ગણિત ભાગ-II

ધોરણ-દસમું

ભારતનું સંવિધાન

ભાગ ૪ ક

નાગરિકોના મૂળભૂત કર્તવ્યો

અનુચ્છેદ ૫૧ ક

મૂળભૂત કર્તવ્ય – ભારતના પ્રત્યેક નાગરિકનું એ કર્તવ્ય છે કે તેણે –

(ક) સંવિધાનનું પાલન કરવું. સંવિધાનના આદર્શો, રાષ્ટ્રધ્વજ અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવો.

(ખ) સ્વાતંત્ર્ય ચળવળની પ્રેરણા આપનારા આદર્શોનું પાલન કરવું.

(ગ) દેશના સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડતા સુરક્ષિત રાખવા પ્રયત્નશીલ રહેવું.

(ઘ) આપણા દેશનું રક્ષણ કરવું, દેશની સેવા કરવી.

(ઙ) દરેક પ્રકારના ભેદભાવને ભૂલીને એકતા અને બંધુત્વની ભાવના વિકસાવવી. સ્ત્રીઓના સન્માનને ઠેસ પહોંચાડનારી પ્રથાઓનો ત્યાગ કરવો.

(ચ) આપણી સંમિશ્ર સંસ્કૃતિના વારસાનું જતન કરવું.

(છ) નૈસર્ગિક પર્યાવરણનું જતન કરવું. સજીવ પ્રાણીઓ પ્રત્યે દયાભાવ રાખવો.

(જ) વૈજ્ઞાનિક દૃષ્ટિ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસાવૃત્તિ કેળવવી.

(ઝ) સાર્વજનિક માલમત્તાનું જતન કરવું. હિંસાનો ત્યાગ કરવો.

(ઞ) દેશની ઉત્તરોત્તર પ્રગતિ માટે વ્યક્તિગત તેમજ સામૂહિક કાર્યમાં ઉત્તમતા-શ્રેષ્ઠતાનું સ્તર જાળવી રાખવાનો પ્રયત્ન કરવો.

(ટ) ૬થી ૧૪ વય જૂથના બાળકોને તેમના વાલીએ શિક્ષણની તક પૂરી પાડવી.

શાસન નિર્ણય ક્રમાંક : અભ્યાસ - 2116/(પ્ર.ક્ર. 43/16) એસડી-4 દિનાંક 25-4-2016 અન્વયે સ્થાપિત થયેલ સમન્વય સમિતિની દિનાંક 3-3-2017 રોજની બેઠકમાં આ પાઠ્યપુસ્તક નિર્ધારિત કરવાની માન્યતા આપવામાં આવી છે.

ગણિત

ભાગ-II

ધોરણ - દસમું

મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ, પુણે - 411 004.

QAYNSG

તમારાં સ્માર્ટફોનમાં DIKSHA APP દ્વારા પાઠ્યપુસ્તકનાં પહેલા પાનાં પરના Q.R. Codeથી ડિજિટલ પાઠ્યપુસ્તક અને દરેક પાઠમાં આપેલા Q.R. Codeથી તે સંબંધિત પાઠનાં અધ્યયન-અધ્યાપન માટે ઉપયોગી દૃશ્ય-શ્રાવ્ય સાહિત્ય ઉપલબ્ધ થશે.

ગણિત વિષયતજ્ઞ સમિતિ

ડૉ. મંગલા નારળીકર (અધ્યક્ષ)
ડૉ. જયશ્રી અત્રે (સદસ્ય)
શ્રી. વિનાયક ગોડબોલે (સદસ્ય)
શ્રીમતી પ્રાજક્તિ ગોખલે (સદસ્ય)
શ્રી. રમાકાંત સરોદે (સદસ્ય)
શ્રી. સંદીપ પંચભાઈ (સદસ્ય)
શ્રીમતી પૂજા જાધવ (સદસ્ય)
શ્રીમતી ઉજ્જવલા ગોડબોલે (સદસ્ય, સચિવ)

ગણિત વિષય - રાજ્ય અભ્યાસમંડળના સદસ્ય

શ્રીમતી જયશ્રી પુરંદરે	શ્રીમતી તરૂબેન પોપટ
શ્રી. રાજેન્દ્ર ચૌધરી	શ્રી. પ્રમોદ ઠોંબરે
શ્રી. રામા વ્હન્યાળકર	ડૉ. ભારતી સહસ્રબુદ્ધે
શ્રી. આણ્ણાપા પરીટ	શ્રી. વસંત શેવાળે
શ્રી. અન્સાર શેખ	શ્રી. પ્રતાપ કાશિદ
શ્રી. શ્રીપાદ દેશપાંડે	શ્રી. મિલિંદ ભાકરે
શ્રી. સુરેશ દાતે	શ્રી. જ્ઞાનેશ્વર માશાળકર
શ્રી. ઉમેશ રેળે	શ્રી. ગણેશ કોલતે
શ્રી. બન્સી હાવળે	શ્રી. સંદેશ સોનાવણે
શ્રીમતી રોહિણી શિર્કે	શ્રી. સુધીર પાટીલ
શ્રી. પ્રકાશ ઝેંડે	શ્રી. પ્રકાશ કાપસે
શ્રી. લક્ષ્મણ દાવણકર	શ્રી. રવીન્દ્ર ખંદારે
શ્રી. શ્રીકાંત રત્નપારખી	શ્રીમતી સ્વાતિ ધર્માધિકારી
શ્રી. સુનિલ શ્રીવાસ્તવ	શ્રી. અરવિંદકુમાર તિવારી
શ્રી. અન્સારી અબ્દુલ હમીદ	શ્રી. મલ્લેશામ બેથી
શ્રીમતી સુવર્ણા દેશપાંડે	શ્રીમતી આર્યા ભિડે

પ્રમુખ સંયોજક : ઉજ્જવલા શ્રીકાંત ગોડબોલે
પ્ર. વિશેષાધિકારી ગણિત,
પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, પુણે.

ભાષાંતર : ધીરેન મનસુખલાલ દોશી
ધર્મિકા ધીરેન દોશી

સમીક્ષક : શ્રીમતી તરૂબેન પોપટ

ભાષાંતર સંયોજક : કેતકી નિતેશ જાની
વિશેષાધિકારી,
ગુજરાતી વિભાગ
પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, પુણે.

મુખપૃષ્ઠ અને સંગણકીય આલેખન : શ્રી સંદીપ કોળી, ચિત્રકાર, મુંબઈ.

અક્ષર ગૂંથણી : સમર્થ ગ્રાફિક્સ,
522, નારાયણ પેઠ, પુણે-30.

નિર્મિતિ : સચિન મેહતા
મુખ્ય નિર્મિતિ અધિકારી
સંજય કાંબળે
નિર્મિતિ અધિકારી
પ્રશાંત હરણે
સહાયક નિર્મિતિ અધિકારી

કાગળ : 70 જી.એસ.એમ. ક્રીમવ્હોવ્હ
મુદ્રણાદેશ : N/PB/
મુદ્રક :

પ્રકાશક : શ્રી. વિવેક ઉત્તમ ગોસાવી, નિયંત્રક
પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ મંડળ,
પ્રભાદેવી, મુંબઈ - 25.

ભારતનું સંવિધાન

આમુખ

અમે ભારતના લોકો ભારતને એક સાર્વભૌમ સમાજવાદી બિનસાંપ્રદાયિક લોકતંત્રાત્મક પ્રજાસત્તાક તરીકે સંસ્થાપિત કરવાનો

તથા તેના સર્વ નાગરિકોને :

સામાજિક, આર્થિક અને રાજકીય ....ન્યાય

વિચાર, અભિવ્યક્તિ, માન્યતા,

ધર્મ અને ઉપાસનાની ....સ્વતંત્રતા

દરજ્જા અને તકની ....સમાનતા

પ્રાપ્ત થાય તેમ કરવાનો

અને તેઓ સર્વમાં

વ્યક્તિનું ગૌરવ અને રાષ્ટ્રની

એકતા અને અખંડતા સુદૃઢ કરે એવી ....બંધુતા

વિકસાવવાનો

ગંભીરતાપૂર્વક સંકલ્પ કરીને

અમારી સંવિધાનસભામાં ૨૬ નવેમ્બર, ૧૯૪૯ના રોજ આથી આ સંવિધાન અપનાવી, તેને અધિનિયમિત કરી અમને પોતાને અર્પિત કરીએ છીએ.

રાષ્ટ્રગીત

જનગણમન - અધિનાયક જય હે
ભારત - ભાગ્યવિધાતા.
પંજાબ, સિંધુ, ગુજરાત, મરાઠા,
દ્રાવિડ, ઉત્કલ, બંગ,
વિંધ્ય, હિમાચલ, યમુના, ગંગા,
ઉચ્છલ જલધિતરંગ,
તવ શુભ નામે જાગે, તવ શુભ આશિષ માગે,
ગાહે તવ જયગાથા.
જનગણ મંગલદાયક જય હે,
ભારત - ભાગ્યવિધાતા.
જય હે, જય હે, જય હે,
જય જય જય, જય હે.

પ્રતિજ્ઞા

ભારત મારો દેશ છે. બધા ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.

હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે. હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.

હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.

હું મારા દેશ અને દેશબાંધવો પ્રત્યે વફાદારી રાખવાની પ્રતિજ્ઞા લઉં છું. તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ સમાયેલું છે.

પ્રસ્તાવના

વિદ્યાર્થીમિત્રો,

ધોરણ દસમાં તમારું સ્વાગત છે !

ગણિત ભાગ I અને ગણિત ભાગ II આ બે પાઠ્યપુસ્તકોનો તમારે અભ્યાસ કરવાનો છે.

ગણિત ભાગ II માં ભૂમિતિ, ત્રિકોણમિતિ, નિર્દેશક ભૂમિતિ અને મહત્ત્વમાપન જેવા મુખ્ય ક્ષેત્રો છે. તમારે આ વર્ષે ધોરણ નવ સુધી શીખેલાં ઘટકોનો જ થોડો વધુ અભ્યાસ કરવાનો છે. તેમનો વ્યવહારમાં થતો ઉપયોગ આપેલાં ઉદાહરણો દ્વારા સ્પષ્ટ સમજાશે. જ્યાં નવા ભાગ, સૂત્રો અથવા ઉપયોગ છે, ત્યાં સુલભ સ્પષ્ટીકરણ આપેલું છે. દરેક પ્રકરણમાં ગણેલાં ઉદાહરણો, મહાવરા માટેનાં ઉદાહરણો તો છે જ, પણ પ્રજ્ઞાવાન વિદ્યાર્થીઓ માટે કેટલાક આવ્હાનાત્મક પ્રશ્ન તારાંકિત કરીને આપેલા છે. કેટલાક વિદ્યાર્થીઓને ધોરણ દસ પછી ગણિતનો અભ્યાસ ન કરવો હોય, તો પણ ગણિતની મૂળભૂત સંકલ્પનાઓ તેમને સમજાય, તેમજ અન્ય ક્ષેત્રમાં કામ કરવા માટે આવશ્યક ગણિત તેમને આવડે, એવું જ્ઞાન આ પુસ્તક દ્વારા મળશે. 'વધુ માહિતી માટે' હેઠળ આપેલી વિગત, જે વિદ્યાર્થીઓ ધોરણ દસ પછી પણ ગણિતનો અભ્યાસ કરવા અને તેમાં પ્રાવીણ્ય મેળવવા ઈચ્છે છે, તેમને ઉપયોગી થશે.માટે તેનો જરૂર અભ્યાસ કરવો. આખું પુસ્તક ઓછામાં ઓછું એકવાર વાંચવું અને સમજવું. 'ઍપ'ની માધ્યમથી Q.R. Code દ્વારા પ્રત્યેક પાઠ સંબંધિત વધુ માહિતી માટે આપને દશ્ય-શ્રાવ્ય સાહિત્ય ઉપલબ્ધ થશે. તે અભ્યાસ માટે ચોક્કસ ઉપયોગી થશે.

દસમાની પરીક્ષા મહત્ત્વપૂર્ણ મનાય છે. પરંતુ તે માટે તાણ અનુભવ્યા સિવાય સરસ અભ્યાસ કરીને ઈચ્છિત યશ પ્રાપ્ત કરો એવી તમને શુભેચ્છા !

(ડૉ. સુનિલ મગર)
સંચાલક
મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ
અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ, પુણે.

પુણે
તા. : ૧૮ માર્ચ ૨૦૧૮, ગુડી પડવો
ભારતીય સૌર દિનાંક : ૨૭ ફાગણ ૧૯૩૯

ધોરણ 10 ગણિત ભાગ IIના અભ્યાસક્રમ દ્વારા વિદ્યાર્થીઓમાં નીચેની ક્ષમતાઓ વિકસિત થશે.

ક્ષેત્ર	ઘટક	ક્ષમતા વિધાનો
1. ભૂમિતિ	1.1 સરૂપ ત્રિકોણ	• સરૂપ ત્રિકોણોના ગુણધર્મ, એકરૂપ ત્રિકોણોના ગુણધર્મ અને પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને ઉદાહરણો ગણતા આવડે. • સરૂપ ત્રિકોણોની રચના કરતા આવડે.
	1.2 વર્તુળ	• વર્તુળની જીવા અને સ્પર્શકના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં આવડે. • વર્તુળના સ્પર્શકની રચના કરતા આવડે.
2. નિર્દેશક ભૂમિતિ	2.1 નિર્દેશક ભૂમિતિ	• બે બિંદુ વચ્ચેનું અંતર શોધતાં આવડે. • રેખાખંડોના વિભાજન બિંદુના નિર્દેશકો શોધતાં આવડે. • રેખાનો ઢાળ શોધતા આવડે.
3. મહત્ત્વમાપન	3.1 પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ	• વર્તુળચાપની લંબાઈ શોધતા આવડે. • વૃત્તાંશ અને વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધતા આવડે. • આપેલા ત્રિમિતિય આકારોનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધતા આવડે.
4. ત્રિકોણમિતિ	4.1 ત્રિકોણમિતિ	• ત્રિકોણમિતિય નિત્ય સમાનતાનો ઉપયોગ કરીને ઉદાહરણો ગણતાં આવડે. • ઝાડની ઊંચાઈ શોધવી, નદી કિનારાની પહોળાઈ શોધવી, એવી સમસ્યા માટે ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ કરતા આવડે.

શિક્ષકો માટે સૂચના

સૌપ્રથમ પુસ્તકનું વાંચન કરી સમજી લેવું. વિવિધ ઘટકોનું સ્પષ્ટીકરણ કરવું અને સૂત્રોની ચકાસણી કરવી જેવી મહત્ત્વની બાબતો માટે કૃતિની મદદ લેવી.

પ્રાત્યક્ષિકો દ્વારા પણ મૂલ્યમાપન કરવાનું છે. તેના માટે પણ કૃતિ વાપરી શકાય. વિદ્યાર્થીઓને સ્વતંત્રપણે વિચાર કરવા ઉત્તેજન આપવું. કોઇ ઉદાહરણ જુદી પરંતુ તર્કશુધ્ધિ પધ્ધતિથી ગણનાર વિદ્યાર્થીઓને ખાસ શાબાશી આપવી.

ભૂમિતિના પ્રમેયના વિધાનો ધ્યાનમાં રાખી, તેમનો ઉપયોગ કરીને ઉદાહરણો ગણવાનું કૌશલ્ય વિકસિત કરવા માટે પુસ્તકની કૃતિ સિવાયની બીજી કૃતિ તૈયાર કરી શકાય.

પ્રાત્યક્ષિકોની યાદી (નમૂના)

(1) પુઠ્ઠાનો એક ત્રિકોણાકાર ટુકડો લો. ટેબલ પર મીણબત્તી અથવા નાનો દીવો મૂકો. ભીંત અને દીવો/ મીણબત્તીની વચ્ચે ત્રિકોણ મૂકો. તેના પડછાયાનું નિરીક્ષણ કરો. પડછાયો અને મૂળ ત્રિકોણ સમરૂપ છે કે તે ચકાસો. (મૂળ ત્રિકોણ અને તેનો પડછાયો પરસ્પર સમરૂપ હોય તે માટે કઇ સાવચેતી રાખશો ?)

(2) સમાન માપના બે કાટકોણ ત્રિકોણ કાપી લો. ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓને બંને બાજુએ A, B અને C નામ આપો. તે પૈકી એક કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ પર શિરોલંબ દોરો. તેને 'D' નામ આપો. લંબપાસેથી કાપીને બે નાના કાટકોણ ત્રિકોણ તૈયાર કરો. ત્રણેય કાટકોણ ત્રિકોણ કઈ એક એક સંગતતા અનુસાર એક બીજાને સરૂપ છે તે લખો.

(3) એક વર્તુળ દોરો. તે વર્તુળના અંતર્ભાગમાં એક, બાહ્યભાગમાં એક અને વર્તુળ પર એક એમ ત્રણ બિંદુ લો. આ દરેક બિંદુમાંથી વર્તુળને કેટલા સ્પર્શકો દોરી શકાય તેનું કોષ્ટક તૈયાર કરો. કોષ્ટકમાં કાચી આકૃતિ દોરી દર્શાવો.

(4) 'બે બિંદુમાંથી અસંખ્ય વર્તુળ દોરી શકાય છે.' તે દર્શાવવા માટે, આપેલા બે બિંદુમાંથી ઓછામાં ઓછા પાંચ જુદાં જુદાં વર્તુળો દોરો.

(5) વર્તુળના ગુણધર્મ ચકાસવા માટે ઉપયોગી થાય એવું ખીલી બેસાડેલું જિઓ બોર્ડ લો. રબરબેંડનો ઉપયોગ કરીને નીચેનામાંથી કોઈપણ એક પ્રમેય માટે- જિઓબોર્ડ પર આકૃતિ તૈયાર કરો.

(i) અંતર્ગત કોણનો પ્રમેય (ii) સ્પર્શક - છેદકનો ખૂણાનો પ્રમેય

(iii) વિરુધ્ધ વૃતાંશના ખૂણાનો પ્રમેય.

(6) એક વર્તુળ અને એક ખૂણાની પ્રતિકૃતિ લઈને જુદીજુદી સ્થિતિમાં અંતર્ગત ચાપ તૈયાર કરો. તે આકૃતિઓ નોટબુકમાં દોરો.

(7) એક ખૂણાના ચાર સમાન ભાગ કરો. કંપાસ અને ફૂટપટ્ટીનો ઉપયોગ કરો.

(8) એક બીકર લો. તેની ઊંચાઈ અને પાયાની ત્રિજ્યા માપો. તેના આધારે સૂત્રનો ઉપયોગ કરી તેમાં કેટલું પાણી સમાશે, તે શોધો. તેમાં પાણી ભરીને તેનું કદ માપપાત્ર વડે માપો. બંને ઉત્તર પરથી નિષ્કર્ષ શોધો.

(9) શંકુછેદના આકારનો એક કાગળનો ગ્લાસ લો. તેના પાયાની અને ઉપરના વર્તુળાકારની ત્રિજ્યા માપો. ગ્લાસની ઊંચાઈ માપો. સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને તે ગ્લાસમાં કેટલું પાણી સમાશે તે શોધો. તેને પૂર્ણપણે પાણીથી ભરીને તે પાણીનું કદ માપો. પાણીનું કદ અને સૂત્ર વડે શોધેલા ઘનફળની તુલના કરીને સૂત્રને ચકાસી જુઓ.

(10) જાડા પુઠ્ઠાના બે સરૂપ ત્રિકોણો કાપી લો. તેમના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર (i) તેમની પરિમિતિના વર્ગના પ્રમાણમાં છે કે, અથવા (ii) તેમની મધ્યગાના વર્ગના પ્રમાણમાં છે કે તે પ્રત્યક્ષ માપીને નક્કી કરો.

અનુક્રમણિકા

1 સરૂપતા

ચાલો, શીખીએ.

- બે ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર
- પ્રમાણનો મૂળભૂત પ્રમેય
- પ્રમાણના મૂળભૂત પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય
- ત્રિકોણના ખૂણાના દુભાજકનો ગુણધર્મ
- ત્રણ સમાંતર રેખા અને છેદિકા વડે બનતા આંતરછેદોનો ગુણોત્તર
- ત્રિકોણની સરૂપતાની કસોટીઓ
- સરૂપ ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણધર્મ

યાદ કરીએ.

આપણે ગુણોત્તર અને પ્રમાણનો અભ્યાસ કર્યો છે. a અને b આ બે સંખ્યાનો ગુણોત્તર $\frac{m}{n}$ છે. આ જ વિધાનને a અને b આ બે સંખ્યા m:n પ્રમાણમાં છે. એમ પણ લખી શકાય છે.

આ સંકલ્પના માટે આપણે સામાન્ય રીતે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાનો વિચાર કરીએ છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે રેખાખંડની લંબાઈ અને કોઈ એક આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ ધન વાસ્તવિક સંખ્યા હોય છે.

આપણને ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળનું સૂત્ર ખબર છે.

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}$ પાયો $\times$ ઊંચાઈ

જાણી લઈએ.

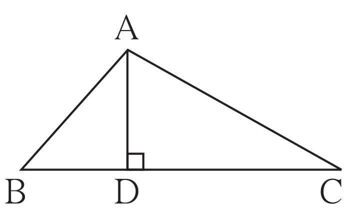
બે ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર (Ratio of areas of two triangles)

કોઈપણ બે ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધીએ.

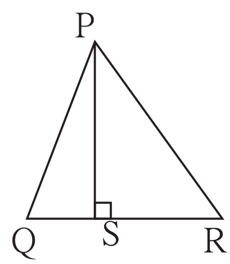
ઉદા. Δ ABC નો પાયો BC અને ઊંચાઈ AD છે.

Δ PQR નો પાયો QR અને ઊંચાઈ PS છે.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AD}{\frac{1}{2} \times QR \times PS}$$



આકૃતિ 1.1



આકૃતિ 1.2

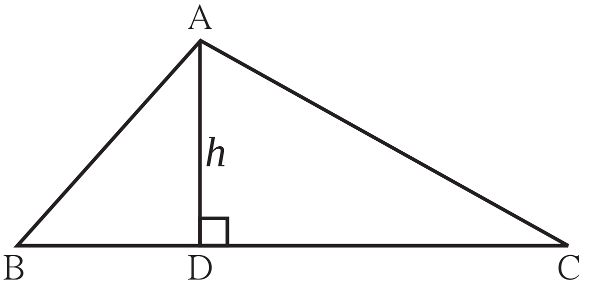
$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times AD}{QR \times PS}$$

આ પરથી જણાય છે કે બે ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર, તેમના પાયા અને સંગત ઊંચાઈના ગુણાકારના ગુણોત્તર જેટલો હોય છે.

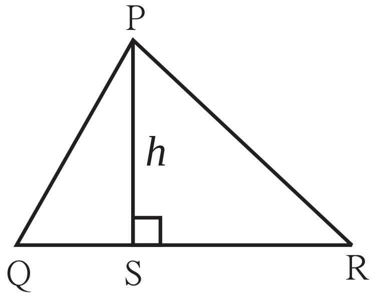
એક ત્રિકોણનો પાયો b_1 અને ઊંચાઈ h_1 તથા બીજા ત્રિકોણનો પાયો b_2 અને ઊંચાઈ h_2 હોય તો તેમના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર $= \dfrac{b_1 \times h_1}{b_2 \times h_2}$

આ બંને ત્રિકોણના સંબંધમાં કેટલીક શરતો જોઈએ.

શરત 1 : બંને ત્રિકોણની ઊંચાઈ સમાન હોય તો –



આકૃતિ 1.3



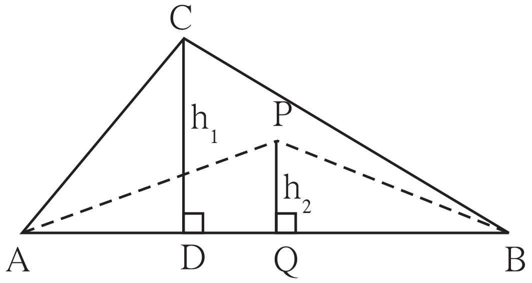
આકૃતિ 1.4

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times h}{QR \times h} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{b_1}{b_2}$$

ગુણધર્મ : સમાન ઊંચાઈવાળા બે ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર, તેમના સંગત પાયાના પ્રમાણમાં હોય છે.

શરત 2 : બંને ત્રિકોણના પાયા સમાન હોય તો –



આકૃતિ 1.5

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{AB \times h_1}{AB \times h_2}$$

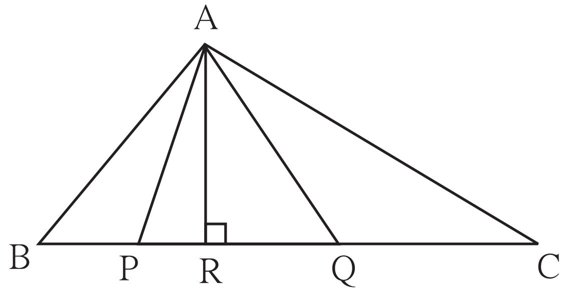
$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{h_1}{h_2}$$

ગુણધર્મ : સમાન પાયાવાળા બે ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર, તેમની સંગત ઊંચાઈના પ્રમાણમાં હોય છે.

કૃતિ :

નીચે આપેલા ખાલી ચોરસ યોગ્ય પ્રકારે ભરો.

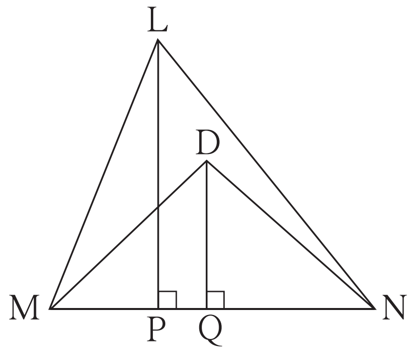
(i)



આકૃતિ 1.6

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APQ)} = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

(ii)



આકૃતિ 1.7

$$\frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta DMN)} = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

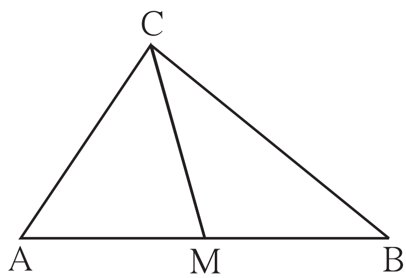
(iii) બિંદુ M એ રેખ AB નું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore$ રેખ CM એ Δ ABCની મધ્યગા છે.

$$\therefore \frac{A(\Delta AMC)}{A(\Delta BMC)} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$= \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

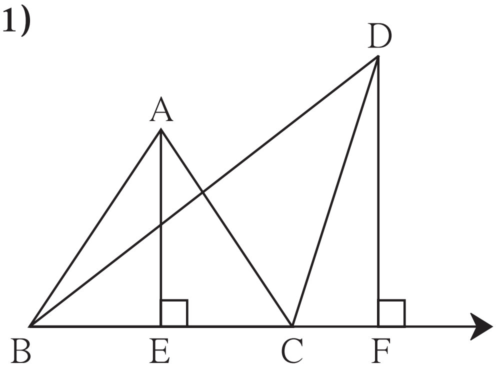
કારણ લખો.



આકૃતિ 1.8

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1)



આકૃતિ 1.9

બાજુની આકૃતિમાં,

રેખ AE $\perp$ રેખ BC, રેખ DF $\perp$ રેખા BC

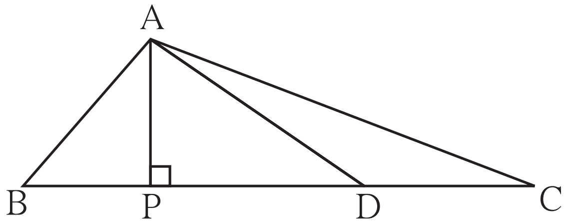
AE = 4, DF = 6 હોય તો $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)}$ શોધો.

ઉકેલ : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)} = \dfrac{AE}{DF}$ ...... સમાન પાયાવાળા બે ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર, તેમની સંગત ઊંચાઈના પ્રમાણમાં

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ઉદા. (2) Δ ABC માં બાજુ BC પર બિંદુ D એવી રીતે આવેલું છે, કે DC = 6, BC = 15.
A(Δ ABD) : A(Δ ABC) અને A(Δ ABD) : A(Δ ADC) શોધો.

ઉકેલ : Δ ABD, Δ ADC, Δ ABC આ ત્રણે ત્રિકોણોનું સામાન્ય શિરોબિંદુ A છે અને તેમનો પાયો એક જ રેખામાં છે. માટે આ ત્રણે ત્રિકોણોની ઊંચાઈ સમાન છે.



આકૃતિ 1.10

BC = 15, DC = 6 $\therefore$ BD = BC − DC = 15 − 6 = 9

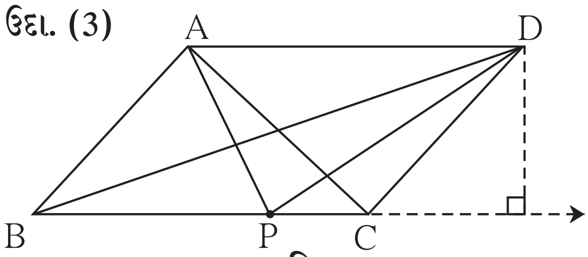
$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{BD}{BC}$ .... સમાન ઊંચાઈવાળા બે ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર, તેમના સંગત પાયાના પ્રમાણમાં હોય છે.

$= \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)} = \frac{BD}{DC}$ .... સમાન ઊંચાઈવાળા બે ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર, તેમના સંગત પાયાના પ્રમાણમાં હોય છે.

$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

ઉદા. (3)



આકૃતિ 1.11

□ ABCD સમાંતર ભુજ ચતુષ્કોણ છે. બાજુ BC પર કોઈ પણ એક બિંદુ P આવેલું છે. તો સમાન ક્ષેત્રફળો ધરાવતા ત્રિકોણની બે જોડ શોધો.

ઉકેલ : □ ABCD એ સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે.

$\therefore$ રેખ AD $\parallel$ રેખ BC અને રેખ AB $\parallel$ રેખ DC

Δ ABC અને Δ BDC નો વિચાર કરીએ.

આ બે ત્રિકોણ, બે સમાંતર રેખાની વચ્ચે આવેલાં છે. તેથી સમાંતર રેખા વચ્ચેનું અંતર, તે બે ત્રિકોણોની ઊંચાઈ જેટલું થશે.

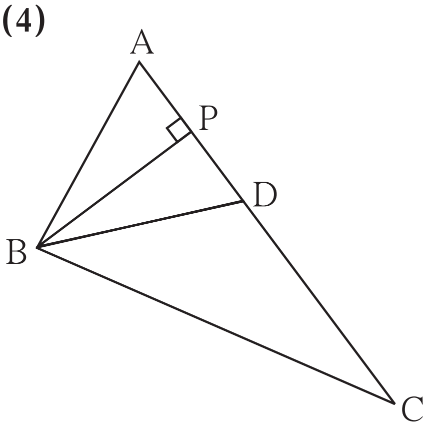
Δ ABC અને Δ BDC માં સમાન પાયો BC અને ઊંચાઈ પણ સમાન છે.

$\therefore$ A(Δ ABC) = A(Δ BDC)

Δ ABC અને Δ ABD માં AB એ સમાન પાયો છે અને ઊંચાઈ પણ સમાન છે.

$\therefore$ A(Δ ABC) = A(Δ ABD)

ઉદા. (4)



આકૃતિ 1.12

બાજુની આકૃતિમાં, Δ ABC માં બાજુ AC પર બિંદુ D એવી રીતે આવેલું છે કે AC = 16, DC = 9, BP $\perp$ AC, તો નીચેના ગુણોત્તરો શોધો.

i) $\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$ ii) $\dfrac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)}$

iii) $\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)}$

ઉકેલ : ΔABC માં બાજુ AC પર બિંદુ P અને D આવેલા છે. ΔABD, ΔBDC, ΔABC, ΔAPB ના સામાન્ય શિરોબિંદુ B નો વિચાર કરતાં, તેમની બાજુ AD, DC, AC, AP એક રેખામાં છે. આથી દરેક ત્રિકોણની ઊંચાઈ સમાન છે. માટે તે ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળ તેમના પાયાના પ્રમાણમાં છે.

AC = 16, DC = 9

$\therefore$ AD = AC − DC = 16 − 9 = 7 [A-D-C]

$\therefore \dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{7}{16}$ . . . . (સમાન ઊંચાઈ ધરાવતા ત્રિકોણો)

$\dfrac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)} = \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{9}{16}$ . . . . (સમાન ઊંચાઈ ધરાવતા ત્રિકોણો)

$\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)} = \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{7}{9}$ . . . . (સમાન ઊંચાઈ ધરાવતા ત્રિકોણો)

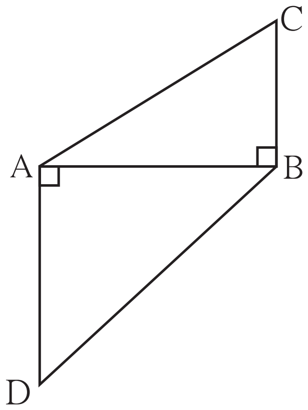
આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

- બે ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર, તેમના પાયા અને સંગત ઊંચાઈના ગુણાકારના ગુણોત્તર જેટલો હોય છે.
- સમાન ઊંચાઈવાળા બે ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર, તેમના સંગત પાયાના પ્રમાણમાં હોય છે.
- સમાન પાયાવાળા બે ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર, તેમની સંગત ઊંચાઈના પ્રમાણમાં હોય છે.

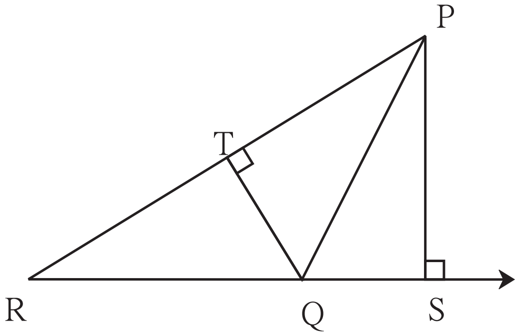
મહાવરાસંગ્રહ 1.1

1. એક ત્રિકોણનો પાયો 9 અને ઊંચાઈ 5 છે. બીજા ત્રિકોણનો પાયો 10 અને ઊંચાઈ 6 છે. તો તે ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

2. બાજુની આકૃતિ 1.13માં, રેખ BC $\perp$ રેખ AB, રેખ AD $\perp$ રેખ AB, BC = 4, AD = 8 હોય તો $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADB)}$ શોધો.



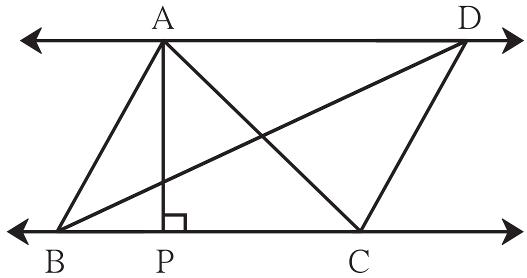
આકૃતિ 1.13



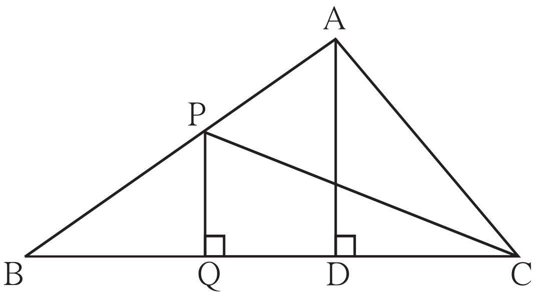
આકૃતિ 1.14

3. બાજુની આકૃતિ 1.14માં, રેખ PS $\perp$ રેખ RQ રેખ QT $\perp$ રેખ PR. જો RQ = 6, PS = 6, PR = 12 હોય તો QT શોધો.

4. બાજુની આકૃતિ 1.15માં, રેખ AP $\perp$ રેખ BC, રેખા AD || રેખા BC, તો A(Δ ABC) : A(Δ BCD) શોધો.



આકૃતિ 1.15



આકૃતિ 1.16

5. બાજુની આકૃતિ1.16માં, રેખ PQ $\perp$ રેખ BC, રેખ AD $\perp$ રેખ BC તો નીચેના ગુણોત્તરો શોધો.

i) $\frac{A(\Delta PQB)}{A(\Delta PBC)}$ ii) $\frac{A(\Delta PBC)}{A(\Delta ABC)}$

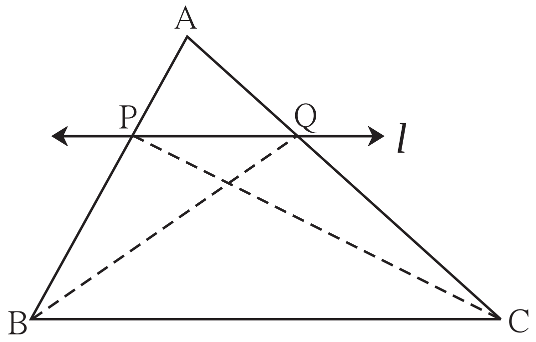
iii) $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADC)}$ iv) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta PQC)}$

જાણી લઈએ.

પ્રમાણનો મૂળભૂત પ્રમેય (Basic Proportionality Theorem)

પ્રમેય : ત્રિકોણની એક બાજુને સમાંતર આવેલી રેખા તે ત્રિકોણની બાકીની બાજુઓને ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદતી હોય તો તે રેખા તે બાજુઓને એક જ પ્રમાણમાં વિભાગે છે.

પક્ષ : Δ ABC માં, રેખા $l \parallel$ બાજુ BC અને રેખા l બાજુ AB ને P બિંદુમાં તથા બાજુ AC ને Q બિંદુમાં છેદે છે. જેથી A-P-B, A-Q-C



આકૃતિ 1.17

સાધ્ય : $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$

રચના : રેખ PC અને રેખ BQ જોડો.

સાબિતી : Δ APQ અને Δ PQB સમાન ઊંચાઈવાળા ત્રિકોણ છે.

$\therefore \dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \dfrac{AP}{PB}$ .... (ક્ષેત્રફળો પાયાના પ્રમાણમાં) ..... (I)

તે જ રીતે, $\dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)} = \dfrac{AQ}{QC}$ .... (ક્ષેત્રફળો પાયાના પ્રમાણમાં) ..... (II)

Δ PQB અને Δ PQC માં રેખ PQ એ સમાન પાયો છે. રેખ PQ $\parallel$ રેખ BC

માટે, Δ PQB અને Δ PQC ની ઊંચાઈ સમાન છે.

$\therefore A(\Delta PQB) = A(\Delta PQC)$ .... (III)

$\therefore \dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \dfrac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)}$ .... [(I), (II) અને (III)] પરથી

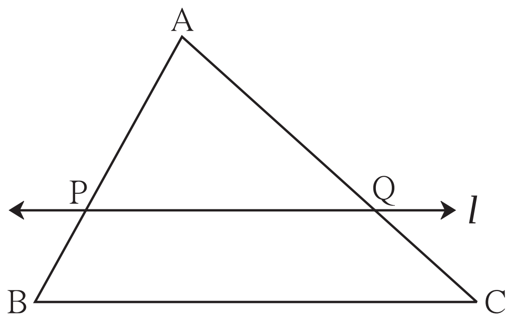
$\therefore \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$ .... [(I) અને (II)] પરથી

પ્રમાણના મૂળભૂત પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય (converse of B.P.T.)

પ્રમેય : એક રેખા જો ત્રિકોણની બે બાજુઓને ભિન્ન બિંદુમાં છેદીને એક જ પ્રમાણમાં વિભાગતી હોય તો તે રેખા બાકીની બાજુને સમાંતર હોય છે.

આકૃતિ 1.18માં, જો રેખા l એ Δ ABC માં, બાજુ AB અને બાજુ AC ને અનુક્રમે P અને Q બિંદુમાં છેદે છે અને $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$ હોય તો રેખા $l \parallel$ બાજુ BC.

આ પ્રમેયની સાબિતિ પરોક્ષ પદ્ધતિથી આપી શકાય છે.



આકૃતિ 1.18

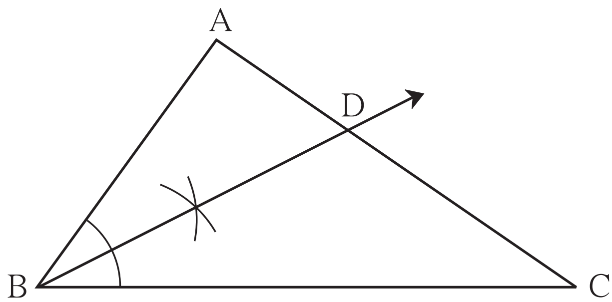
કૃતિ :

- કોઈ પણ એક Δ ABC દોરો.
- ત્રિકોણમાં $\angle B$ ને દુભાગો. તે AC ને જ્યાં છેદે છે તેને D નામ આપો.
- બાજુ માપીને લખો.

  AB = $\boxed{}$ સેમી BC = $\boxed{}$ સેમી

  AD = $\boxed{}$ સેમી DC = $\boxed{}$ સેમી

- $\frac{AB}{BC}$ અને $\frac{AD}{DC}$ ગુણોત્તરો શોધો.
- બંને ગુણોત્તરો લગભગ સરખા છે, તે અનુભવો.
- આ જ ત્રિકોણનો બીજો ખૂણો દુભાગો અને ઉપર મુજબ ગુણોત્તરો શોધો. તે ગુણોત્તરો પણ સમાન મળશે તેની નોંધ લો.



આકૃતિ 1.19


જાણી લઈએ.

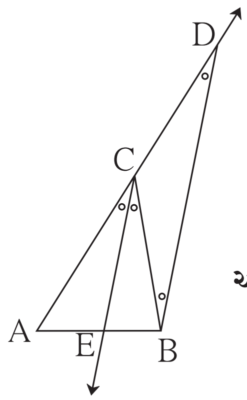
ત્રિકોણના ખૂણાના દુભાજકનો પ્રમેય (Theorem of an angle bisector of a triangle)

પ્રમેય : **ત્રિકોણના ખૂણાનો દુભાજક તે ખૂણાની સામેની બાજુને, બાકીની બાજુઓની લંબાઈના પ્રમાણમાં વિભાગે છે.**

પક્ષ : Δ ABC માં $\angle$ C નો દુભાજક રેખ AB ને E બિંદુમાં છેદે છે.

સાધ્ય : $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$

રચના : બિંદુ Bમાંથી, કિરણ CEને સમાંતર રેખા દોરો. તે લંબાવેલા કિરણ AC ને બિંદુ D માં છેદે છે.



આકૃતિ 1.20

સાબિતી : કિરણ CE || રેખ BD અને કિરણ AD એ છેદિકા છે.

