)

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.3

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \boxed{5} - \boxed{2} \times 4 = \boxed{15} - 8 = \boxed{7}$

2. (1) -18 (2) 21 (3) $-\frac{4}{3}$

3. (1) (2, -1) (2) (-2, 4) (3) (3, -2) (4) (2, 6) (5) (6, 5) (6) $(\frac{5}{8}, \frac{1}{4})$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.4

1. (1) $(\frac{1}{9}, 1)$ (2) (3, 2) (3) $(\frac{5}{2}, -2)$ (4) (1, 1)

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 1.5

1. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 5 ಮತ್ತು 2 2. $x = 12, y = 8$ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = 640 ಚೌ. ಏಕಕ ಪರಿಮಿತಿ = 112 ಮೂಲಮಾನ
 3. ಮಗನ ವಯಸ್ಸು 15 ವರ್ಷ, ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು 40 ವರ್ಷಗಳು 4. $\frac{7}{18}$
 5. $A = 30$ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ $B = 55$ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ 6. 150 ಕಿ.ಮೀ.

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 1

1. (1) B (2) A (3) D (4) C (5) A

2.

x	-5	$\frac{3}{2}$
y	$-\frac{13}{6}$	0
(x, y)	$(-5, -\frac{13}{6})$	$(\frac{3}{2}, 0)$

3. (1) (3, 2) (2) (-2, -1) (3) (0, 5) (4) (2, 4) (5) (3, 1)

4. (1) 22 (2) -1 (3) 13

5. (1) $(-\frac{2}{3}, 2)$ (2) (1, 4) (3) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ (4) $(\frac{7}{11}, \frac{116}{33})$ (5) (2, 6)

6. (1) (6, -4) (2) $(-\frac{1}{4}, -1)$ (3) (1, 2) (4) (1, 1) (5) (2, 1)

7. (2) ಚಹಾದ ದರ ₹300 ಪ್ರತಿ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ (5) ಕುಶಲ ಕೆಲಸಗಾರನ ದಿನದ ಕೂಲಿ 450 ರೂ.
ಸಕ್ಕರೆ ದರ ₹ 40 ಪ್ರತಿ ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ಆಕುಶಲ ಕೆಲಸಗಾರನ ದಿನದ ಕೂಲಿ 270 ರೂ.
(3) ₹100ರ ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 20 (6) ಹಮೀದನ ವೇಗ 50 ಕಿ.ಮೀ/ತಾಸು.
₹50ರ ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 10 ಜೋಸೆಫನ ವೇಗ 40 ಕಿ.ಮೀ/ತಾಸು.
(4) ಮನೀಷಾಳ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸು 23 ವರ್ಷಗಳು
ಸವಿತಾಳ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸು 8 ವರ್ಷಗಳು

2. ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳು

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.1

1. $m^2 + 5m + 3 = 0$, $y^2 - 3 = 0$ (ಇಂತಹ ಯಾವುದೇ)
2. (1), (2), (4), (5) ಇವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಿವೆ
3. (1) $y^2 + 2y - 10 = 0$, $a = 1, b = 2, c = -10$
(2) $x^2 - 4x - 2 = 0$, $a = 1, b = -4, c = -2$
(3) $x^2 + 4x + 3 = 0$, $a = 1, b = 4, c = 3$
(4) $m^2 + 0m + 9 = 0$, $a = 1, b = 0, c = 9$
(5) $6p^2 + 3p + 5 = 0$, $a = 6, b = 3, c = 5$
(6) $x^2 + 0x - 22 = 0$, $a = 1, b = 0, c = -22$
4. (1) 1 ಇದೆ, -1 ಇಲ್ಲ. (2) $\frac{5}{2}$ ಇದೆ, 2 ಇಲ್ಲ.
5. $k = 3$ 6. $k = -7$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.2

1. (1) 9, 6 (2) -5, 4 (3) $-13, -\frac{1}{2}$ (4) $5, -\frac{3}{5}$
(5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (6) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$ (7) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$ (8) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
(9) 25, -1 (10) $-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}$ (11) 0, 3 (12) $-\sqrt{11}, \sqrt{11}$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.3