$\therefore \angle ACE \cong \angle CDB$ .... (સંગત કોણો)...(I)

હવે છેદિકા BC લેતાં,

$\angle ECB \cong \angle CBD$ .... (વ્યુત્ક્રમ કોણો)...(II)

પરંતુ, $\angle ACE \cong \angle ECB$ .... (પક્ષ)...(III)

$\therefore \angle CBD \cong \angle CDB$ .... [વિધાન (I), (II) અને (III) પરથી]

Δ CBD માં, બાજુ CB $\cong$ બાજુ CD .... (એકરૂપ ખૂણાની સામેની બાજુ)

$\therefore$ CB = CD ...(IV)

હવે Δ ABD માં, રેખ EC || બાજુ BD .... (રચના)

$\therefore \dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AC}{CD}$ .... (પ્રમાણનો મૂળભૂત પ્રમેય) ...(V)

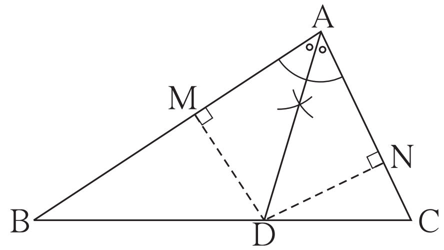
$\therefore \dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AC}{CB}$ .... [વિધાન(IV) અને (V) પરથી]

વધુ માહિતી માટે :

તમે બીજી રીતે ઉપરના પ્રમેયની સાબિતી લખો.

તે માટે આકૃતિ 1.21માં દર્શાવ્યા મુજબ Δ ABC દોરો અને રેખ DM $\perp$ રેખ AB અને રેખ DN $\perp$ રેખ AC દોરો.

(1) સમાન ઊંચાઈવાળા ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળો તેમના સંગત પાયાના પ્રમાણમાં હોય છે.

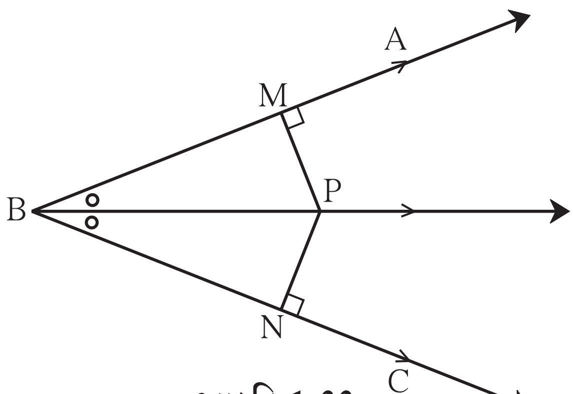


આકૃતિ 1.21

અને

(2) ખૂણાના દુભાજક પરના પ્રત્યેક બિંદૂ ખૂણાની બાજુઓથી સમાન અંતરે હોય છે.

આ ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરો.



આકૃતિ 1.22

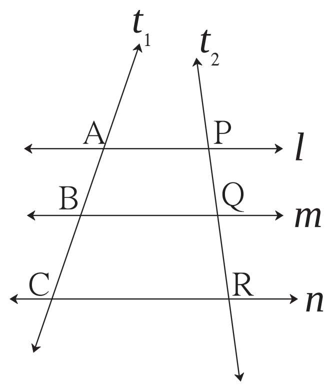
ત્રિકોણના ખૂણાના દુભાજકના પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય (Converse of angle bisector of triangle)

Δ ABC માં બાજુ BC પર જો બિંદુ D એવી રીતે હોય, કે જેથી $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, તો કિરણ AD એ $\angle$ BACનો દુભાજક હોય છે.

ત્રણ સમાંતર રેખા અને તેમની છેદિકાનો ગુણધર્મ (Property of three parallel lines and their transversal)

કૃતિ :

- ત્રણ સમાંતર રેખા દોરો.
- તેમને l, m, n નામ આપો.
- t_1 અને t_2 બે છેદિકા દોરો.
- છેદિકા t_1 પર આંતરછેદ AB અને BC છે.
- છેદિકા t_2 પર આંતરછેદ PQ અને QR છે.
- $\frac{AB}{BC}$ અને $\frac{PQ}{QR}$ ગુણોત્તરો શોધો. તે લગભગ સરખા છે. તેની નોંધ લો.



આકૃતિ 1.23

પ્રમેય : ત્રણ સમાંતર રેખાઓ વડે એક છેદિકા પર થયેલા આંતરછેદોનો ગુણોત્તર, તે રેખાઓ વડે બીજી કોઈ પણ છેદિકા પર થયેલા આંતરછેદોના ગુણોત્તર જેટલો હોય છે.

પક્ષ : રેખા l || રેખા m || રેખા n

t_1 અને t_2 તેમની છેદિકા છે.

છેદિકા t_1 તે રેખાઓને અનુક્રમે બિંદુ A, B, C માં છેદે છે. છેદિકા t_2 તે રેખાઓને અનુક્રમે બિંદુ P, Q, R માં છેદે છે.

સાધ્ય : $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

સાબિતી : રેખ PC દોર્યો, જે રેખા m ને બિંદુ D માં છેદે છે.

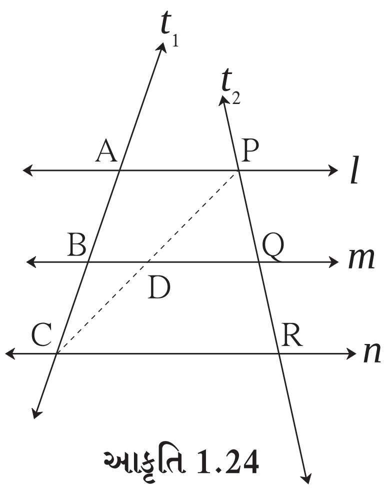
Δ ACPમાં, રેખ BD || રેખ AP

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC}$. . . . . (I) (પ્રમાણનો મૂળભૂત પ્રમેય)

Δ CPRમાં, રેખ DQ || રેખ CR

$\therefore \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . (II) (પ્રમાણનો મૂળભૂત પ્રમેય)

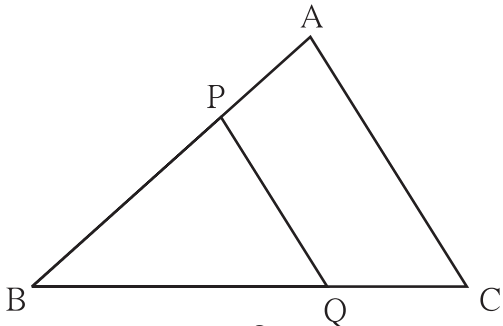
$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . . (I) અને (II) પરથી.



આકૃતિ 1.24

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.



આકૃતિ 1.25

(1) **પ્રમાણનો મૂળભૂત પ્રમેય**

Δ ABCમાં જો B-P-A ; B-Q-C

અને રેખ PQ || રેખ AC હોય,

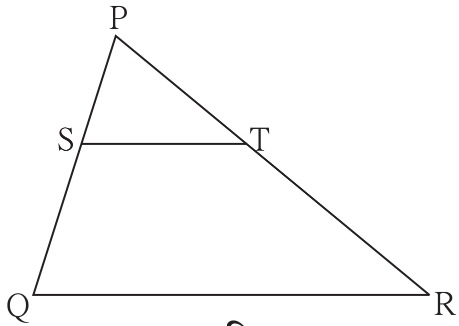
તો $\dfrac{BP}{PA} = \dfrac{BQ}{QC}$

(2) **પ્રમાણના મૂળભૂત પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય**

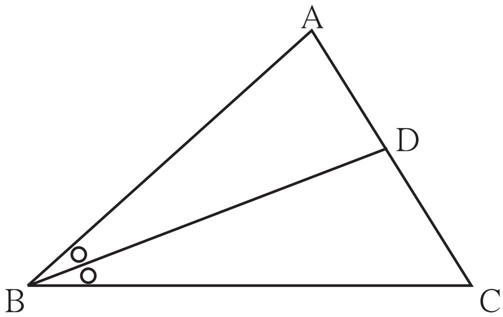
Δ PQR માં, જો P-S-Q ; P-T-R

અને $\dfrac{PS}{SQ} = \dfrac{PT}{TR}$ હોય,

તો રેખ ST || રેખ QR.



આકૃતિ 1.26



આકૃતિ 1.27

(3) **ત્રિકોણના ખૂણાના દુભાજકનો પ્રમેય**

Δ ABC માં, રેખ BD એ $\angle$ABC નો

દુભાજક હોય અને જો A-D-C,

તો $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$

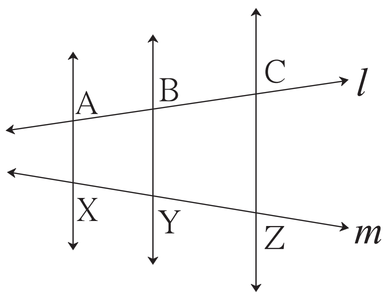
(4) **ત્રણ સમાંતર રેખા અને તેમની છેદિકાનો ગુણધર્મ**

જો રેખા AX || રેખા BY || રેખા CZ અને

રેખા l અને રેખા m છેદિકા તેને અનુક્રમે

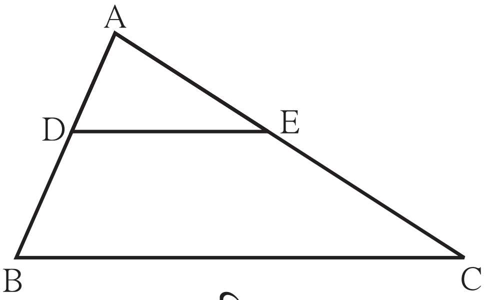
A, B, C અને X, Y, Z માં છેદે છે.

તો $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{XY}{YZ}$



આકૃતિ 1.28

ઉદા. (1) Δ ABCમાં, રેખ DE || રેખ BC (આકૃતિ 1.29)
જો DB = 5.4 સેમી, AD = 1.8 સેમી
EC = 7.2 સેમી તો AE શોધો.



આકૃતિ 1.29

ઉકેલ : Δ ABC માં, રેખ DE || રેખ BC

$\therefore \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ ..... (પ્રમાણનો મૂળભૂત પ્રમેય)

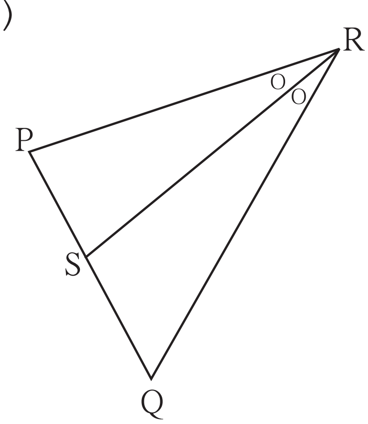
$\therefore \dfrac{1.8}{5.4} = \dfrac{AE}{7.2}$

$\therefore AE \times 5.4 = 1.8 \times 7.2$

$\therefore AE = \dfrac{1.8 \times 7.2}{5.4} = 2.4$

$\therefore$ AE = 2.4 સેમી

ઉદા. (2) Δ PQRમાં, રેખ RS, $\angle$R નો દુભાજક છે. (આકૃતિ 1.30)
જો PR = 15, RQ = 20, PS = 12
હોય તો SQ શોધો.



આકૃતિ 1.30

ઉકેલ : Δ PRQ માં રેખ RS, $\angle$R નો દુભાજક છે.

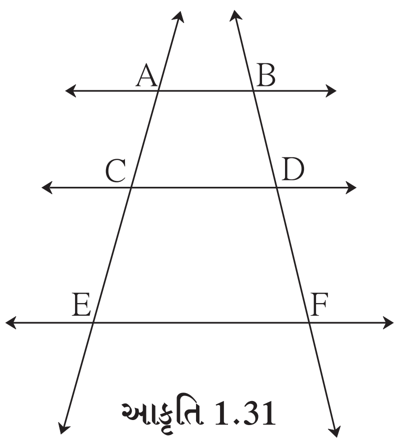
$\therefore \dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{PS}{SQ}$ . . . (ત્રિકોણના ખૂણાના દુભાજકનો પ્રમેય)

$\therefore \dfrac{15}{20} = \dfrac{12}{SQ}$

$\therefore SQ = \dfrac{12 \times 20}{15} = 16$

$\therefore$ SQ = 16

કૃતિ :



આકૃતિ 1.31

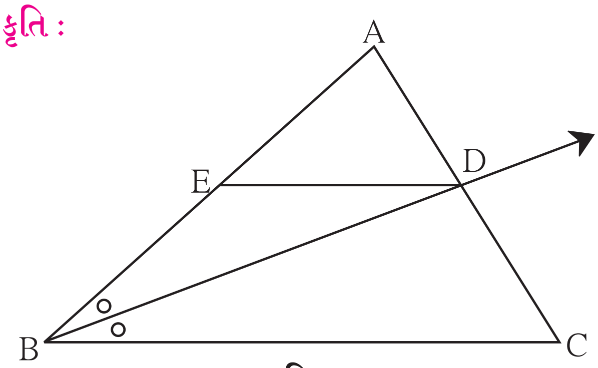
આપેલી આકૃતિ 1.31માં,
રેખા AB || રેખા CD || રેખા EF
જો AC = 5.4, CE = 9, BD = 7.5 હોય તો આપેલા ચોરસ યોગ્ય રીતે પૂરીને DF શોધો.

ઉકેલ : રેખા AB || રેખા CD || રેખા EF

$\therefore \dfrac{AC}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{DF}$ . . . . . ($\boxed{}$)

$\therefore \dfrac{5.4}{9} = \dfrac{\boxed{}}{DF}$ $\therefore$ DF = $\boxed{}$

કૃતિ :



આકૃતિ 1.32

Δ ABC માં કિરણ BD, $\angle$ ABC નો દુભાજક છે.
A–D–C રેખ DE || બાજુ BC, A–E–B,
તો સાબિત કરો કે, $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EB}$

સાબિતી : Δ ABC માં, કિરણ BD, $\angle$ B નો દુભાજક છે.

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ .... (ત્રિકોણના ખૂણાના દુભાજકનો પ્રમેય) .... (I)

Δ ABC માં, રેખ DE || બાજુ BC

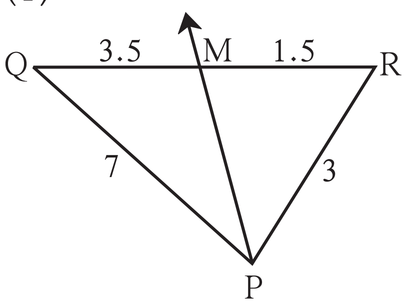
$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ .... (. . . . .) .... (II)

$\therefore \frac{AB}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{EB}$ .... (I) અને (II) પરથી

મહાવરાસંગ્રહ 1.2

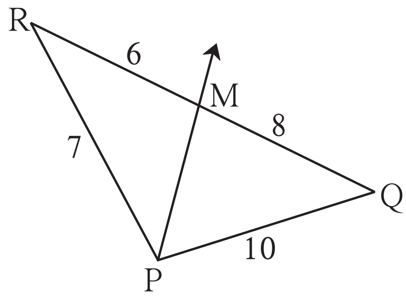
1. નીચે કેટલાક ત્રિકોણ અને રેખાખંડોની લંબાઈ આપેલી છે. તે પરથી કઈ આકૃતિમાં કિરણ PM, $\angle$ QPR નો દુભાજક છે તે ઓળખો.

(1)



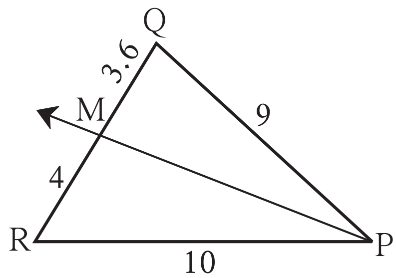
આકૃતિ 1.33

(2)



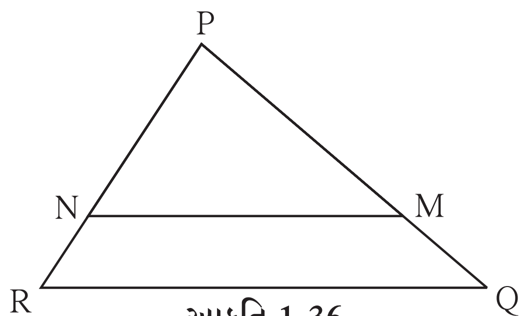
આકૃતિ 1.34

(3)



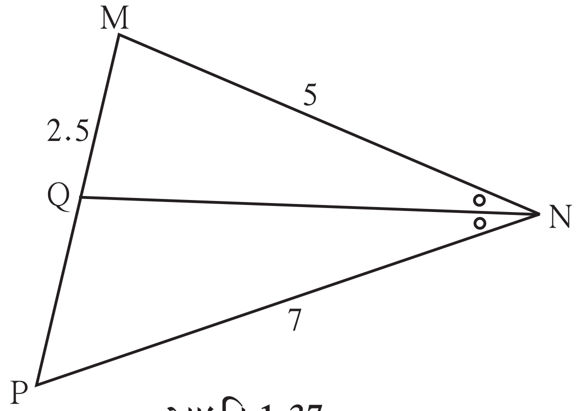
આકૃતિ 1.35

2. બાજુની આકૃતિ 1.36માં, ΔPQRમાં PM = 15, PQ = 25, PR = 20, NR = 8 તો રેખા NM, બાજુ RQ ને સમાંતર છે કે ? કારણ લખો.

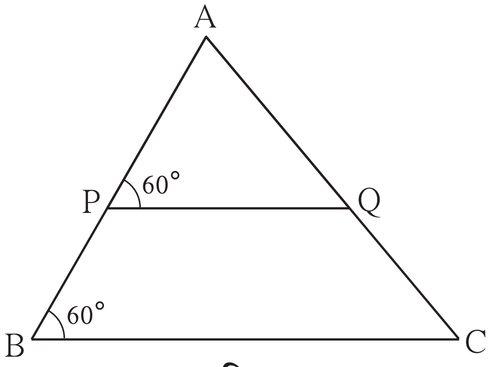


આકૃતિ 1.36

3. બાજુની આકૃતિ 1.37માં, ΔMNPમાં રેખ NQ, $\angle$N નો દુભાજક છે.
જો MN = 5, PN = 7, MQ = 2.5 તો QP ની કિંમત શોધો.



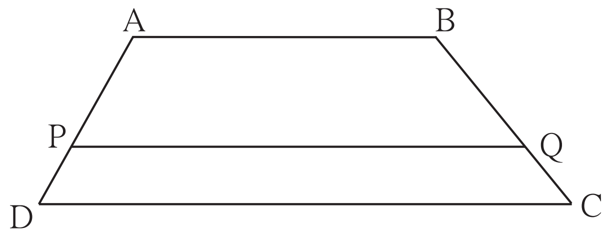
આકૃતિ 1.37



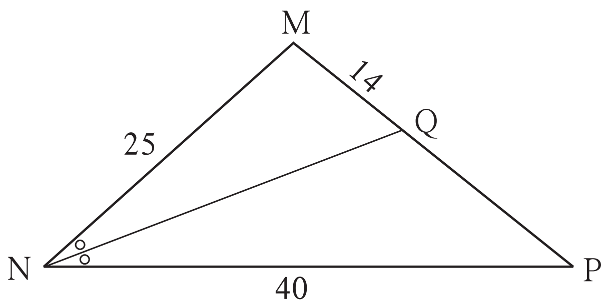
આકૃતિ 1.38

4. બાજુની આકૃતિ 1.38માં, કેટલાક ખૂણાઓના માપ આપ્યા છે. તે પરથી સાબિત કરો, કે $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

5. બાજુની આકૃતિ 1.39માં, સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં,બાજુ AB || બાજુ PQ || બાજુ DC, જો AP = 15, PD = 12, QC = 14 તો BQ શોધો.



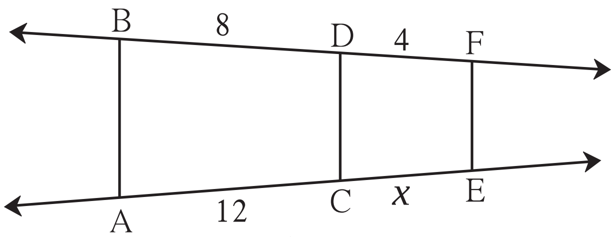
આકૃતિ 1.39



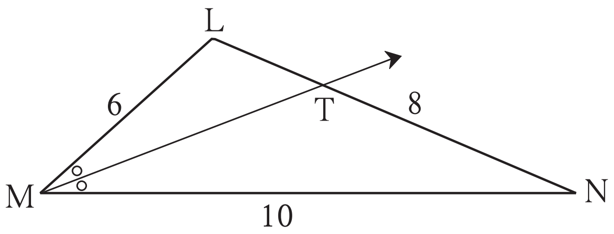
આકૃતિ 1.40

6. બાજુની આકૃતિ 1.40માં, આપેલી માહિતી પરથી QP શોધો.

7. બાજુની આકૃતિ 1.41માં,
જો રેખ AB || રેખ CD || રેખ FE
હોય તો x ની કિંમત શોધો. તથા રેખ AE શોધો.

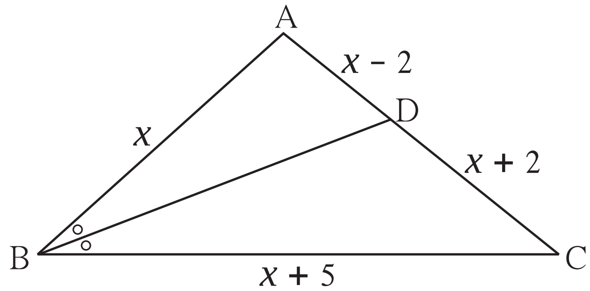


આકૃતિ 1.41



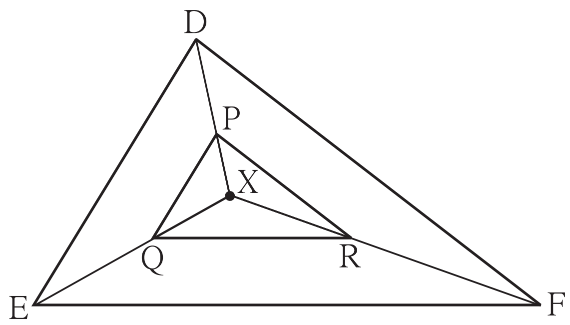
આકૃતિ 1.42

8. બાજુની આકૃતિ 1.42માં, Δ LMNમાં કિરણ MT, $\angle$ LMNનો દુભાજક છે.
જો LM = 6, MN = 10, TN = 8 તો LT શોધો.



આકૃતિ 1.43

9. બાજુની આકૃતિ 1.43માં, Δ ABCમાં રેખ BD, $\angle$ABCનો દુભાજક છે,
જો AB = x, BC = $x + 5$, AD = $x - 2$, DC = $x + 2$ તો x ની કિંમત શોધો.



આકૃતિ 1.44

10. બાજુની આકૃતિ 1.44માં, ત્રિકોણના અંતર્ભાગમાં કોઈપણ એક બિંદુ X આવેલું છે. બિંદુ X ને ત્રિકોણના શિરોબિંદુ સાથે જોડ્યું છે. તેમજ રેખ PQ || રેખ DE, રેખ QR || રેખ EF તો રેખ PR || રેખ DF સાબિત કરવા માટે નીચેના ચોરસ પૂર્ણ કરો.

સાબિતી : Δ XDEમાં, રેખ PQ || રેખ DE .... $\boxed{}$

$\therefore \dfrac{XP}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{QE}$ .... (I) (પ્રમાણનો મૂળભૂત પ્રમેય)

Δ XEFમાં, રેખ QR || રેખ EF .... $\boxed{}$

$\therefore \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ ....(II) $\boxed{}$

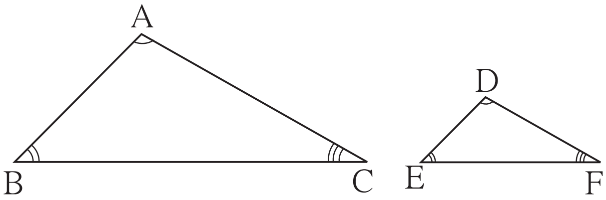
$\therefore \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... વિધાન (I) અને (II) પરથી

$\therefore$ રેખ PR || રેખ DF .... (પ્રમાણના મૂળભૂત પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય)

11★. Δ ABCમાં, AB = AC, $\angle$ B અને $\angle$ C ના દુભાજક બાજુ AC અને બાજુ AB ને અનુક્રમે બિંદુ D અને E માં છેદે છે. તો સાબિત કરો કે, રેખ ED || રેખ BC.

યાદ કરીએ.

સરૂપ ત્રિકોણો (Similar triangles)



આકૃતિ 1.45

Δ ABC અને Δ DEF માં જો $\angle A \cong \angle D$,
$\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$ (ખૂણાઓ એકરૂપ)
અને $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ (બાજુઓ પ્રમાણસર)
તો Δ ABC અને Δ DEF ત્રિકોણો સરૂપ હોય છે.

Δ ABC અને Δ DEF સરૂપ છે. તેને $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ આ રીતે લખાય છે.

જાણી લઈએ.

સરૂપ ત્રિકોણોની કસોટી (Tests for similarity of triangles)

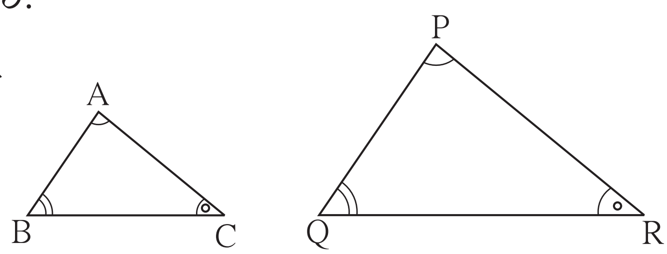
બે ત્રિકોણો સરૂપ હોવા માટે તેની ત્રણેય સંગત બાજુઓ પ્રમાણમાં હોવી અને ત્રણેય સંગત ખૂણાઓ એકરૂપ હોવા જરૂરી છે. પરંતુ આ છ શરતોમાંથી ત્રણ વિશિષ્ટ શરતો પૂર્ણ થયા પછી બાકીની શરતો તેની મળે જ પૂર્ણ થાય છે. એટલે કે બે ત્રિકોણો સરૂપ થવા માટે ત્રણ વિશિષ્ટ શરતોનું પૂર્ણ થવું પૂરતું છે. આ ત્રણ શરતો તપાસીને બે ત્રિકોણ સરૂપ છે કે નહીં તે નક્કી કરી શકાય છે. આવી આવશ્યક શરતોનો સમૂહ એટલે જ સરૂપતાની કસોટી. માટે બે ત્રિકોણ સરૂપ છે કે નહીં, તે નક્કી કરવા માટે તે વિશિષ્ટ શરતો તપાસવી પૂરતી છે.

સરૂપતાની ખૂખૂખૂ કસોટી (AAA test for similarity of triangles)

જો બે ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ વચ્ચે આપેલી એક એક સંગતતા અનુસાર બનતા ત્રણેય સંગત ખૂણાઓ એકરૂપ હોય તો તે બે ત્રિકોણો સરૂપ હોય છે.

સરૂપતાના આ ગુણધર્મને ખૂખૂખૂ કસોટી કહેવાય છે.

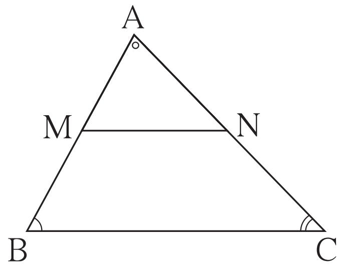
Δ ABC અને Δ PQR માં $ABC \leftrightarrow PQR$ આ સંગતતા અનુસાર જો $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$, હોય તો $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

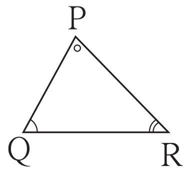


આકૃતિ 1.46

વધુ માહિતી માટે :

ખૂખૂખૂ કસોટીની સાબિતી





પક્ષ : Δ ABC અને Δ PQR માં,
$\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$,
$\angle C \cong \angle R$.

સાધ્ય : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

આકૃતિ 1.47

સાબિતી: Δ ABC એ Δ PQR કરતાં મોટો છે એવું ધારીએ. હવે રેખ AB પર બિંદુ M, AC પર બિંદુ N એવી રીતે લો જેથી, AM = PQ અને AN = PR થાય. તે પરથી $\Delta AMN \cong \Delta PQR$ દર્શાવો.

તે પરથી રેખ MN || રેખ BC દર્શાવી શકાય.

હવે પ્રમાણના મૂળભૂત પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને, $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

એટલે જ, $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$ .... (વ્યસ્તાંક કરતા)

$\frac{MB + AM}{AM} = \frac{NC + AN}{AN}$ .... (યોગ ક્રિયા કરતાં)

$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$. તે જ પ્રમાણે $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ દર્શાવી શકાય.

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ $\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$

સરૂપ ત્રિકોણની ખૂખૂ કસોટી (AA test for similarity of triangles)

શિરોબિંદુઓ વચ્ચે આપેલી એક-એક સંગતતા અનુસાર જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ બીજા ત્રિકોણના સંગત બે ખૂણાઓને એકરૂપ હોય તો. પહેલા ત્રિકોણનો બાકીનો ખૂણો બીજા ત્રિકોણના બાકીના ખૂણાને એકરૂપ હોય છે. તે આપણે જાણીએ છીએ. માટે જ, એક ત્રિકોણના બે ખૂણા બીજા ત્રિકોણના સંગત બે ખૂણાઓને એકરૂપ હોય તો પણ એ શરત બે ત્રિકોણ સરૂપ થવા માટે પૂરતી છે.

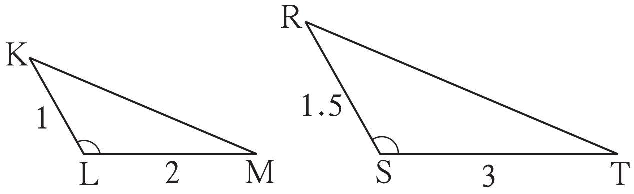
આ પરથી એક ત્રિકોણના બે ખૂણા બીજા ત્રિકોણના સંગત બે ખૂણાઓને એકરૂપ હોય, તો તે બે ત્રિકોણો સરૂપ હોય છે.

સરૂપતાના આ ગુણધર્મને ખૂખૂ કસોટી કહેવાય છે.

સરૂપતાની બાખૂબા કસોટી (SAS test for similarity of triangles)

બે ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ વચ્ચેની એક-એક સંગતતા અનુસાર તેમની સંગત બાજુઓની બે જોડ પ્રમાણસર હોય અને તે બાજુએ સમાવિષ્ટ કરેલા ખૂણા એકરૂપ હોય તો, તે બે ત્રિકોણો સરૂપ હોય છે.

સરૂપતાના આ ગુણધર્મને બાખૂબા કસોટી કહેવાય છે.



આકૃતિ 1.48

ઉદા. જો Δ KLM અને Δ RSTમાં,

$\angle KLM \cong \angle RST$

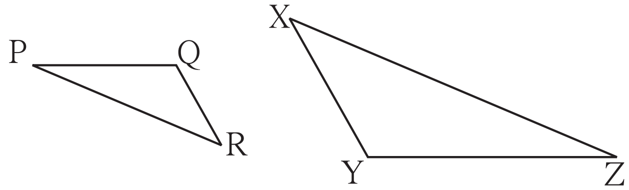
$$\frac{KL}{RS} = \frac{LM}{ST}$$

તો $\Delta KLM \sim \Delta RST$

સરૂપતાની બાબાબા કસોટી (SSS test for similarity of triangles)

બે ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ વચ્ચેની એક એક સંગતતા અનુસાર એક ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓને પ્રમાણસર હોય છે, તે ત્રિકોણો સરૂપ હોય છે.

સરૂપતાના આ ગુણધર્મને બાબાબા કસોટી કહેવાય છે.



આકૃતિ 1.49

ઉદા. જો Δ PQR અને Δ XYZ માં જો,

$$\frac{PQ}{YZ} = \frac{QR}{XY} = \frac{PR}{XZ}$$

તો $\Delta PQR \sim \Delta ZYX$

સરૂપ ત્રિકોણોના ગુણધર્મ :

(1) $\Delta ABC \sim \Delta ABC$ – પરાવર્તનતા (Reflexivity)

(2) જો $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ તો $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ – સંમિતતા (Symmetry)

(3) જો $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ અને $\Delta DEF \sim \Delta GHI$ તો $\Delta ABC \sim \Delta GHI$ – સંક્રામકતા (Transitivity)

ગણેલાં ઉદાહરણો

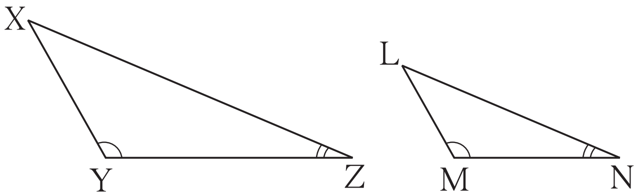
ઉદા. (1) Δ XYZ માં $\angle Y = 100°$,

$\angle Z = 30°$,

Δ LMN માં $\angle M = 100°$,

$\angle N = 30°$, તો Δ XYZ અને Δ LMN સરૂપ છે કે ?

હોય તો કઈ કસોટી અનુસાર ?



આકૃતિ 1.50

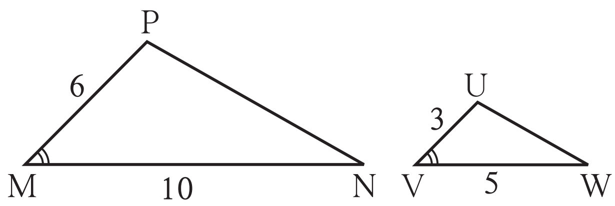
ઉકેલ : Δ XYZ અને Δ LMN માં,

$\angle Y = 100°$, $\angle M = 100°$ $\therefore \angle Y \cong \angle M$

$\angle Z = 30°$, $\angle N = 30°$ $\therefore \angle Z \cong \angle N$

$\therefore \Delta XYZ \sim \Delta LMN$ .... (સરૂપતાની ખૂખૂ કસોટી)

ઉદા. (2) આકૃતિ 1.51માં, બાજુની આકૃતિમાં આપેલી માહિતી પ્રમાણે ત્રિકોણ સરૂપ છે કે ? હોય તો કઈ કસોટી અનુસાર ?



આકૃતિ 1.51

ઉકેલ : Δ PMN અને Δ UVW માં

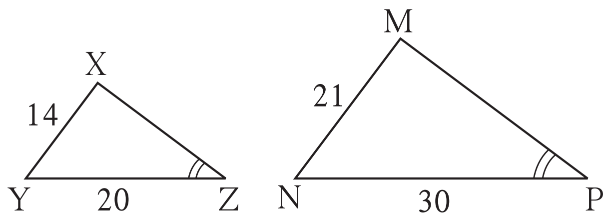
$\frac{PM}{UV} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}, \frac{MN}{VW} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$

$\therefore \frac{PM}{UV} = \frac{MN}{VW}$

અને $\angle M \cong \angle V$ .... (પક્ષ)

$\therefore \Delta PMN \sim \Delta UVW$ .... (સરૂપતાની બાખૂબા કસોટી)

ઉદા. (3) આકૃતિ 1.52માં, આપેલી માહિતીને આધારે આપેલા ત્રિકોણો સરૂપ છે. એવું કહી શકાય કે? તો કઈ કસોટી અનુસાર ?



આકૃતિ 1.52

ઉકેલ : Δ XYZ અને Δ MNP માં

$\frac{XY}{MN} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$,

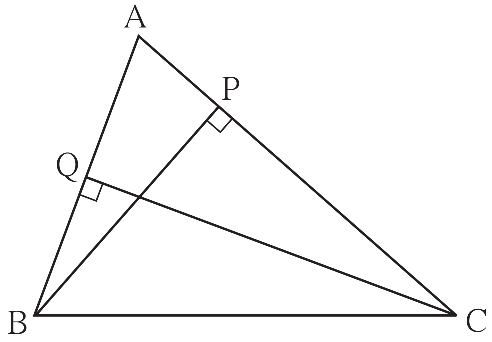
$\frac{YZ}{NP} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{XY}{MN} = \frac{YZ}{NP}$

$\angle Z \cong \angle P$ આપેલું છે. પરંતુ $\angle Z$ અને $\angle P$ એ પ્રમાણસર રહેલી બાજુઓએ સમાવિષ્ટ કરેલા ખૂણા નથી.

$\therefore \Delta$ XYZ અને Δ MNP એ સરૂપ ત્રિકોણ છે, એવું કહી શકાય નહીં.

ઉદા. (4) બાજુની આકૃતિ 1.53માં, રેખ BP $\perp$ રેખ AC, રેખ CQ $\perp$ રેખ AB, A – P– C, A– Q– B , તો Δ APB અને Δ AQC સરૂપ છે તે દર્શાવો.



આકૃતિ 1.53

ઉકેલ : Δ APB અને Δ AQCમાં,

$\angle APB = \boxed{}^\circ$ (I)

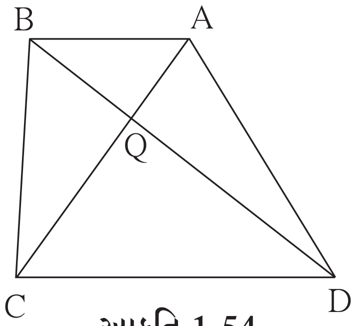
$\angle AQC = \boxed{}^\circ$ (II)

$\therefore \angle APB \cong \angle AQC$ .... (I) અને (II) પરથી

$\angle PAB \cong \angle QAC$ .... $\boxed{}$

$\therefore \Delta APB \sim \Delta AQC$ ..... (સરૂપતાની ખૂખૂ કસોટી)

ઉદા. (5) આકૃતિ 1.54માં, જો ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો Q બિંદુમાં છેદતાં હોય અને 2QA = QC અને 2QB = QD હોય તો DC = 2AB છે. તે સાબિત કરો.



આકૃતિ 1.54

પક્ષ : 2QA = QC

2QB = QD

સાધ્ય : CD = 2AB

સાબિતી : $2QA = QC \therefore \frac{QA}{QC} = \frac{1}{2}$ .... (I)

$2QB = QD \therefore \frac{QB}{QD} = \frac{1}{2}$ .... (II)

$\therefore \frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$ .... (I) અને (II) પરથી

Δ AQB અને Δ CQD માં

$\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$ .... (સાબિત કર્યું)

$\angle AQB \cong \angle DQC$ .... (અભિકોણો)

$\therefore \Delta AQB \sim \Delta CQD$ .... (સરૂપતાની બાખૂબા કસોટી)

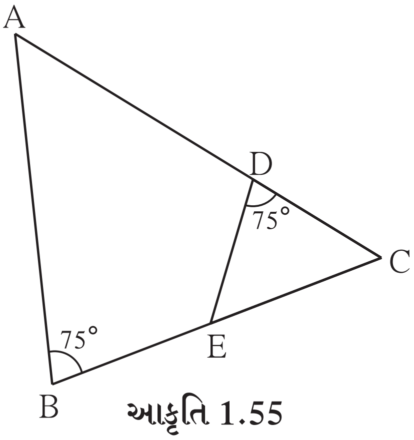
$\therefore \frac{AQ}{CQ} = \frac{QB}{QD} = \frac{AB}{CD}$ .... (સંગત બાજુઓ પ્રમાણસર)

પરંતુ, $\frac{AQ}{CQ} = \frac{1}{2} \quad \therefore \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$

$\therefore 2AB = CD$

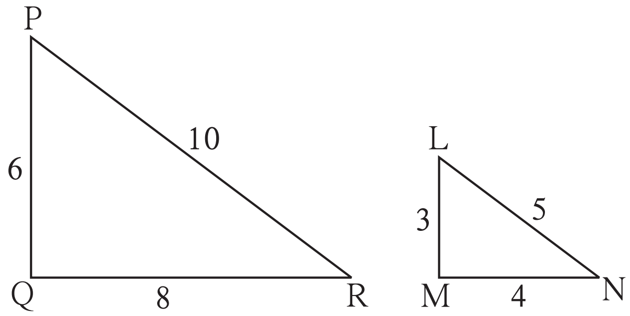
મહાવરાસંગ્રહ 1.3

1. આકૃતિ 1.55માં, $\angle ABC = 75°$, $\angle EDC = 75°$ તો કયા બે ત્રિકોણો, કઈ કસોટી અનુસાર સરૂપ છે ?
તેમની સરૂપતાની યોગ્ય એકએક સંગતતા લખો.



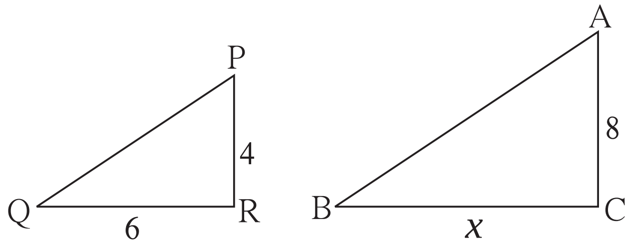
આકૃતિ 1.55

2. આકૃતિ 1.56માં, આપેલ ત્રિકોણ સરૂપ છે કે ? હોય તો કઈ કસોટી અનુસાર ?

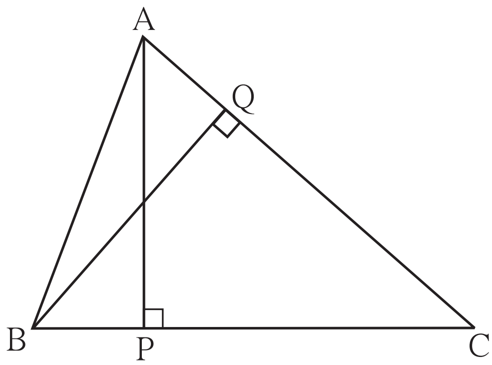


આકૃતિ 1.56

3. આકૃતિ 1.57 દર્શાવ્યા મુજબ, 8 મીટર અને 4 મીટર ઊંચાઈના બે થાંભલા સમતલ જમીન પર ઊભા છે. સૂર્યપ્રકાશ વડે નાના થાંભલાનો પડછાયો 6 મીટર પડે છે. તો તે જ સમયે મોટા થાંભાલાના પડછાયાની લંબાઈ કેટલી હશે?



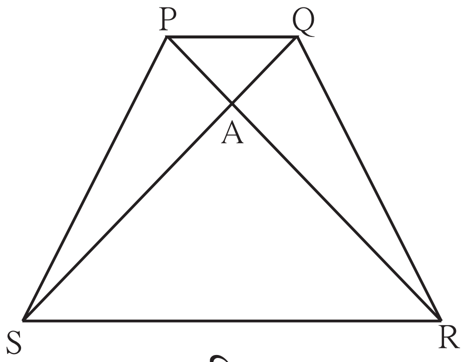
આકૃતિ 1.57



આકૃતિ 1.58

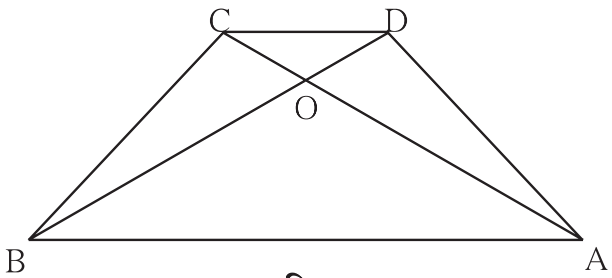
4. ΔABCમાં, રેખ $AP \perp$ રેખ BC,
રેખ $BQ \perp$ રેખ AC
$B-P-C$, $A-Q-C$ હોય તો,
$\Delta CPA \sim \Delta CQB$ દર્શાવો.
જો $AP = 7$, $BQ = 8$, $BC = 12$ હોય તો AC શોધો.

5. આકૃતિ 1.59માં, સમલંબ ચતુષ્કોણ PQRS માં, બાજુ PQ || બાજુ SR, AR = 5AP, AS = 5AQ તો સાબિત કરો કે, SR = 5PQ



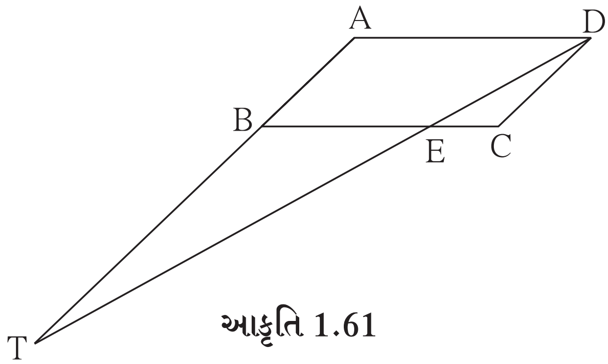
આકૃતિ 1.59

6. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં, (આકૃતિ 1.60) બાજુ AB || બાજુ DC, વિકર્ણ AC અને વિકર્ણ BD પરસ્પરને O બિંદુમાં છેદે છે AB = 20, DC = 6, OB = 15 હોય તો OD શોધો.



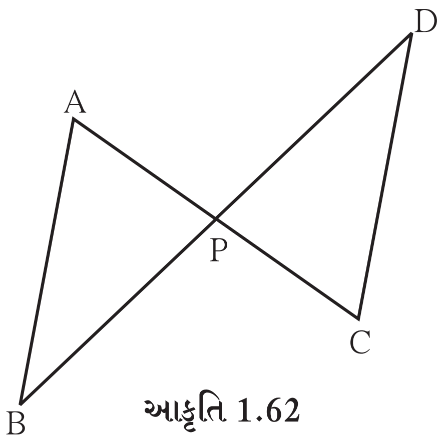
આકૃતિ 1.60

7. આકૃતિ 1.61માં, □ABCD સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે. બાજુ BC પર એક બિંદુ E આપેલું છે. રેખા DE, કિરણ AB ને T બિંદુમાં છેદે છે. તો DE × BE = CE × TE દર્શાવો.



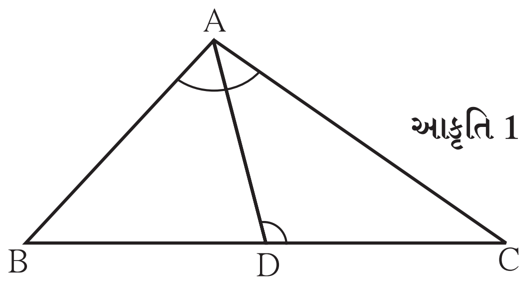
આકૃતિ 1.61

8. આકૃતિ 1.62માં, રેખ AC અને રેખ BD પરસ્પરને બિંદુ P માં છેદે છે અને $\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$ તો સાબિત કરો કે, $\Delta ABP \sim \Delta CDP$



આકૃતિ 1.62

9. આકૃતિ 1.63માં, Δ ABCમાં બાજુ BC પર બિંદુ D એવી રીતે આવેલું છે, જેથી $\angle BAC = \angle ADC$ તો સાબિત કરો કે, $CA^2 = CB \times CD$

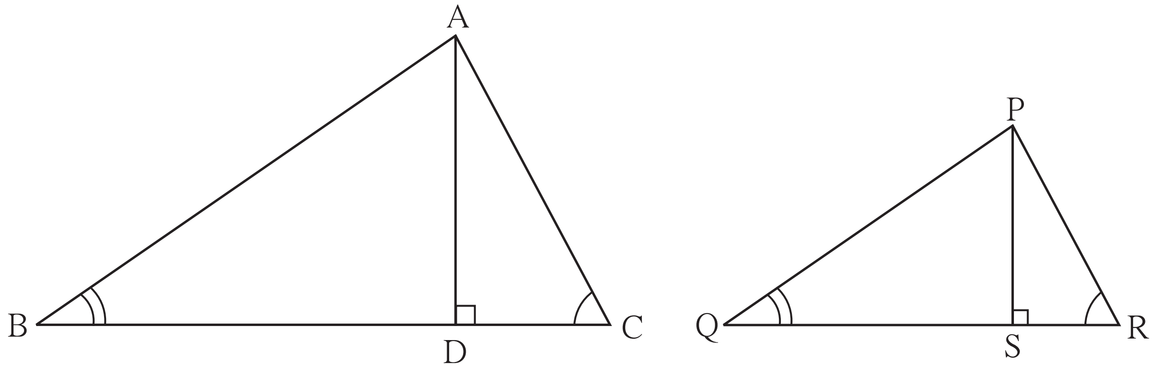


આકૃતિ 1.63

જાણી લઈએ.

સરૂપ ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો પ્રમેય (Theorem of areas of similar triangles)

પ્રમેય : જો બે ત્રિકોણો સરૂપ હોય તો તેમના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર તેમની સંગત બાજુઓનાં વર્ગોના ગુણોત્તર જેટલો હોય છે.



આકૃતિ 1.64

પક્ષ : Δ ABC ~ Δ PQR, રેખ AD $\perp$ રેખ BC, રેખ PS $\perp$ રેખ QR

સાધ્ય : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \dfrac{AB^2}{PQ^2} = \dfrac{BC^2}{QR^2} = \dfrac{AC^2}{PR^2}$

સાબિતી : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \dfrac{BC \times AD}{QR \times PS} = \dfrac{BC}{QR} \times \dfrac{AD}{PS}$ .... (I)

Δ ABD અને Δ PQS માં

$\angle B = \angle Q$ .... (પક્ષ)

$\angle ADB = \angle PSQ = 90^\circ$

$\therefore$ સરૂપતાની ખૂખૂ કસોટી અનુસાર $\Delta ABD \sim \Delta PQS$

$\therefore \dfrac{AD}{PS} = \dfrac{AB}{PQ}$ .... (II)

પરંતુ, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$...(સંગત બાજુ પ્રમાણમાં).......... (III)

(I), (II) અને (III) પરથી

$\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \dfrac{BC}{QR} \times \dfrac{AD}{PS} = \dfrac{BC}{QR} \times \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{BC^2}{QR^2} = \dfrac{AB^2}{PQ^2} = \dfrac{AC^2}{PR^2}$

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $A(\Delta ABC) = 16$, $A(\Delta PQR) = 25$ હોય તો $\frac{AB}{PQ}$ ગુણોત્તરની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ .... (સરૂપ ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર તેમની સંગત બાજુઓના વર્ગના ગુણોત્તર જેટલો હોય છે.)

$\therefore \frac{16}{25} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ $\quad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{4}{5}$ .... (વર્ગમૂળ લેતાં)

ઉદા. (2) બે સરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુઓનો ગુણોત્તર 2:5 છે, નાના ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 64 ચોસેમી હોય તો મોટા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કેટલું ?

ઉકેલ : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ધારીએ,

ΔABC એ નાનો ત્રિકોણ અને ΔPQR મોટો ત્રિકોણ છે તેમ ધારીએ,

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{(2)^2}{(5)^2} = \frac{4}{25}$ .... (સરૂપ ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળનો પ્રમેય)

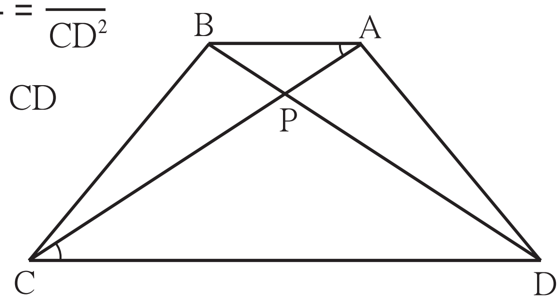
$\therefore \frac{64}{A(\Delta PQR)} = \frac{4}{25}$

$\therefore 4 \times A(\Delta PQR) = 64 \times 25$

$\therefore A(\Delta PQR) = \frac{64 \times 25}{4} = 400$

$\therefore$ મોટા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ= 400 ચોસેમી

ઉદા. (3) સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં બાજુ AB || બાજુ CD, વિકર્ણ AC અને વિકર્ણ BD પરસ્પર P બિંદુમાં છેદે છે. તો સાબિત કરો કે $\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$



આકૃતિ 1.65

ઉકેલ : સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં બાજુ AB || બાજુ CD

ΔAPB અને ΔCPD માં

$\angle PAB \cong \angle PCD$ ..... (વ્યુત્ક્રમ કોણો)

$\angle APB \cong \angle CPD$ ..... (અભિકોણો)

$\therefore \Delta APB \sim \Delta CPD$ ..... (સરૂપતાની ખૂખૂ કસોટી)

$\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$ .... (સરૂપ ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો પ્રમેય)

મહાવરાસંગ્રહ 1.4

1. બે સરૂપ ત્રિકોણોની સંગત બાજુઓનો ગુણોત્તર 3 : 5 હોય તો તેમના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

2. Δ ABC ~ Δ PQR અને AB : PQ = 2:3, હોય તો નીચેના ચોરસ પૂર્ણ કરો.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{\boxed{}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

3. Δ ABC ~ Δ PQR, A (Δ ABC) = 80, A(Δ PQR) = 125, તો નીચેના ચોરસ પૂર્ણ કરો.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta \ldots\ldots)} = \frac{80}{125} \qquad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

4. Δ LMN ~ Δ PQR, 9 × A (ΔPQR) = 16 × A (ΔLMN) જો QR = 20 હોય તો MN શોધો.

5. બે સરૂપ ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળ 225 ચોસેમી અને 81 ચોસેમી છે. જો નાના ત્રિકોણની એક બાજુ 12 સેમી હોય તો મોટા ત્રિકોણની સંગત બાજુ શોધો.

6. Δ ABC અને Δ DEF બંને સમભુજ ત્રિકોણ છે. A (ΔABC) : A (Δ DEF) = 1 : 2 હોય અને AB = 4 તો DE ની લંબાઈ શોધો.

7. આકૃતિ 1.66માં, રેખ PQ || રેખ DE, A (Δ PQF) = 20 ચો એકમ, જો PF = 2 DP છે. તો A($\square$ DPQE) શોધવા માટે નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.

A(Δ PQF) = 20 ચો એકમ, PF = 2 DP, DP = x ધારીએ. $\therefore$ PF = $2x$

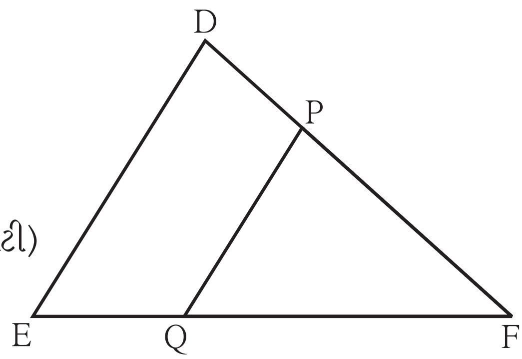
$$DF = DP + \boxed{} = \boxed{} + \boxed{} = 3x$$

Δ FDE અને Δ FPQ માં

$\angle$ FDE $\cong$ $\angle$ $\boxed{}$ (સંગત કોણ)

$\angle$ FED $\cong$ $\angle$ $\boxed{}$ (સંગત કોણ)

$\therefore$ Δ FDE ~ Δ FPQ .... (સરૂપતાની ખૂખૂ કસોટી)



આકૃતિ 1.66

$$\therefore \frac{A(\Delta FDE)}{A(\Delta FPQ)} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \frac{9}{4}$$

$$\therefore A(\Delta FDE) = \frac{9}{4} A(\Delta FPQ) = \frac{9}{4} \times \boxed{} = \boxed{}$$

$$A(\square DPQE) = A(\Delta FDE) - A(\Delta FPQ)$$

$$= \boxed{} - \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$

1. નીચેના ઉપપ્રશ્નો માટે આપેલા પર્યાયો પૈકી યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

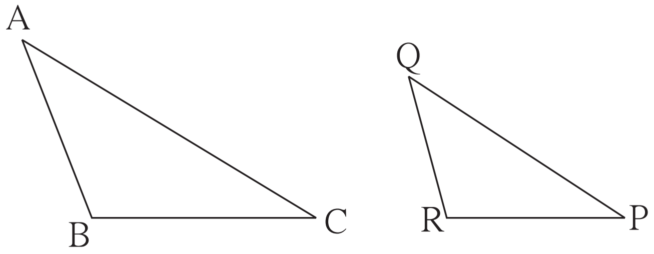
(1) જો Δ ABC અને Δ PQR માં એક એક સંગતતા અનુસાર $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$ હોય તો નીચેનામાંથી કયું વિધાન સાચું છે ?

(A) Δ PQR ~ Δ ABC

(B) Δ PQR ~ Δ CAB

(C) Δ CBA ~ Δ PQR

(D) Δ BCA ~ Δ PQR

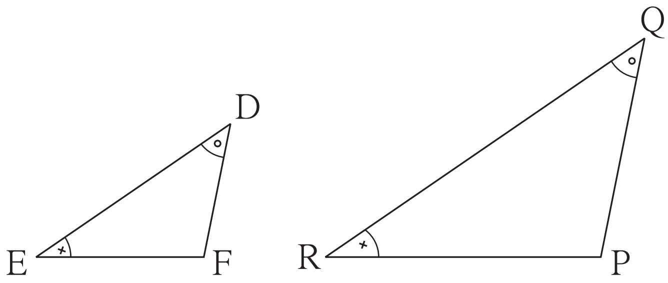


આકૃતિ 1.67

(2) જો Δ DEF અને Δ PQR માં, $\angle D \cong \angle Q$, $\angle R \cong \angle E$, તો નીચે પૈકી ખોટું વિધાન ઓળખો.

(A) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (B) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$

(C) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (D) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$



આકૃતિ 1.68

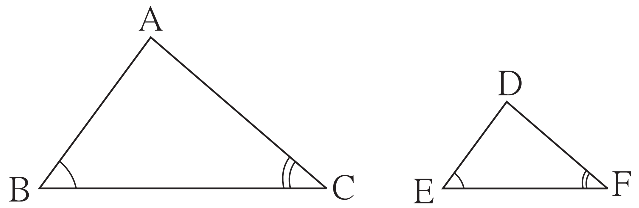
(3) Δ ABC અને Δ DEF માં $\angle B = \angle E$, $\angle F = \angle C$ અને AB = 3 DE, તો તે બે ત્રિકોણો વિશે સાચું વિધાન ઓળખો.

(A) તે એકરૂપ નથી અને સરૂપ પણ નથી.

(B) તે સરૂપ છે પણ એકરૂપ નથી.

(C) તે એકરૂપ છે અને સરૂપ પણ છે.

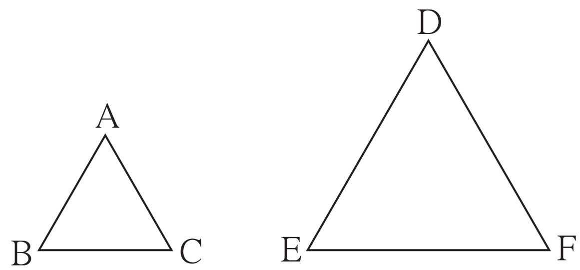
(D) ઉપરનામાંથી એક પણ વિધાન સત્ય નથી.



આકૃતિ 1.69

(4) Δ ABC અને Δ DEF બંને સમભુજ ત્રિકોણ છે, A (Δ ABC) : A (Δ DEF) = 1 : 2 અને AB = 4 હોય તો DE ની લંબાઈ કેટલી ?

(A) $2\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 8 (D) $4\sqrt{2}$

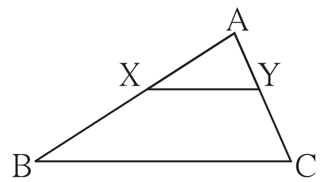


આકૃતિ 1.70

(5) આકૃતિ 1.71માં, રેખ XY || રેખ BC હોય તો નીચેનામાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ?

(A) $\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AY}$ (B) $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{AC}$

(C) $\frac{AX}{YC} = \frac{AY}{XB}$ (D) $\frac{AB}{YC} = \frac{AC}{XB}$



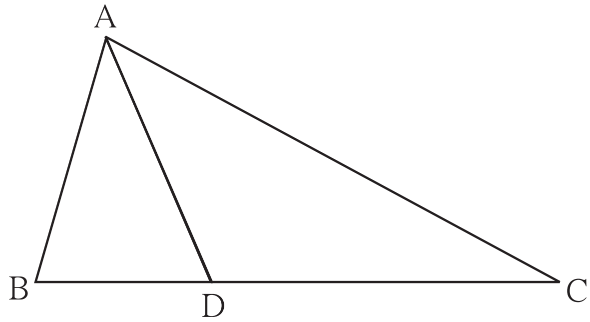
આકૃતિ 1.71

2. આકૃતિ 1.72માં, Δ ABCમાં B – D – C અને BD = 7, BC = 20 હોય તો નીચેના ગુણોત્તરો શોધો.

(1) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)}$

(2) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$

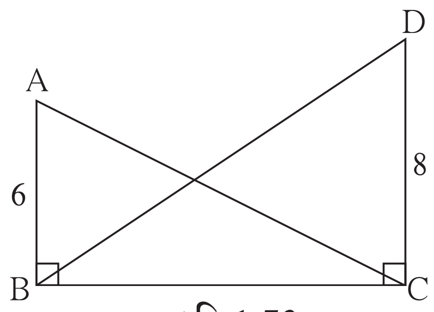
(3) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ABC)}$



આકૃતિ 1.72

3. સમાન ઊંચાઈ ધરાવતા બે ત્રિકોણોના ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર 2 : 3 છે. નાના ત્રિકોણના પાયાની લંબાઈ 6 સેમી હોય તો મોટા ત્રિકોણના સંગત પાયાની લંબાઈ કેટલી હશે ?

4.



આકૃતિ 1.73

આકૃતિ 1.73માં, $\angle ABC = \angle DCB = 90°$

AB = 6, DC = 8

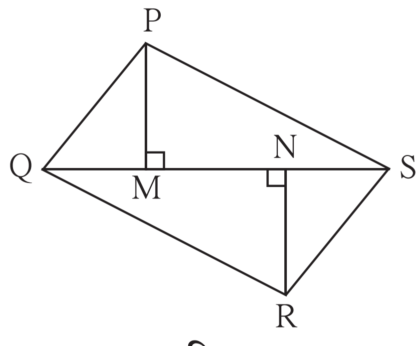
તો $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)}$ શોધો.

5. આકૃતિ 1.74માં, PM = 10 સેમી

A(Δ PQS) = 100 ચોસેમી

A(ΔQRS) = 110 ચોસેમી

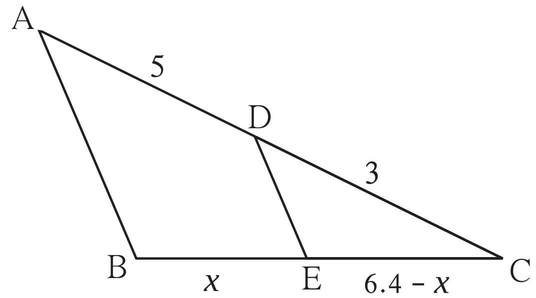
તો NR શોધો.



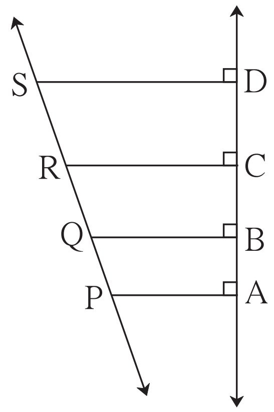
આકૃતિ 1.74

6. Δ MNT ~ Δ QRS છે. બિંદુ T માંથી દોરેલા લંબની લંબાઈ 5 જ્યારે બિંદુ S માંથી દોરેલા લંબની લંબાઈ 9 છે તો $\frac{A(\Delta MNT)}{A(\Delta QRS)}$ ગુણોત્તર શોધો.

7. આકૃતિ 1.75માં, A – D – C અને B – E – C . રેખ DE || બાજુ AB. જો AD = 5, DC = 3, BC = 6.4 તો BE શોધો.



આકૃતિ 1.75



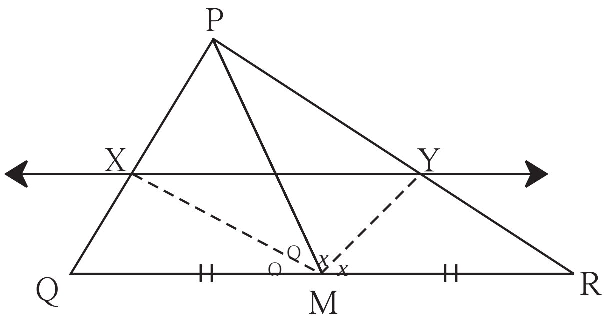
આકૃતિ 1.76

8. આકૃતિ 1.76માં, રેખ PA, રેખ QB, રેખ RC અને રેખ SD ને રેખા AD ને લંબ છે. AB = 60, BC = 70, CD = 80, PS = 280, તો PQ, QR, RS શોધો.

9. આકૃતિ 1.77માં, Δ PQR માં રેખ PM મધ્યગા છે. ∠PMQ અને ∠PMR ના દુભાજક બાજુ PQ અને બાજુ PR ને અનુક્રમે બિંદુ X અને Y માં છેદે છે.

તો સાબિત કરો કે રેખા XY || બાજુ QR.

આપેલી ખાલી જગ્યા પૂર્ણ કરીને સાબિતી પૂર્ણ કરો.



આકૃતિ 1.77

Δ PMQ માં કિરણ MX, ∠PMQ નો દુભાજક છે.

$\therefore \quad \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... (I) (ખૂણાના દુભાજકનો પ્રમેય)

Δ PMR માં કિરણ MY, ∠PMR નો દુભાજક છે.

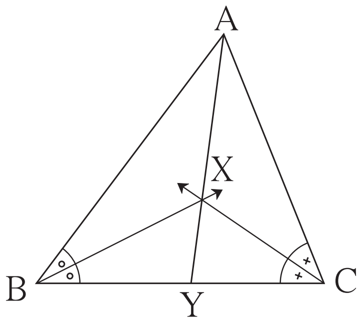
$\therefore \quad \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... (II) (ખૂણાના દુભાજકનો પ્રમેય)

પરંતુ $\frac{MP}{MQ} = \frac{MP}{MR}$ .... (QR નું મધ્યબિંદુ M છે. માટે MQ = MR)

$\therefore \quad \frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR}$

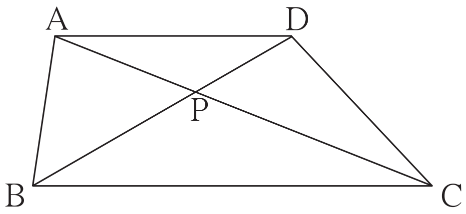
∴ રેખા XY || બાજુ QR .... (પ્રમાણના મૂળભૂત પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય)

10*. આકૃતિ 1.78માં, Δ ABCમાં $\angle B$ અને $\angle C$ ના દુભાજક પરસ્પરને Xમાં છેદે છે, રેખા AX બાજુ BC ને Y બિંદુમાં છેદે છે. જો AB = 5, AC = 4, BC = 6 હોય તો $\frac{AX}{XY}$ ની કિંમત શોધો.



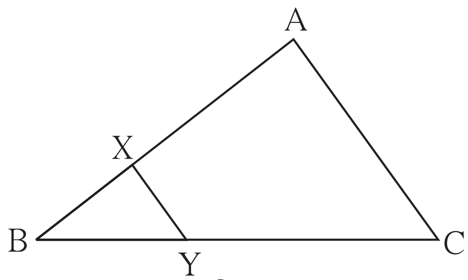
આકૃતિ 1.78

11. આકૃતિ 1.79માં, $\square$ ABCDમાં રેખ AD || રેખ BC. વિકર્ણ AC અને વિકર્ણ BD પરસ્પરને બિંદુ Pમાં છેદે છે. તો $\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{BP}$ દર્શાવો.



આકૃતિ 1.79

12. આકૃતિ 1.80માં, રેખ XY || બાજુ AC. જો 2AX = 3BX અને XY = 9 હોય તો AC ની કિંમત શોધવા માટે નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.



આકૃતિ 1.80

કૃતિ : 2AX = 3BX $\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

$\frac{AX + BX}{BX} = \frac{\boxed{} + \boxed{}}{\boxed{}}$ .... (યોગ ક્રિયા કરતાં)

$\frac{AB}{BX} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ .... (I)

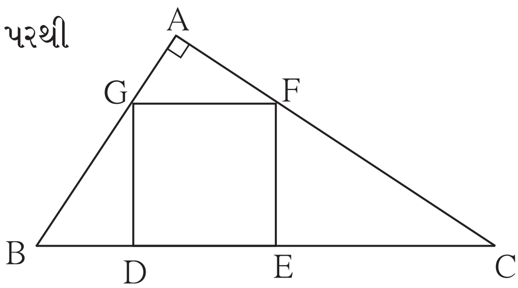
Δ BCA ~ Δ BYX .... (સરૂપતાની $\boxed{}$ કસોટી)

$\therefore \frac{BA}{BX} = \frac{AC}{XY}$ .... (સરૂપ ત્રિકોણોની સંગત બાજૂ)

$\therefore \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{AC}{9}$ $\therefore$ AC = $\boxed{}$ ....(I) પરથી

13*. આકૃતિ 1.81માં, Δ ABCમાં $\angle$ A = 90°. $\square$ DEFG ચોરસ છે. શિરોબિંદુ D અને E બાજુ BC પર આવેલા છે. બિંદુ F, બાજુ AC પર આવેલું છે. અને બિંદુ G, બાજુ AB પર છે. તો સાબિત કરો કે $DE^2 = BD \times EC$

(Δ GBD અને Δ CFE સરૂપ દર્શાવો. GD = FE = DE નો ઉપયોગ કરો.)



આકૃતિ 1.81

2 પાયથાગોરસનો પ્રમેય

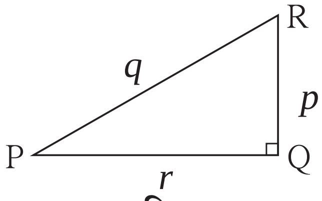
ચાલો, શીખીએ.

- પાયથાગોરસનો ત્રયક
- ભૌમિતિક મધ્યનો પ્રમેય
- પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ
- સરૂપતા અને કાટકોણ ત્રિકોણ
- પાયથાગોરસનો પ્રમેય
- એપોલોનિયસનો પ્રમેય

યાદ કરીએ.

પાયથાગોરસનો પ્રમેય :

કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણનો વર્ગ, બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે.



આકૃતિ 2.1

Δ PQRમાં, $\angle$ PQR = 90°

$l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$

તેને જ આપણે $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ ના રૂપમાં લખીશું.

Δ PQR ની બાજુઓ PQ, QR અને PR ની લંબાઈ અનુક્રમે r, p અને q અક્ષરો વડે દર્શાવીએ તો તે અનુસાર, આકૃતિ 2.1 ના સંદર્ભમાં પાયથાગોરસનો પ્રમેય $q^2 = p^2 + r^2$ રીતે લખી શકાય છે.

પાયથાગોરસનો ત્રયક :

પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ત્રયકમાં જો મોટી સંખ્યાનો વર્ગ બાકીની બે સંખ્યાઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય તો તેને પાયથાગોરસનો ત્રયક કહેવાય છે.

ઉદા. : (11, 60, 61) આ સંખ્યાના ત્રયકમાં,

$11^2 = 121$, $60^2 = 3600$, $61^2 = 3721$ અને $121 + 3600 = 3721$

અહીં મોટી સંખ્યાનો વર્ગ બાકીની બે સંખ્યાઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો છે.

$\therefore$ 11, 60, 61 એ પાયથાગોરસનો ત્રયક છે.

તે જ રીતે (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (24, 25, 7) પણ પાયથાગોરસના ત્રયકો છે, તે ચકાસો.

પાયથાગોરસના ત્રયકની સંખ્યા કોઈપણ ક્રમમાં લખી શકાય.

વધુ માહિતી માટે :

પાયથાગોરસના ત્રયક મેળવવાનું સૂત્ર :

જો a, b, c પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય અને $a > b$ હોય, તો $[(a^2 + b^2),(a^2 - b^2),(2ab)]$ એ પાયથાગોરસના ત્રયક હોય છે.

$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ .... (I)

$(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ .... (II)

$(2ab)^2 = 4a^2b^2$ .... (III)

$\therefore$ (I), (II) અને (III) પરથી , $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$

$\therefore [(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), (2ab)]$ એ પાયથાગોરસનો ત્રયક છે.

આ ત્રયક, પાયથાગોરસના જુદા જુદા ત્રયકો મેળવવા માટે સૂત્ર તરીકે વપરાય છે.

ઉદા., $a = 5$ અને $b = 3$ લેતા,

$a^2 + b^2 = 34$, $a^2 - b^2 = 16$ અને $2ab = 30$.

(34, 16, 30) એ પાયથાગોરસનું ત્રયક છે, તે તમે ચકાસી જુઓ.

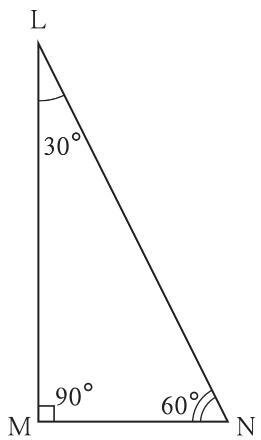
a અને b માટે જુદી જુદી પ્રાકૃતિક સંખ્યા લઈને સૂત્રના આધારે પાયથાગોરસના 5 ત્રયક તૈયાર કરો.

પાછલા ધોરણમાં આપણે **30°– 60°– 90°** અને **45°– 45°– 90°** ખૂણા હોય તેવા કાટકોણ ત્રિકોણના ગુણધર્મ શીખી ગયા છીએ.

(I) ખૂણાના માપ 30°–60°–90° હોય તેવા ત્રિકોણનો ગુણધર્મ

કાટકોણ ત્રિકોણના લઘુકોણો 30° અને 60° હોય તો 30° ના ખૂણાની સામેની બાજુ, કર્ણ કરતા અડધી હોય છે. અને જ્યારે 60° ના ખૂણાની સામેની બાજુ, કર્ણના $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ગણી હોય છે.

આકૃતિ 2.2 જુઓ. Δ LMN માં, $\angle$ L = 30°, $\angle$ N = 60°, $\angle$ M = 90°



આકૃતિ 2.2

$\therefore$ 30° ખૂણાની સામેની બાજુ = MN = $\frac{1}{2} \times$ LN

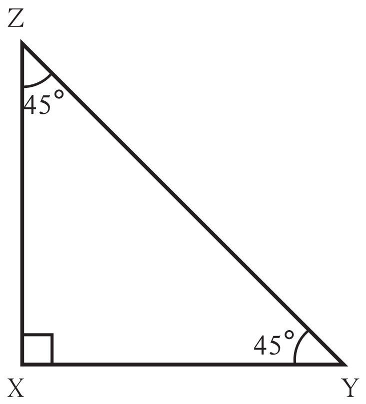
60° ખૂણાની સામેની બાજુ = LM = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ LN

જો LN = 6 સેમી તો MN અને LM શોધીએ.

MN = $\frac{1}{2} \times$ LN	LM = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ LN
= $\frac{1}{2} \times 6$	= $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$
= 3 સેમી	= $3\sqrt{3}$ સેમી

(II) ખૂણાના માપ 45°–45°–90° હોય તેવા ત્રિકોણનો ગુણધર્મ

કાટકોણ ત્રિકોણના લઘુકોણ 45° અને 45° માપના હોય તો કાટકોણ બનાવનારી પ્રત્યેક બાજુ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ગણી હોય છે.



આકૃતિ 2.3

આકૃતિ 2.3જુઓ. Δ XYZ માં,

$$XY = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

$$XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

જો $ZY = 3\sqrt{2}$ સેમી તો XY અને XZ શોધીએ.

$$XY = XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$$

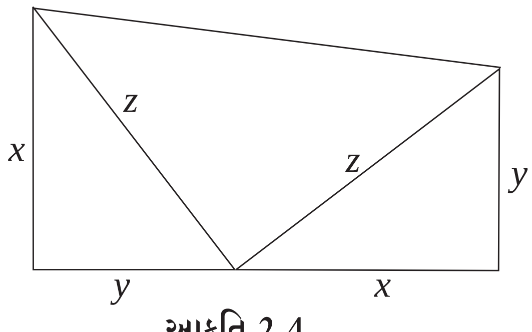
$\therefore$ XY = XZ = 3 સેમી

ધોરણ 7માં ક્ષેત્રફળની મદદથી પાયથાગોરસનો પ્રમેય શીખ્યા છીએ. તેમાં આપણે ચાર કાટકોણ ત્રિકોણ અને એક ચોરસના ક્ષેત્રફળનો ઉપયોગ કર્યો હતો. આ પ્રમેયને આપણે થોડી જુદી રીતે પણ સાબિત કરી શકીએ છીએ.

કૃતિ :

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ, બે એકરૂપ કાટકોણ ત્રિકોણ લો. તેમના કર્ણની લંબાઈ જેટલી જ બે બાજુ ધરાવતો એક સમદ્વિભુજ કાટકોણ ત્રિકોણ લો. આ ત્રણ કાટકોણ ત્રિકોણ જોડીને સમલંબ ચતુષ્કોણ તૈયાર કરો.

સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times$ (સમાંતર બાજુની લંબાઈનો સરવાળો) $\times$ ઊંચાઈ ; આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને તેના ક્ષેત્રફળને ત્રણેય ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળોના સરવાળા સાથે લખીને પાયથાગોરસનો પ્રમેય સાબિત કરો.



આકૃતિ 2.4

જાણી લઈએ.

હવે આપણે પાયથાગોરસના પ્રમેયને સરૂપ ત્રિકોણોના આધારે સાબિત કરીશું. તે માટે જરૂરી એવા કાટકોણ ત્રિકોણની સરૂપતાના ગુણધર્મનો અભ્યાસ કરીએ.

સરૂપતા અને કાટકોણ ત્રિકોણ (Similarity and right angled triangle)

પ્રમેય : કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ પર દોરેલા શિરોલંબને લીધે જે બે ત્રિકોણો તૈયાર થાય છે. તે મૂળ કાટકોણ ત્રિકોણને તેમજ પરસ્પર સરૂપ હોય છે.

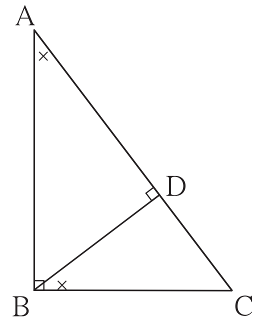
પક્ષ : Δ ABCમાં, $\angle$ ABC = 90°,

રેખ BD $\perp$ રેખ AC, A–D–C

સાધ્ય : Δ ADB ~ Δ ABC

Δ BDC ~ Δ ABC

Δ ADB ~ Δ BDC



આકૃતિ 2.5

સાબિતી : Δ ADB અને Δ ABC માં

$\angle$ DAB $\cong$ $\angle$ BAC ...(સામાન્ય ખૂણો)

$\angle$ ADB $\cong$ $\angle$ ABC ...(90° નો ખૂણો)

Δ ADB ~ Δ ABC ...(સરૂપતાની ખૂખૂ કસોટી)...(I)

તેમ જ, Δ BDC અને Δ ABCમાં

$\angle$ BCD $\cong$ $\angle$ ACB ...(સામાન્ય ખૂણો)

$\angle$ BDC $\cong$ $\angle$ ABC ...(90° નો ખૂણો)

Δ BDC ~ Δ ABC ... (સરૂપતાની ખૂખૂ કસોટી)..(II)

$\therefore$ Δ ADB ~ Δ BDC વિધાન (I) અને (II) પરથી ...(III)

$\therefore$ Δ ADB ~ Δ BDC ~ Δ ABC વિધાન(I), (II) અને (III) પરથી..... સંક્રામકતા

આ પ્રમેયને 'કાટકોણ ત્રિકોણની સરૂપતા' પણ કહેવાય.

ભૌમિતિક મધ્યનો પ્રમેય (Theorem of geometric mean)

કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ પર દોરેલો શિરોલંબ, તે શિરોલંબને લીધે તૈયાર થતા કર્ણના બે ભાગોનું ભૌમિતિક મધ્ય હોય છે.

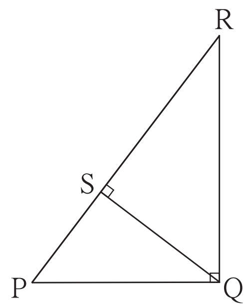
સાબિતી : કાટકોણ ત્રિકોણ PQRમાં રેખ QS $\perp$ કર્ણ PR

Δ QSR ~ Δ PSQ .... (કાટકોણ ત્રિકોણોની સરૂપતા)

$$\therefore \quad \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{SQ}$$

$$\therefore \quad \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{QS}$$

$$\therefore \quad QS^2 = PS \times SR$$

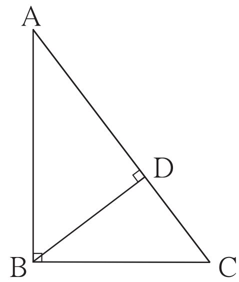


આકૃતિ 2.6

$\therefore$ શિરોલંબ QS, રેખ PS અને રેખ SR નું 'ભૌમિતિક મધ્ય' છે.

પાયથાગોરસનો પ્રમેય (Theorem of Pythagoras)

કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણનો વર્ગ, બાકીની બે બાજુના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે.



આકૃતિ 2.7

પક્ષ : Δ ABC માં, $\angle ABC = 90°$

સાધ્ય : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

રચના : બિંદુ B માંથી બાજુ AC પર રેખાખંડ BD લંબ દોર્યો. A–D–C

સાબિતી : કાટકોણ Δ ABCમાં, રેખ BD $\perp$ કર્ણ AC ..... (રચના)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC$ ..... (કાટકોણ ત્રિકોણની સરૂપતા)

$\Delta ABC \sim \Delta ADB$

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB}$ – સંગત બાજુઓ

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$

$AB^2 = AD \times AC$ .... (I)

તેમ જ, $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ – સંગત બાજુઓ

$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$

$BC^2 = DC \times AC$ .... (II)

(I) અને (II) નો સરવાળો કરતાં

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= AD \times AC + DC \times AC \\ &= AC\,(AD + DC) \\ &= AC \times AC \text{ .... (A–D–C)} \end{aligned}$$

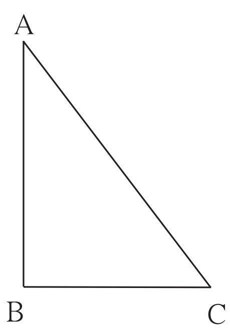
$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

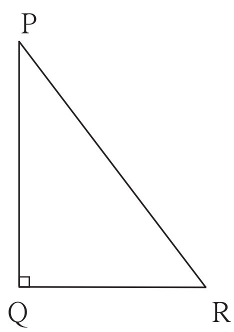
પાયથાગોરસના પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય (Converse of Pythagoras' theorem)

જો કોઈ ત્રિકોણની એક બાજુનો વર્ગ બાકીની બે બાજુના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય તો, તે ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ હોય છે.

પક્ષ : Δ ABC માં, $AC^2 = AB^2 + BC^2$



આકૃતિ 2.8



આકૃતિ 2.9

સાધ્ય : $\angle ABC = 90^\circ$

રચના : ΔPQR એવો દોરો કે, $AB = PQ, BC = QR, \angle PQR = 90^\circ$.

સાબિતી : ΔPQR માં, $\angle Q = 90^\circ$

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ .... (પાયથાગોરસનો પ્રમેય)

$= AB^2 + BC^2$ .... (રચના)

$= AC^2$ .... (પક્ષ)

$\therefore PR^2 = AC^2$,

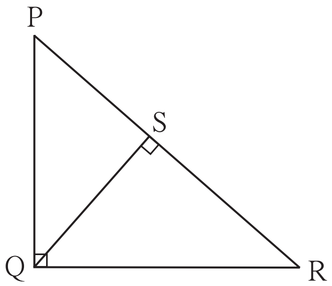
$\therefore PR = AC$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ .... (બાબાબા કસોટી)

$\therefore \angle ABC = \angle PQR = 90^\circ$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

(1) (a) સરૂપતા અને કાટકોણ ત્રિકોણ



આકૃતિ 2.10

ΔPQR માં $\angle Q = 90^\circ$, રેખ $QS \perp$ રેખ PR અહીં $\Delta PQR \sim \Delta PSQ \sim \Delta QSR$ આ રીતે આકૃતિમાં તૈયાર થતાં દરેક કાટકોણ ત્રિકોણ પરસ્પર સરૂપ હોય છે.

(b) ભૌમિતિક મધ્યનો પ્રમેય :

ઉપરની આકૃતિમાં $\Delta PSQ \sim \Delta QSR$

$\therefore QS^2 = PS \times SR$

$\therefore$ રેખ QS એ રેખ PS અને રેખ SR નો ભૌમિતિક મધ્ય છે.

(2) પાયથાગોરસનો પ્રમેય :

કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણનો વર્ગ, બાકીની બે બાજુના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

(3) પાયથાગોરસના પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય :

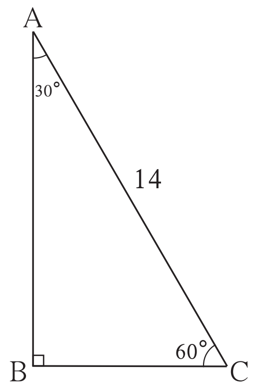
જો કોઈ ત્રિકોણની એકબાજુનો વર્ગ એ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય તો, તે ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ હોય છે.

આ સિવાય હજી એક ગુણધર્મ ખૂબ ઉપયોગી છે. તે પણ ધ્યાનમાં રાખીએ.

(4) કાટકોણ ત્રિકોણની એક બાજુ કર્ણ કરતા અડધી હોય તો તે બાજુની સામેની ખૂણો 30° નો હોય છે. આ ગુણધર્મ $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય છે.

ઉદા. (1) આકૃતિ 2.11 જુઓ. Δ ABCમાં, $\angle B = 90°$, $\angle A = 30°$, AC=14 તો AB અને BC શોધો.

ઉકેલ :



આકૃતિ 2.11

Δ ABC માં,

$\angle B = 90°$, $\angle A = 30°$ $\therefore$ $\angle C = 60°$

$30° - 60° - 90°$ ના પ્રમેય અનુસાર,

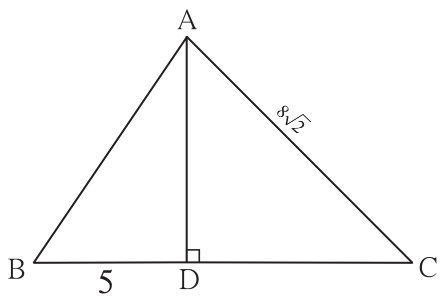
$BC = \frac{1}{2} \times AC$ | $AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC$

$BC = \frac{1}{2} \times 14$ | $AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14$

$BC = 7$ | $AB = 7\sqrt{3}$

ઉદા. (2) આકૃતિ 2.12 જુઓ. Δ ABCમાં, રેખ AD $\perp$ રેખ BC, $\angle C = 45°$, BD = 5 અને AC = $8\sqrt{2}$ તો AD અને BC શોધો.