1. (1) 4, -5 (2) $(\sqrt{6} - 1), (-\sqrt{6} - 1)$ (3) $\frac{\sqrt{13}+5}{2}, \frac{-\sqrt{13}+5}{2}$
 (4) $\frac{\sqrt{2}+2}{3}, \frac{-\sqrt{2}+2}{3}$ (5) $-2, -\frac{5}{2}$ (6) $\frac{2+\sqrt{39}}{5}, \frac{2-\sqrt{39}}{5}$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.4

1. (1) 1, -7, 5 (2) 2, -5, 5 (3) 1, -7, 0
 2. (1) -1, -5 (2) $\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ (3) $\frac{-1+\sqrt{22}}{3}, \frac{-1-\sqrt{22}}{3}$
 (4) $\frac{2+\sqrt{14}}{5}, \frac{2-\sqrt{14}}{5}$ (5) $\frac{-1+\sqrt{73}}{6}, \frac{-1-\sqrt{73}}{6}$ (6) $-1, -\frac{8}{5}$
 3. $-\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.5

1. (1) 5 ಇರುವಾಗ ಮೂಲಗಳು, ಭಿನ್ನವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ, -5 ಇದ್ದಾಗ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ.
 (2) $x^2 + 7x + 5 = 0$ (3) $\alpha + \beta = 2, \alpha \times \beta = -\frac{3}{2}$
 2. (1) 53 (2) -55 (3) 0
 3. (1) ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮಾನ. (2) ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಅಸಮಾನ. (3) ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ.
 4. (1) $x^2 - 4x = 0$ (2) $x^2 + 7x - 30 = 0$
 (3) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ (4) $x^2 - 4x - 1 = 0$
 5. $k = 3$ 6. (1) 18 (2) 50
 7. (1) $k = 12$ ಅಥವಾ $k = -12$ (2) $k = 6$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 2.6

1. 9 ವರ್ಷಗಳು 2. 10 ಮತ್ತು 12 3. ಲಂಬ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 10 ಮತ್ತು ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 15.
 4. ಕಿಶೋರನ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸು 10 ವರ್ಷಗಳು ಮತ್ತು ವಿವೇಕನ ಇಂದಿನ ವಯಸ್ಸು 15 ವರ್ಷಗಳು.
 5. 10 ಗುಣಗಳು 6. ಪಾತ್ರೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 6 ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾತ್ರೆಗಳ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮೂಲ್ಯ 100 ರೂಪಾಯಿಗಳು.
 7. 6 ಕಿ.ಮೀ/ತಾಸು 8. ನಿಶೂಗೆ 6 ದಿವಸ ಮತ್ತು ಪಿಂಟೂಗೆ 12 ದಿವಸಗಳು.
 9. ಭಾಜಕ = 9, ಭಾಗಾಕಾರ = 51 10. $AB = 7$ ಸೆಮಿ, $CD = 15$ ಸೆಮಿ, $AD = BC = 5$ ಸೆಮಿ.

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 2

1. (1) B (2) A (3) C (4) B (5) B (6) D (7) C (8) C
 2. (1) ಮತ್ತು (3) ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳಿವೆ.

3. (1) -15 (2) 1 (3) 21
 4. $k = 3$ 5. (1) $x^2 - 100 = 0$ (2) $x^2 - 2x - 44 = 0$ (3) $x^2 - 7x = 0$
 6. (1) ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ (2) ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಅಸಮಾನ. (3) ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮಾನ.
 7. (1) $\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}$ (3) 1, -4
 (4) $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ (5) ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ (6) $(2 + \sqrt{7}), (2 - \sqrt{7})$
 8. $m = 14$ 9. $x^2 - 5x + 6 = 0$ 10. $x^2 - 4pqx - (p^2 - q^2)^2 = 0$
 11. ಸಾಗರನ ಹತ್ತಿರ 100 ರೂಪಾಯಿಗಳು ಮತ್ತು ಮುಕುಂದನ ಹತ್ತಿರ 150 ರೂಪಾಯಿಗಳು.
 12. 12 ಮತ್ತು $\sqrt{24}$ ಅಥವಾ 12 ಮತ್ತು $-\sqrt{24}$ 13. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 60
 14. ಅಗಲ 45 ಮೀ. ಉದ್ದ 100 ಮೀ ಕೃಷಿ ಹೊಂಡದ ಭುಜ 15 ಮೀ.
 15. ದೊಡ್ಡ ನಳದ ಸಲುವಾಗಿ 3 ತಾಸುಗಳು ಸಣ್ಣ ನಳದ ಸಲುವಾಗಿ 6 ತಾಸುಗಳು.

3. ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.1

1. (1) ಇದೆ, $d = 2$ (2) ಇದೆ, $d = \frac{1}{2}$ (3) ಇದೆ, $d = 4$ (4) ಇಲ್ಲ
 (5) ಇದೆ, $d = -4$ (6) ಇದೆ, $d = 0$ (7) ಇದೆ, $d = \sqrt{2}$ (8) ಇದೆ, $d = 5$
 2. (1) 10, 15, 20, 25, ... (2) -3, -3, -3, -3, ... (3) -7, -6.5, -6, -5.5, ...
 (4) -1.25, 1.75, 4.75, 7.75, ... (5) 6, 3, 0, -3 ... (6) -19, -23, -27, -31
 3. (1) $a = 5, d = -4$ (2) $a = 0.6, d = 0.3$ (3) $a = 127, d = 8$ (4) $a = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{2}$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.2

1. (1) $d = 7$ (2) $d = 3$ (3) $a = -3, d = -5$ (4) $a = 70, d = -10$
 2. ಇದೆ 121 3. 104 4. 115 5. -121 6. 180
 7. 55 8. 55 ಅಥವಾ 9. 60 10. 1

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.3

1. 1215 2. 15252 3. 30450 5. 5040
 5. 2380 6. 60 7. 4, 9, 14 ಅಥವಾ 14, 9, 4 8. -3, 1, 5, 9

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 3.4

1. 70455 ರೂಪಾಯಿಗಳು 2. ಮೊದಲ ಕಂತು 1000 ರೂಪಾಯಿ ಕೊನೆಯ ಕಂತು 560 ರೂಪಾಯಿ
 3. 1,92,000 ರೂಪಾಯಿ 4. 48, 1242 5. $-20^\circ, -25^\circ, -30^\circ, -35^\circ, -40^\circ, -45^\circ$ 6. 325

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 3

1. (1) B (2) C (3) B (4) D (5) B (6) C (7) C (8) A (9) A (10) B
 2. 40 3. 1, 6, 11, ... 4. -195 5. 16, -21 6. -1 7. 6, 10
 8. 8 9. 67, 69, 71 10. 3, 7, 11, 147. 14. 2000 ರೂಪಾಯಿ

4. ಅರ್ಥ ನಿಯೋಜನೆ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.1

1. CGST 6%, SGST 6%
2. SGST 9%, GST 18%
3. CGST ₹ 784 ಮತ್ತು SGST ₹ 784
4. ಆ ಬೆಲ್ವುಗ್ರಾಹಕನಿಗೆ 691.48 ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗೆ ದೊರೆಯುವುದು.
5. ಆಟದ ಕಾರಿನ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ ₹ 1500 ಅದರ ಮೇಲೆ CGST ₹ 135 SGST ₹ 135
6. (1) SGSTಯ ದರ 14% (2) ಏಸಿಯ ಮೇಲಿನ GST ದರ 28%
(3) ಏಸಿಯ ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ 40,000 ರೂ. (4) GSTಯ ಒಟ್ಟು ರಕ್ತಮು 11,200 ರೂ.
(5) CGST 5600 ರೂ. (6) SGST 5600 ರೂ.
7. ಪ್ರಸಾದನಿಗೆ ಆ ವಾಶಿಂಗ್ ಮಶಿನ 48,640 ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗೆ, ಸಿಗಬಹುದು ಮತ್ತು ಬಿಲ್ಲಿನ ಮೇಲೆ CGST 5320 ರೂ. ಮತ್ತು SGST 5320 ರೂ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.2

1. ಚೇತನಾ ಸ್ಟೋರ್‌ನಿಗೆ 22,000 ರೂ. ಕೊಡುವ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ಇದೆ.
2. ನಜಮಾ ಇವರಿಗೆ ₹ 12,500ರ ಇನ್‌ಪುಟ್ ಟ್ಯಾಕ್ಸ್ ಕ್ರೆಡಿಟ್ ಸಿಗುವುದು. ಅದರ ಕೊಡುವ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ₹ 2250.
3. ಅಮೀರ ಎಂಟರ್‌ಪ್ರೈಸಿಸ್‌ನ ಕೊಡುವ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ 300 ರೂ. ಅದರಲ್ಲಿಯ ಕೇಂದ್ರದ ಕೊಡುವ ಕರ 150 ರೂ. ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಕರ 150 ರೂ.
ಅಬಕರಿ ಬ್ರದರ್ಸ್‌ನ ಕೊಡುವ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ 400 ರೂ. ಅದರಲ್ಲಿಯ ಕೇಂದ್ರದ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಕರ 200 ರೂಪಾಯಿ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯದ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಕರ 200 ರೂ.
4. ಕೊಡಬೇಕಾದ ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ₹ 100, ಸಿಜಿಎಸ್‌ಟಿ ₹ 50, ಯುಟಿಜಿಎಸ್‌ಟಿ ₹ 50. 5. ಸಿಜಿಎಸ್‌ಟಿ = ಎಸ್‌ಜಿಎಸ್‌ಟಿ = ₹ 900