ઉકેલ :



આકૃતિ 2.12

Δ ADC માં ,

$\angle ADC = 90°$, $\angle C = 45°$, $\therefore$ $\angle DAC = 45°$

$AD = DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2}$ ..($45°-45°-90°$ના પ્રમેયાનુસાર)

$\therefore$ DC = 8 $\therefore$ AD = 8

BC = BD + DC ...[B-D-C]

= 5 + 8

= 13

ઉદા. (3) આકૃતિ 2.13માં, $\angle PQR = 90°$, રેખ QN $\perp$ રેખ PR, PN = 9, NR = 16 તો QN શોધો.

ઉકેલ : Δ PQR માં, રેખ QN $\perp$ રેખ PR

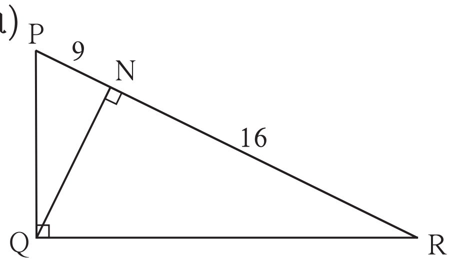
$\therefore$ $QN^2 = PN \times NR$ .... (ભૌમિતિક મધ્યનો પ્રમેય)

$\therefore$ $QN = \sqrt{PN \times NR}$

$= \sqrt{9 \times 16}$

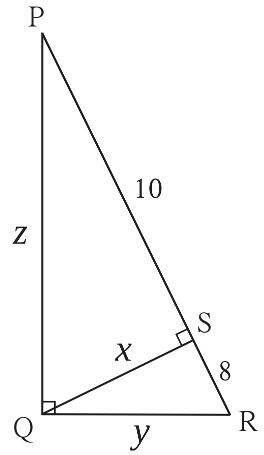
$= 3 \times 4$

$= 12$



આકૃતિ 2.13

ઉદા. (4) આકૃતિ 2.14 જુઓ. Δ PQRમાં, $\angle PQR = 90^\circ$, રેખ QS $\perp$ રેખ PR તો x, y, z ની કિંમત શોધો.



આકૃતિ 2.14

ઉકેલ : Δ PQR માં, $\angle PQR = 90^\circ$, રેખ QS $\perp$ રેખ PR

$QS = \sqrt{PS \times SR}$ .... (ભૌમિતિક મધ્યનો પ્રમેય)

$= \sqrt{10 \times 8}$

$= \sqrt{5 \times 2 \times 8}$

$= \sqrt{5 \times 16}$

$= 4\sqrt{5}$

$\therefore \; x = 4\sqrt{5}$

Δ QSR માં, $\angle QSR = 90^\circ$

પાયથાગોરસના પ્રમેય અનુસાર

$\therefore QR^2 = QS^2 + SR^2$

$= \left(4\sqrt{5}\right)^2 + 8^2$

$= 16 \times 5 + 64$

$= 80 + 64$

$= 144$

$\therefore QR = 12$

Δ PSQ માં, $\angle QSP = 90^\circ$

પાયથાગોરસના પ્રમેય અનુસાર

$\therefore PQ^2 = QS^2 + PS^2$

$= \left(4\sqrt{5}\right)^2 + 10^2$

$= 16 \times 5 + 100$

$= 80 + 100$

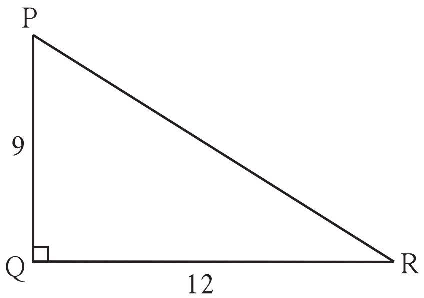
$= 180$

$= 36 \times 5$

$\therefore PQ = 6\sqrt{5}$

આ પરથી , $x = 4\sqrt{5}$, $y = 12$, $z = 6\sqrt{5}$

ઉદા. (5) કાટકોણ ત્રિકોણમાં કાટકોણ બનાવતી બાજુઓના માપ 9 સેમી અને 12 સેમી હોય તે ત્રિકોણનો કર્ણ શોધો.



આકૃતિ 2.15

ઉકેલ : Δ PQR માં, $\angle Q = 90^\circ$

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (પાયથાગોરસના પ્રમેય અનુસાર)

$= 9^2 + 12^2$

$= 81 + 144$

$\therefore PR^2 = 225$

$\therefore PR = 15$

ત્રિકોણાનો કર્ણ = 15 સેમી

ઉદા. (6) Δ LMN માં $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$ તો Δ LMN એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે કે નહીં તે નક્કી કરો. (l, m, n, આ અનુક્રમે $\angle$ L, $\angle$ M અને $\angle$ N ની સામેની બાજુ છે.)

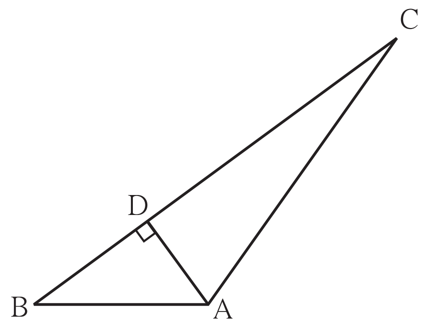
ઉકેલ : $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$

$l^2 = 25$, $m^2 = 169$, $n^2 = 144$

$\therefore\ m^2 = l^2 + n^2$

$\therefore$ પાયથાગોરસના પ્રમેયના પ્રતિપ્રમેય અનુસાર Δ LMN કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

ઉદા. (7) આકૃતિ 2.16 જુઓ. Δ ABC માં, રેખ AD $\perp$ રેખ BC, તો સાબિત કરો :
$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$



આકૃતિ 2.16

ઉકેલ : પાયથાગોરસના પ્રમેય અનુસાર Δ ADC માં,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$\therefore\ AD^2 = AC^2 - CD^2$ ... (I)

પાયથાગોરસના પ્રમેય અનુસાર Δ ADB માં,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$\therefore\ AD^2 = AB^2 - BD^2$ ... (II)

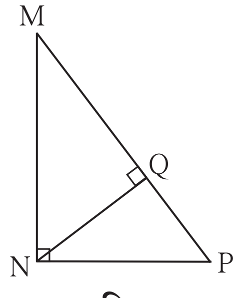
$\therefore\ AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ .... [(I) અને (II) પરથી]

$\therefore\ AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

મહાવરાસંગ્રહ 2.1

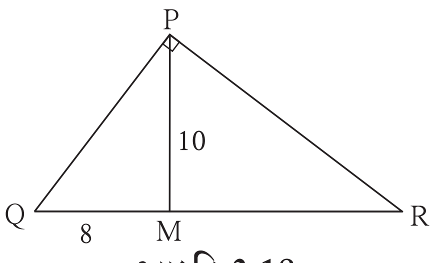
1. નીચેના ત્રયકો પૈકી પાયથાગોરસના ત્રયકો ક્યા છે તે સકારણ લખો.
(1) (3, 5, 4) (2) (4, 9, 12) (3) (5, 12, 13)
(4) (24, 70, 74) (5) (10, 24, 27) (6) (11, 60, 61)

2. આકૃતિ 2.17 માં $\angle$ MNP = 90°, રેખ NQ $\perp$ રેખ MP અને M-Q-P, MQ = 9, QP = 4 તો NQ શોધો.



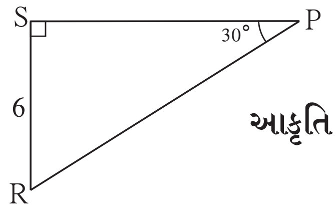
આકૃતિ 2.17

3. આકૃતિ 2.18માં, $\angle$ QPR = 90°, રેખ PM $\perp$ રેખ QR અને Q-M-R, PM = 10, QM = 8 આ પરથી QR શોધો.



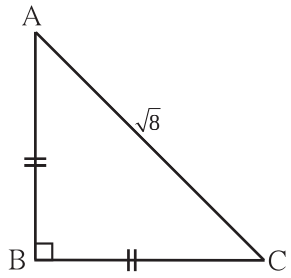
આકૃતિ 2.18

4. આકૃતિ 2.19માં, Δ PSRમાં આપેલી માહિતી પરથી RP અને PS શોધો.



આકૃતિ 2.19

5. આકૃતિ 2.20માં, આપેલી માહિતી પરથી AB અને BC શોધવા માટે નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.



આકૃતિ 2.20

AB = BC .... $\boxed{}$

$\therefore \angle BAC = \boxed{}$

$\therefore AB = BC = \boxed{} \times AC$

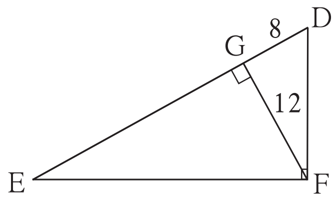
$= \boxed{} \times \sqrt{8}$

$= \boxed{} \times 2\sqrt{2}$

$= \boxed{}$

6. એક ચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ 10 સેમી હોય તો તેની બાજુની લંબાઈ અને પરિમિતિ શોધો.

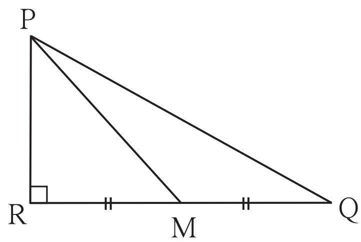
7. આકૃતિ 2.21માં, $\angle DFE = 90°$, રેખ FG $\perp$ રેખ ED અને F-G-D જો GD = 8, FG = 12, તો (1) EG (2) FD અને (3) EF શોધો.



આકૃતિ 2.21

8. એક લંબચોરસની લંબાઈ 35 સેમી અને પહોળાઈ 12 સેમી હોય તો તે લંબચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ શોધો.

9★. આકૃતિ 2.22માં, બાજુ QRનું મધ્યબિંદુ M છે. $\angle PRQ = 90°$ હોય તો સાબિત કરો કે, $PQ^2 = 4PM^2 - 3PR^2$



આકૃતિ 2.22

10★. રસ્તાની બંને બાજુએ આવેલી ઇમારતોની ભીંતો એકબીજાને સમાંતર છે. 5.8 મી લંબાઈ ધરાવતી સીડીનો એક છેડો રસ્તા પર મૂકતાં તેનો ઉપરનો છેડો પહેલી ઇમારતની 4 મીટર ઊંચાઈએ આવેલી બારી સુધી પહોંચે છે. તે જ સ્થળે સીડી રાખી બીજી ઇમારત તરફ વાળતાં તેનો ઉપરનો છેડો બીજી ઇમારતની 4.2 મીટર ઊંચાઈએ આવેલી બારી સુધી જાય છે. તો તે રસ્તાની પહોળાઈ શોધો.

જાણી લઈએ.

પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ

પાયથાગોરસના પ્રમેયમાં કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ અને કાટકોણ બનાવનારી બાજુઓનો પરસ્પર સંબંધ એટલે કે કાટકોણની સામેની બાજુ અને અન્ય બે બાજુઓ વચ્ચેનો સંબંધ સમજાવ્યો છે.

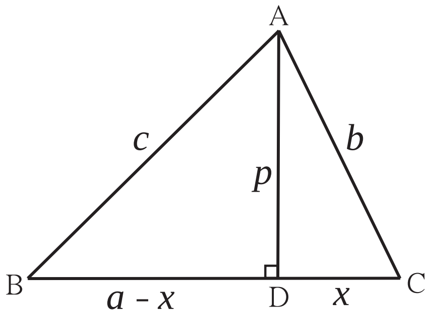
ત્રિકોણમાંના લઘુકોણની સામેની બાજુનો અન્ય બે બાજુ સાથેનો સંબંધ તેમજ ગુરૂકોણની સામેની બાજુનો અન્ય બે બાજુ સાથેનો સંબંધ પાયથાગોરસના પ્રમેય દ્વારા નક્કી કરી શકાય. આ સંબંધ નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ઉદા.(1) Δ ABC માં, $\angle$ C લઘુકોણ છે, રેખ AD $\perp$ રેખ BC તો સાબિત કરો :

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

આપેલી આકૃતિમાં, AB = c, AC = b, AD = p, BC = a, DC = x ધારીએ.

$\therefore$ BD = $a - x$



આકૃતિ 2.23

Δ ADB માં, પાયથાગોરસના પ્રમેય અનુસાર

$c^2 = (a-x)^2 + \boxed{}$

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \boxed{}$ .... (I)

Δ ADC માં, પાયથાગોરસના પ્રમેય અનુસાર

$b^2 = p^2 + \boxed{}$

$p^2 = b^2 - \boxed{}$ .... (II)

વિધાન (II) માંની p^2 ની કિંમત, વિધાન (I) માં મૂકતા,

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$

$\therefore\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$

$\therefore\ AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

ઉદા.(2) Δ ABC માં, $\angle$ ACB ગુરૂકોણ છે, રેખ AD $\perp$ રેખ BC, તો સાબિત કરો કે :

$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

ધારો કે AD = p, AC = b, AB = c,

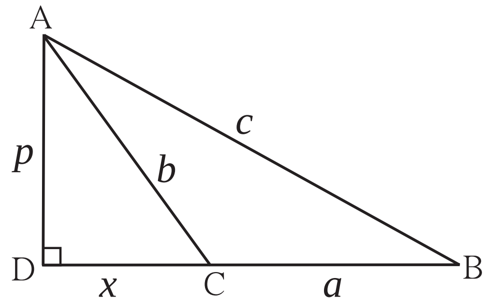
BC = a, DC = x ધારીએ.

DB = $a + x$

Δ ADB માં, પાયથાગોરસના પ્રમેય અનુસાર,

$c^2 = (a + x)^2 + p^2$

$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + p^2$ .... (I)



આકૃતિ 2.24

તે જ રીતે Δ ADC માં, પાયથાગોરસના પ્રમેય અનુસાર,

$$b^2 = x^2 + p^2$$

$$\therefore \quad p^2 = b^2 - x^2 \qquad \text{..........} \text{ (II)}$$

$\therefore$ (I) માં (II) માંની p^2 ની કિંમત મૂકતા,

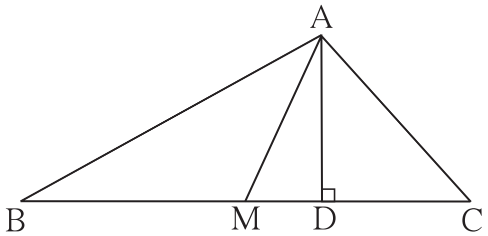
$$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$= a^2 + 2ax + b^2$$

$\therefore$ $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

એપોલોનિયસનો પ્રમેય (Appollonius' Theorem)

Δ ABC માં બિંદુ M બાજુ BC નું મધ્ય બિંદુ હોય તો, $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$



આકૃતિ 2.25

પક્ષ : Δ ABCમાં, M એ બાજુ BCનું મધ્યબિંદુ છે.

સાધ્ય : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

રચના : રેખ AD $\perp$ રેખ BC દોર્યો.

સાબિતી : જો રેખ AM, રેખ BC ને લંબ ન હોય તો, $\angle$AMB અને $\angle$AMC પૈકી એક ગુરૂકોણ અને એક લઘુકોણ હોય છે.

આકૃતિમાં $\angle$AMB ગુરૂકોણ અને $\angle$AMC લઘુકોણ છે.

ઉપરના ઉદા. (1) અને ઉદા. (2) પરથી,

$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \times MD$ ..... (I)

અને $AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \times MD$

$\therefore$ $AC^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM \times MD$ ($\because$ BM = MC) ....(II)

વિધાન (I) અને વિધાન (II) નો સરવાળો કરતા,

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

જો રેખ AM $\perp$ બાજુ BC હોય તો પ્રમેયની સાબિતી તમે લખો.

આ ઉદાહરણ પરથી ત્રિકોણની બાજુ અને મધ્યગાનો પરસ્પર સંબંધ સમજાય છે.

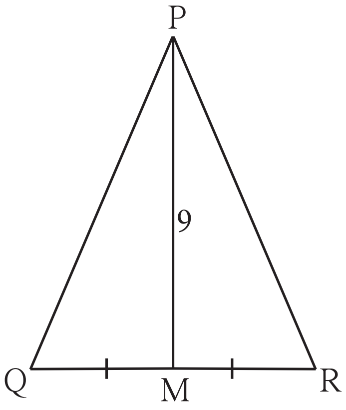
એને જ 'એપોલોનિયસનો પ્રમેય' કહેવાય છે.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા.(1) Δ PQR માં, રેખ PM મધ્યગા છે. PM = 9 અને $PQ^2 + PR^2 = 290$, હોય તો QR શોધો.

ઉકેલ : Δ PQR માં, રેખ PM મધ્યગા છે.

M એ રેખ QR નું મધ્યબિંદુ છે.



આકૃતિ 2.26

$QM = MR = \frac{1}{2} QR$

$PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2$ (એપોલોનિયસના પ્રમેય અનુસાર)

$\therefore \quad 290 = 2 \times 9^2 + 2QM^2$

$\therefore \quad 290 = 2 \times 81 + 2QM^2$

$\therefore \quad 290 = 162 + 2QM^2$

$\therefore \quad 2QM^2 = 290 - 162$

$\therefore \quad 2QM^2 = 128$

$\therefore \quad QM^2 = 64$

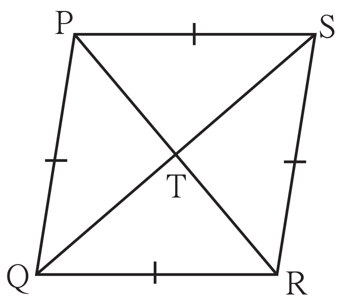
$\therefore \quad QM = 8$

$\therefore \quad QR = 2 \times QM$

$= 2 \times 8$

$= 16$

ઉદા.(2) સમભુજ ચતુષ્કોણના બાજુઓના વર્ગોનો સરવાળો, તેના વિકર્ણોના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે, તે સાબિત કરો.



આકૃતિ 2.27

પક્ષ : □ PQRS સમભુજ ચતુષ્કોણ છે. વિકર્ણ PR અને SQ પરસ્પર T બિંદુમાં છેદે છે.

સાધ્ય : $PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = PR^2 + QS^2$

સાબિતી : સમભુજ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.

$\therefore$ એપોલોનિયસના પ્રમેય અનુસાર,

$PQ^2 + PS^2 = 2PT^2 + 2QT^2$ .... (I)

$QR^2 + SR^2 = 2RT^2 + 2QT^2$ .... (II)

વિધાન (I) અને વિધાન (II) નો સરવાળો કરતાં,

$PQ^2 + PS^2 + QR^2 + SR^2 = 2(PT^2 + RT^2) + 4QT^2$

$\therefore PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = 2(PT^2 + PT^2) + 4QT^2$ .... (RT = PT)

$= 4PT^2 + 4QT^2$

$= (2PT)^2 + (2QT)^2$

$= PR^2 + QS^2$

(આ ઉદાહરણ પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને પણ ઉકેલી શકાય.)

મહાવરાસંગ્રહ 2.2

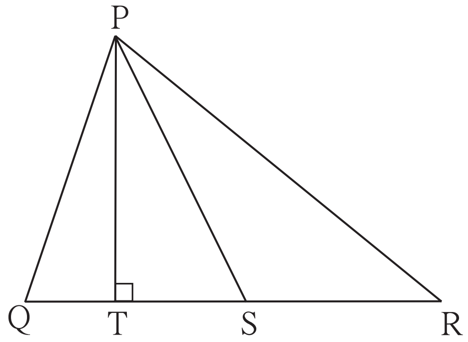
1. Δ PQRમાં, બિંદુ S એ બાજુ QR નું મધ્યબિંદુ છે, જો PQ = 11, PR = 17, PS = 13 હોય તો QR ની લંબાઈ શોધો.

2. Δ ABCમાં, AB = 10, AC = 7, BC = 9 હોય તો, બિંદુ C માંથી બાજુ AB પર દોરેલી મધ્યગાની લંબાઈ કેટલી?

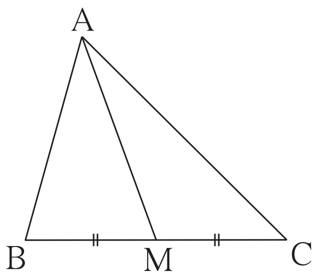
3. આકૃતિ 2.28માં, રેખ PS, Δ PQRની મધ્યગા છે અને રેખ PT $\perp$ રેખ QR તો સાબિત કરો,

(1) $PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$

(2) $PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$



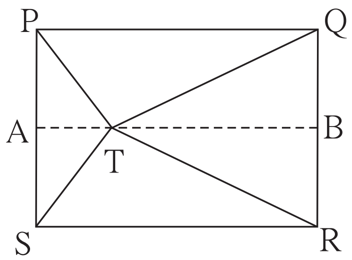
આકૃતિ 2.28



આકૃતિ 2.29

4. આકૃતિ 2.29 માં, Δ ABCમાં, બાજુ BC નું મધ્યબિંદુ M છે. જો $AB^2 + AC^2 = 290$ સેમી, AM = 8 સેમી, તો BC શોધો.

5★. આકૃતિ 2.30માં, દર્શાવ્યા મુજબ બિંદુ T એ લંબચોરસ PQRSના અંતર્ભાગમાં આવેલું છે. તો સાબિત કરો કે, $TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$ (આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ A–T–B હોય તેવા રેખ AB $\parallel$ બાજુ SR દોરો.)



આકૃતિ 2.30

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 2

1. નીચે આપેલા બહુપર્યાયી પ્રશ્નોના આપેલા ઉત્તરો પૈકી યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

(1) નીચેનામાંથી ક્યો પાયથાગોરસનો ત્રયક છે ?

(A) (1, 5, 10) (B) (3, 4, 5) (C) (2, 2, 2) (D) (5, 5, 2)

(2) કાટકોણ ત્રિકોણમાં કાટકોણ બનાવતી બાજુઓના વર્ગોનો સરવાળો 169 હોય તો તેના કર્ણની લંબાઈ કેટલી ?

(A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

(3) નીચેનામાંથી કઈ તારીખની સંખ્યા પાયથાગોરસનો ત્રયક છે ?

(A) 15/08/17 (B) 16/08/16 (C) 3/5/17 (D) 4/9/15

(4) બાજુની લંબાઈ a, b, c હોય તેવા ત્રિકોણમાં જો $a^2 + b^2 = c^2$ હોય તો તે ક્યા પ્રકારનો ત્રિકોણ હશે ?

(A) ગુરૂકોણ ત્રિકોણ (B) લઘુકોણ ત્રિકોણ (C) કાટકોણ ત્રિકોણ (D) સમભુજ ત્રિકોણ

(5) એક ચોરસનો વિકર્ણ $10\sqrt{2}$ સેમી હોય તો તેની પરિમિતિ .... હશે.

(A) 10 સેમી (B) $40\sqrt{2}$ સેમી (C) 20 સેમી (D) 40 સેમી

(6) એક કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ પર દોરેલા શિરોલંબને કારણે કર્ણના 4 સેમી અને 9 સેમી લંબાઈના બે ભાગ થાય છે, તો તે શિરોલંબની લંબાઈ કેટલી ?

(A) 9 સેમી (B) 4 સેમી (C) 6 સેમી (D) $2\sqrt{6}$ સેમી

(7) કાટકોણ ત્રિકોણમાં કાટકોણ બનાવતી બાજુઓ 24 સેમી અને 18 સેમી હોય તો તેના કર્ણની લંબાઈ .... હશે.

(A) 24 સેમી (B) 30 સેમી (C) 15 સેમી (D) 18 સેમી

(8) Δ ABC માં, AB = $6\sqrt{3}$ સેમી, AC = 12 સેમી અને BC = 6 સેમી હોય તો $\angle$ A નું માપ કેટલું ?

(A) 30° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

2. નીચેના ઉદાહરણો ગણો.

(1) એક સમભુજ ત્રિકોણની બાજુ $2a$ છે, તો તેની ઊંચાઈ શોધો.

(2) 7 સેમી, 24 સેમી, 25 સેમી બાજુ ધરાવતો ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ હશે કે ? સકારણ લખો.

(3) લંબચોરસની બાજુ 11 સેમી અને 60 સેમી હોય તો તેના વિકર્ણની લંબાઈ શોધો.

(4) એક કાટકોણ ત્રિકોણમાં કાટકોણ બનાવતી બાજુ 9 સેમી અને 12 સેમી હોય તો તે ત્રિકોણના કર્ણની લંબાઈ શોધો.

(5) સમદ્વિભુજ કાટકોણ ત્રિકોણની કાટખૂણો બનાવતી બાજુ x છે. તો તેના કર્ણની લંબાઈ શોધો.

(6) Δ PQR માં, PQ = $\sqrt{8}$, QR = $\sqrt{5}$, PR = $\sqrt{3}$; હોય તો Δ PQR કાટકોણ ત્રિકોણ છે કે ? હોય તો તેનો ક્યો ખૂણો કાટકોણ છે ?

3. Δ RST માં, $\angle$ S = 90°, $\angle$ T = 30°, RT = 12 સેમી હોય તો RS અને ST શોધો.

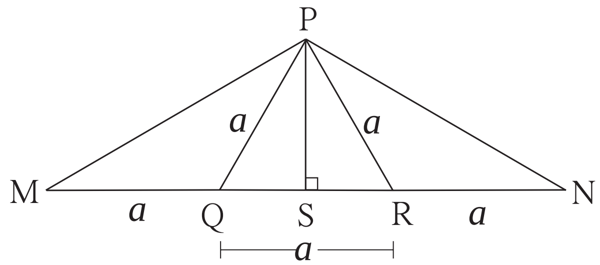
4. લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ 192 ચોસેમી અને તેની લંબાઈ 16 સેમી છે. તો તે લંબચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ શોધો.

5★. એક સમભુજ ત્રિકોણની ઊંચાઈ $\sqrt{3}$ સેમી છે, તો તે ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈ અને પરિમિતિ શોધો.

6. Δ ABC માં, રેખ AP મધ્યગા છે. જો BC = 18, $AB^2 + AC^2 = 260$ હોય તો AP શોધો.

7★. Δ ABC સમભુજ ત્રિકોણ છે. પાયા BC પર બિંદુ P એવી રીતે આવેલું છે કે PC = $\frac{1}{3}$ BC, જો AB = 6 સેમી હોય તો AP શોધો.

8. આકૃતિ 2.31માં, M–Q–R–N. આપેલી માહિતી પરથી સાબિત કરો :
PM = PN = $\sqrt{3} \times a$

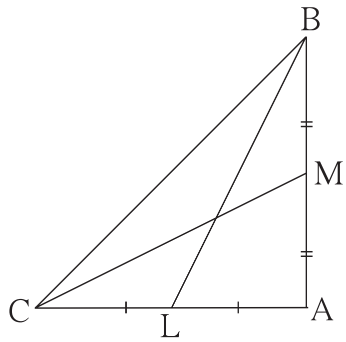


આકૃતિ 2.31

9. સાબિત કરો : સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણના વિકર્ણોના વર્ગોના સરવાળો તે ચતુષ્કોણની બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

10. પ્રણાલી અને પ્રસાદ એક જ સ્થળેથી અનુક્રમે પૂર્વ અને ઉત્તર દિશામાં એક સમાન વેગથી નીકળ્યા. બે કલાક પછી તેમની વચ્ચેનું અંતર $15\sqrt{2}$ કિમી હોય તો તેમનો કલાકે વેગ શોધો.

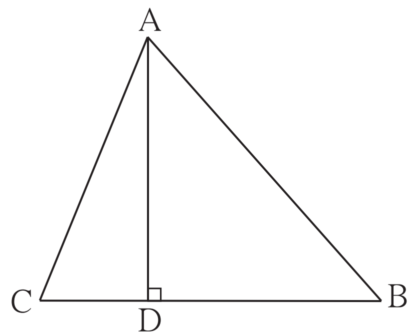
11★. આકૃતિ 2.32માં, Δ ABC માં,
$\angle$ BAC = 90°, રેખ BL અને રેખ CM, Δ ABC ની મધ્યગા છે. તો સાબિત કરો :
$4(BL^2 + CM^2) = 5\ BC^2$



આકૃતિ 2.32

12. એક સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બે બાજુના વર્ગોનો સરવાળો 130 ચોસેમી અને તેના એક વિકર્ણની લંબાઈ 14 સેમી હોય તો તેના બીજા વિકર્ણની લંબાઈ કેટલી ?

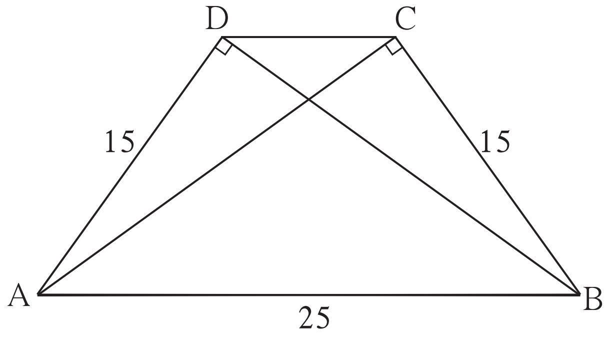
13. આકૃતિ 2.33માં, Δ ABC માં,
રેખ AD $\perp$ રેખ BC અને DB = 3CD,
તો સાબિત કરો :
$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$



આકૃતિ 2.33

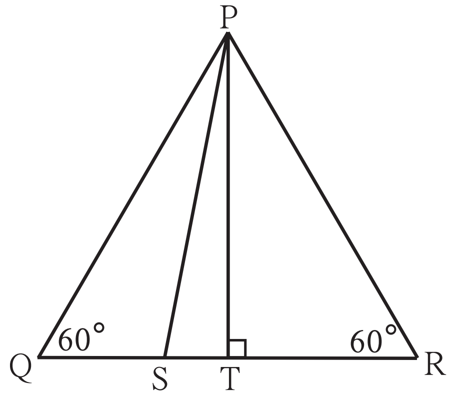
14★. એક સમદ્વિભુજ ત્રિકોણમાં એકરૂપ બાજુની લંબાઈ 13 સેમી અને તેનો પાયો 10 સેમી છે, તો તે ત્રિકોણના ગુરુત્વકેન્દ્રથી પાયાની સામેના શિરોબિંદુ સુધીનું અંતર શોધો.

15. આકૃતિ 2.34માં, સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં, રેખ AB || રેખ DC, રેખ BD $\perp$ રેખ AD, રેખ AC $\perp$ રેખ BC, જો AD = 15, BC = 15 અને AB = 25 હોય, તો A($\square$ ABCD) શોધો.



આકૃતિ 2.34

16★. આકૃતિ 2.35માં, Δ PQR એ સમભુજ ત્રિકોણ છે. રેખ QR પર બિંદુ S એવી રીતે આવેલું છે કે QS = $\frac{1}{3}$ QR તો સાબિત કરો : $9\ PS^2 = 7\ PQ^2$



આકૃતિ 2.35

17★. રેખ PM, Δ PQR ની મધ્યગા છે. જો PQ = 40, PR = 42 અને PM = 29, તો QR શોધો.

18. રેખ AM, Δ ABC ની મધ્યગા છે. જો AB = 22, AC = 34, BC = 24, હોય તો બાજુ AM ની લંબાઈ શોધો.

ICT Tools or Links

ઈંટરનેટ પરથી 'Story on the life of Pythagoras' વિશે માહિતી મેળવો. સ્લાઈડ શો તૈયાર કરો.

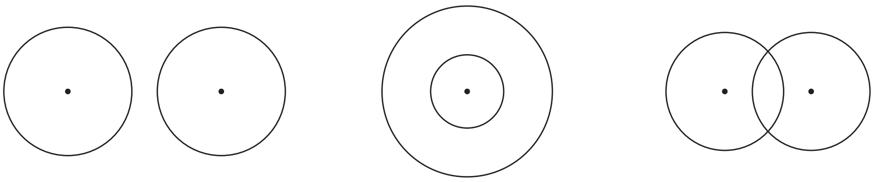
3 વર્તુળ

ચાલો, શીખીએ.

- એક, બે, ત્રણ બિંદુમાંથી પસાર થતાં વર્તુળો
- સ્પર્શવર્તુળો
- અંતર્ગત કોણ અને આંતરિત ચાપ
- સ્પર્શક-છેદક ખૂણાનો પ્રમેય
- સ્પર્શક અને છેદક
- વર્તુળચાપ
- ચક્રીય ચતુષ્કોણ
- જીવાના છેદનનો પ્રમેય

યાદ કરીએ.

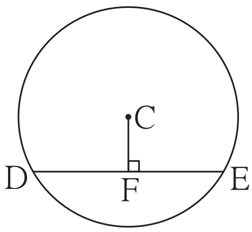
વર્તુળના સંદર્ભમાં કેન્દ્ર, ત્રિજ્યા, વ્યાસ, જીવા, અંતર્ભાગ, બાહ્યભાગ જેવી સંજ્ઞાનો તમને પરિચય છે જ. એકરૂપ વર્તુળો, સમકેન્દ્રી વર્તુળો અને એકબીજાને છેદતા વર્તુળો જેવી સંજ્ઞા યાદ કરો.



એકરૂપ વર્તુળો　　　　સમકેન્દ્રી વર્તુળો　　　　એકબીજાને છેદતા વર્તુળો

ધોરણ નવમામાં તમે જીવાના ગુણધર્મનો અભ્યાસ કર્યો છે. નીચેની કૃતિની મદદથી તેને યાદ કરો.

કૃતિ I : બાજુની આકૃતિ 3.1માં, C એ વર્તુળનું કેન્દ્ર અને રેખ DE એ વર્તુળની જીવા છે. રેખ CF ⊥ જીવા DE. જો વર્તુળનો વ્યાસ 20 સેમી અને DE = 16 સેમી હોય તો, CF = ?



આકૃતિ 3.1

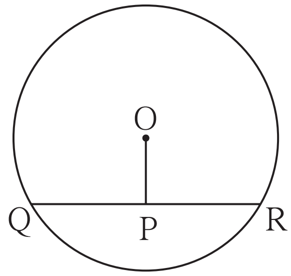
આ પ્રશ્ન ઉકેલવા માટે ઉપયોગી પ્રમેય અને ગુણધર્મ યાદ કરીને લખો.

(1) વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પર દોરેલો લંબ ____________________

(2) ____________________

(3) ____________________

આ ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને પ્રશ્ન ઉકેલો.



આકૃતિ 3.2

કૃતિ II : બાજુની આકૃતિ 3.2માં, વર્તુળનું કેન્દ્ર O અને રેખ QR જીવા છે. જીવા QR નું મધ્યબિંદુ P છે. જો QR = 24, OP = 10 હોય તો વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

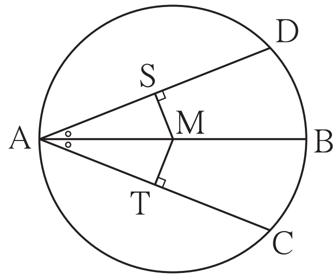
આ પ્રશ્ન ઉકેલવા માટે ઉપયોગી પ્રમેયો લખો.

(1) ______________________

(2) ______________________

આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને ઉદાહરણ ઉકેલો.

કૃતિ III : આકૃતિ 3.3માં, M એ વર્તુળનું કેન્દ્ર અને રેખ AB એ વર્તુળનો વ્યાસ છે.
રેખ MS $\perp$ જીવા AD
રેખ MT $\perp$ જીવા AC
$\angle DAB \cong \angle CAB$.
તો સાબિત કરો :જીવા AD $\cong$ જીવા AC.



આકૃતિ 3.3

આ પ્રશ્ન ઉકેલવા માટે નીચેનામાંથી ક્યા પ્રમેયનો ઉપયોગ કરશો ?

(1) વર્તુળની બે જીવા, વર્તુળના કેન્દ્રથી સમાન અંતરે હોય, તો તેમની લંબાઈ સમાન હોય છે.

(2) એક જ વર્તુળની એકરૂપ જીવા વર્તુળના કેન્દ્રથી સમાન અંતરે હોય છે.

આ સિવાય ત્રિકોણની એકરૂપતાની નીચે પૈકી કઈ કસોટી ઉપયોગી થશે ?

(1) બાખૂબા (2) ખૂબાખૂ (3) બાબાબા (4) ખૂખૂબા (5) કર્ણભુજા.

યોગ્ય કસોટી અને પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને સાબિતી લખો.

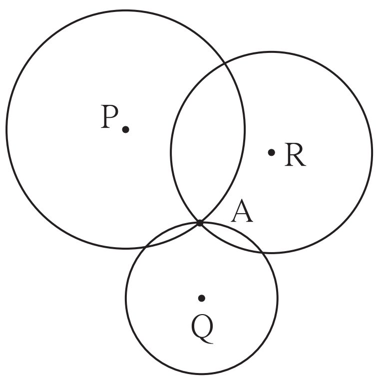
જાણી લઈએ.

એક, બે, ત્રણ બિંદુમાંથી પસાર થતાં વર્તુળો

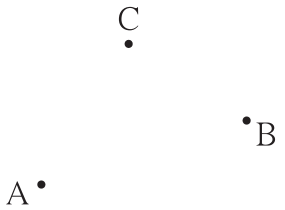
બાજુની આકૃતિ 3.4માં, એક સમતલમાં બિંદુ A દર્શાવ્યું છે. કેન્દ્રબિંદુ P, Q, R હોય તેવા ત્રણ વર્તુળો બિંદુ A માંથી પસાર થાય છે. બિંદુ A માંથી પસાર થતા બીજા કેટલા વર્તુળો હોઈ શકે તેવું તમને લાગે છે ?

તમારો જવાબ 'ગમે તેટલાં' અથવા 'અસંખ્ય' હોય, તો તે બરાબર છે.

એક જ બિંદુમાંથી પસાર થતા અસંખ્ય વર્તુળો હોય છે.



આકૃતિ 3.4



આકૃતિ 3.5

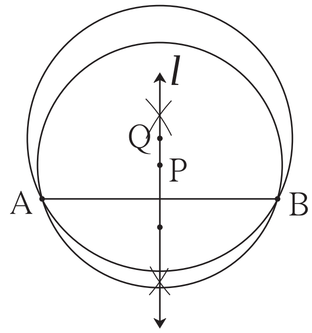
બાજુની આકૃતિ 3.5માં, A અને B આ બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતા કેટલા વર્તુળો હશે ?

A, B, C આ ત્રણેય બિંદુઓમાંથી પસાર થતા કેટલા વર્તુળો હશે ?

નીચે આપેલી કૃતિ દ્વારા જવાબ મળે છે, કે તે ચકાસો.

કૃતિ I : બિંદુ A અને બિંદુ B ને જોડતો રેખ AB દોરો. આ રેખાખંડને લંબદુભાજક રેખા *l* દોરો. રેખા *l* પરના બિંદુ P ને કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા PA લઈને વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળ બિંદુ B માંથી પણ પસાર થાય છે તે નોંધો. તેનું કારણ શોધો.

(લંબદુભાજક રેખાનો ગુણધર્મ યાદ કરો.)

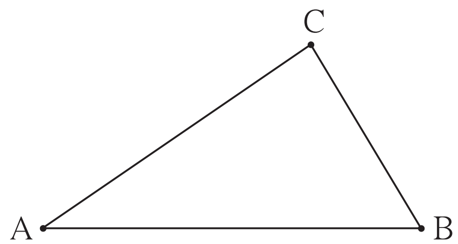


આકૃતિ 3.6

રેખા *l* પર એક બિંદુ Q લો. કેન્દ્ર Q અને ત્રિજ્યા QA લઈને દોરેલાં વર્તુળ પણ બિંદુ B માંથી પસાર થશે કે ? વિચાર કરો.

બિંદુ A અને બિંદુ B માંથી પસાર થતા હજુ કેટલા વર્તુળો દોરી શકાય ? તેમના કેન્દ્રબિંદુનું સ્થાન ક્યાં હશે ?

કૃતિ II : અસમરેખ બિંદુઓ A, B, C દોરો. આ ત્રણેય બિંદુમાંથી પસાર થતાં વર્તુળો દોરવા માટે શું કરવું પડશે ? આ ત્રણેય બિંદુમાંથી પસાર થતાં વર્તુળો દોરો. આ ત્રણ બિંદુમાંથી પસાર થતું વધુ એક વર્તુળ દોરી શકાશે કે ? વિચાર કરો.



આકૃતિ 3.7

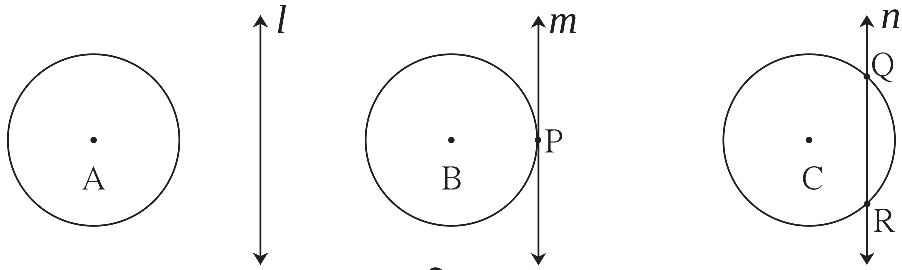
કૃતિ III : સમરેખ બિંદુઓ D, E, F લો. આ ત્રણેય બિંદુઓમાંથી પસાર થતું વર્તુળ દોરવાનો પ્રયત્ન કરો. આવું વર્તુળ દોરી શકાતું ન હોય, તો તે શા માટે દોરી શકાતું નથી તેનો વિચાર કરો.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

(1) એક જ બિંદુમાંથી પસાર થતાં અસંખ્ય વર્તુળો હોય છે.
(2) બે ભિન્ન બિંદુમાંથી પસાર થતાં અસંખ્ય વર્તુળો હોય છે.
(3) ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતું એક અને એક જ વર્તુળ હોય છે.
(4) ત્રણ સમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતું એક પણ વર્તુળ હોતું નથી.

જાણી લઈએ.

સ્પર્શક અને છેદક (Secant and tangent)



આકૃતિ 3.8

આકૃતિમાં, રેખા l અને વર્તુળમાં એક પણ સામાન્ય બિંદુ નથી.

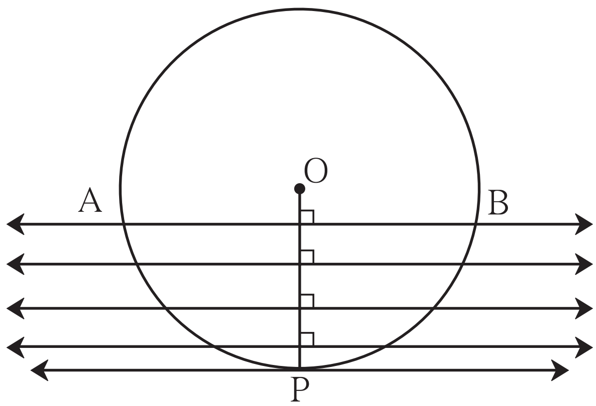
રેખા m અને વર્તુળનું એક જ સામાન્ય બિંદુ P છે. અહીં રેખા m ને વર્તુળનો સ્પર્શક અને બિંદુ P ને સ્પર્શબિંદુ કહેવાય છે.