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.3

1. (1) ಮಾರಾಟದ ಬೆಲೆ 100 ರೂ. (2) ದರ್ಶನಿ ಬೆಲೆ 75 ರೂ. (3) ಅವಮೂಲ್ಯ 5 ರೂ.
2. 25%
3. 37,040 ರೂ. 4. 800 ಸೆಆರ್‌ಎಸ್
5. ಒಟ್ಟು ಲಾಭಾಂಶ 5.83%
6. ಕಂಪನಿ A ಯಲ್ಲಿಯ ಹೂಡಿಕೆಯ ಲಾಭದಾಯಕ ಇದೆ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 4.4

1. 200.60 ರೂಪಾಯಿಗಳು
2. 999 ರೂಪಾಯಿಗಳು
- 3.

ಶೇಆರ್‌ಎಸ್ ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಶೇಆರ್‌ಎಸ್‌ದ ಮಾರಾಟ ದರ	ಶೇಆರ್‌ಎಸ್‌ದ ಬೆಲೆ	ದಲಾಲಿಯ ದರ 0.2%	ದಲಾಲಿಯ ಮೇಲೆ CGST 9%	ದಲಾಲಿಯ ಮೇಲೆ SGST 9%	ಶೇಆರ್‌ಎಸ್‌ನ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ
100 B	₹ 45	₹ 4500	₹ 9	₹ 0.81	₹ 0.81	₹ 4510.62
75 S	₹ 200	₹15000	₹ 30	₹ 2.70	₹ 2.70	₹ 14964.60

4. 100 ಶೇಆರ್‌ಎಸ್ ಮಾರಿದರು
5. ಹಾನಿ 8560 ರೂಪಾಯಿಗಳು

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಂಗ್ರಹ 4A

1. (1) C (2) B (3) D (4) B (5) A (6) B
2. ಒಟ್ಟು ಬಿಲ್ಲು 28,800 ರೂ. ಸಿಜಿಎಸ್‌ಟಿ 3150 ರೂ. ಎಸ್‌ಜಿಎಸ್‌ಟಿ 3150 ರೂ.

3. ₹ 997.50 4. ₹ 12,500 5. ₹ 4250 ITC ಪಾವತಿಸುವ ಹಣ ₹ 250
6. ITC ₹ 1550 ಕೇಂದ್ರದ ಕರ ₹ 5030, ರಾಜ್ಯದ ಕರ 5030 ರೂಪಾಯಿಗಳು.
7. ಕರಪಾತ್ರ ಬೆಲೆ ₹ 75,000 ರೂಪಾಯಿ ಕೇಂದ್ರದ ಕರ ₹ 4500, ರಾಜ್ಯದ ಕರ ₹ 4500 ರೂಪಾಯಿ.
- 8.(1) ಠೋಕ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ ಇನ್‌ವಾಯಿಸ ಕರಪಾವತಿಯಲ್ಲಿ ಸಿಜಿಎಸ್‌ಟಿ 16200 ರೂಪಾಯಿಗಳು. ಎಸ್‌ಜಿಎಸ್‌ಟಿ 16200 ರೂಪಾಯಿಗಳು.
ಕಿರಕೋಳ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ ಇನ್‌ವಾಯಿಸ ಕರ ಪಾವತಿಯಲ್ಲಿ ಸಿಜಿಎಸ್‌ಟಿ 19,800 ರೂಪಾಯಿಗಳು, ಎಸ್‌ಜಿಎಸ್‌ಟಿ 19,800 ರೂಪಾಯಿಗಳು.
- (2) ಠೋಕ ವ್ಯಾಪಾರಿ: ಕೊಡಬೇಕಾದ ಕರ (CGST) 2700 ಅಥವಾ (SGST) 2700,
ಕಿರಕೋಳ ವ್ಯಾಪಾರಿ ಕೊಡಬೇಕಾದ (CGST) 3600 ಅಥವಾ (SGST) 3600
9. (1) ಅಣ್ಣಾ ಪಾಟೀಲರು ಕೊಟ್ಟ ಇನ್‌ವಾಯಿಸ ಕರಪಾವತಿಯಲ್ಲಿ ಸಿಜಿಎಸ್‌ಟಿ ₹ 1960 ರೂ. ಎಸ್‌ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ₹ 1960 ರೂ.
(2) ವಸಯಿಯ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ ಗ್ರಾಹಕನಿಗೆ ಆಕರಿಸಿದ ಸಿಜಿಎಸ್‌ಟಿ ₹ 2352 ರೂ. ಮತ್ತು ಎಸ್‌ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ₹ 2352 ರೂ.
(3) ವಸಯಿಯ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಸಿಜಿಎಸ್‌ಟಿ ₹ 392 ರೂ. ಕೊಡಬೇಕಾದ ಎಸ್‌ಜಿಎಸ್‌ಟಿ ₹ 392 ರೂ.

10.

ವ್ಯಕ್ತಿ	ಕೊಡಬೇಕಾದ ಸಿಜಿಎಸ್‌ಟಿ (₹)	ಕೊಡಬೇಕಾದ ಎಸ್‌ಜಿಎಸ್‌ಟಿ (₹)	ಕೊಡಬೇಕಾದ ಎಸ್‌ಜಿಎಸ್‌ಟಿ(₹)
ಉತ್ಪಾದಕ	300	300	600
ಠೋಕ ವ್ಯಾಪಾರಿ	360-300 = 60	60	120
ಕಿರಕೋಳ ವ್ಯಾಪಾರಿ	390-360 = 30	30	60
ಒಟ್ಟು ಕರ	390	390	780

- (2) ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಗ್ರಾಹಕನಿಗೆ ಆ ವಸ್ತು 7280 ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗೆ ದೊರೆಯುವುದು
(3) ಉತ್ಪಾದಕನಿಂದ ಠೋಕ ವ್ಯಾಪಾರಿ B2B, ಕಿರಕೋಳ ವ್ಯಾಪಾರಿ B2B, ಕಿರಕೋಳ ವ್ಯಾಪಾರಿ ಗ್ರಾಹಕ B2C

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ 4B

1. (1) B (2) B (3) A (4) C (5) A
2. ₹ 130.39 3. 22.2% 4. 21,000 ರೂಪಾಯಿ ಸಿಗುವವು
5. 500 ಶೇಅರ್ಸ್ ದೊರೆಯುವವು 6. ಲಾಭ 1058.52 ರೂಪಾಯಿಗಳು
7. ಕಂಪನಿ B ಕಾರಣ ಹಿಂತಿರುಗಿಸುವಿಕೆ ಹೆಚ್ಚು 8. 1000 ಶೇಅರ್ಸ್ 9. 118 ರೂಪಾಯಿಗಳು
10. (1) 1,20,000 ರೂಪಾಯಿಗಳು (2) 360 ರೂಪಾಯಿಗಳು (3) 64.80 ರೂಪಾಯಿಗಳು
(4) 120424.80 ರೂಪಾಯಿಗಳು
11. 1% ಲಾಭ

5. ಸಂಭಾವ್ಯತೆ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.1

1. (1) 8 (2) 7 (3) 52 (4) 11

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.2

1. (1) $S = \{1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T\}$ $n(S) = 12$

$$(2) S = \{23, 25, 32, 35, 52, 53\} \quad n(S) = 6$$

$$2. S = \{B_1B_2, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, G_1G_2\}$$

$$3. S = \{\text{ಕೆಂಪು, ನೇರಳೆ, ಕೇಸರಿ, ಹಳದಿ, ನೀಲಿ, ಹಸಿರು}\} \quad n(S) = 6$$

$$4. S = \{\text{ಮಂಗಳವಾರ, ರವಿವಾರ, ಶುಕ್ರವಾರ, ಬುಧವಾರ, ಸೋಮವಾರ, ಶನಿವಾರ}\} \quad n(S) = 6$$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.3