રેખા n અને વર્તુળના બે સામાન્ય બિંદુઓ છે. બિંદુ Q અને બિંદુ R ને વર્તુળના છેદનબિંદુ અને રેખા n ને વર્તુળનો છેદક કહેવાય છે.

વર્તુળના સ્પર્શકનો એક મહત્ત્વનો ગુણધર્મ એક કૃતિ દ્વારા સમજીએ.

કૃતિ :

O કેન્દ્રવાળુ એક મોટું વર્તુળ દોરો. તે વર્તુળની ત્રિજ્યા રેખ OP દોરો. આ ત્રિજ્યાને લંબ હોય તેવી એક રેખા દોરો. આ રેખા અને વર્તુળના છેદન બિંદુઓને A અને B નામ આપો. કલ્પના કરો કે રેખા AB બિંદુ O થી બિંદુ P તરફ એવી રીતે સરકે છે કે તેની પહેલાની સ્થિતિ, નવી સ્થિતિને સમાંતર રહેશે, એટલે કે સરકેલી રેખા AB અને ત્રિજ્યા વચ્ચેનો ખૂણો કાટકોણ જ રહેશે.



આકૃતિ 3.9

આમ થતી વખતે બિંદુ A અને B વર્તુળ પર પરસ્પર પાસે પાસે આવતા જશે. છેવટે તેઓ બિંદુ Pમાં સમાઈ જશે.

આ સ્થિતિમાં રેખા ABની નવી સ્થિતિ વર્તુળનો સ્પર્શક હશે. પરંતુ ત્રિજ્યા OP અને રેખા AB ની નવી સ્થિતિ વચ્ચેનો ખૂણો કાટકોણ જ રહેશે.

આ પરથી ધ્યાનમાં આવે છે કે, વર્તુળના કોઈપણ બિંદુમાંથી પસાર થતો સ્પર્શક તે બિંદુને જોડનારી ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે. આ ગુણધર્મને 'સ્પર્શક-ત્રિજ્યાનો પ્રમેય' કહે છે.

સ્પર્શક-ત્રિજ્યા પ્રમેય (Tangent theorem)

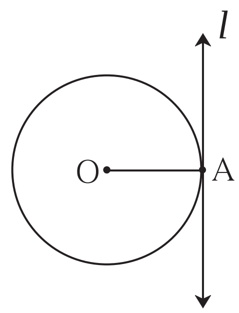
પ્રમેય : **વર્તુળના કોઈપણ બિંદુમાંથી પસાર થતો સ્પર્શક તે બિંદુને કેન્દ્ર સાથે જોડતી ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે.**
આ પ્રમેય અપ્રત્યક્ષ પદ્ધતિથી સાબિત કરી શકાય.

વધુ માહિતી માટે :

પક્ષ : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં, રેખા l વર્તુળને બિંદુ Aમાં સ્પર્શે છે. રેખ OA ત્રિજ્યા છે.

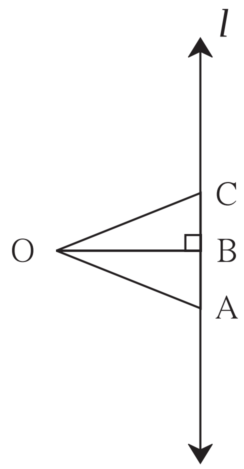
સાધ્ય : રેખા $l \perp$ ત્રિજ્યા OA.

સાબિતી : ધારો કે, રેખા l, રેખ OA ને લંબ નથી.
ધારો કે, બિંદુ O માંથી રેખા l પર લંબ OB દોર્યો.
દેખીતી રીતે જ બિંદુ B, બિંદુ A કરતાં ભિન્ન હોવો જોઈએ. (આકૃતિ 3.11 જુઓ.)
રેખા l પર બિંદુ C એવી રીતે લો કે, A–B–C અને BA = BC.



આકૃતિ 3.10

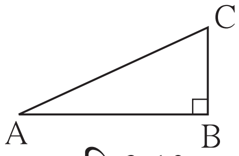
હવે, Δ OBC અને Δ OBA માં,
રેખ BC $\cong$ રેખ BA ....(રચના)
$\angle$ OBC $\cong$ $\angle$OBA ....(પ્રત્યેક કાટકોણ)
રેખ OB $\cong$ રેખ OB ....(સામાન્ય)
$\therefore$ Δ OBC $\cong$ Δ OBA ....(એકરૂપતાની બાખૂબા કસોટી)
$\therefore$ OC = OA
પરંતુ રેખ OA ત્રિજ્યા છે, એટલે
રેખ OC પણ ત્રિજ્યા થશે.
$\therefore$ બિંદુ C વર્તુળ પર હશે.
એટલે રેખા l વર્તુળને A અને C આ બે બિંદુઓમાં છેદે છે.
આ વિધાન પક્ષ સાથે વિસંગત છે. કારણ કે રેખા l સ્પર્શક છે.
એટલે રેખા l વર્તુળને એક જ બિંદુમાં છેદે છે. .... પક્ષ
$\therefore$ રેખા l ત્રિજ્યા OA ને લંબ નથી, એ અસત્ય છે.
$\therefore$ રેખા $l \perp$ ત્રિજ્યા OA.



આકૃતિ 3.11

યાદ કરીએ.

આપણે શીખેલા કયા પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને, કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ એ સૌથી મોટી બાજુ હોય છે તે સિધ્ધ કરી શકાય.

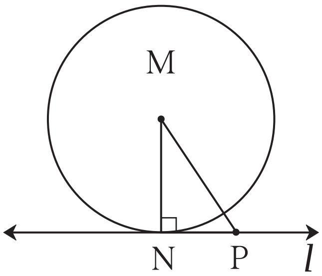


આકૃતિ 3.12

જાણી લઈએ.

સ્પર્શક-ત્રિજ્યા પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય (Converse of Tangent theorem)

પ્રમેય : વર્તુળની ત્રિજ્યાના બાહ્યબિંદુમાંથી પસાર થતી અને તે ત્રિજ્યાને લંબ હોય તેવી રેખા તે વર્તુળનો સ્પર્શક છે.



આકૃતિ 3.13

પક્ષ : M કેન્દ્રવાળા વર્તુળની ત્રિજ્યા રેખ MN છે. બિંદુ N માંથી પસાર થતી રેખા l, ત્રિજ્યા MN ને લંબ છે.

સાધ્ય : રેખા l વર્તુળનો સ્પર્શક છે.

સાબિતી : રેખા l પર બિંદુ P સિવાયનું બીજું કોઈપણ બિંદુ N લીધું. રેખ MP દોર્યો.

હવે, Δ MNP માં $\angle$ N કાટકોણ છે.

$\therefore$ રેખ MP કર્ણ છે.

$\therefore$ રેખ MP > રેખ MN.

$\therefore$ બિંદુ P વર્તુળ પર હોય તે શક્ય નથી.

એટલે કે રેખા l પરનું N સિવાયનું કોઈ પણ બિંદુ વર્તુળ પર નથી.

$\therefore$ રેખા l વર્તુળને એક N બિંદુમાં છેદે છે.

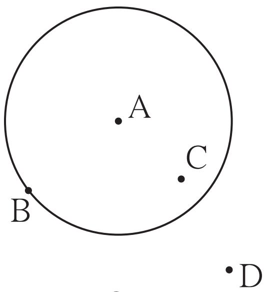
$\therefore$ રેખા l વર્તુળનો સ્પર્શક છે.

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

A કેન્દ્ર ધરાવતા વર્તુળ પર એક બિંદુ B આપેલું છે. આ વર્તુળ પર બિંદુ B માંથી પસાર થતો સ્પર્શક દોરવાનો છે.

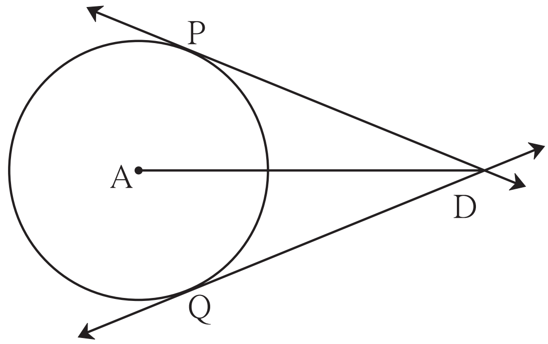
બિંદુ B માંથી અસંખ્ય રેખા પસાર થાય છે. તેમાંથી કઈ રેખા આ વર્તુળનો સ્પર્શક હશે ? તે કેવી રીતે દોરી શકાય ?

બિંદુ B માંની પસાર થતા એક કરતા વધુ સ્પર્શક હોઈ શકે કે ?



આકૃતિ 3.14

વર્તુળના અંતર્ભાગમાં આવેલા બિંદુ C માંથી તે વર્તુળને સ્પર્શક દોરી શકાય કે?



આકૃતિ 3.15

વર્તુળના બાહ્યભાગમાં આવેલા બિંદુ D માંથી પસાર થતી રેખા તે વર્તુળનો સ્પર્શક હોઈ શકે કે ? હોય તો કેટલા સ્પર્શક હશે ?

ચર્ચા કરતાં તમને ધ્યાનમાં આવ્યું હશે, કે આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે વર્તુળના બાહ્યભાગમાંથી તે વર્તુળને બે સ્પર્શકો દોરી શકાય છે.

બાજુની આકૃતિમાં, રેખા DP અને રેખા DQ વર્તુળના સ્પર્શકો છે, જે A કેન્દ્રવાળા વર્તુળને બિંદુ P અને બિંદુ Q માં સ્પર્શે છે.

રેખ DP અને રેખ DQ ને સ્પર્શક ખંડ કહેવાય છે.

સ્પર્શક ખંડનો પ્રમેય (Tangent Segment Theorem)

પ્રમેય : વર્તુળના બાહ્યભાગમાંના બિંદુમાંથી તે વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શક ખંડો એકરૂપ હોય છે.

બાજુની આકૃતિના આધારે પક્ષ અને સાધ્ય લખો.

ત્રિજ્યા AP અને AQ દોરી નીચે આપેલી જગ્યા પૂરીને પ્રમેયની સાબિતી પૂર્ણ કરો.

સાબિતી : Δ PAD અને Δ QAD માં,

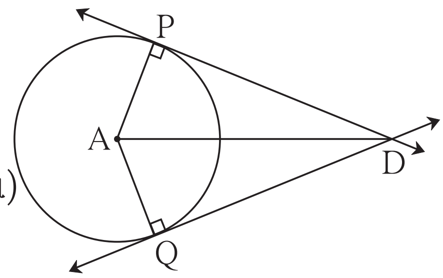
બાજુ PA $\cong$ ________ (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યા)

બાજુ AD $\cong$ બાજુ AD ________

$\angle APD = \angle AQD = 90^\circ$ ...... (સ્પર્શક-ત્રિજ્યા પ્રમેય)

$\therefore$ Δ PAD $\cong$ Δ QAD ________

$\therefore$ બાજુ DP $\cong$ બાજુ DQ ________

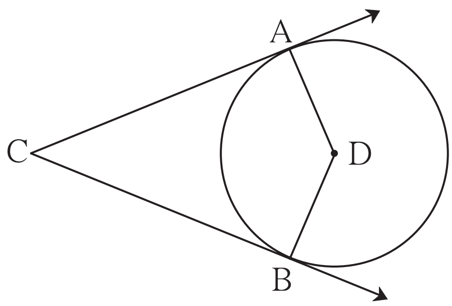


આકૃતિ 3.16

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) આપેલી આકૃતિમાં, D કેન્દ્રવાળું વર્તુળ $\angle ACB$ની બાજુઓને બિંદુ A અને Bમાં સ્પર્શ કરે છે. જો $\angle ACB = 52^\circ$, હોય તો $\angle ADB$ નું માપ શોધો.

ઉકેલ : ચતુષ્કોણના ચારે ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 360° હોય છે.



આકૃતિ 3.17

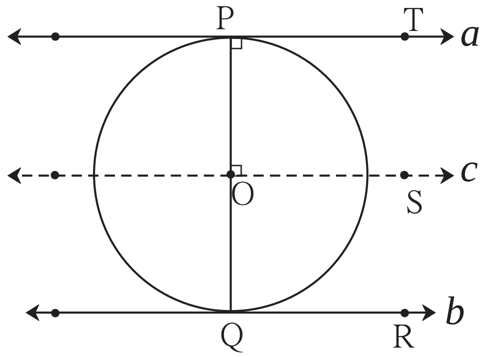
$\therefore \angle ACB + \angle CAD + \angle CBD + \angle ADB = 360^\circ$

$\therefore 52^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle ADB = 360^\circ$ .... (સ્પર્શક-ત્રિજ્યા પ્રમેય)

$\therefore \angle ADB + 232^\circ = 360^\circ$

$\therefore \angle ADB = 360^\circ - 232^\circ = 128^\circ$

ઉદા. (2) O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના સમાંતર સ્પર્શકો રેખા a અને રેખા b છે. જે વર્તુળને અનુક્રમે બિંદુ P અને Qમાં સ્પર્શ કરે છે. તો સાબિત કરો કે રેખા PQ તે વર્તુળનો વ્યાસ છે.



આકૃતિ 3.18

સાબિતી : બિંદુ O માંથી રેખા a ને સમાંતર રેખા c દોરો.
આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે રેખા a, b, c પર અનુક્રમે બિંદુ T, R, S લો.
ત્રિજ્યા OP અને ત્રિજ્યા OQ દોરો.

હવે, $\angle OPT = 90^\circ$ .....(સ્પર્શક-ત્રિજ્યા પ્રમેય)

$\therefore$ $\angle SOP = 90^\circ$....(અંતર્કોણનો ગુણધર્મ) .... (I)

હવે, રેખા a || રેખા c ..... (રચના)

રેખા a || રેખા b ..... (પક્ષ)

$\therefore$ રેખા b || રેખા c

હવે, $\angle OQR = 90^\circ$ ....(સ્પર્શક-ત્રિજ્યા પ્રમેય)

$\therefore$ $\angle SOQ = 90^\circ$...(અંતર્કોણનો ગુણધર્મ) .... (II)

$\therefore$ (I) અને (II) પરથી,

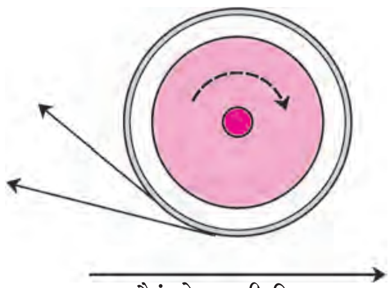
$\angle SOP + \angle SOQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore$ કિરણ OP અને કિરણ OQ વિરુધ્ધ કિરણો છે.

$\therefore$ બિંદુ P, O, Q સમરેખ છે.

$\therefore$ રેખ PQ વર્તુળનો વ્યાસ છે.

ચોમાસામાં થોડું પાણી ભરાયેલા રસ્તા પરથી મોટર સાયકલ પસાર થાય ત્યારે તેના પાછળના પૈડાથી ઉડતા પાણીની ધારા તમે જોઈ હશે. તે ધારા વર્તુળના સ્પર્શક જેવી દેખાય છે, તે તમારા ધ્યાનમાં આવ્યું હશે. તે ધારા એવી કેમ હોય છે તેની માહિતી તમારા વિજ્ઞાનના શિક્ષક પાસેથી મેળવો.



પૈડું દોડવાની દિશા

ફરતી જમીનચકરડીમાંથી ઉડતા તણખા, છરીને ધાર કાઢતી વખતે ઉડતા તણખાનું નિરીક્ષણ કરો, તે પણ સ્પર્શિકા જેવા જ દેખાય છે કે ?

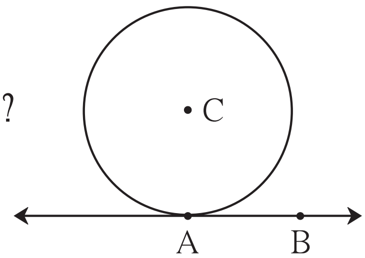
આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

(1) સ્પર્શક-ત્રિજ્યા પ્રમેય : વર્તુળના કોઈપણ બિંદુમાંથી પસાર થતો સ્પર્શક, તે બિંદુને કેન્દ્ર સાથે જોડતી ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે.

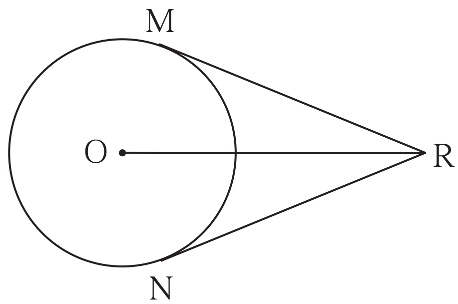
(2) સ્પર્શક-ત્રિજ્યા પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય : વર્તુળની ત્રિજ્યાના બાહ્ય બિંદુમાંથી પસાર થતી અને તે ત્રિજ્યાને લંબ હોય તે રેખા તે વર્તુળનો સ્પર્શક હોય છે.

(3) સ્પર્શક ખંડનો પ્રમેય : વર્તુળના બાહ્યભાગમાંના બિંદુમાંથી તે વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શક ખંડો એકરૂપ હોય છે.

1. બાજુની આકૃતિ 3.19માં, વર્તુળનું કેન્દ્રબિંદુ C અને ત્રિજ્યા 6 સેમી છે. રેખા AB વર્તુળને બિંદુ A માં સ્પર્શે છે. આ માહિતી પરથી નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તરો આપો.
   (1) $\angle CAB$ નું માપ કેટલું છે ? શા માટે ?
   (2) બિંદુ C, રેખા AB થી કેટલા અંતરે આવેલું છે ? શા માટે ?
   (3) જો $d(A,B) = 6$ સેમી, તો $d(B,C)$ શોધો.
   (4) $\angle ABC$ નું માપ કેટલું ? શા માટે ?



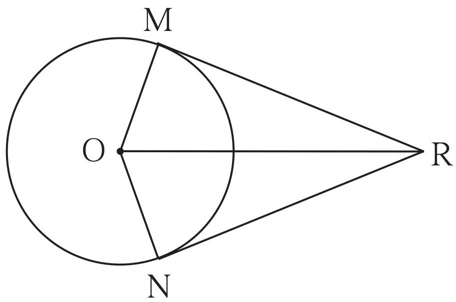
આકૃતિ 3.19



આકૃતિ 3.20

2. બાજુની આકૃતિ 3.20માં, O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના બાહ્યભાગમાંના R બિંદુમાંથી દોરેલા સ્પર્શક રેખાખંડો RM અને RN વર્તુળને અનુક્રમે બિંદુ M અને Nમાં સ્પર્શે છે.
   જો OR = 10 સેમી અને વર્તુળની ત્રિજ્યા 5 સેમી હોય તો –
   (1) પ્રત્યેક સ્પર્શક ખંડની લંબાઈ કેટલી ?
   (2) $\angle MRO$ નું માપ કેટલું ?
   (3) $\angle MRN$ નું માપ કેટલું ?

3. આપેલી આકૃતિ 3.21માં, વર્તુળનું કેન્દ્રબિંદુ O છે. રેખ RM અને રેખ RN વર્તુળના સ્પર્શકખંડો છે. તો રેખ OR એ $\angle MRN$ અને $\angle MON$ આ બંને ખૂણાનો દુભાજક છે તે સાબિત કરો.



આકૃતિ 3.21

4. 4.5 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતા વર્તુળના બે સ્પર્શકો પરસ્પર સમાંતર છે. તો તે સ્પર્શકો વચ્ચેનું અંતર કેટલું હશે તે કારણ સહિત લખો.

ICT Tools or Links

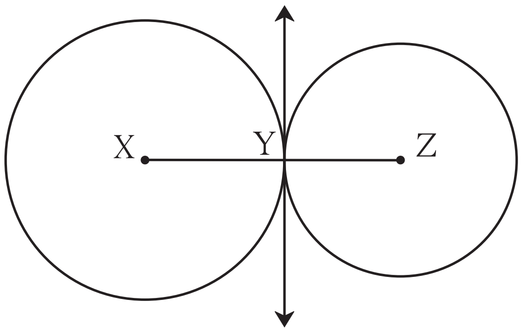
સંગણક પર જિઓજિબ્રા સોફ્ટવેરની મદદથી વર્તુળ અને વર્તુળના બાહ્યભાગમાં આવેલ બિંદુમાંથી સ્પર્શકો દોરતા સ્પર્શક ખંડ એકરૂપ છે તે ચકાસો.

જાણી લઈએ.

સ્પર્શ વર્તુળો (Touching Circles)

કૃતિ I :

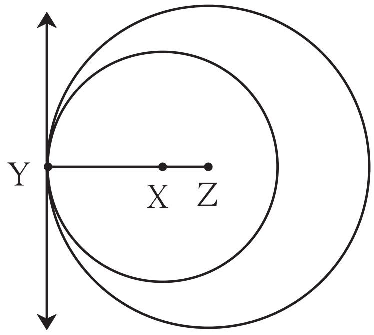
આકૃતિ 3.22માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે,
X-Y-Z એ સમરેખ બિંદુઓ લો.
કેન્દ્ર X અને ત્રિજ્યા XY લઈને વર્તુળ દોરો.
કેન્દ્ર Z અને ત્રિજ્યા YZ લઈને બીજું વર્તુળ દોરો.
આ બંને વર્તુળો, એક બીજાને બિંદુ Y માં છેદે છે તે ધ્યાનમાં લો.
બિંદુ Y માંથી રેખ XZ ને લંબરેખા દોરો. આ રેખા, બંને વર્તુળોનો સામાન્ય સ્પર્શક છે તે ધ્યાનમાં લો.



આકૃતિ 3.22

કૃતિ II :

આકૃતિ 3.23માં દર્શાવ્યા મુજબ, સમરેખ બિંદુઓ Y-X-Z લો.
કેન્દ્ર Z અને ત્રિજ્યા ZY લઈને વર્તુળ દોરો.
કેન્દ્ર X અને ત્રિજ્યા XY લઈને વર્તુળ દોરો.
બંને વર્તુળો એકબીજાને Y બિંદુમાં છેદે છે તે ધ્યાનમાં લો.
બિંદુ Yમાંથી રેખ YZ ને લંબરેખા દોરો. આ રેખા બંને વર્તુળોનો સામાન્ય સ્પર્શક છે તે ધ્યાનમાં લો.



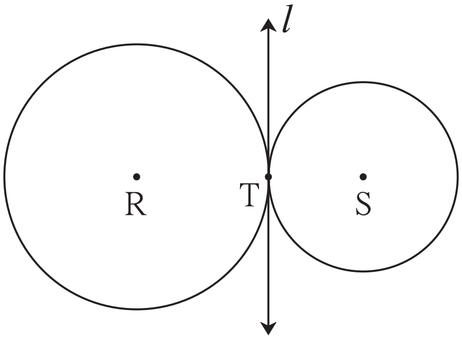
આકૃતિ 3.23

ઉપરની કૃતિ પરથી તમને ધ્યાનમાં આવ્યું હશે કે બંને આકૃતિના વર્તુળો એક જ સમતલમાં છે અને એકબીજાને એક જ બિંદુમાં છેદે છે. આવા વર્તુળોને એકબીજાને **સ્પર્શતાં વર્તુળો** અથવા **સ્પર્શવર્તુળો** કહે છે.

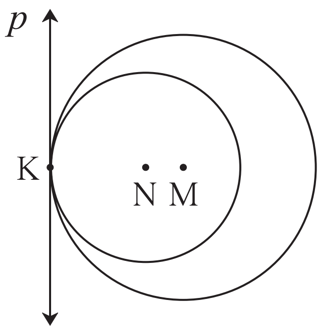
સ્પર્શવર્તુળોની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે કરી શકાય.

એક જ સમતલમાંના બે વર્તુળો તે જ સમતલમાંની એક જ રેખાને એક જ બિંદુમાં છેદતા હોય તો તેને સ્પર્શ વર્તુળો કહે છે. તે રેખા બંને વર્તુળોનો સામાન્ય સ્પર્શક હોય છે.

બંને વર્તુળો અને રેખાના સામાન્ય બિંદુને સામાન્ય **સ્પર્શબિંદુ** કહે છે.



આકૃતિ 3.24



આકૃતિ 3.25

આકૃતિ 3.24માં, કેન્દ્ર R અને S બિંદુવાળા બે વર્તુળો રેખા l ને એક જ બિંદુ T માં છેદે છે. માટે તે બંને સ્પર્શવર્તુળો છે. તેમ જ રેખા l સામાન્ય સ્પર્શક છે. આ આકૃતિમાંના વર્તુળો **બાહ્યસ્પર્શી** છે.

આકૃતિ 3.25માંના વર્તુળો **અંતઃસ્પર્શી** છે અને રેખા p એ તેમનો સામાન્ય સ્પર્શક છે.

વિચાર કરીએ.

(1) આકૃતિ 3.24માંના વર્તુળોની જેમ પરસ્પર સ્પર્શ કરતાં વર્તુળોને બાહ્યસ્પર્શી વર્તુળો શા માટે કહેવાય છે?

(2) આકૃતિ 3.25માંના વર્તુળોની જેમ એકબીજાને સ્પર્શ કરનારા વર્તુળોને અંતઃસ્પર્શી વર્તુળો શા માટે કહેવાય છે ?

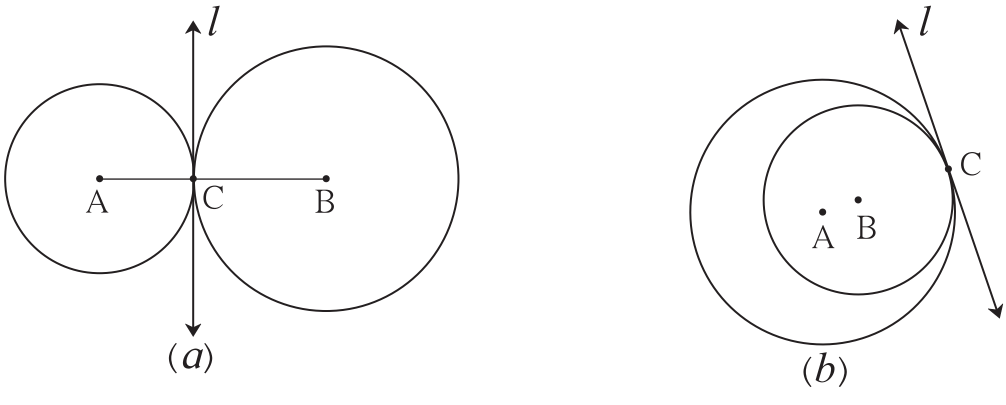
(3) આકૃતિ 3.26 માં, કેન્દ્ર A અને B બિંદુવાળા વર્તુળોની ત્રિજ્યા અનુક્રમે 3 સેમી અને 4 સેમી હોય તો -

(i) આકૃતિ 3.26 (a) માં d(A,B) કેટલું હશે ?

(ii) આકૃતિ 3.26 (b) માં d(A,B) કેટલું હશે ?

સ્પર્શવર્તુળોનો પ્રમેય (Theorem of touching circles)

પ્રમેય : પરસ્પર સ્પર્શ કરતા વર્તુળોનું સ્પર્શબિંદુ, તે વર્તુળના કેન્દ્રબિંદુને જોડતી રેખા પર હોય છે.



આકૃતિ 3.26

પક્ષ : કેન્દ્ર A અને B બિંદુવાળા વર્તુળોનું સ્પર્શબિંદુ C છે.

સાધ્ય : બિંદુ C, રેખા AB પર આવેલું છે.

સાબિતી : ધારો કે, રેખા l એ સ્પર્શવર્તુળોનો બિંદુ C માંથી પસાર થતો સામાન્ય સ્પર્શક છે.

રેખા $l \perp$ રેખ AC, રેખા $l \perp$ રેખ BC. $\therefore$ રેખ AC અને રેખ BC, રેખા l ને લંબ છે.

બિંદુ C માંથી રેખા l ને એક જ લંબ રેખા દોરી શકાય છે. $\therefore$ C, A, B સમરેખ છે.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

(1) પરસ્પર સ્પર્શ કરતા વર્તુળોનું સ્પર્શબિંદુ, તે વર્તુળોના કેન્દ્રબિંદુને જોડતી રેખા પર આવેલું હોય છે.

(2) બાહ્યસ્પર્શી વર્તુળોના કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર, તેમની ત્રિજ્યાઓના સરવાળા જેટલું હોય છે.

(3) અંતઃસ્પર્શી વર્તુળોના કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર તેમની ત્રિજ્યાઓના તફાવત જેટલું હોય છે.

મહાવરાસંગ્રહ 3.2

1. બે અંતઃસ્પર્શી વર્તુળોની ત્રિજ્યા અનુક્રમે 3.5 સેમી અને 4.8 સેમી છે. તો તેમના કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર કેટલું?

2. પરસ્પર બાહ્યસ્પર્શી બે વર્તુળોની ત્રિજ્યા અનુક્રમે 5.5 સેમી અને 4.2 સેમી હોય તો તેમના કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર કેટલું હશે ?

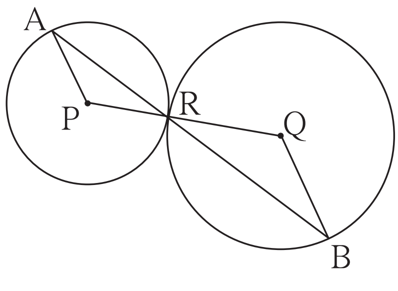
3. અનુક્રમે 4 સેમી અને 2.8 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતા, (i) બાહ્યસ્પર્શી (ii) અંતઃસ્પર્શી વર્તુળો દોરો.

4. આકૃતિ 3.27માં, કેન્દ્ર P અને Q ધરાવતા વર્તુળો પરસ્પર બિંદુ Rમાં સ્પર્શ કરે છે. બિંદુ Rમાંથી પસાર થતી રેખા તે વર્તુળોને અનુક્રમે બિંદુ A અને બિંદુ Bમાં છેદે છે. તો –

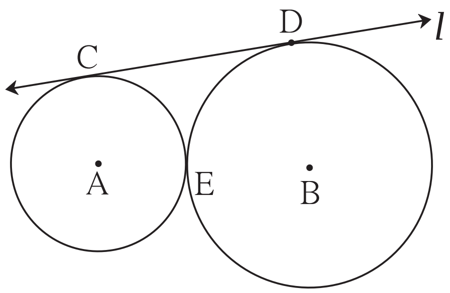
   (1) રેખ AP || રેખ BQ સાબિત કરો.

   (2) Δ APR ~ Δ RQB સાબિત કરો.

   (3) જો $\angle$ PAR નું માપ 35° હોય, તો $\angle$ RQB નો માપ શોધો.



આકૃતિ 3.27

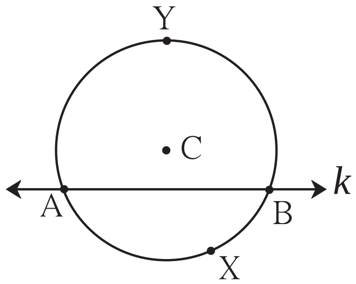


આકૃતિ 3.28

5. આકૃતિ 3.28માં, કેન્દ્ર A અને B ધરાવતા વર્તુળો પરસ્પર બિંદુ Eમાં સ્પર્શે છે. તેમનો સામાન્ય સ્પર્શક રેખા l તેમને અનુક્રમે બિંદુ C અને Dમાં સ્પર્શે છે. જો વર્તુળોની ત્રિજ્યા અનુક્રમે 4 સેમી અને 6 સેમી હોય, તો રેખ CDની લંબાઈ કેટલી ?

યાદ કરીએ.

વર્તુળાચાપ (Arc of a circle)



આકૃતિ 3.29

વર્તુળના છેદકને કારણે વર્તુળનું બે ભાગમાં વિભાજન થાય છે. તે પૈકી કોઈપણ એક ભાગ અને એક છેદકના વર્તુળ પરના બિંદુ મળીને બનતી આકૃતિને **વર્તુળચાપ** કહેવાય છે.

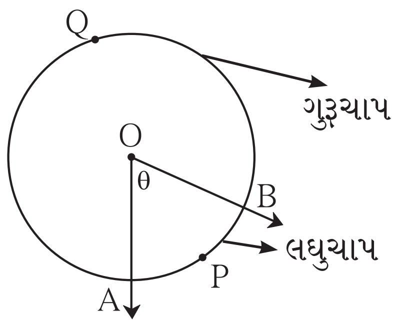
વર્તુળ અને છેદકના છેદનબિંદુને ચાપના અંત્યબિંદુ કહેવાય છે.

આકૃતિ 3.29માં, છેદક k ને કારણે, કેન્દ્રબિંદુ C ધરાવતા વર્તુળના AYB અને AXB બે ચાપ તૈયાર થાય છે.

વૃત્તછેદિકાની જે બાજુએ વર્તુળનું કેન્દ્ર હોય તે બાજુના ચાપને **ગુરૂચાપ** અને તેની વિરુધ્ધ બાજુના ચાપને **લઘુચાપ** કહેવાય છે. આકૃતિ 3.29માં ચાપ AYB ગુરૂચાપ અને ચાપ AXB લઘુચાપ છે. વર્તુળ ચાપનું નામ ત્રણ અક્ષરો વાપરીને લખવાથી તે સ્પષ્ટ સમજાય છે. પરંતુ જો કોઈ મૂંઝવણ થાય તેમ ન હોય તો લઘુચાપનું નામ તેના અંત્યબિંદુ દર્શાવનારા બે અક્ષરો વડે લખાય છે. ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 3.29માંના ચાપ AXB ને ચાપ AB પણ લખી શકાય છે.

આપણે ચાપનું નામ લખવા માટે આજ પધ્ધતિનો ઉપયોગ કરીશું.

કેન્દ્રિયકોણ (Central angle)



આકૃતિ 3.30

જે ખૂણાનું શિરોબિંદુ વર્તુળનાં કેન્દ્ર પર હોય તે ખૂણાને **કેન્દ્રિયકોણ (Central angle)** કહેવાય છે.

આકૃતિ 3.30માં, વર્તુળનું કેન્દ્ર O છે. માટે $\angle AOB$ કેન્દ્રિયકોણ છે.

છેદક પ્રમાણે કેન્દ્રિયકોણના કારણે પણ વર્તુળનું બે ચાપમાં વિભાજન થાય છે.

ચાપનું માપ (Measure of an arc)

કેટલીક વાર બે ચાપોની તુલના કરવાની જરૂર પડે છે. તે માટે ચાપના માપની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે નક્કી કરવામાં આવી છે.

(1) લઘુચાપનું માપ તેના સંગત કેન્દ્રિયકોણના માપ જેટલું હોય છે.

આકૃતિ 3.30માં, કેન્દ્રિય કોણ $\angle AOB$ નું માપ θ છે. એટલે લઘુચાપ APB નું માપ θ જ છે.

(2) ગુરૂચાપનું માપ = $360°$ – સંગત લઘુચાપનું માપ

આકૃતિ 3.30માં, ગુરૂચાપ AQBનું માપ = $360°$ – ચાપ APB નું માપ = $360° - \theta$

(3) અર્ધવર્તુળચાપનું માપ, એટલે કે અર્ધવર્તુળનું માપ $180°$ હોય છે.

(4) પૂર્ણ વર્તુળનું માપ $360°$ હોય છે.

જાણી લઈએ.

ચાપોની એકરૂપતા (Congruence of arcs)

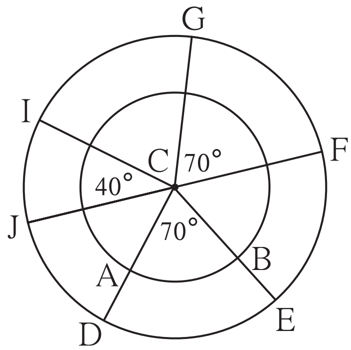
જ્યારે બે સમતલીય આકૃતિઓ એકબીજાને એકદમ બંધ બેસતી હોય, ત્યારે તે આકૃતિ એકબીજાને એકરૂપ છે, એમ કહેવાય છે. એકરૂપતાની આ સંકલ્પનાના આધારે સમાન માપના ખૂણા એકરૂપ હોય છે તે આપણે જાણીએ છીએ.

તે જ પ્રમાણે બે ચાપોના માપ સમાન હોય તો તે બે ચાપ એકરૂપ હશે કે ?

આ પ્રશ્નનો ઉત્તર નીચેની કૃતિ દ્વારા શોધો.

કૃતિ :

આકૃતિ 3.31 માં દર્શાવ્યા મુજબ C કેન્દ્રવાળા બે વર્તુળો દોરો. સમાન માપના બે ખૂણા $\angle DCE$ અને $\angle FCG$ દોરો. આ ખૂણાઓના માપ કરતાં જુદા માપનો $\angle ICJ$ દોરો.



આકૃતિ 3.31

$\angle DCE$ ની બાજુ અંદરના વર્તુળને છેદતા મળતી ચાપને AB નામ આપો.

ચાપના માપની વ્યાખ્યા પરથી, ચાપ AB અને ચાપ DE ના માપ સમાન છે, તે ધ્યાનમાં આવ્યું કે ? આ ચાપો એકબીજા પર બંધ બેસશે કે ? ચોક્કસપણે બંધ નહીં બેસે.

હવે વર્તુળની પાંખડીઓ (વર્તુળના ભાગો) C–DE, C–FG અને C–IJ ને કાપી લો. તેમને એકબીજા સાથે જોડતા DE, FG અને IJ પૈકી ક્યા ચાપ પરસ્પર બંધ બેસે છે તે જુઓ.

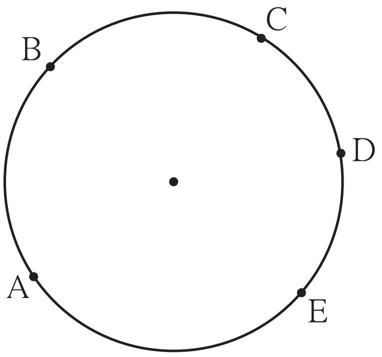
આ કૃતિ પરથી, બે ચાપ એકરૂપ હોય તે માટે 'તેમના માપ સમાન હોય' એટલું પૂરતું નથી. તે તમારા ધ્યાનમાં આવ્યું કે ? બે ચાપ એકરૂપ થવા માટે હજી કઈ શરત પૂર્ણ થવી આવશ્યક છે એવું તમને લાગે છે ?

ઉપરની કૃતિ પરથી ધ્યાનમાં આવે છે કે –

બે ચાપોની ત્રિજ્યા અને તેમના માપ સમાન હોય, તો તે બે ચાપ પરસ્પર એકરૂપ હોય છે.

'ચાપ DE અને ચાપ GF એકરૂપ છે.' તેને ચિહ્નની મદદથી ચાપ DE $\cong$ ચાપ GF આ રીતે દર્શાવાય છે.

ચાપોના માપોના સરવાળાનો ગુણધર્મ (Property of sum of measures of arcs)



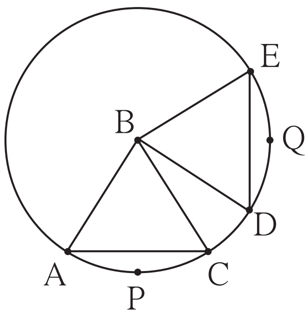
આકૃતિ 3.32

આકૃતિ 3.32માં A, B, C, D, E એક જ વર્તુળ પરના બિંદુઓ છે. આ બિંદુઓને કારણે અનેક ચાપો તૈયાર થયા છે. આ પૈકી ચાપ ABC અને ચાપ CDEમાં એક અને એક જ સામાન્યબિંદુ C છે. માટે ચાપ ABC અને ચાપ CDE ના માપોનો સરવાળો ચાપ ACE જેટલો થશે.

m(ચાપ ABC) + m(ચાપ CDE) = m(ચાપ ACE)

પરંતુ ચાપ ABC અને ચાપ BCEમાં એક કરતાં વધુ [ચાપ BCના બધા] સામાન્ય બિંદુઓ છે. એટલે ચાપ ABC અને ચાપ BCE ના માપોનો સરવાળો ચાપ ABE ના માપ જેટલો થશે નહીં.

પ્રમેય : એક જ વર્તુળના (અથવા એકરૂપ વર્તુળોના) એકરૂપ ચાપોની સંગત જીવા એકરૂપ હોય છે.



આકૃતિ 3.33

પક્ષ : વર્તુળનું કેન્દ્રબિંદુ B છે અને ચાપ APC ≅ ચાપ DQE

સાધ્ય : જીવા AC ≅ જીવા DE

સાબિતી : (ખાલી જગ્યા ભરીને સાબિતી પૂર્ણ કરો.)

ΔABC અને Δ DBE માં,

બાજુ AB ≅ બાજુ DB ...(......................)

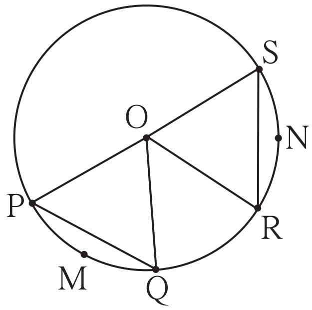
બાજુ .... ≅ બાજુ ..... (......................)

$\angle$ ABC ≅ $\angle$ DBE .....(એકરૂપ ચાપની વ્યાખ્યા)

$\therefore$ Δ ABC ≅ Δ DBE ..... (......................)

$\therefore$ જીવા AC ≅ જીવા DE .....(......................)

પ્રમેય : એક જ વર્તુળની (અથવા એકરૂપ વર્તુળોની) એકરૂપ જીવાના સંગત ચાપ એકરૂપ હોય છે.



આકૃતિ 3.34

પક્ષ : વર્તુળનું કેન્દ્રબિંદુ O છે અને રેખ PQ તથા રેખ RS એ વર્તુળની એકરૂપ જીવાઓ છે.

સાધ્ય : ચાપ PMQ ≅ ચાપ RNS

નીચેની બાબતોની ધ્યાનમાં રાખીને સાબિતી લખો બે ચાપ એકરૂપ હોય તે માટે તેમની ત્રિજ્યા અને માપ સમાન હોવા જોઈએ. ચાપ PMQ અને ચાપ RNS એક જ વર્તુળના ચાપ છે માટે તેમની ત્રિજ્યા સમાન છે.

તેની ચાપોના માપ જ તેમના સંગત કેન્દ્રિયકોણના માપ હોય છે. આ કેન્દ્રિયકોણ મેળવવા માટે ત્રિજ્યા OP, OQ, OR અને OS દોરવી પડશે. તે દોર્યા બાદ બનતા Δ OPQ અને Δ ORS એકરૂપ છે ને ?

ઉપરના બંને પ્રમેયો તમે એકરૂપ વર્તુળોના સંદર્ભમાં સિધ્ધ કરો.

વિચાર કરીએ.

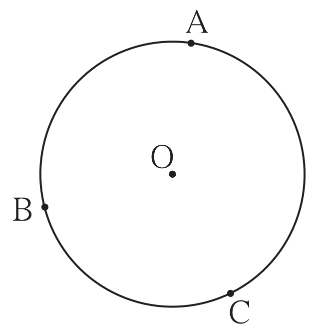
- ઉપર આપેલા પહેલા પ્રમેયમાં લઘુચાપ APC અને લઘુચાપ DQE ને એકરૂપ માનવામાં આવ્યા છે. તેમનાં સંગત ગુરૂચાપને એકરૂપ માનીને પણ આ પ્રમેય સાબિત કરી શકાય કે ?
- બીજા પ્રમેયમાં એકરૂપ જીવાના સંગત ગુરૂચાપ એકરૂપ થશે કે ? જીવા PQ અને જીવા RS વ્યાસ ન હોય તો પણ આ પ્રમેય સત્ય છે કે ?

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) O કેન્દ્ર ધરાવતા વર્તુળ પર A, B, C આ ત્રણ બિંદુઓ આવેલા છે.

(i) આ ત્રણ બિંદુઓ દ્વારા તૈયાર થતા બધા ચાપોના નામ લખો.

(ii) ચાપ BC અને ચાપ AB ના માપ અનુક્રમે 110° અને 125° હોય તો બાકીના દરેક ચાપોના માપ લખો.



આકૃતિ 3.35

ઉકેલ : (i) ચાપોના નામો -

ચાપ AB, ચાપ BC, ચાપ AC, ચાપ ABC, ચાપ ACB, ચાપ BAC

(ii) ચાપ ABC નું માપ = ચાપ AB નું માપ + ચાપ BC નું માપ

$= 125^\circ + 110^\circ = 235^\circ$

ચાપ AC નું માપ = 360° − ચાપ ABC નું માપ

$= 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$

તે જ પ્રમાણે ચાપ ACB નું માપ = $360^\circ - 125^\circ$

$= 235^\circ$

અને ચાપ BAC નું માપ = $360^\circ - 110^\circ$

$= 250^\circ$

અથવા નીચે મુજબ પણ લખી શકાય.

m(ચાપ ABC) = m(ચાપ AB) + m(ચાપ BC)

$= 125^\circ + 110^\circ = 235^\circ$

m(ચાપ AC) $= 360^\circ - m$(ચાપABC)

$= 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$

m(ચાપ ACB) $= 360^\circ - m$(ચાપ AB)

$= 360^\circ - 125^\circ = 235^\circ$

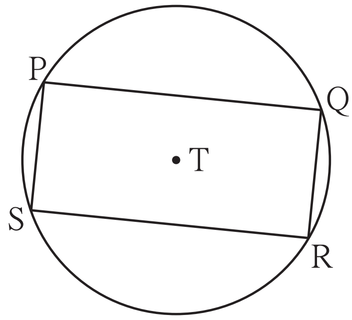
m(ચાપ BAC) $= 360^\circ - m$(ચાપ BC)

$= 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$

ઉદા. **(2)** આકૃતિ 3.36માં T કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં લંબચોરસ PQRS અંતર્ગત છે. તો દર્શાવો કે -

(i) ચાપ PQ $\cong$ ચાપ SR

(ii) ચાપ SPQ $\cong$ ચાપ PQR



આકૃતિ 3.36

ઉકેલ : (i) $\square$ PQRS લંબચોરસ છે.

$\therefore$ જીવા PQ $\cong$ જીવા SR ...(લંબચોરસની સામસામેની બાજુ)

$\therefore$ ચાપ PQ $\cong$ ચાપ SR .....(એકરૂપ જીવાના સંગત ચાપ)

(ii) જીવા PS $\cong$ જીવા QR ....(લંબચોરસની સામસામેની બાજુ)

$\therefore$ ચાપ SP $\cong$ ચાપ QR .....(એકરૂપ જીવાના સંગત ચાપ)

$\therefore$ ચાપ SP અને ચાપ QR ના માપ સમાન છે.

હવે, ચાપ SP અને ચાપ PQ ના માપોનો સરવાળો

= ચાપ PQ અને ચાપ QR ના માપોનો સરવાળો.

$\therefore$ ચાપ SPQ નું માપ = ચાપ PQR નું માપ

$\therefore$ ચાપ SPQ $\cong$ ચાપ PQR

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

(1) જે ખૂણાનું શિરોબિંદુ વર્તુળનું કેન્દ્ર હોય છે તેને કેન્દ્રિયકોણ કહેવાય છે.

(2) ચાપના માપની વ્યાખ્યા - (i) લઘુચાપનું માપ તેમના સંગત કેન્દ્રિયકોણના માપ જેટલું હોય છે.

(ii) ગુરૂચાપનું માપ = $360°$ - સંગત લઘુચાપનું માપ. (iii) અર્ધવર્તુળ ચાપનું માપ $180°$ હોય છે.

(3) બે ચાપની ત્રિજ્યા અને માપ સમાન હોય તો તે ચાપ એકરૂપ હોય છે.

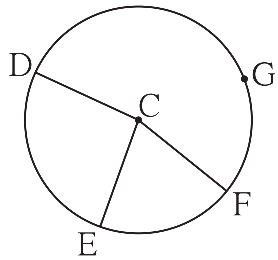
(4) એક જ વર્તુળના ચાપ ABC અને ચાપ CDEમાં જ્યારે એક જ સામાન્ય બિંદુ C હોય, ત્યારે m(ચાપ ABC) + m(ચાપ CDE) = m(ચાપ ACE)

(5) એક જ વર્તુળના (અથવા એકરૂપ વર્તુળોના) એકરૂપ ચાપોની સંગત જીવા એકરૂપ હોય છે.

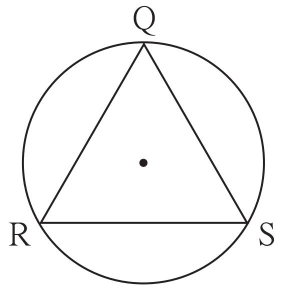
(6) એક જ વર્તુળની (અથવા એકરૂપ વર્તુળોની) એકરૂપ જીવાના સંગત ચાપ એકરૂપ હોય છે.

મહાવરાસંગ્રહ 3.3

1. આકૃતિ 3.37માં, C કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પર G, D, E અને F બિંદુઓ આવેલાં $\angle$ECFનું માપ $70°$ અને ચાપ DGFનું માપ $200°$ હોય, તો ચાપ DE અને ચાપ DEF ના માપ શોધો.



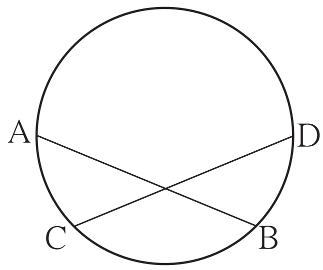
આકૃતિ 3.37



આકૃતિ 3.38

2*. આકૃતિ 3.38માં, Δ QRS સમભુજ છે.
તો સાબિત કરો કે –
(1) ચાપ RS $\cong$ ચાપ QS $\cong$ ચાપ QR
(2) ચાપ QRS નું માપ 240° હોય,

3. આકૃતિ 3.39 માં,
જીવા AB $\cong$ જીવા CD,
તો સાબિત કરો કે –
ચાપ AC $\cong$ ચાપ BD



આકૃતિ 3.39

જાણી લઈએ.

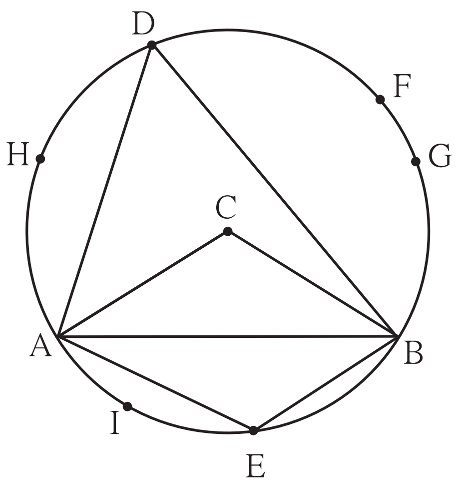
વર્તુળ અને બિંદુ, વર્તુળ અને રેખા (સ્પર્શક)ના પરસ્પર સંબંધ ધરાવતાં કેટલાક ગુણધર્મો આપણે જોયા. હવે આપણે વર્તુળ અને ખૂણા સંબંધિત કેટલાક ગુણધર્મ જોઈશું. જેમાંના કેટલાંક ગુણધર્મો વિશે કૃતિ દ્વારા માહિતી મેળવીશું.

કૃતિ I :

C કેન્દ્ર ધરાવતું એક મોટું વર્તુળ દોરો. આકૃતિ 3.40 માં દર્શાવ્યા મુજબ જીવા AB દોરો. કેન્દ્રિયકોણ ACB દોરો. જીવા AB વડે તૈયાર થતાં ગુરૂચાપ પર બિંદુ D અને લઘુચાપ પર બિંદુ E લો.

(1) $\angle$ADB અને $\angle$ACB માપો. તેમના માપોની તુલના કરો.

(2) $\angle$ADB અને $\angle$AEB માપો. તેમના માપોની તુલના કરો.



આકૃતિ 3.40

(3) ચાપ ADB પર F, G, H જેવા કેટલાંક બિંદુઓ લો. $\angle AFB$, $\angle AGB$, $\angle AHB$, ... ના માપ શોધો. તેમના માપોની $\angle ADB$ ના માપ સાથે અને પરસ્પર તુલના કરો.

(4) ચાપ AEB પર બિંદુ I લો. $\angle AIB$ માપો. તેના માપની $\angle AEB$ ના માપ સાથે તુલના કરો.

આકૃતિ દ્વારા તમે કરેલ નિરીક્ષણો નીચે મુજબ હશે –

(1) $\angle ACB$ નું માપ $\angle ADB$ ના માપ કરતા બમણું છે.

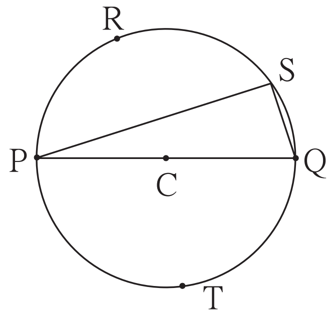
(2) $\angle ADB$ અને $\angle AEB$ ના માપોનો સરવાળો 180° છે.

(3) $\angle AHB$, $\angle ADB$, $\angle AFB$, $\angle AGB$ ના માપો સમાન છે.

(4) $\angle AEB$ અને $\angle AIB$ ના માપો સમાન છે.

કૃતિ II :

આકૃતિ 3.41માં, દર્શાવ્યા મુજબ C કેન્દ્રવાળું એક મોટું વર્તુળ દોરો. તેનો વ્યાસ રેખ PQ દોરો. આ વ્યાસ વડે તૈયાર થતાં બંને અર્ધવર્તુળો પર બિંદુ R,S,T લો. $\angle PRQ$, $\angle PSQ$, $\angle PTQ$ માપો. આ દરેક ખૂણા કાટકોણ છે તે નોંધો.



આકૃતિ 3.41

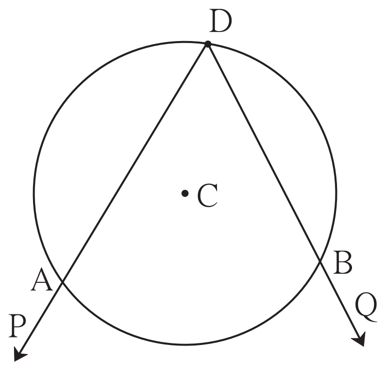
ઉપરની કૃતિ પરથી તમને મળેલાં ગુણધર્મો એજ વર્તુળ અને ખૂણા સંબંધી પ્રમેયો છે.

આપણે હવે આ પ્રમેયોની સાબિતી જોઈએ. તે પહેલાં કેટલીક સંજ્ઞાઓનો પરિચય કરી લેવો જરૂરી છે.

અંતર્ગત કોણ (Inscribed angle)

આકૃતિ 3.42માં, C કેન્દ્રવાળું એક વર્તુળ છે. $\angle PDQ$નું શિરોબિંદુ D વર્તુળ પર આવેલું છે. ખૂણાની બાજુ DP અને DQ વર્તુળને અનુક્રમે બિંદુ A અને B માં છેદે છે. આ ખૂણાને વર્તુળમાં અથવા ચાપમાં અંતર્ગત થયેલો કોણ કહેવાય છે.

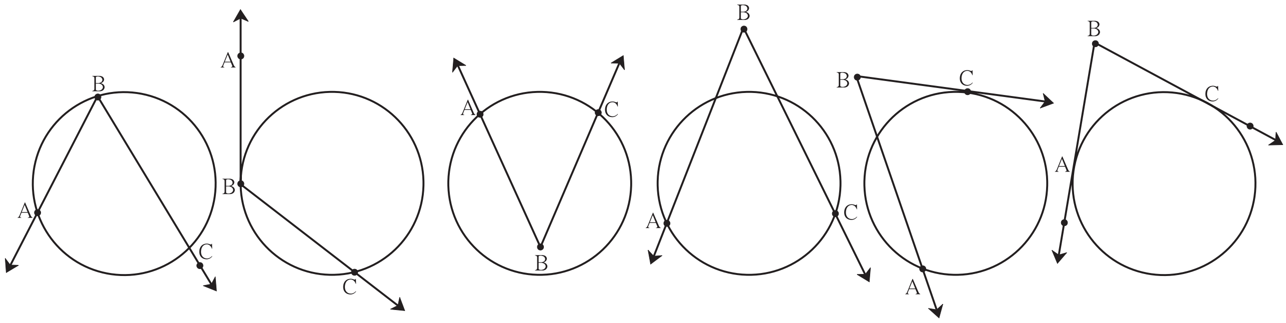
આકૃતિ 3.42માં $\angle ADB$ એ ચાપ ADBમાં અંતર્ગત કોણ છે.



આકૃતિ 3.42

આંતરિત ચાપ (Intercepted arc)

નીચેની આકૃતિ 3.43માં, આપેલી આકૃતિ (i) થી (vi) નું નિરીક્ષણ કરો.



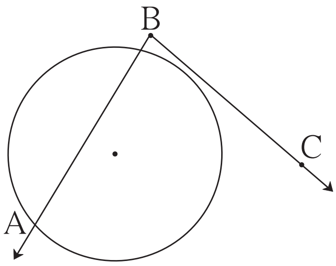
આકૃતિ 3.43

દરેક આકૃતિમાં $\angle ABC$ના અંતર્ભાગમાં આવતા વર્તુળચાપને $\angle ABC$નો આંતરિત ચાપ કહેવાય છે. આંતરિત ચાપના અત્યંબિંદુ વર્તુળ અને ખૂણાના છેદનબિંદુ હોય છે. ખૂણાની દરેક બાજુ પર ચાપનું એક અત્યંબિંદુ હોવું જરૂરી છે.

આકૃતિ 3.43 માં (i), (ii) અને (iii) આકૃતિમાં ખૂણાએ એકજ ચાપ આંતરિત કરેલો છે. જ્યારે (iv), (v) અને (vi)માં આકૃતિમાં દરેક ખૂણાએ બે ચાપ આંતરિત કરેલા છે.

આકૃતિ (ii) અને (v)માં ખૂણાની એક બાજુ અને (vi) માં ખૂણાની બંને બાજુ વર્તુળને સ્પર્શે છે એ ધ્યાનમાં લો.

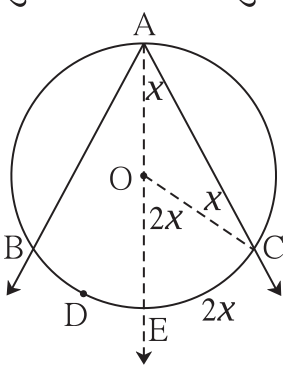
આકૃતિ 3.44માંનો ચાપ આંતરિત ચાપ નથી. કારણ કે ખૂણાની બાજુ BC પર ચાપનું એક પણ અત્યંબિંદુ નથી.



આકૃતિ 3.44

અંતર્ગત કોણનો પ્રમેય (Inscribed angle theorem)

પ્રમેય : વર્તુળમાં અંતર્ગત કોણનું માપ તેના આંતરિત ચાપના માપ કરતાં અડધું હોય છે.



આકૃતિ 3.45

પક્ષ : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં, $\angle BAC$ એ ચાપ BAC માં અંતર્ગત કોણ છે. તેમજ તે ખૂણા વડે ચાપ BDC આંતરિત થયેલો છે.

સાધ્ય : $\angle BAC = \frac{1}{2}\ m(\text{ચાપ BDC})$

રચના : કિરણ AO દોર્યો. તે વર્તુળને E બિંદુમાં છેદે છે. ત્રિજ્યા OC દોરો.

સાબિતી : Δ AOC માં,

બાજુ OA $\cong$ બાજુ OC .... (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યા)

$\therefore$ $\angle$OAC = $\angle$OCA ..... (સમદ્વિભૂજ ત્રિકોણનો પ્રમેય)

$\angle$OAC = $\angle$OCA = x (ધારતા) ...... (I)

હવે, $\angle$EOC = $\angle$OAC + $\angle$OCA .... (ત્રિકોણના બહિષ્કોણનો પ્રમેય)

$= x^\circ + x^\circ = 2x^\circ$

પરંતુ $\angle$EOC કેન્દ્રિયકોણ છે.

$\therefore$ m(ચાપ EC) = $2x^\circ$ .... (ચાપના માપની વ્યાખ્યા) ..... (II)

$\therefore$ (I) અને (II) પરથી,

$\angle$OAC = $\angle$EAC = $\frac{1}{2}$ m(ચાપ EC) ..... (III)

આ જ પ્રમાણે, ત્રિજ્યા OB દોરીને, $\angle$EAB = $\frac{1}{2}$ m(ચાપ BE) સાબિત કરી શકાય....... (IV)

$\therefore$ $\angle$EAC + $\angle$EAB = $\frac{1}{2}$ m(ચાપ EC) + $\frac{1}{2}$ m(ચાપ BE) .... (III) અને (IV) પરથી

$\therefore$ $\angle$BAC = $\frac{1}{2}$ [m(ચાપ EC) + m(ચાપ BE)]

= $\frac{1}{2}$ [m(ચાપ BEC)] = $\frac{1}{2}$ [m(ચાપ BDC)] ..... (V)

ધ્યાનમાં રાખો કે, વર્તુળમાં અંતર્ગત કોણ અને તે વર્તુળનાં કેન્દ્ર સંબંધી ત્રણ શક્યતાઓ રહેલી છે. વર્તુળનું કેન્દ્ર ખૂણાની બાજુ પર હશે, અંતર્ભાગમાં હશે અથવા બાહ્યભાગમાં હશે આમાંથી પહેલી બે શક્યતા વિધાન (III) અને વિધાન (V) માં સાબિત કરી. હવે બાકી રહેલી ત્રીજી શક્યતાનો વિચાર કરીએ.

આકૃતિ 3.46 માં,

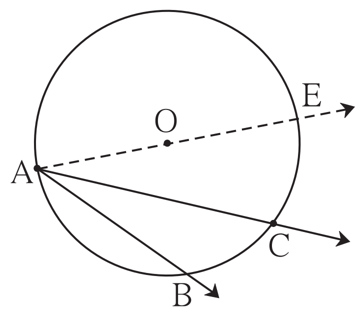
$\angle$BAC = $\angle$BAE − $\angle$CAE

= $\frac{1}{2}$ m(ચાપ BCE) − $\frac{1}{2}$ m(ચાપ CE)

...... (III) પરથી

= $\frac{1}{2}$ [m(ચાપ BCE) − m(ચાપ CE)]

= $\frac{1}{2}$ [m(ચાપ BC)] ...... (VI)



આકૃતિ 3.46

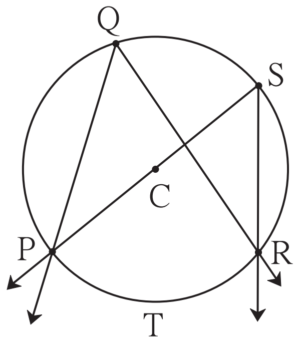
આ પ્રમેયનું વિધાન નીચે મુજબ લખી શકાય.

વર્તુળના ચાપે વર્તુળના કોઈપણ બિંદુ સાથે આંતરેલા (subtended) ખૂણાનું માપ તે ચાપે વર્તુળના કેન્દ્ર સાથે આંતરેલા ખૂણાના માપ કરતાં અડધું હોય છે.

આ પ્રમેયના નીચે આપેલ ઉપપ્રમેયના વિધાનો પણ નીચે મુજબ લખી શકાય.

અંતર્ગત કોણના પ્રમેયના ઉપપ્રમેયો (Corollaries of inscribed angle theorem)

1. એક જ ચાપમાં અંતર્ગત કોણો એકરૂપ હોય છે.



આકૃતિ 3.47

આકૃતિ 3.47 ના આધારે પક્ષ અને સાધ્ય લખો.

નીચેના પ્રશ્નોનો વિચાર કરીને સાબિતી લખો.

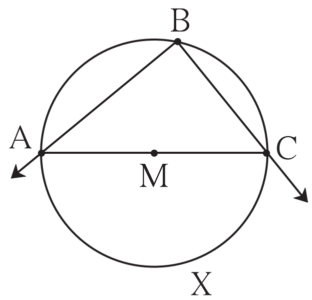
(1) $\angle$ PQR વડે આંતરિત ચાપ કયો ?

(2) $\angle$ PSR વડે આંતરિત ચાપ કયો ?

(3) અંતર્ગત કોણનું માપ અને તેના વડે આંતરિત ચાપના માપ વચ્ચે શો સંબંધ હોય છે ?

2. અર્ધવર્તુળમાં અંતર્ગત કોણ કાટકોણ હોય છે.

બાજુની આકૃતિ 3.48ના આધારે આ પ્રમેયના પક્ષ, સાધ્ય અને સાબિતી લખો.



આકૃતિ 3.48

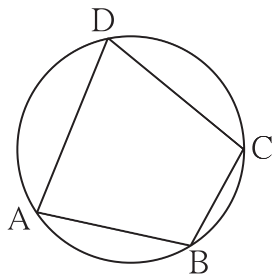
ચક્રીય ચતુષ્કોણ (Cyclic quadrilateral)

ચતુષ્કોણના ચારેય શિરોબિંદુ એક જ વર્તુળ પર હોય તો તે ચતુષ્કોણને ચક્રીય ચતુષ્કોણ કહે છે.

ચક્રીય ચતુષ્કોણનો પ્રમેય (Theorem of cyclic quadrilateral)

પ્રમેય : ચક્રીય ચતુષ્કોણના સંમુખ (સામસામેના) કોણો પરસ્પર પૂરક કોણ હોય છે.

નીચેની ખાલી જગ્યા પૂર્ણ કરીને સાબિતી લખો.



આકૃતિ 3.49

પક્ષ : $\square$ [ ] ચક્રીય છે.

સાધ્ય : $\angle$ B + $\angle$ D = [ ]

[ ] + $\angle$ C = 180°

સાબિતી : $\angle$ ADC અંતર્ગત કોણ છે અને તેણે ચાપ ABC આંતરિત કરેલો છે.

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}$ [ ] .... (I)

તેમજ [ ] અંતર્ગત કોણ છે અને ચાપ ADC તેનો આંતરિત ચાપ છે.

$$\therefore \boxed{\quad\quad} = \frac{1}{2}\ \text{m(ચાપ ADC)} \ldots\ldots \text{(II)}$$

$$\therefore \angle ADC + \boxed{\quad\quad} = \frac{1}{2} \boxed{\quad\quad} + \frac{1}{2}\ \text{m(ચાપ ADC)} \ldots\ldots \text{[(I) અને (II) પરથી]}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\boxed{\quad\quad} + \text{m(ચાપ ADC)}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times 360^\circ \ldots\ldots\ldots \text{[ચાપ ABC અને ચાપ ADC મળીને પૂર્ણ વર્તુળ બને છે.]}$$

$$= \boxed{\quad\quad}$$

તે જ રીતે $\angle A + \angle C = \boxed{\quad\quad}$ સાબિત કરી શકાય.

ચક્રીય ચતુષ્કોણના પ્રમેયનો ઉપપ્રમેય (Corollary of cyclic quadrilateral theorem)

પ્રમેય : ચક્રીય ચતુષ્કોણનો બહિષ્કોણ તેને સંલગ્ન અંતઃસંમુખ ખૂણાનો એકરૂપ હોય છે.

આ પ્રમેયની સાબિતી તમે લખો.

વિચાર કરીએ.

ઉપરના પ્રમેયમાં $\angle B + \angle D = 180^\circ$ સાબિત કર્યા પછી બાકીના સંમુખ ખૂણાના માપનો સરવાળો 180° છે, એ બીજી રીતે સાબિત કરી શકાય છે ?

ચક્રીય ચતુષ્કોણના પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય (Converse of cyclic quadrilateral theorem)

પ્રમેય : ચતુષ્કોણના સંમુખ ખૂણા પૂરક હોય તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય હોય છે.

આ પ્રમેય અપ્રત્યક્ષ પદ્ધતિથી સાબિત કરી શકાય છે. તમે પ્રયત્ન કરો.

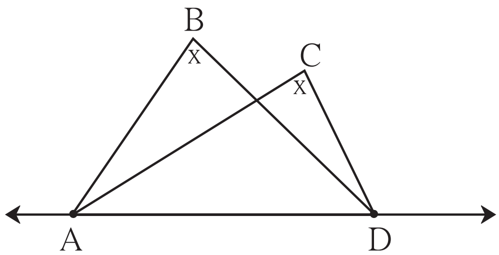
ઉપરના પ્રતિપ્રમેય પરથી આપણને ધ્યાનમાં આવ્યું કે, ચતુષ્કોણના સંમુખ ખૂણા જો પૂરક હોય તો તે ચતુષ્કોણનું પરિવર્તુળ હોય છે.

પ્રત્યેક ત્રિકોણનું એક પરિવર્તુળ હોય છે. એ આપણને ખબર છે. પરંતુ પ્રત્યેક ચતુષ્કોણનું પરિવર્તુળ હોવું જોઈએ એવું નથી, તે ધ્યાનમાં લો.

કઈ શરત પૂર્ણ થતી હોય તો તે ચતુષ્કોણને પરિવર્તુળ હોય છે એટલે કે ચતુષ્કોણનું શિરોબિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર હોય છે એ ઉપરના પ્રમેય દ્વારા આપણને સમજાય છે.

બીજી એક જુદી પરિસ્થિતિમાં ચાર અસમરેખ બિંદુઓ ચક્રીય બને છે. જે નીચેના પ્રમેયમાં દર્શાવ્યું છે.

પ્રમેય : **રેખાના બે ભિન્ન બિંદુ, તે રેખાની એક જ બાજુએ આવેલા બે ભિન્ન બિંદુથી એકરૂપ ખૂણા નિશ્ચિત કરી શકતા હોય, તો તે ચાર બિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર હોય છે.**



આકૃતિ 3.50

પક્ષ : બિંદુ B અને C, રેખા AD ની એક જ બાજુએ આવેલા છે. $\angle ABD \cong \angle ACD$

સાધ્ય : બિંદુ A, B, C, D એક જ વર્તુળ પર છે. (એટલે કે $\square$ ABCD ચક્રીય છે.)

આની પણ અપ્રત્યક્ષ સાબિતી આપી શકાય.

વિચાર કરીએ.

ઉપરનો પ્રમેય ક્યા પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય છે ?

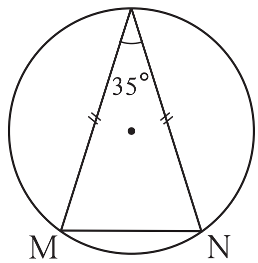
ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) આકૃતિ 3.51 માં, જીવા LM $\cong$ જીવા LN

$\angle L = 35^\circ$ હોય તો,

(i) m(ચાપ MN) = કેટલા?

(ii) m(ચાપ LN) = કેટલા?



આકૃતિ 3.51

ઉકેલ : (i) $\angle L = \frac{1}{2}\, m$(ચાપ MN) ...... (અંતર્ગત કોણનો પ્રમેય)

$\therefore\ 35 = \frac{1}{2}\, m$(ચાપ MN)

$\therefore\ 2 \times 35 = m$(ચાપ MN) $= 70^\circ$

(ii) m(ચાપ MLN) $= 360^\circ - m$(ચાપ MN) ...... (ચાપના માપની વ્યાખ્યા)

$= 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$

હવે, જીવા LM $\cong$ જીવા LN

$\therefore$ ચાપ LM $\cong$ ચાપ LN

પરંતુ m(ચાપ LM) + m(ચાપ LN) = m(ચાપ MLN) $= 290^\circ$(ચાપના સરવાળાનો ગુણધર્મ)

m(ચાપ LM) = m(ચાપ LN) $= \frac{290^\circ}{2} = 145^\circ$

અથવા, (ii) જીવા LM $\cong$ જીવા LN

$\therefore\ \angle M = \angle N$ ...... (સમદ્વિભૂજ ત્રિકોણનો પ્રમેય)

$\therefore\ 2\angle M = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$

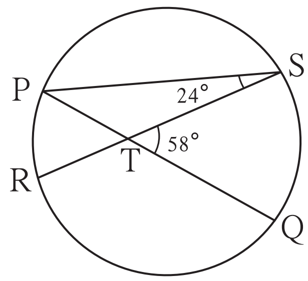
$\therefore\ \angle M = \frac{145^\circ}{2}$

$\therefore\ m$(ચાપ LN) $= 2 \times \angle M$

$$= 2 \times \frac{145^\circ}{2}$$

$$= 145^\circ$$

ઉદા. (2) આકૃતિ 3.52માં, જીવા PQ અને જીવા RS એકબીજાને બિંદુ Tમાં છેદે છે.



આકૃતિ 3.52

(i) જો $\angle STQ = 58^\circ$ અને $\angle PSR = 24^\circ$, તો m(ચાપ SQ) શોધો.

(ii) $\angle STQ = \frac{1}{2}$ [m(ચાપ PR) + m(ચાપ SQ)] તે ચકાસી જુઓ.

(iii) જીવા PQ અને જીવા RS વચ્ચેના ખૂણાનું માપ કોઈપણ હોય તો પણ $\angle STQ = \frac{1}{2}$ [m(ચાપ PR) + m(ચાપ SQ)] સાબિત કરો.

(iv) આ ઉદાહરણ દ્વારા સાબિત થતો ગુણધર્મ શબ્દોમાં લખો.

ઉકેલ : (i) $\angle SPQ = \angle SPT = 58^\circ - 24^\circ = 34^\circ$ .... (ત્રિકોણના બહિષ્કોણનો પ્રમેય)

m(ચાપ QS) $= 2\ \angle SPQ = 2 \times 34^\circ = 68^\circ$

(ii) m(ચાપ PR) $= 2\ \angle PSR = 2 \times 24^\circ = 48^\circ$

હવે, $\frac{1}{2}$ [m(ચાપ PR) + m(ચાપ SQ)] $= \frac{1}{2}\,[48 + 68]$

$$= \frac{1}{2} \times 116 = 58^\circ$$

$$= \angle STQ$$

(iii) નીચેની ખાલી જગ્યા પૂર્ણ કરીને આ ગુણધર્મની સાબિતી લખો.

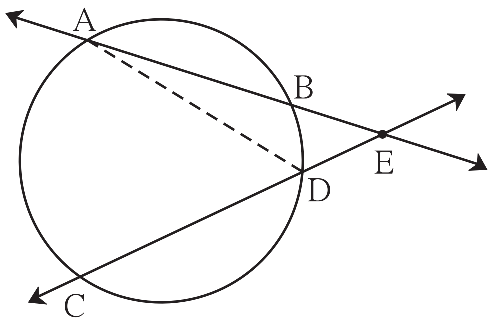
$\angle STQ = \angle SPQ + \boxed{}$ .... (ત્રિકોણના બહિષ્કોણનો પ્રમેય)

$= \frac{1}{2}\ m$(ચાપ SQ) $+ \boxed{}$ .... (અંતર્ગત કોણનો પ્રમેય)

$= \frac{1}{2}\ [\boxed{} + \boxed{}]$

(iv) વર્તુળની જીવાઓ એકબીજાને વર્તુળના અંતર્ભાગમાં છેદતી હોય તો જીવાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ, તે ખૂણા વડે આંતરિત થયેલા ચાપ અને તેના વિરુધ્ધ ખૂણા વડે આંતરિત થયેલો ચાપ, તેમના ચાપનાં માપોના સરવાળા કરતાં અડધું હોય છે.

ઉદા. (3) વર્તુળની જીવાઓનો સમાવેશ કરતી રેખાઓ, વર્તુળના બાહ્યભાગમાં છેદતી હોય તો તે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ, તે ખૂણા વડે આંતરિત થયેલા ચાપોના માપના તફાવત કરતાં અડધું હોય છે, એમ સાબિત કરો.



આકૃતિ 3.53

પક્ષ : વર્તુળની જીવા AB અને જીવા CD તે વર્તુળના બાહ્યભાગ બિંદુ E માં છેદે છે.

સાધ્ય : $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{ચાપ } AC) - m(\text{ચાપ } BD)]$

રચના : રેખ AD દોરો.

સાબિતી : આ ગુણધર્મની સાબિતી, ઉપરના ઉદા.(2)માં આપેલી સાબિતી પ્રમાણે આપી શકાય. તે માટે Δ AED ના ખૂણા, તેમજ ત્રિકોણના બહિષ્કોણ વગેરેનો વિચાર કરીને સાબિતી લખો.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

(1) વર્તુળમાં અંતર્ગત કોણનું માપ, તેના આંતરિત ચાપના માપ કરતાં અડધું હોય છે.

(2) વર્તુળમાં એક જ ચાપમાં અંતર્ગત કોણો એકરૂપ હોય છે.

(3) અર્ધવર્તુળમાં અંતર્ગત કોણ કાટકોણ હોય છે.

(4) ચતુષ્કોણના ચારેય શિરોબિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર હોય તો તે ચતુષ્કોણને ચક્રીય ચતુષ્કોણ કહે છે.

(5) ચક્રીય ચતુષ્કોણના સંમુખ (સામસામેના) કોણો પરસ્પર પૂરકકોણ હોય છે.

(6) ચક્રીય ચતુષ્કોણનો બહિષ્કોણ તેના સંલગ્ન અંતઃસંમુખ ખૂણાને એકરૂપ હોય છે.

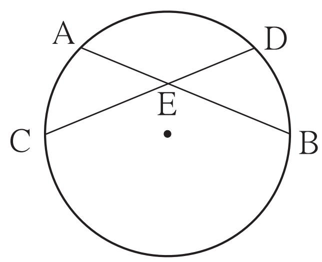
(7) ચતુષ્કોણના સંમુખ ખૂણા પૂરક હોય તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય હોય છે.

(8) રેખાના બે ભિન્ન બિંદુ, તે રેખાની એક જ બાજુએ આવેલા બે ભિન્ન બિંદુઓથી એકરૂપ ખૂણા નિશ્ચિત કરી શકતા હોય, તો તે ચાર બિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર હોય છે.

(9) બાજુની આકૃતિ 3.54માં,

(i) $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{ચાપ } AC) + m(\text{ચાપ } DB)]$

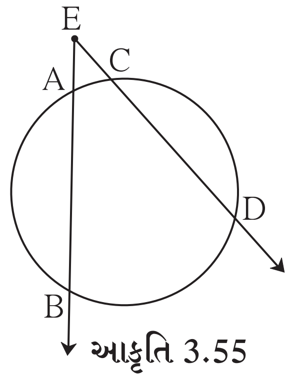
(ii) $\angle CEB = \frac{1}{2}[m(\text{ચાપ } AD) + m(\text{ચાપ } CB)]$



આકૃતિ 3.54

(10) બાજુની આકૃતિ 3.55માં,

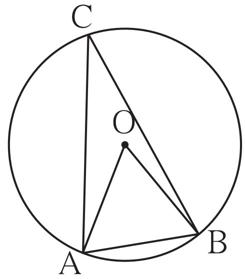
$$\angle BED = \frac{1}{2}\,[m(\text{ચાપ } BD) - m(\text{ચાપ } AC)]$$



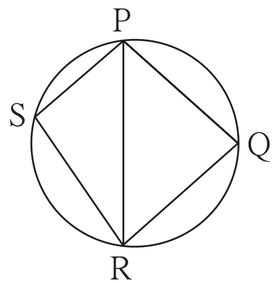
આકૃતિ 3.55

મહાવરાસંગ્રહ 3.4

1. આકૃતિ 3.56માં, O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા ABની લંબાઈ તે વર્તુળની ત્રિજ્યા જેટલી છે. તો (1) ∠AOB (2) ∠ACB (3) ચાપ AB અને (4) ચાપ ACB ના માપ શોધો.



આકૃતિ 3.56

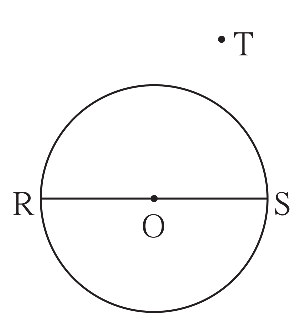


આકૃતિ 3.57

2. આકૃતિ 3.57માં, □ PQRS ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. બાજુ PQ ≅ બાજુ RQ. ∠PSR = 110°હોય તો, (1) ∠PQR = કેટલા ?
   (2) m(ચાપ PQR) = કેટલા ?
   (3) m(ચાપ QR) = કેટલા ?
   (4) ∠PRQ = કેટલા ?

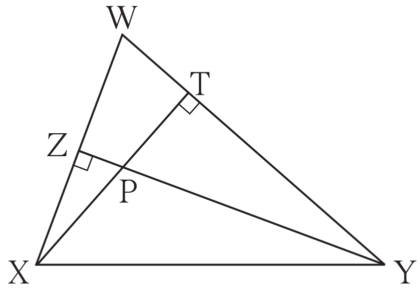
3. ચક્રીય □ MRPNમાં, ∠R = $(5x - 13)^\circ$ અને ∠N = $(4x + 4)^\circ$, હોય તો ∠R અને ∠N ના માપ શોધો.

4. આકૃતિ 3.58માં, રેખ RS એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળનો વ્યાસ છે. બિંદુ T એ વર્તુળના બાહ્યભાગમાંનું બિંદુ છે. તો ∠RTS લઘુકોણ છે. તે દર્શાવો.



આકૃતિ 3.58

5. કોઈપણ લંબચોરસ ચક્રીય ચતુષ્કોણ હોય છે તે સાબિત કરો.



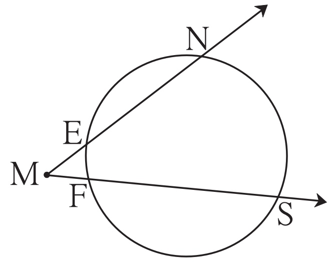
આકૃતિ 3.59

6. આકૃતિ 3.59 માં, રેખ YZ અને રેખ XT Δ WXY ના શિરોલંબ છે જે બિંદુ P માં છેદે છે. તો સાબિત કરો કે,

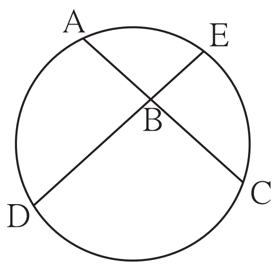
(1) $\square$ WZPT ચક્રીય છે.

(2) બિંદુ X, Z, T, Y એક જ વર્તુળ પર છે.

7. આકૃતિ 3.60માં, m(ચાપ NS) = 125°, m(ચાપ EF) = 37°, તો $\angle$NMSનું માપ શોધો.



આકૃતિ 3.60



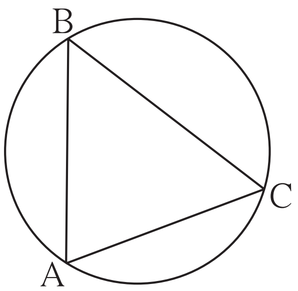
આકૃતિ 3.61

8. આકૃતિ 3.61માં, જીવા AC અને જીવા DE બિંદુ Bમાં છેદે છે. જો $\angle$ABE = 108° અને m(ચાપ AE) = 95° તો m(ચાપ DC) શોધો.

જાણી લઈએ.

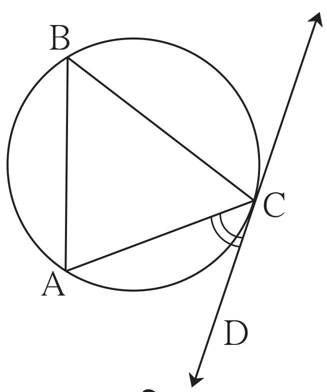
કૃતિ :

એક મોટું વર્તુળ દોરો. આકૃતિ 3.62માં, દર્શાવ્યા મુજબ એક જીવા AC દોરો વર્તુળ પર કોઈપણ એક બિંદુ B લો. અંતર્ગત કોણ $\angle$ABC દોરો. $\angle$ABC માપો અને નોંધી રાખો.



આકૃતિ 3.62

હવે, આકૃતિ 3.63માં દર્શાવ્યા મુજબ વર્તુળની સ્પર્શક રેખ CD દોરો. $\angle$ACDનું માપ માપો.



આકૃતિ 3.63

તમને જોવા મળશે કે, $\angle ACD$નું માપ, $\angle ABC$ ના માપ જેટલું જ છે.

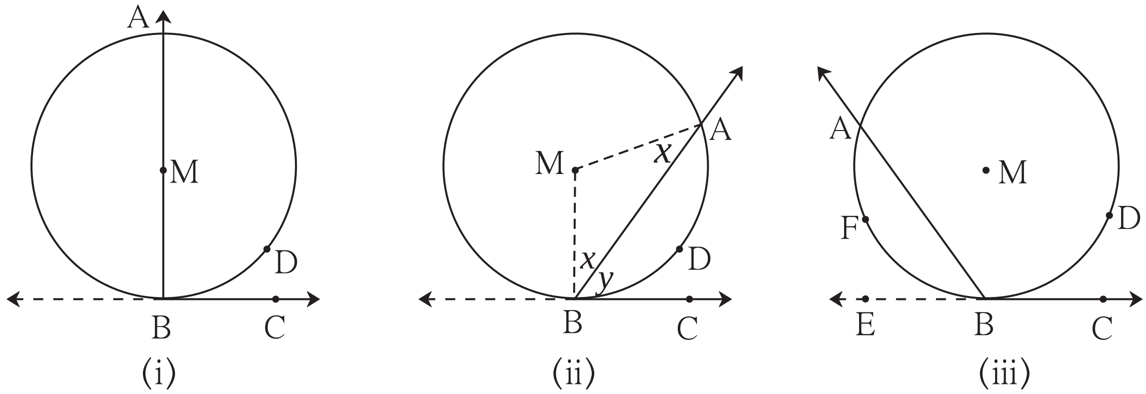
$\angle ABC = \frac{1}{2}\, m$(ચાપ AC) એ તમે જાણો જ છો.

આ પરથી નિષ્કર્ષ નીકળે છે કે, $\angle ACD$નું માપ પણ (ચાપ AC) ના માપ કરતાં અડધું છે.

વર્તુળના સ્પર્શકનો આ પણ એક મહત્ત્વનો ગુણધર્મ છે તે આપણે હવે સાબિત કરીશું.

સ્પર્શક-છેદક ખૂણાનો પ્રમેય (Theorem of angle between tangent and secant)

પ્રમેય : વર્તુળ પર શિરોબિંદુ હોય તેવા ખૂણાની એક બાજુ વર્તુળનો સ્પર્શક હોય અને બીજી બાજુ વર્તુળને બીજા એક બિંદુમાં છેદતી હોય તો, તે ખૂણાનું માપ તેના આંતરિત ચાપના માપ કરતાં અડધું હોય છે.