$$1. (1) S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad n(S) = 6$$

$$A = \{2, 4, 6\} \quad n(A) = 3, \quad B = \{1, 3, 5\} \quad n(B) = 3, \quad C = \{2, 3, 5\} \quad n(C) = 3$$

$$(2) S = \{(1,1), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (2,6), (3,1), \dots, (3,6),$$

$$(4,1), \dots, (4,6), (5,1), \dots, (5,6), (6,1), \dots, (6,6)\} \quad n(S) = 36$$

$$A = \{(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1) (6,6)\} \quad n(A) = 6$$

$$B = \{(4,6) (5,5) (5,6) (6,4) (6,5) (6,6)\} \quad n(B) = 6$$

$$C = \{(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)\} \quad n(C) = 6$$

$$(3) S = \{HHH, HHT, HTT, HTH, THT, TTH, THH, TTT\} \quad n(S) = 8$$

$$A = \{HHH, HHT, HTH, THH\} \quad n(A) = 4$$

$$B = \{TTT\} \quad n(B) = 1$$

$$C = \{HHH, HHT, THH, THT\} \quad n(C) = 4$$

$$(4) S = \{10, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 34, 35, 40, 41, 42, 43, 45, 50, 51, 52, 53, 54\} \quad n(S) = 25$$

$$A = \{10, 12, 14, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 42, 50, 52, 54\} \quad n(A) = 13$$

$$B = \{12, 15, 21, 24, 30, 42, 45, 51, 54\} \quad n(B) = 9$$

$$C = \{51, 52, 53, 54\} \quad n(C) = 4$$

$$(5) S = \{M_1M_2, M_1M_3, M_1F_1, M_1F_2, M_2M_3, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2\} \quad n(S) = 10$$

$$A = \{M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2\} \quad n(A) = 7$$

$$B = \{M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2\} \quad n(B) = 6$$

$$C = \{M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3\} \quad n(C) = 3$$

$$(6) S = \{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6\} \quad n(S) = 12$$

$$A = \{H1, H3, H5\} \quad n(A) = 3$$

$$B = \{H2, H4, H6, T2, T4, T6\} \quad n(B) = 6$$

$$C = \{ \} \quad n(C) = 0$$

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 5.4

$$1. (1) \frac{3}{4}, (2) \frac{1}{4}$$

$$2. (1) \frac{1}{6} \quad (2) 0 \quad (3) \frac{5}{12}$$

3. (1) $\frac{7}{15}$ (2) $\frac{1}{5}$ 4. (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{1}{5}$ 5. (1) $\frac{1}{13}$ (2) $\frac{1}{4}$

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ - 5

1. (1) B (2) B (3) C (4) A (5) A 2. ವಾಸಿಮ 3. (1) $\frac{1}{11}$ (2) $\frac{6}{11}$
 4. $\frac{5}{26}$ 5. (1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{4}{9}$ 6. $\frac{1}{2}$ 7. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$
 8. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{6}$ 9. $\frac{1}{25}$ 10. (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) 1
 11. (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) 1 (4) 0 12. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ 13. $\frac{2}{11}$
 14. $\frac{13}{40}$ 15. (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{1}{5}$ 16. $\frac{11}{36}$

6. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.1

- (1) 4.36 ತಾಸು (2) 521.43 ರೂ. (3) 2.82 ಲೀಟರ (4) 35310 ರೂ.
 (5) 985 ರೂ. ಅಥವಾ 987.5 ರೂ. (6) 3070 ರೂ. ಅಥವಾ 3066.67 ರೂ.

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.2

- (1) 11.4 ತಾಸು (2) 184.4 ಅಂದರೆ ಅಂದಾಜು 184 ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳು (3) 74.558 \approx 75 ವಾಹನಗಳು
 (4) 52.75 \approx 53 ದೀಪಗಳು