આકૃતિ 3.64

પક્ષ : M કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પર $\angle$ ABCનું શિરોબિંદુ છે. તેની બાજુ BC વર્તુળને સ્પર્શે છે અને બાજુ BA વર્તુળને A બિંદુમાં છેદે છે. ચાપ ADB એ $\angle$ ABC વડે આંતરિત ચાપ છે.

સાધ્ય : $\angle ABC = \frac{1}{2}\, m$(ચાપ ADB)

સાબિતી : આ પ્રમેયની સાબિતી, ત્રણ શક્યતાઓનો વિચાર કરીને આપવી પડશે.

(1) આકૃતિ 3.64 (i) મુજબ, વર્તુળનું કેન્દ્ર M એ $\angle$ ABC ની બાજુ પર આવેલું હોવાથી,

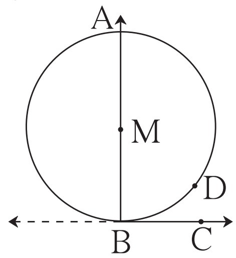
$\angle ABC = \angle MBC = 90^\circ$ ..... (સ્પર્શક-ત્રિજ્યા પ્રમેય).....(I)

ચાપ ADB એ અર્ધવર્તુળ છે.

$\therefore\ m$(ચાપ ADB) $= 180^\circ$ ..... (ચાપના માપની વ્યાખ્યા).....(II)

(I) અને (II) પરથી

$\angle ABC = \frac{1}{2}\, m$(ચાપ ADB)



આકૃતિ 3.64(i)

(2) આકૃતિ 3.64 (ii) મુજબ વર્તુળનું કેન્દ્ર M એ $\angle$ ABC ના બાહ્યભાગમાં આવેલું છે,

ત્રિજ્યા MA અને ત્રિજ્યા MB દોરીશું.

હવે, $\angle MBA = \angle MAB$ ..... (સમદ્વિભુજ ત્રિકોણનો પ્રમેય)

તેમ જ, $\angle MBC = 90^\circ$ ..... (સ્પર્શક-ત્રિજ્યા પ્રમેય) ..... (I)

$\angle$ MBA = $\angle$ MAB = x, $\angle$ ABC = y ધારતાં,

$\angle$ AMB = 180 − ($x + x$) = 180 − 2x

$\angle$ MBC = $\angle$ MBA + $\angle$ ABC = $x + y$

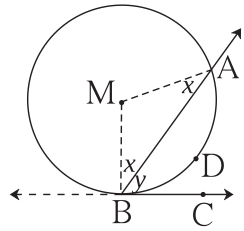
$\therefore$ $x + y = 90^\circ$ $\qquad$ $\therefore$ $2x + 2y = 180^\circ$

Δ AMBમાં, $2x$ + $\angle$ AMB = 180°

$\therefore$ $2x + 2y = 2x$ + $\angle$ AMB

$\therefore$ $2y$ = $\angle$ AMB

$\therefore$ y = $\angle$ ABC = $\frac{1}{2}$$\angle$ AMB = $\frac{1}{2}$ m(ચાપ ADB)



આકૃતિ 3.64(ii)

(3) આકૃતિ 3.64 (iii) ના આધારે, નીચેની ખાલી જગ્યા પૂર્ણ કરીને ત્રીજી શક્યતા વિશેની સાબિતી પૂર્ણ કરો.

કિરણ BCનો વિરુદ્ધ કિરણ $\boxed{\quad}$ દોર્યો.

હવે, $\angle$ABE = $\frac{1}{2}$ m($\boxed{\quad}$) ...... (2) માં સાબિત કર્યું.

180 − $\boxed{\quad}$ = $\angle$ABE ..... (સુરેખ ખૂણાની જોડ)

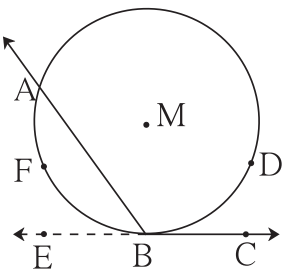
$\therefore$ 180 − $\boxed{\quad}$ = $\frac{1}{2}$ m(ચાપ AFB)

= $\frac{1}{2}$ [360 − m($\boxed{\quad}$)]

$\therefore$ 180 − $\angle$ABC = 180 − $\frac{1}{2}$ m(ચાપ ADB)

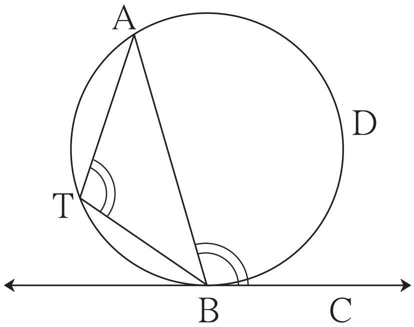
$\therefore$ −$\angle$ABC = − $\frac{1}{2}$ m($\boxed{\quad}$)

$\therefore$ $\angle$ABC = $\frac{1}{2}$ m(ચાપ ADB)



આકૃતિ 3.64(iii)

સ્પર્શક-છેદકના ખૂણાના પ્રમેયનું પર્યાયી વિધાન



આકૃતિ 3.65

આકૃતિ 3.65માં રેખ AB એ વર્તુળનો છેદક અને રેખા BC એ વર્તુળનો સ્પર્શક છે. ચાપ ADB એ $\angle$ ABC વડે આંતરિત ચાપ છે. જીવા AB વર્તુળનું બે ભાગમાં વિભાજન કરે છે. બંને ચાપ પરસ્પરના વિરુદ્ધ ચાપ છે. હવે ચાપ ADB ના વિરુદ્ધ ચાપ પર બિંદુ T લીધું. ઉપરના પ્રમેય પરથી,

$\angle$ ABC = $\frac{1}{2}$ m (ચાપ ADB) = $\angle$ ATB.

$\therefore$ **વર્તુળનો સ્પર્શક અને સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલી જીવા વચ્ચેના ખૂણાનું માપ, તે ખૂણા વડે આંતરિત ચાપના વિરુદ્ધ ચાપમાંના અંતર્ગત કોણ જેટલું હોય છે.**

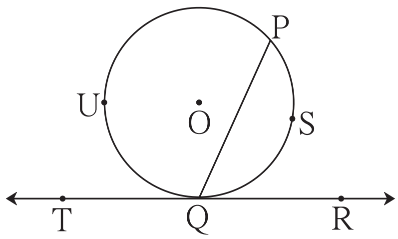
સ્પર્શક-છેદકના ખૂણાના પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય

વર્તુળની જીવાના એક અંત્યબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા, તે રેખા અને જીવા વડે બનતા ખૂણાનું માપ તે ખૂણાના આંતરિત ચાપ કરતાં અડધું હોય, તો તે રેખા તે વર્તુળનો સ્પર્શક હોય છે.

આકૃતિ 3.66 માં,

જો $\angle PQR = \frac{1}{2}\ m$(ચાપ PSQ) હોય,

[અથવા $\angle PQT = \frac{1}{2}\ m$(ચાપ PUQ) હોય,]



આકૃતિ 3.66

તો તે રેખા TR વર્તુળનો સ્પર્શક હોય છે. આ પ્રતિપ્રમેયનો ઉપયોગ, વર્તુળના સ્પર્શક દોરવાની એક રચના માટે થાય છે. આ પ્રમેયની અપ્રત્યક્ષ સાબિતી આપી શકાય.

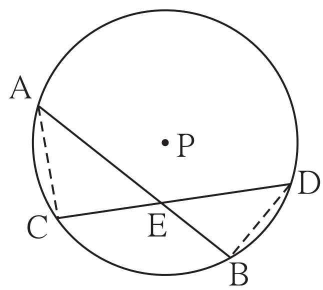
જીવાના આંતર્છેદનો પ્રમેય (Theorem of internal division of chords)

એક જ વર્તુળની બે જીવા જ્યારે વર્તુળના અંતર્ભાગમાં છેદે ત્યારે એક જીવાના થયેલા બે ભાગોની લંબાઈનો ગુણાકાર એ બીજી જીવાના બે ભાગની લંબાઈના ગુણાકાર જેટલો હોય છે.

પક્ષ : P કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં જીવા AB અને જીવા CD, વર્તુળના અંતર્ભાગમાં બિંદુ E માં છેદે છે.

સાધ્ય : $AE \times EB = CE \times ED$

રચના : રેખ AC અને રેખ DB દોરો.



આકૃતિ 3.67

સાબિતી : Δ CAE અને Δ BDE માં,

$\angle AEC \cong \angle DEB$ ..... (અભિકોણ)

$\angle CAE \cong \angle BDE$ ..... (એક જ ચાપના અંતર્ગત કોણ)

$\therefore \Delta CAE \sim \Delta BDE$ ..... (ખૂ ખૂ સરૂપતા કસોટી)

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$ ..... (સરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુ)

$\therefore AE \times EB = CE \times ED$

વિચાર કરીએ.

આકૃતિ 3.67 માં રેખ AC અને રેખા DB દોરીને આપણે પ્રમેય સાબિત કર્યો. તેને બદલે રેખ AD અને રેખ CB દોરીને આ પ્રમેય સાબિત કરી શકાય કે ?

વધુ માહિતી માટે

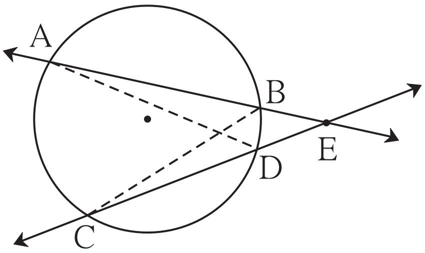
આકૃતિ 3.67માં, જીવા AB ના મધ્યબિંદુ E ને લીધે જીવાના AE અને EB એવા બે ભાગ થાય છે. રેખ AE અને રેખ EB એ પાસપાસેની બાજુ હોય એવો લંબચોરસ દોરીએ તો $AE \times EB$ તે લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ થશે. તે જ રીતે $CE \times ED$ એ જીવા CD ના બે ભાગથી બનતા લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ હશે. આપણે $AE \times EB = CE \times ED$ સાબિત કર્યું.

આથી આ પ્રમેય ને બીજા શબ્દોમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

એક જ વર્તુળની બે જીવા વર્તુળના અંતર્ભાગમાં છેદતી હોય, તો એક જીવાના બે ભાગથી બનતા લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ એ બીજી જીવાના બે ભાગોથી બનતા લંબચોરસના ક્ષેત્રફળ જેટલું હોય છે.

જીવાના બાહ્ય છેદનનો પ્રમેય (Theorem of external division of chords)

એક જ વર્તુળની જીવા AB અને CD નો સમાવેશ કરતા છેદક પરસ્પર વર્તુળના બાહ્યભાગમાં આવેલા બિંદુ E માં છેદતા હોય, તો $AE \times EB = CE \times ED$.



આકૃતિ 3.68

ઉપર આપેલ પ્રમેયના વિધાન અને આકૃતિના આધારે પક્ષ અને સાધ્ય તમે નક્કી કરો.

રચના : રેખ AD અને રેખ BC દોર્યા.

ખાલી જગ્યા પૂર્ણ કરીને સાબિતી લખો.

સાબિતી : Δ ADE અને Δ CBEમાં,

$\angle AED \cong \boxed{\quad\quad}$ .... (સામાન્ય ખૂણો)

$\angle DAE \cong \angle BCE$ .... ($\boxed{\quad\quad}$)

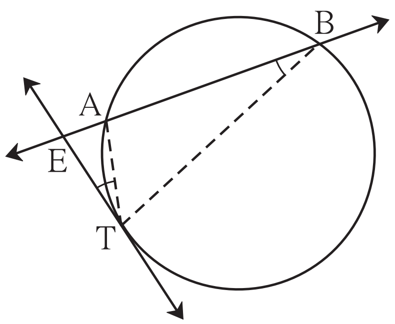
$\therefore \Delta ADE \sim \boxed{\quad\quad}$ .... ($\boxed{\quad\quad}$)

$\therefore \dfrac{(AE)}{\boxed{\quad\quad}} = \dfrac{\boxed{\quad\quad}}{\boxed{\quad\quad}}$ .... (સરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુ)

$\therefore \boxed{\quad\quad} = CE \times ED$

સ્પર્શક-છેદક રેખાખંડોનો પ્રમેય (Tangent secant segments theorem)

વર્તુળના બાહ્યભાગમાંના બિંદુ E માંથી દોરેલો છેદક વર્તુળને બિંદુ A અને B માં છેદતો હોય અને તે જ બિંદમાંથી પસાર થતો સ્પર્શક વર્તુળને બિંદુ T માં સ્પર્શતો હોય, તો $EA \times EB = ET^2$



આકૃતિ 3.69

પ્રમેયના ઉપર આપેલ વિધાનને ધ્યાનમાં રાખીને પક્ષ અને સાધ્ય નક્કી કરો.

રચના : રેખ TA અને રેખ TB દોરો.

સાબિતી : Δ EAT અને Δ ETB માં,

$\angle AET \cong \angle TEB$ ... (સામાન્ય ખૂણો)

$\angle ETA \cong \angle EBT$.... (સ્પર્શક-છેદકનો પ્રમેય)

$\therefore \Delta EAT \sim \Delta ETB$ ... (ખૂ-ખૂ સરૂપતા કસોટી)

$\therefore \frac{ET}{EB} = \frac{EA}{ET}$ ..... (સરૂપ ત્રિકોણની સંગત બાજુ)

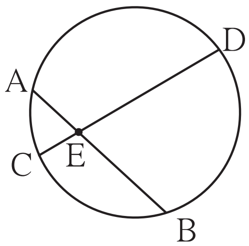
$\therefore EA \times EB = ET^2$

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

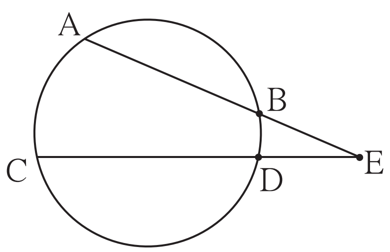
(1) આકૃતિ 3.70 અનુસાર,

$AE \times EB = CE \times ED$

આ ગુણધર્મને જીવાના આંતરછેદનનો પ્રમેય કહેવાય છે.



આકૃતિ 3.70



આકૃતિ 3.71

(2) આકૃતિ 3.71 અનુસાર,

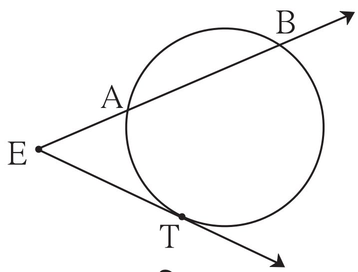
$AE \times EB = CE \times ED$

આ ગુણધર્મને જીવાના બાહ્યછેદનનો પ્રમેય કહેવાય છે.

(3) આકૃતિ 3.72 અનુસાર,

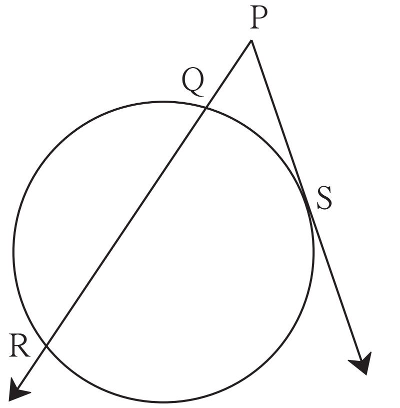
$EA \times EB = ET^2$

આ ગુણધર્મને સ્પર્શક-છેદક રેખાખંડોનો પ્રમેય કહેવાય છે..



આકૃતિ 3.72

ઉદા. (1) આકૃતિ 3.73 માં, રેખ PS વર્તુળનો સ્પર્શક છે.
રેખા PR વર્તુળનો છેદક છે.
જો PQ = 3.6,
QR = 6.4 તો PS શોધો.



આકૃતિ 3.73

ઉકેલ : $PS^2 = PQ \times PR$ .... (સ્પર્શક-છેદક રેખાખંડનો પ્રમેય)

$= PQ \times (PQ + QR)$

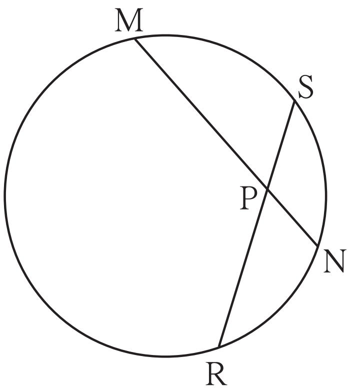
$= 3.6 \times [3.6 + 6.4]$

$= 3.6 \times 10$

$= 36$

$\therefore PS = 6$

ઉદા. (2) આકૃતિ 3.74 માં, જીવા MN અને જીવા RS પરસ્પર P બિંદુમાં છેદે છે.
જો PR = 6, PS = 4, MN = 11
તો PN શોધો.



આકૃતિ 3.74

ઉકેલ : જીવાના આંતરછેદનના પ્રમેય પરથી,

$PN \times PM = PR \times PS$... (I)

$PN = x$ ધારો. $\therefore PM = 11 - x$

આ કિંમત વિધાન (I) માં મૂકતાં,

$x\,(11 - x) = 6 \times 4$

$\therefore\; 11x - x^2 - 24 = 0$

$\therefore\; x^2 - 11x + 24 = 0$

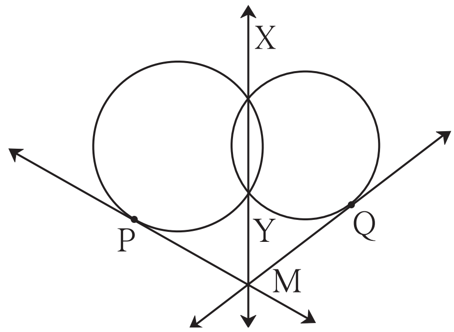
$\therefore\; (x - 3)\,(x - 8) = 0$

$\therefore\; x - 3 = 0$ અથવા $x - 8 = 0$

$\therefore\; x = 3$ અથવા $x = 8$

$\therefore$ PN = 3 અથવા PN = 8

ઉદા. (3) આકૃતિ 3.75માં, બે વર્તુળો એકબીજાને બિંદુ X અને Y માં છેદે છે. રેખા XY પરના બિંદુ M માંથી દોરેલા સ્પર્શકો તે વર્તુળોને બિંદુ P અને Q માં સ્પર્શ કરે છે. સાબિત કરો, રેખ PM $\cong$ રેખ QM.



આકૃતિ 3.75

સાબિતી : ખાલી જગ્યા પૂર્ણ કરીને સાબિતી લખો.

રેખા MX બંને વર્તુળોની સામાન્ય .... છે.

$\therefore PM^2 = MY \times MX$ ..... (I)

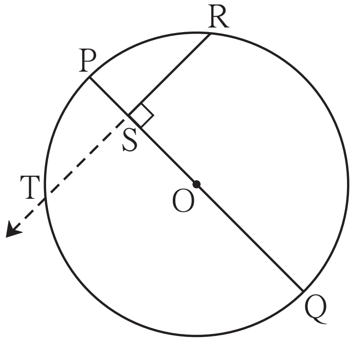
તેમજ .... = ... × .... , (સ્પર્શક-છેદક રેખાખંડનો પ્રમેય) ..... (II)

$\therefore$ વિધાન (I) અને (II) પરથી ...... = QM^2

$\therefore$ PM =QM

રેખ PM $\cong$ રેખ QM

ઉદા. (4)



આકૃતિ 3.76

આકૃતિ 3.76માં, રેખા PQ, O એ કેન્દ્રવાળા વર્તુળનો વ્યાસ છે. વર્તુળ પર બિંદુ R આવેલું છે. રેખ RS $\perp$ રેખ PQ. તો સાબિત કરો – SR એ PS અને SQ નું ભૌમિતિક મધ્ય છે. [એટલે કે $SR^2 = PS \times SQ$]

ઉકેલ : નીચે આપેલા પગથિયા વડે સાબિતી લખો.

(1) કિરણ RS દોરો. તે વર્તુળને જે બિંદુમાં છેદે છે તે બિંદુને T નામ આપો.

(2) RS = TS દર્શાવો.

(3) જીવાના આંતર્છેદનના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને સમાનતા લખો.

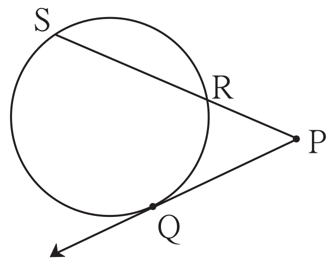
(4) RS = TS વાપરીને સાધ્ય સિધ્ધ કરો.

વિચાર કરીએ.

(1) ઉપરની આકૃતિ 3.76માં રેખ PR અને રેખ RQ દોરતા Δ PRQ ક્યા પ્રકારનો ત્રિકોણ હશે ?

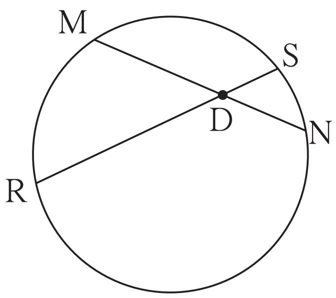
(2) ઉપરના ઉદા. (4) માં સાબિત કરેલ ગુણધર્મ આ પહેલા પણ જુદી પધ્ધતિ થી સાબિત કર્યો છે કે ?

1. આકૃતિ 3.77માં, બિંદુ Q સ્પર્શબિંદુ છે.
જો PQ = 12, PR = 8,
તો PS = કેટલા ? RS = કેટલા ?



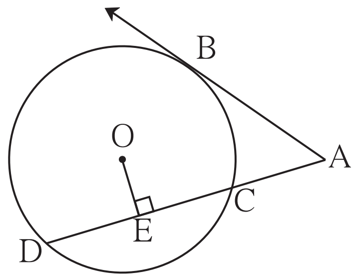
આકૃતિ 3.77

2. આકૃતિ 3.78માં, જીવા MN અને RS એકબીજાને બિંદુ Dમાં છેદે છે.
(1) જો RD = 15, DS = 4,
MD = 8 તો DN = કેટલા ?
(2) જો RS = 18, MD = 9,
DN = 8 તો DS = કેટલા ?



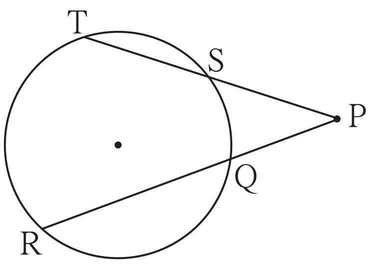
આકૃતિ 3.78

3. આકૃતિ 3.79માં, બિંદુ B સ્પર્શબિંદુ અને બિંદુ O વર્તુળકેન્દ્ર છે.
રેખા OE ⊥ રેખા AD, AB = 12,
AC = 8, હોય તો (1) AD (2) DC
અને (3) DE શોધો.



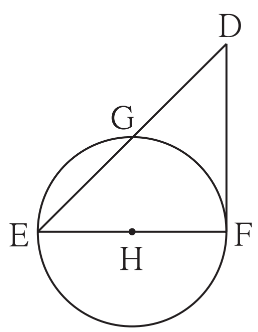
આકૃતિ 3.79

4. આકૃતિ 3.80માં, જો PQ = 6,
QR = 10, PS = 8 હોય
તો TS = કેટલા ?



આકૃતિ 3.80

5. આકૃતિ 3.81માં, રેખ EF વ્યાસ અને રેખ DF સ્પર્શક રેખાખંડ છે. વર્તુળની ત્રિજ્યા r છે. તો સાબિત કરો –
$DE \times GE = 4r^2$



આકૃતિ 3.81

1. નીચેના દરેક ઉપપ્રશ્નો માટે ચાર પર્યાયો આપેલા છે. તેમાંથી યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

(1) અનુક્રમે 5.5 સેમી અને 3.3 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતા બે વર્તુળો પરસ્પર સ્પર્શે છે. તેમના કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર કેટલા સેમી છે ?

(A) 4.4 (B) 8.8 (C) 2.2 (D) 8.8 અથવા 2.2

(2) પરસ્પર છેદતાં બે વર્તુળો એકબીજાના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય છે. જો તેમના કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર 12 સેમી હોય, તો પ્રત્યેક વર્તુળની ત્રિજ્યા કેટલા સેમી છે ?

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) કહી ન શકાય.

(3) 'એક વર્તુળ એક સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણની બધી બાજુને સ્પર્શતું હોય, તો તે સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ .... હોવો જોઈએ'. આ વિધાનની ખાલી જગ્યામાં યોગ્ય શબ્દ લખો.

(A) લંબચોરસ (B) સમભુજ ચતુષ્કોણ (C) ચોરસ (D) સમલંબ ચતુષ્કોણ

(4) એક વર્તુળના કેન્દ્રથી 12.5 સેમી અંતરે આવેલા એક બિંદુમાંથી તે વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શક રેખાખંડની લંબાઈ 12 સેમી છે. તો તે વર્તુળનો વ્યાસ કેટલા સેમી હશે ?

(A) 25 (B) 24 (C) 7 (D) 14

(5) એકબીજાને બહારથી સ્પર્શતા બે વર્તુળોના વધારેમાં વધારે કેટલા સામાન્ય સ્પર્શકો દોરી શકાય ?

(A) એક (B) બે (C) ત્રણ (D) ચાર

(6) O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના ચાપ ACBમાં $\angle ACB$ અંતર્ગત છે. જો $\angle ACB = 65^\circ$ તો m(ચાપ ACB) = કેટલું ?

(A) 65° (B) 130° (C) 295° (D) 230°

(7) એક વર્તુળની જીવા જીવા AB અને CD પરસ્પરને વર્તુળના અંતર્ભાગમાં બિંદુ E માં છેદે છે. જો (AE) = 5.6, (EB) = 10, (CE) = 8 હોય તો (ED) = કેટલું ?

(A) 7 (B) 8 (C) 11.2 (D) 9

(8) ચક્રીય $\square$ABCDમાં $\angle A$ના માપના બમણા એ $\angle C$ ના ત્રણગણા જેટલા છે. તો $\angle C$નું માપ કેટલું?

(A) 36° (B) 72° (C) 90° (D) 108°

(9)* એક જ વર્તુળ પર બિંદુ A, B, C એવી રીતે આવેલા છે કે, m(ચાપ AB) = m(ચાપ BC) = 120°, બંને ચાપમાં B સિવાય એક પણ સામાન્યબિંદુ નથી. તો Δ ABC ક્યા પ્રકારનો છે ?

(A) સમભુજ ત્રિકોણ (B) વિષમભુજ ત્રિકોણ

(C) કાટકોણ ત્રિકોણ (D) સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ

(10)રેખ XZ વ્યાસ ધરાવતા વર્તુળના અંતર્ભાગમાં એક બિંદુ Y આવેલું છે. તો નીચે પૈકી કેટલા વિધાનો સત્ય છે ?

(i) $\angle XYZ$ લઘુકોણ હોય તે શક્ય નથી.

(ii) $\angle XYZ$ કાટકોણ હોય તે શક્ય નથી.

(iii) $\angle XYZ$ ગુરૂકોણ છે.

(iv) $\angle XYZ$ ના માપ સંબંધી ચોક્કસ વિધાન કરી શકાય નહી.

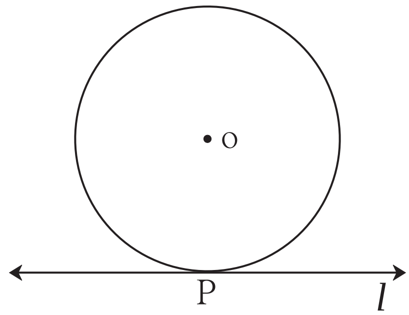
(A) ફકત એક (B) ફકત બે (C) ફકત ત્રણ (D) બધાં

2. બિંદુ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળને રેખા l બિંદુ Pમાં સ્પર્શે છે. જો વર્તુળ ત્રિજ્યા 9 સેમી હોય, તો નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તરો લખો.

(1) $d(O, P)$ = કેટલું ? શા માટે ?

(2) જો $d(O, Q) = 8$ સેમી હોય તો બિંદુ Qનું સ્થાન ક્યા હશે ?

(3) $d(O,R) = 15$ સેમી હોય તો રેખા l પર બિંદુ R કેટલામા સ્થાને હશે ? એ બિંદુ P થી કેટલા અંતરે હશે ?



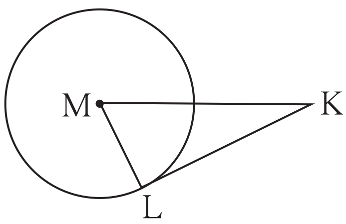
આકૃતિ 3.82

3. બાજુની આકૃતિમાં, બિંદુ M વર્તુળનું કેન્દ્ર અને રેખ KL સ્પર્શક રેખાખંડ છે.

જો MK = 12, KL = $6\sqrt{3}$ હોય તો

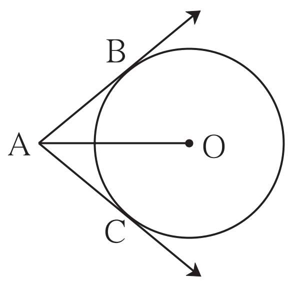
(1) વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

(2) $\angle K$ અને $\angle M$ ના માપ શોધો.

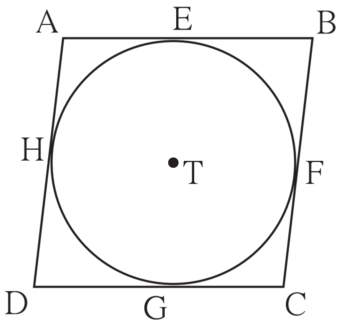


આકૃતિ 3.83

4. આકૃતિ 3.84માં, બિંદુ O વર્તુળનું કેન્દ્ર અને રેખ AB અને રેખ AC સ્પર્શક રેખાખંડ છે. જો જો વર્તુળની ત્રિજ્યા r હોય અને $l(AB) = r$ હોય તો □ ABOC એ ચોરસ બને છે. એ દર્શાવો.



આકૃતિ 3.84



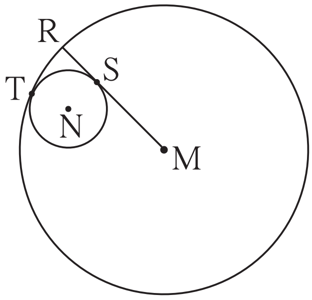
આકૃતિ 3.85

5. આકૃતિ 3.85માં, સમાંતરભુજ $\square$ABCD એ કેન્દ્ર T વાળા વર્તુળને ફરતે આવેલો છે. (એટલે કે તે ચતુષ્કોણની બાજુ વર્તુળને સ્પર્શ કરે છે.) બિંદુ E, F, G અને H સ્પર્શબિંદુઓ છે. જો AE = 4.5 અને EB = 5.5, હોય તો AD શોધો.

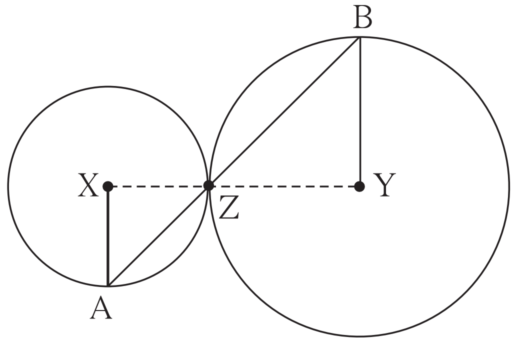
6. આકૃતિ 3.86માં, N કેન્દ્રવાળું વર્તુળ, M કેન્દ્રવાળા વર્તુળને બિંદુ Tમાં સ્પર્શે છે. મોટા વર્તુળની ત્રિજ્યા નાના વર્તુળને બિંદુ Sમાં સ્પર્શે છે. જો મોટા અને નાના વર્તુળોની ત્રિજ્યા અનુક્રમે 9 સેમી 2.5 સેમી હોય તો નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર શોધો અને તે પરથી MS : SR ગુણોત્તર શોધો.

(1) MT = કેટલા ? (2) MN = કેટલા ?

(3) $\angle$NSM = કેટલા ?



આકૃતિ 3.86



આકૃતિ 3.87

7. બાજુની આકૃતિમાં કેન્દ્ર X અને Y વાળા વર્તુળો પરસ્પર બિંદુ Zમાં સ્પર્શે છે. બિંદુ Z માંથી પસાર થતો છેદકે તે વર્તુળને અનુક્રમે બિંદુ A અને બિંદુ Bમાં છેદે છે તો સાબિત કરો કે, ત્રિજ્યા XA || ત્રિજ્યા YB.

નીચે આપેલી સાબિતીમાં ખાલી જગ્યા પૂર્ણ કરીને સાબિતી પૂર્ણ કરો.

રચના : રેખ XZ અને .... દોર્યા.

સાબિતી : સ્પર્શવર્તુળોના પ્રમેય અનુસાર, બિંદુ X, Z, Y એ .... છે.

$\therefore$ $\angle$ XZA $\cong$ .... (અભિકોણ)

$\angle$ XZA = $\angle$ BZY = a ધારીએ..... (I)

હવે, રેખ XA $\cong$ રેખ XZ .... (..........)

$\therefore$ $\angle$ XAZ = ... = a .... (સમદ્વિભુજ ત્રિકોણનો પ્રમેય) (II)

તેમ જ રેખ YB $\cong$ .... (..........)

$\therefore$ $\angle$ BZY = ... = a .... (..........) (III)

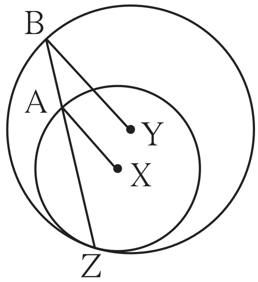
$\therefore$ (I), (II) અને (III) પરથી,

$\angle$ XAZ = ...

$\therefore$ ત્રિજ્યા XA || ત્રિજ્યા YB .... (..........)

8. આકૃતિ 3.88માં, કેન્દ્ર X અને Y વાળા અંતઃસ્પર્શી વર્તુળો બિંદુ Z માં સ્પર્શે છે. મોટા વર્તુળની જીવા BZ નાના વર્તુળને બિંદુ Aમાં છેદે છે

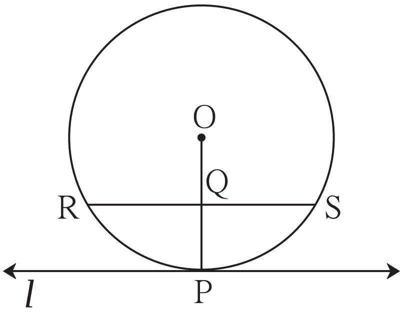
તો સાબિત કરો કે, રેખ AX || રેખ BY.



આકૃતિ 3.88

9. બાજુની આકૃતિ 3.89માં, રેખા l એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળને બિંદુ Pમાં સ્પર્શે છે. બિંદુ Q એ ત્રિજ્યા OPનું મધ્યબિંદુ છે. બિંદુ Qને સમાવતી જીવા RS || રેખા l.

જો RS 12 સેમી હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

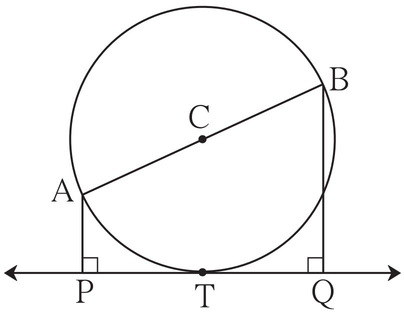


આકૃતિ 3.89

10★. આકૃતિ 3.90માં, C કેન્દ્રવાળા વર્તુળનો વ્યાસ રેખ AB છે. વર્તુળનો સ્પર્શક PQ વર્તુળને બિંદુ Tમાં સ્પર્શે છે.

રેખ AP $\perp$ રેખા PQ અને રેખ BQ $\perp$ રેખા PQ.

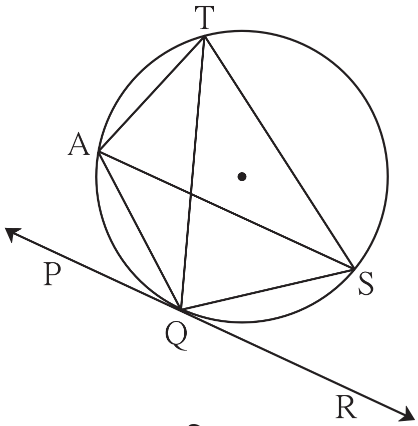
તો સાબિત કરો કે, રેખ CP $\cong$ રેખ CQ.



આકૃતિ 3.90

11★. પ્રત્યેક 3 સેમી ત્રિજ્યાના A, B અને C કેન્દ્ર ધરાવતા ત્રણ વર્તુળો એવી રીતે દોરો, કે પ્રત્યેક વર્તુળ બીજા બે વર્તુળોને સ્પર્શે છે.

12★. વર્તુળના કોઈપણ ત્રણ બિંદુઓ સમરેખ હોતા નથી તે સાબિત કરો.



આકૃતિ 3.91

13. આકૃતિ 3.91માં રેખા PR વર્તુળને બિંદુ Qમાં સ્પર્શે છે. આ આકૃતિના આધારે નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તરો લખો.

(1) $\angle$TAQ અને $\angle$ TSQ ના માપોનો સરવાળો કેટલો ?

(2) $\angle$AQP ને એકરૂપ ખૂણા કયા ?

(3) $\angle$QTS ને એકરૂપ ખૂણા કયા ?

(4) જો $\angle TAS = 65^\circ$, તો $\angle$TQS અને ચાપ TS ના માપ શોધો.

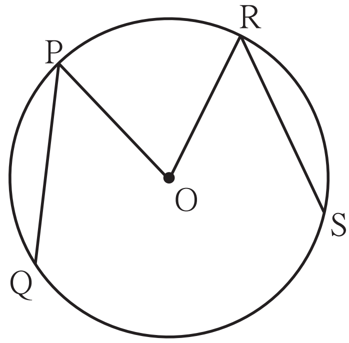
(5) જો $\angle AQP = 42^\circ$ અને $\angle SQR = 58^\circ$, તો $\angle$ATSનું માપ શોધો.

14. બાજુની આકૃતિમાં, O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા રેખ PQ અને રેખ RS એકરૂપ છે. જો $\angle POR = 70^\circ$ અને m(ચાપ RS) = 80°, તો –

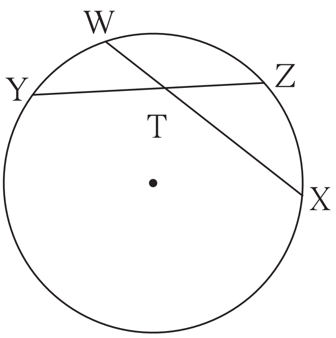
(1) m(ચાપ PR) કેટલા ?

(2) m(ચાપ QS) કેટલા ?

(3) m(ચાપ QSR) કેટલા ?



આકૃતિ 3.92



આકૃતિ 3.93

15. આકૃતિ 3.93માં, m(ચાપ WY) = 44°, m(ચાપ ZX) = 68°, હોય તો

(1) $\angle$ZTX નું માપ નક્કી કરો.

(2) WT = 4.8, TX = 8.0,
YT = 6.4 હોય તો TZ = કેટલા ?

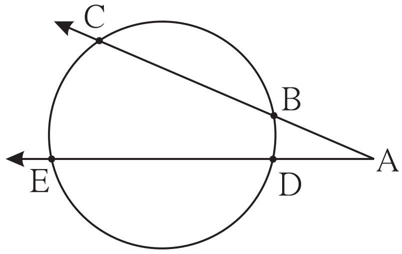
(3) WX = 25, YT = 8,
YZ = 26, હોય તો WT = કેટલા ?

16. આકૃતિ 3.94 માં,

(1) m(ચાપ CE) = 54°,
m(ચાપ BD) = 23°, તો ∠CAE = કેટલા ?

(2) AB = 4.2, BC = 5.4,
AE = 12.0 તો AD = કેટલા ?

(2) AB = 3.6, AC = 9.0,
AD = 5.4 તો AE = કેટલા ?



આકૃતિ 3.94

17. બાજુમાં આપેલી આકૃતિમાં, જીવા EF ∥ જીવા GH. તો સાબિત કરો, જીવા EG ≅ જીવા FH .
નીચેની ખાલી જગ્યા પૂર્ણ કરી સાબિતી લખો.

સાબિતી : રેખ GF દોર્યો.

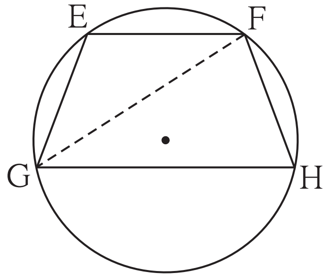
∠ EFG = ∠ FGH $\boxed{\quad}$ (I)

∠ EFG = $\boxed{\quad}$ (અંતર્ગત કોણનો પ્રમેય) (II)

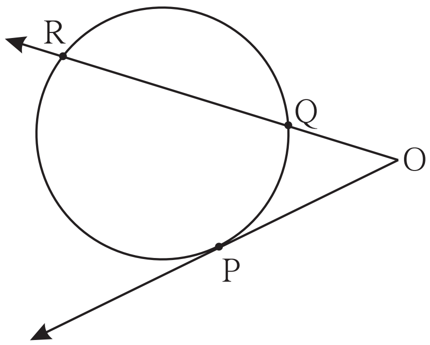
∠ FGH = $\boxed{\quad}$ (અંતર્ગત કોણનો પ્રમેય) (III)

∴ m (ચાપ EG) = $\boxed{\quad}$ [(I), (II) અને (III) પરથી]

જીવા EG ≅ જીવા FH $\boxed{\quad}$ ($\boxed{\quad}$)



આકૃતિ 3.95



આકૃતિ 3.96

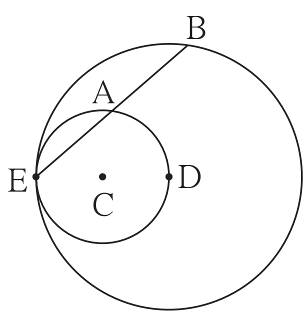
18. બાજુની આકૃતિમાં બિંદુ P સ્પર્શ બિંદુ છે.

(1) m(ચાપ PR) = 140°,
∠ POR = 36° હોય તો,
m(ચાપ PQ) = નું માપ શોધો.

(2) OP = 7.2, OQ = 3.2 તો
OR = કેટલા ? QR = કેટલા ?

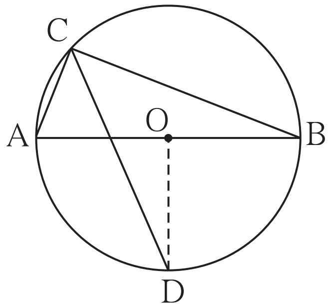
(3) OP = 7.2, OR = 16.2, હોય તો,
QR = કેટલા ?

19. બાજુની આકૃતિમાં, C કેન્દ્રવાળું વર્તુળ, D કેન્દ્રવાળા વર્તુળને બિંદુ Eમાં અંદરથી સ્પર્શે છે. અંદરના વર્તુળ પર બિંદુ D આવેલું છે. બહારના વર્તુળની જીવા EB અંદરના વર્તુળને બિંદુ Aમાં છેદે છે. તો સાબિત કરો કે, રેખ EA ≅ રેખ AB.