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.3

1. 4.33 ಲೀಟರ 2. 72 ಯುನಿಟು 3. 9.94 ಲೀಟರ 4. 12.31 ವರ್ಷಗಳು

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.5

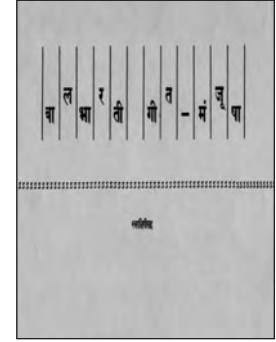
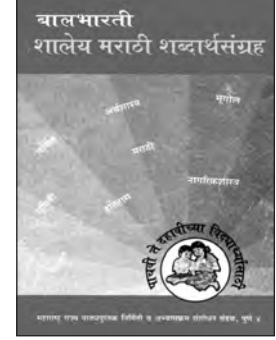
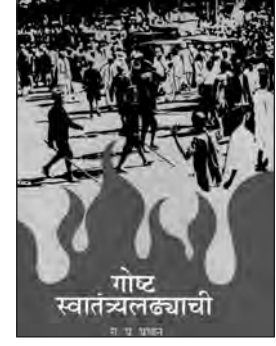
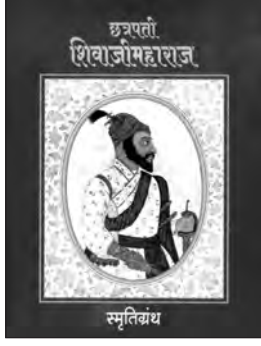
1. (1) 60-70 (2) 20-30 ಮತ್ತು 90-100 (3) 55 (4) 80 ಮತ್ತು 90 (5) 15

ಉದಾಹರಣ ಸಂಗ್ರಹ 6.6

5. (1) 2000 (2) 1000 (3) 25%
 6. (1) 12000 ರೂಪಾಯಿಗಳು (2) 3000 ರೂಪಾಯಿಗಳು (3) 2000 ರೂಪಾಯಿಗಳು (4) 1000 ರೂಪಾಯಿಗಳು

ಸಂಕೀರ್ಣ ಪ್ರಶ್ನೆಸಂಗ್ರಹ 6

1. (1) D (2) A (3) B (4) C (5) C (6) C
 2. 52,500 ರೂಪಾಯಿಗಳು 3. 65,400 ರೂಪಾಯಿಗಳು 4. 4250 ರೂಪಾಯಿಗಳು
 5. 72,400 ರೂಪಾಯಿಗಳು 6. 223.13 ಕಿಮೀ 7. 32 ರೂಪಾಯಿಗಳು 8. 397.06 ಗ್ರಾಂ
 14. (1) ಕಾರ - 108°, ಟೆಂಪೋ - 43°, ಬಸ್ - 29°, ರಿಕ್ಷಾ - 36°, ದ್ವಿಚಕ್ರ - 144°
 (2) ವಾಹನಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ - 3000
 16. (1) ಕ್ರಿಕೆಟ ಆಟ ಇಷ್ಟಪಡುವವರು - 225, (2) ಫುಟಬಾಲ್ ಇಷ್ಟಪಡುವವರು - 175
 (3) ಬೇರೆ ಆಟ ಇಷ್ಟಪಡುವವರು - 200.



- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.



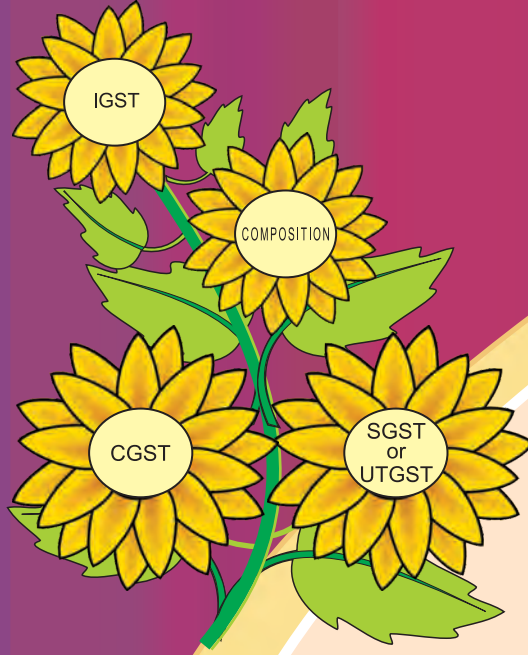
पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.



ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७९८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५



$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$



ಮಹಾರಾಷ್ಟ್ರ ರಾಜ್ಯ ಪಾಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ನಿರ್ಮಿತಿ ಮತ್ತು
ಅಭ್ಯಾಸಕ್ರಮ ಸಂಶೋಧನ ಮಂಡಳಿ,
ಪುಣೆ.

ಕನ್ನಡ ಗಣಿತ ಇ. ೧೦ ವೀ ಭಾಗ-೧

₹ 80.00