આકૃતિ 3.97

20. આકૃતિ 3.98માં, O કેન્દ્રવાળા વર્તુળનો વ્યાસ રેખ AB છે. અંતર્ગત કોણ ∠ACBનો દુભાજક વર્તુળને બિંદુ D માં છેદે છે. તો રેખ AD ≅ રેખ BD સાબિત કરો. નીચે આપેલી ખાલી જગ્યા પૂર્ણ કરીને સાબિતી લખો.



આકૃતિ 3.98

સાબિતી : રેખ OD દોર્યો.

∠ ACB = ☐ (અર્ધવર્તુળમાં અંતર્ગત કોણનો ખૂણો)

∠ DCB = ☐ (રેખ CD એ ∠ C નો દુભાજક છે.)

m(ચાપ DB) = ☐ (અંતર્ગત કોણનો પ્રમેય)

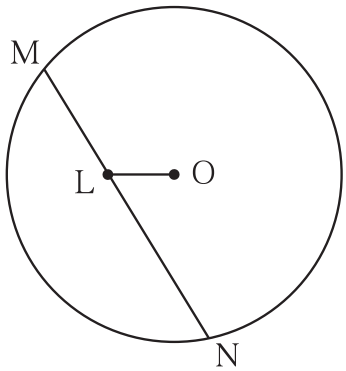
∠ DOB = ☐ (ચાપના માપની વ્યાખ્યા) (I)

રેખ OA ≅ રેખOB ☐ (II)

∴ રેખ OD એ રેખ AB ની ☐ રેખા છે. (I) અને (II) પરથી

∴ રેખ AD ≅ રેખ BD ☐

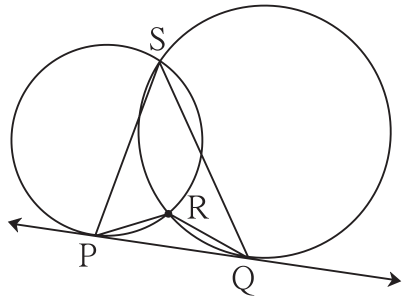
21. બાજુની આકૃતિ 3.99માં, રેખ MN, O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા છે. MN = 25, જીવા MN પર બિંદુ L એવી રીતે આવેલું છે જેથી ML = 9 અને d(O,L) = 5 હોય તો આ વર્તુળની ત્રિજ્યાની લંબાઈ શોધો.



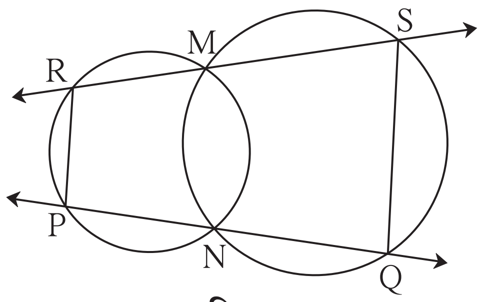
આકૃતિ 3.99

22★. આકૃતિ 3.100માં, બે વર્તુળો પરસ્પરને બિંદુ S અને R માં છેદે છે. રેખા PQ એ તેમનો સામાન્ય સ્પર્શક છે જે તેમને બિંદુ P અને Q માં સ્પર્શે છે. તો સાબિત કરો કે –

∠ PRQ + ∠ PSQ = 180°



આકૃતિ 3.100

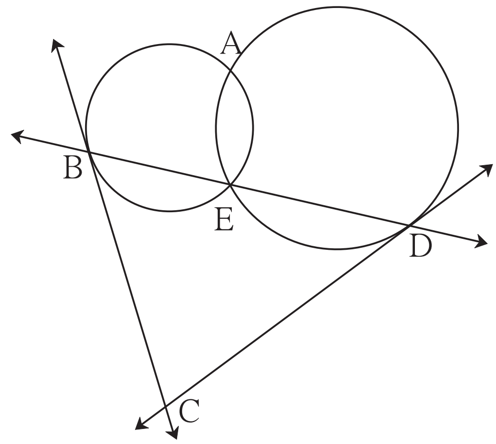


આકૃતિ 3.101

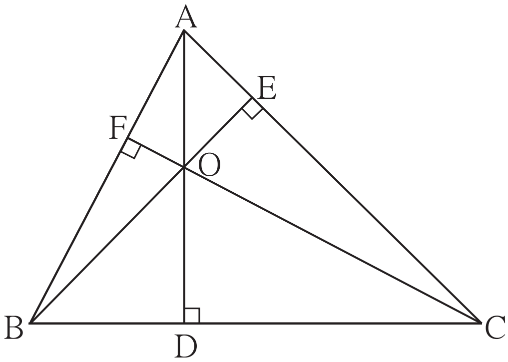
23★. આકૃતિ 3.101માં, બે વર્તુળો એક બીજાને બિંદુ M અને N માં છેદે છે. બિંદુ M અને N માંથી દોરેલા છેદકો બિંદુ R અને Sમાં, અને બિંદુ P અને Q માં છેદે છે. તો રેખ PR || રેખ QS સાબિત કરો.

24★. આકૃતિ 3.102માં, બે વર્તુળો પરસ્પર બિંદુ A અને E માં છેદે છે.બિંદુ Eમાંથી દોરેલી તેમની સામાયિક વૃત્તછેદિકા વર્તુળોને બિંદુ B અને Dમાં છેદે છે.બિંદુ B અને D માંથી દોરેલા સ્પર્શકો એકબીજાને બિંદુ Cમાં છેદે છે.

સાબિત કરો : □ ABCD ચક્રીય છે.



આકૃતિ 3.102



આકૃતિ 3.103

25★. આકૃતિ 3.103માં, ΔABCમાં, રેખ AD $\perp$ બાજુ BC, રેખ BE $\perp$ બાજુ AC, રેખ CF $\perp$ બાજુ AB. બિંદુ O એ શિરોલંબોનું સપાતી (સંગામી) બિંદુ છે. તો બિંદુ O એ Δ DEFનું અંતઃકેન્દ્ર છે, તે સાબિત કરો.

ICT Tools or Links

જિઓજેબ્રાની મદદથી વિવિધ વર્તુળો દોરો.
તેમના જીવા અને સ્પર્શકો દોરો અને ગુણધર્મ તપાસો.

4 ભૌમિતિક રચના

ચાલો, શીખીએ.

- સરૂપ ત્રિકોણોની રચના
  - ✻ બે સરૂપ ત્રિકોણો પૈકી એક ત્રિકોણની બાજુ અને બીજા ત્રિકોણોની સંગત બાજુઓનો ગુણોત્તર આપ્યો હોય ત્યારે બીજો ત્રિકોણ દોરવો.
    (i) એક પણ સામાન્ય શિરોબિંદુ ન હોય ત્યારે
    (ii) એક શિરોબિંદુ સામાન્ય હોય ત્યારે.
- વર્તુળનો સ્પર્શક દોરવો.
  - ✻ વર્તુળનો વર્તુળ પરના બિંદુમાંથી સ્પર્શક દોરવો.
    (i) વર્તુળ કેન્દ્રનો ઉપયોગ કરીને.
    (ii) વર્તુળ કેન્દ્રનો ઉપયોગ કર્યા વિના.
  - ✻ વર્તુળને તેની બહારના બિંદુમાંથી સ્પર્શક દોરવો.

યાદ કરીએ.

નીચેની રચના આપણે પાછલા ધોરણોમાં શીખ્યા છીએ. તે રચનાનું પુનરાવર્તન કરો.

- આપેલી રેખાને તેની બહારના બિંદુમાંથી સમાંતર રેખા દોરવી.
- આપેલી રેખાખંડનો લંબ દુભાજક દોરવો.
- ત્રિકોણની બાજુઓ અને ખૂણા પૈકી પૂરતા ઘટક આપ્યા હોય ત્યારે ત્રિકોણ દોરવો.
- આપેલા રેખાખંડના આપેલી સંખ્યા જેટલા સમાન ભાગ કરવા.
- આપેલા રેખાખંડના આપેલા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરવું.
- આપેલા ખૂણાનો એકરૂપ હોય તેવો ખૂણો દોરવો.

ધોરણ નવમાં તમે શાળાના પરિસરનો નકશો તૈયાર કરવાનો ઉપક્રમ કર્યો છે. કોઈ ઇમારત બાંધતા પહેલા તે ઇમારતની રૂપરેખા તૈયાર કરવામાં આવે છે. શાળાનો પરિસર અને તેનો નકશો, ઇમારત અને તેની રૂપરેખા પરસ્પર સરૂપ હોય છે. ભૂગોળ, વાસ્તુશાસ્ત્ર, યંત્રશાસ્ત્ર વગેરે ક્ષેત્રોમાં સરૂપ આકૃતિઓ દોરવાની જરૂર પડે છે. ત્રિકોણ સૌથી સરળબંધ આકૃતિ છે. માટે આપેલા ત્રિકોણને સરૂપ ત્રિકોણ કેવી રીતે દોરાય તે જોઈએ.

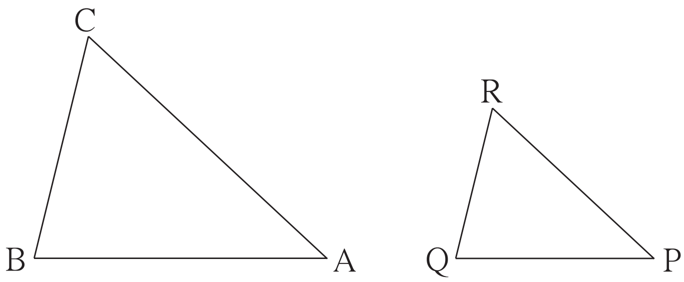
જાણી લઈએ.

સરૂપ ત્રિકોણની રચના

એક ત્રિકોણની બાજુ આપી હોય ત્યારે તેને સરૂપ હોય અને ગુણોત્તરની શરત પૂર્ણ કરતો હોય તેવો ત્રિકોણ દોરવો.

બે સરૂપ ત્રિકોણોની સંગત બાજુઓ પ્રમાણસર હોય છે અને તેમના સંગત ખૂણા એકરૂપ હોય છે. તેનો ઉપયોગ કરીને આપેલાં ત્રિકોણને સરૂપ ત્રિકોણ દોરી શકાય છે.

ઉદા. **(1)** Δ ABC ~ Δ PQR, Δ ABCમાં AB = 5.4 સેમી, BC = 4.2 સેમી, AC = 6.0 સેમી. AB: PQ = 3:2 હોય તો Δ ABC અને Δ PQR દોરો.



આકૃતિ 4.1
કાચી આકૃતિ

સૌ પ્રથમ આપેલા માપનો Δ ABC દોરો.

Δ ABC અને Δ PQR સરૂપ છે.

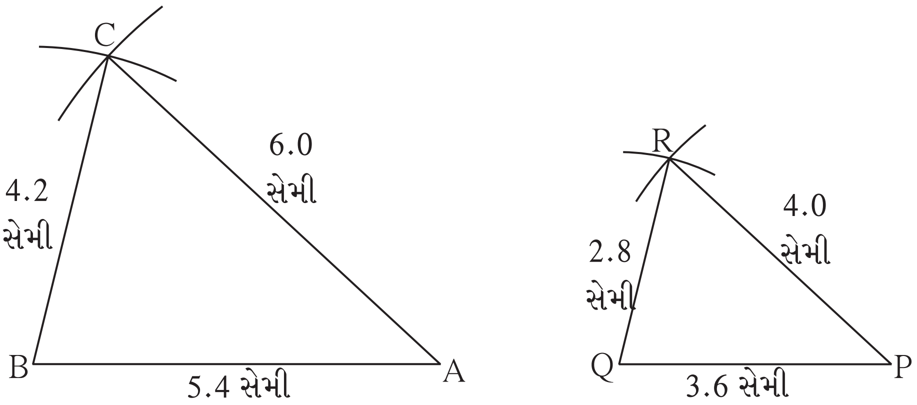
$\therefore$ તેમની સંગત બાજુ પ્રમાણસર છે.

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{3}{2} \quad \text{..........} \ (I)$$

AB, BC, AC બાજુની લંબાઈ આપેલી હોવાથી ઉપરના સમીકરણો પરથી PQ, QR, PR બાજુની લંબાઈ મળશે.
સમીકરણ [I] પરથી

$$\frac{5.4}{PQ} = \frac{4.2}{QR} = \frac{6.0}{PR} = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ PQ = 3.6 સેમી, QR = 2.8 સેમી અને PR = 4.0 સેમી



આકૃતિ 4.2

Δ PQR ની બધી બાજુની લંબાઈ મળતા આપણે તે ત્રિકોણની રચના કરીએ.

વધુ માહિતી માટે

કેટલીક વાર, આપેલા ત્રિકોણને સરૂપ હોય તેવો ત્રિકોણ દોરવાનો હોય છે પરંતુ તેની બાજુ ફૂટપટ્ટીથી માપીને દોરી શકાય તેમ નથી હોતી. આવા સમયે, 'આપેલા રેખાખંડના આપેલી સંખ્યા જેટલા સમાન ભાગ કરવા.' આ રચનાનો ઉપયોગ કરીને ત્રિકોણની બાજુ દોરી શકાય છે.

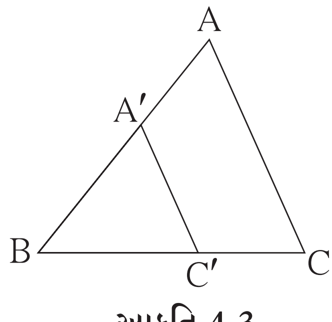
દા.ત. : બાજુ AB ની લંબાઈ $\frac{11.6}{3}$ સેમી હોય, તો 11.6 સેમી લંબાઈના રેખાખંડના 3 સમાન ભાગ કરીને AB રેખાખંડ દોરી શકાય.

ઉદા.(1) માંની રચનામાં આપેલા અને દોરવાના ત્રિકોણોમાં સામાન્ય શિરોબિંદુ ન હતું. એક શિરોબિંદુ સામાન્ય હોય તો ત્રિકોણની રચના નીચેના ઉદાહરણમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સરળતાથી કરી શકાય છે.

ઉદા.(2) કોઈપણ માપનો Δ ABC દોરો.

Δ ABC ને સરૂપ Δ A′BC′ એવી રીતે દોરો

જેથી AB : A′B = 5:3



આકૃતિ 4.3

કાચી આકૃતિ

વિશ્લેષણ : B, A, A′ તે જ રીતે B, C, C′ સમરેખ લેશું.

$\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ $\therefore$ $\angle ABC = \angle A'BC'$

$\frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}$

$\therefore$ Δ ABCની બાજુઓ Δ A′BC′ ની સંગત બાજુઓ કરતા મોટી છે.

$\therefore$ રેખ BCના 5 સમાન ભાગ કરીએ તો રેખ BC′ની લંબાઈ તેના ત્રણ ભાગ જેટલી હશે.

Δ ABC દોરી રેખ BC પરના બિંદુ Bથી ત્રણ ભાગ જેટલા અંતરે આવેલું બિંદુ C′ હોવું જોઈએ. બિંદુ C′માંથી રેખ ACને સમાંતર દોરેલી રેખા, રેખ BA ને જે બિંદુમાં છેદશે તે બિંદુ A′ હશે.

$\dfrac{BA'}{BA} = \dfrac{BC'}{BC} = \dfrac{3}{5}$ એટલે કે, $\dfrac{BA}{BA'} = \dfrac{BC}{BC'} = \dfrac{5}{3}$ .... વ્યસ્તાંક (વ્યસ્ત) ક્રિયા કરતાં

રચનાના પગથિયા :

(1) કોઈપણ માપનો Δ ABC દોરો.

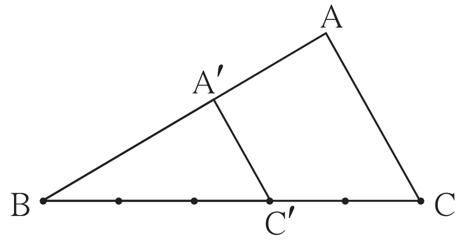
(2) રેખ BC ના પાંચ સમાન ભાગ કરો.

(3) બિંદુ B થી ત્રીજા બિંદુને C′ નામ આપો.

$\therefore$ $BC' = \dfrac{3}{5} BC$

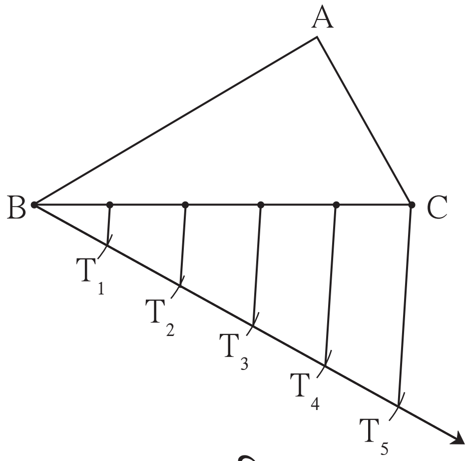
(4) હવે C′ માંથી રેખ CA ને સમાંતર રેખા દોરો. તે રેખ AB ને જ્યાં છેદે છે, તે બિંદુને A′ નામ આપો.

(5) Δ ABC ને સરૂપ Δ A′BC′ એ અપેક્ષિત ત્રિકોણ છે.



આકૃતિ 4.4

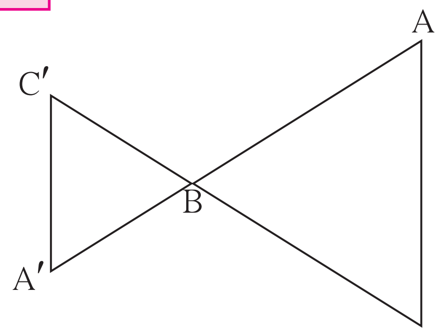
નોંધ : રેખ BCના પાંચ સમાન ભાગ કરતી વખતે રેખા BCની જેમ બિંદુ Bમાંથી Aની વિરૂધ્ધ બાજુએ એક કિરણ દોરીને ભાગ કરવા સરળ બને છે. તે કિરણ પર $BT_1 = T_1T_2 = T_2T_3 = T_3T_4 = T_4T_5$ એમ સમાન ભાગ કરો. T_5C જોડો અને T_1, T_2, T_3, T_4 માંથી રેખ AC ને સમાંતર રેખા દોરો.



આકૃતિ 4.5

વિચાર કરીએ.

સરૂપ ત્રિકોણ દોરવા માટે બાજુની આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પણ Δ A′BC′ દોરી શકાય.
આ આકૃતિ પ્રમાણે Δ A′BC′ દોરવો હોય તો રચનાના પગથિયામાં શું ફેરફાર કરવો પડશે ?



આકૃતિ 4.6

ઉદા.(3) Δ ABCને સરૂપ Δ A′BC′ એવો દોરો. જેમાં AB : A′B = 5:7

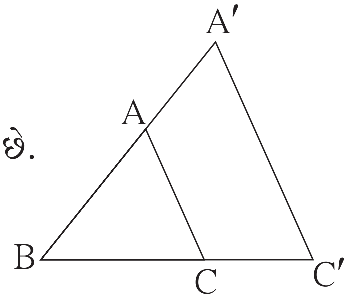
વિશ્લેષણ : બિંદુ B, A, A′ તે જ રીતે બિંદુ B, C, C′ સમરેખ લેશું.

Δ ABC ~ Δ A′BC′ અને AB : A′B = 5:7

$\therefore$ Δ ABCની બાજુઓ Δ A′BC′ની સંગત બાજુઓ કરતાં નાની છે.

તેમ જ $\angle ABC \cong \angle A'BC'$

આ બાબતને ધ્યાનમાં લઈને કાચી આકૃતિ દોરીશું.



આકૃતિ 4.7

કાચી આકૃતિ

હવે, $\frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7}$

$\therefore$ રેખ BCના 5 સમાન ભાગ કરીએ. બિંદૂ C′ કિરણ BC પર Bથી સાત ભાગ અંતરે હશે.

$\therefore$ Δ ABC દોરીને રેખ BCના પાંચ સમાન ભાગ કરીને Bથી સાત ભાગની લંબાઈ જેટલા અંતરે કિરણ BCનું બિંદુ C′ હશે.

પ્રમાણના મૂળભૂત પ્રમેય અનુસાર, બિંદુ C′માંથી બાજુ ACને સમાંતર રેખા દોરીએ તો તે કિરણ BAને જે બિંદુમાં છેદે છે, તે બિંદુ A′ હશે.

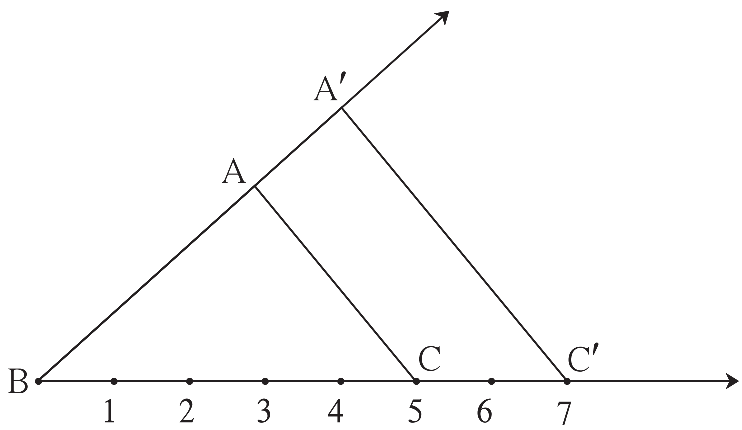
રેખ A′C′ દોરતા અપેક્ષિત ત્રિકોણ Δ A′BC′ મળશે.

રચનાના પગથિયા :

(1) કોઈપણ માપનો Δ ABC દોરો.

(2) રેખ BCના 5 સમાન ભાગ કરો. કિરણ BC પર બિંદુ C′ એવી રીતે લો જેથી રેખ BC′ ની લંબાઈ રેખ BC ના એક ભાગના સાત ગણા જેટલી હશે.

(3) રેખ ACને C′ માંથી સમાંતર રેખા દોરો. તે રેખા કિરણ BA ને જયાં છેદે છે, તે બિંદુને A′ નામ આપો. Δ A′BC′ એ Δ ABC ને સરૂપ હોય તેવો અપક્ષિત ત્રિકોણ થશે.



આકૃતિ 4.8

મહાવરાસંગ્રહ 4.1

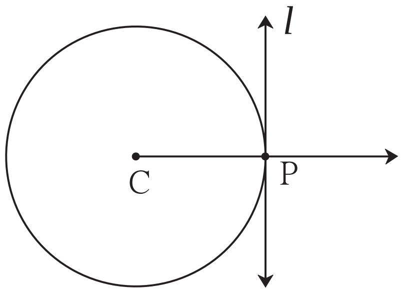
1. Δ ABC ~ Δ LMN , Δ ABC એવો દોરો, જેમા AB = 5.5 સેમી, BC = 6 સેમી, CA = 4.5 સેમી અને $\frac{BC}{MN} = \frac{5}{4}$ હોય તો Δ ABC અને Δ LMN દોરો.
2. Δ PQR ~ Δ LTR, Δ PQRમાં PQ = 4.2 સેમી, QR = 5.4 સેમી, PR = 4.8 સેમી અને $\frac{PQ}{LT} = \frac{3}{4}$ હોય તો Δ PQR અને Δ LTR દોરો.
3. Δ RST ~ Δ XYZ, Δ RSTમાં RS = 4.5 સેમી, $\angle$RST = 40°, ST = 5.7 સેમી અને $\frac{RS}{XY} = \frac{3}{5}$ હોય તો Δ RST અને Δ XYZ દોરો.
4. Δ AMT ~ Δ AHE, Δ AMTમાં AM = 6.3 સેમી, $\angle$TAM = 50°, AT = 5.6 સેમી અને $\frac{AM}{AH} = \frac{7}{5}$ હોય તો Δ AHE દોરો.

જાણી લઈએ.

આપેલા વર્તુળને તેના પરના બિંદુમાંથી સ્પર્શક દોરવો.

(i) વર્તુળના કેન્દ્રનો ઉપયોગ કરીને.

વિશ્લેષણ :



આકૃતિ 4.9

ધારો કે C કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પરના P બિંદુમાંથી પસાર થતી, રેખા l એ સ્પર્શક દોરવાનો છે.

ત્રિજ્યાના બાહ્ય છેડેથી દોરેલી લંબરેખા એ વર્તુળનો સ્પર્શક હોય છે, તે ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીશું, ધારો કે ત્રિજ્યા CP દોરી. તો રેખ CP $\perp$ રેખા l એટલે કે ત્રિજ્યા CP ને બિંદુ P માંથી પસાર થતી લંબ રેખા દોરીએ, તે અપેક્ષિત સ્પર્શક થશે.

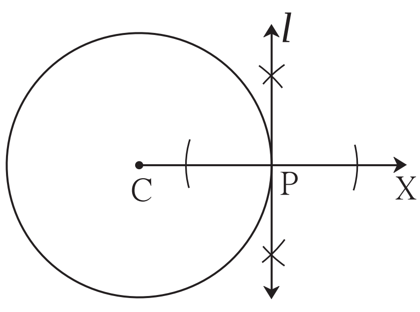
રેખા પર આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થતી અને તે રેખાને લંબ હોય તેવી રેખાની રચના કરવાની હોવાથી સુવિધા માટે કિરણ CP દોરીને રેખા l ની રચના કરીશું.

રચનાના પગથિયા :

(1) C કેન્દ્રવાળું એક વર્તુળ દોરો. તેના પર બિંદુ P લો.

(2) કિરણ CP દોરો.

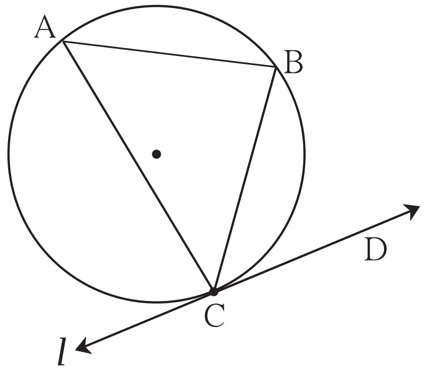
(3) બિંદુ P માંથી કિરણ CX ને લંબ રેખા l દોરો. રેખા l એ બિંદુ P માંથી પસાર થતો વર્તુળનો અપેક્ષિત સ્પર્શક છે.



આકૃતિ 4.10

ii) વર્તુળના કેન્દ્રનો ઉપયોગ કર્યા સિવાય વર્તુળ પરના આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થતો સ્પર્શક દોરવો.

ઉદાહરણ : કોઈપણ માપની ત્રિજ્યાનું વર્તુળ દોરો. તેના પર કોઈપણ એક બિંદુ C લો. વર્તુળના કેન્દ્રનો ઉપયોગ કર્યા સિવાય, બિંદુ C માંથી પસાર થતો સ્પર્શક દોરો.



આકૃતિ 4.11

વિશ્લેષણ :

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે રેખા l બિંદુ Cમાંથી પસાર થતો સ્પર્શક છે. રેખ CB એ જીવા અને $\angle CAB$ અંતર્ગત કોણ દોર્યો. સ્પર્શક-છેદક ખૂણાના પ્રમેય અનુસાર $\angle CAB \cong \angle BCD$.

સ્પર્શક-છેદક ખૂણાના પ્રમેયના પ્રતિપ્રમેય અનુસાર,

જો $\angle CAB \cong \angle BCD$, હોય તો રેખા l વર્તુળનો સ્પર્શક હોય છે.

માટે રેખ CB એ વર્તુળની જીવા અને $\angle CAB$ અંતર્ગત કોણ દોરીશું. $\angle BCD$ની રચના એવી રીતે કરીશું જેથી, $\angle BCD \cong \angle BAC$.

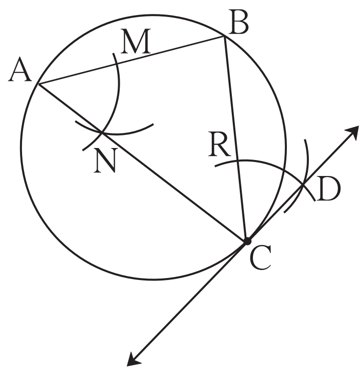
રેખા CD એ આપેલા વર્તુળના બિંદુ Cમાંથી પસાર થતી રેખા તે વર્તુળની સ્પર્શક થશે.

રચનાના પગથિયા :

(1) એક વર્તુળ દોરો. વર્તુળ પર કોઈપણ એક C બિંદુ લો.

(2) જીવા CB અને અંતર્ગત કોણ $\angle CAB$ દોરો.

(3) કંપાસમાં યોગ્ય માપની ત્રિજ્યા લો અને બિંદુ A કેન્દ્ર લઈને $\angle BAC$ની ભુજાને બિંદુ M અને બિંદુ N માં છેદતાં ચાપ દોરો.



આકૃતિ 4.12

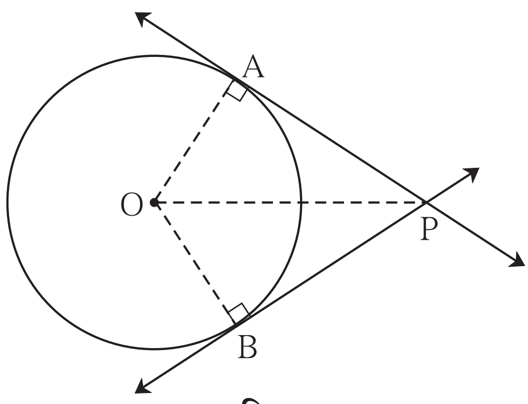
(4) તે જ ત્રિજ્યા અને કેન્દ્ર C લઈને, જીવા CB ને છેદતો ચાપ દોરો. તે છેદનબિંદુને R નામ આપો.

(5) કંપાસમાં MN જેટલી ત્રિજ્યા લો. કેન્દ્ર R લઈ પહેલાં દોરેલા ચાપને છેદતો બીજો એક ચાપ દોરો. તે છેદનબિંદુને D નામ આપો. રેખા CD દોરો. રેખા CD એ વર્તુળનો સ્પર્શક છે.

(ઉપરની આકૃતિમાં $\angle MAN \cong \angle BCD$ નું કારણ ધ્યાનમાં લો. રેખાખંડ MN અને રેખાખંડ RD દોરતાં, બાબાબા કસોટી અનુસાર $\Delta MAN \cong \Delta RCD$. $\therefore \angle MAN \cong \angle BCD$)

આપેલા વર્તુળને બહારના બિંદુમાંથી સ્પર્શક દોરવો.

વિશ્લેષણ :



આકૃતિ 4.13

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, ધારો કે O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના બાહ્યભાગમાં બિંદુ P છે. બિંદુ P માંથી દોરેલો સ્પર્શક, વર્તુળને બિંદુ A અને બિંદુ Bમાં સ્પર્શે છે. બિંદુ A અને બિંદુ Bના વર્તુળ પર સ્થાન નિશ્ચિત કરતાં આવડે, તો સ્પર્શક PA અને PB દોરી શકાશે. કારણ કે ત્રિજ્યા OA અને OB દોરીએ તો ત્રિજ્યા OA $\perp$ રેખા PA અને ત્રિજ્યા OB $\perp$ રેખા PB.

Δ OAP અને Δ OBP બંને કાટકોણ ત્રિકોણ છે, OP તે બંનેનો કર્ણ છે. રેખ OPને વ્યાસ ધરાવતું વર્તુળ દોરીએ તો તે O કેન્દ્રવાળા વર્તુળને જે બિંદુમાં છેદશે તે A અને B હશે કારણ કે અર્ધવર્તુળમાં અંતર્ગત કોણ કાટકોણ હોય છે.

રચનાના પગથિયા :

(1) કોઈપણ માપની ત્રિજ્યા અને O કેન્દ્ર ધરાવતું એક વર્તુળ દોરો.

(2) વર્તુળના બાહ્યભાગમાં એક બિંદુ P લો.

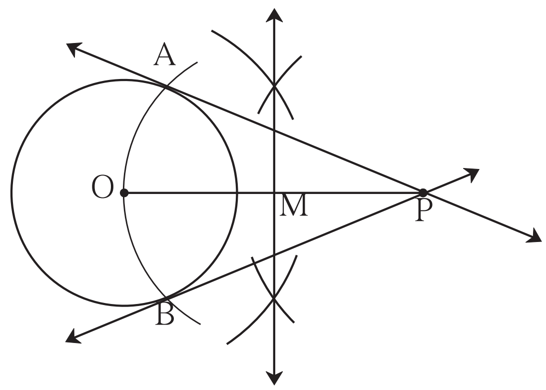
(3) રેખ OP દોરો. રેખ OPનો લંબદુભાજક દોરીને મધ્યબિંદુ M મેળવો.

(4) કેન્દ્ર M અને ત્રિજ્યા OM લઈને વર્તુળ ચાપ દોરો.

(5) આ વર્તુળ ચાપ આપેલા વર્તુળને બિંદુ A અને Bમાં છેદે છે.

(6) રેખા PA અને રેખા PB દોરો.

રેખા PA અને રેખા PB વર્તુળના અપેક્ષિત સ્પર્શકો છે.



આકૃતિ 4.14

મહાવરાસંગ્રહ 4.2

1. કેન્દ્ર P અને ત્રિજ્યા 3.2 સેમી ધરાવતા વર્તુળને તેના પર આવેલા બિંદુ Mમાંથી સ્પર્શક દોરો.

2. 2.7 સેમી સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતું વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળને તેના પરના બિંદુમાંથી સ્પર્શક દોરો.

3. 3.6 સેમી સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતું વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળને તેના પરના કોઈપણ બિંદુમાંથી વર્તુળના કેન્દ્રનો ઉપયોગ કર્યા સિવાય સ્પર્શક દોરો.

4. 3.3 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતું વર્તુળ દોરો. તેમાં 6.6 સેમી લંબાઈની જીવા PQ દોરો. બિંદુ P અને બિંદુ Q માંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરો. સ્પર્શક બાબતે તમારું નિરીક્ષણ નોંધો.

5. 3.4 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતું વર્તુળ દોરો. તેમાં 5.7 સેમી લંબાઈની જીવા MN દોરો. બિંદુ M અને બિંદુ N માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો દોરો.
6. P કેન્દ્ર અને 3.4 સેમી ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુળ દોરો. વર્તુળના કેન્દ્રથી 5.5 સેમી અંતરે બિંદુ Q લો. Q બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરો.
7. 4.1 સેમી ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુળ દોરો. વર્તુળના કેન્દ્રથી 7.3 સેમી અંતરે આવેલા બિંદુમાંથી સ્પર્શક દોરો.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 4

1. યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

(1) વર્તુળ પર આપેલા બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરી શકાતા સ્પર્શકની સંખ્યા .... હોય છે.

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

(2) વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને વધુમાં વધુ .... સ્પર્શકો દોરી શકાય.

(A) 2 (B) 1 (C) એક અને એક જ (D) 0

(3) જો Δ ABC ~ Δ PQR , $\frac{AB}{PQ} = \frac{7}{5}$ હોય તો ....

(A) Δ ABC મોટો હશે. (B) Δ PQR મોટો હશે.

(C) બંને ત્રિકોણ સમાન હશે. (D) ચોક્કસ કહી શકાય નહીં.

2. O કેન્દ્ર અને 3.5 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતું વર્તુળ દોરો. વર્તુળના કેન્દ્રથી 5.7 સેમી અંતરે બિંદુ P લો. બિંદુ P માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો દોરો.
3. કોઈપણ માપનું એક વર્તુળ દોરો. તેના પર બિંદુ A લઇને તેમાંથી વર્તુળના કેન્દ્રનો ઉપયોગ કર્યા સિવાય વર્તુળને સ્પર્શક દોરો.
4. 6.4 સેમી વ્યાસ ધરાવતું વર્તુળ દોરો. વર્તુળના કેન્દ્રથી વ્યાસ જેટલા અંતરે બિંદુ R લો. આ બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શકો દોરો.
5. P કેન્દ્રવાળુ વર્તુળ દોરો. 100° માપનો એક લઘુચાપ AB દોરો. બિંદુ A અને બિંદુ B માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો દોરો.
6. E કેન્દ્ર અને 3.4 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતું વર્તુળ દોરો. વર્તુળ પર બિંદુ F લો, બિંદુ A એવી રીતે લો, કે E–F–A અને FA = 4.1 સેમી થાય. બિંદુ Aમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરો.
7. જો ΔABC ~ ΔLBN, ΔABCમાં AB = 5.1 સેમી, $\angle$B = 40°, BC = 4.8 સેમી, $\frac{AC}{LN} = \frac{4}{7}$ હોય તો Δ ABC અને Δ LBN દોરો.
8. Δ PYQ દોરો. જેમાં PY = 6.3 સેમી, YQ = 7.2 સેમી, PQ = 5.8 સેમી. Δ XYZ ને સરૂપ Δ PYQ એવો દોરો જેથી, $\frac{YZ}{YQ} = \frac{6}{5}$.

ONSKDY

5 નિર્દેશક ભૂમિતિ

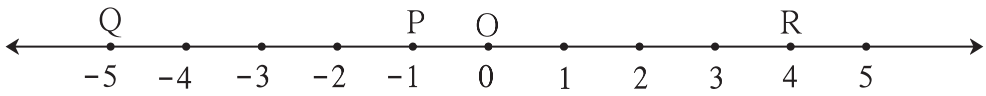
ચાલો, શીખીએ.

- અંતરનું સૂત્ર
- વિભાજનનું સૂત્ર
- રેખાનો ઢાળ

યાદ કરીએ.

સંખ્યા રેખા પરના બે બિંદુ વચ્ચેનું અંતર કેવી રીતે શોધાય તે આપણે જાણીએ છીએ.

P,Q અને R બિંદુના નિર્દેશક અનુક્રમે −1,−5 અને 4 છે તો રેખ PQ, રેખ QR ની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ 5.1

બિંદુ A અને B ના નિર્દેશક x_1 અને x_2 હોય, અને $x_2 > x_1$ હોય તો

રેખાખંડ AB ની લંબાઈ = d(A,B) = $x_2 - x_1$

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બિંદુ P,Q અને Rના નિર્દેશકો અનુક્રમે −1,−5 અને 4 છે.

$\therefore$ d(P, Q) = (−1)−(−5) = −1 + 5 = 4

અને d(Q, R) = 4 − (−5) = 4 + 5 = 9

આ જ સંકલ્પનાનો ઉપયોગ કરીને આપણે XY સમતલમાંના, એક જ અક્ષ પર આવેલા બે બિંદુ વચ્ચેનું અંતર શોધીશું.

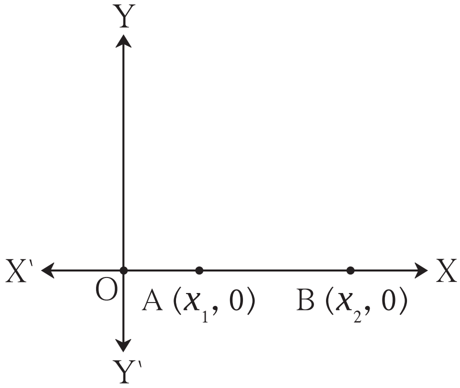
જાણી લઈએ.

(1) એક જ અક્ષ પર આવેલા બે બિંદુ વચ્ચેનું અંતર શોધવું.

એક જ અક્ષ પર બે બિંદુ એટલે એક જ સંખ્યારેખા પરના બે બિંદુ, X અક્ષ પરના બિંદુના નિર્દેશક (2, 0), $(\frac{-5}{2}, 0)$, (8, 0) એ જ રીતે Y અક્ષ પરના બિંદુના નિર્દેશક (0, 1), $(0, \frac{17}{2})$, (0, −3) એવા હોય છે, તે ધ્યાનમાં રાખો.

X અક્ષના ઋણ નિર્દેશકો દર્શાવનારો ભાગ કિરણ OX′ છે અને Y અક્ષના ઋણ નિર્દેશકો દર્શાવનારો ભાગ કિરણ OY′ છે.

i) X-અક્ષ પરના બે બિંદુ વચ્ચેનું અંતર શોધવું.

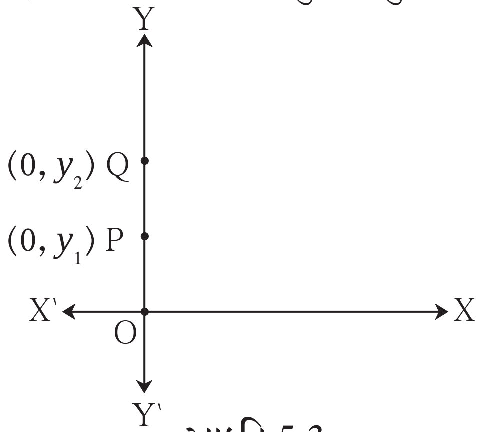


આકૃતિ 5.2

ઉપરની આકૃતિમાં,
A(x_1, 0) અને B(x_2, 0) એ બે બિંદુ X-અક્ષ પર એવી રીતે છે કે, $x_2 > x_1$

$\therefore$ d(A, B) = $x_2 - x_1$

ii) Y-અક્ષ પરના બે બિંદુ વચ્ચેનું અંતર શોધવું.

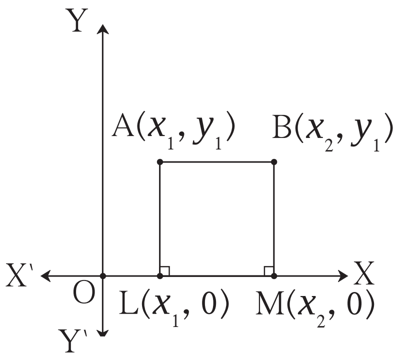


આકૃતિ 5.3

ઉપરની આકૃતિમાં,
P(0, y_1) અને Q(0, y_2) એ બે બિંદુ Y-અક્ષ પર એવી રીતે છે કે, $y_2 > y_1$

$\therefore$ d(P,Q) = $y_2 - y_1$

2) XY સમતલમાં આવેલા બે બિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ જો કોઈ એક અક્ષને સમાંતર હોય તો તે બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર શોધવું.



આકૃતિ 5.4

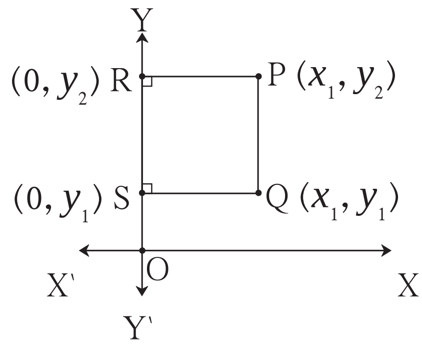
i) આકૃતિમાં રેખ AB, X-અક્ષને સમાંતર છે. માટે બિંદુ A અને બિંદુ B ના y નિર્દેશક સમાન છે. રેખ AL અને રેખ BM એ X-અક્ષને લંબ દોરો.

$\therefore$ □ ABML લંબચોરસ છે.

$\therefore$ AB = LM

પરંતુ, LM = $x_2 - x_1$

$\therefore$ d(A,B) = $x_2 - x_1$



આકૃતિ 5.5

ii) આકૃતિમાં રેખ PQ, Y-અક્ષને સમાંતર છે. માટે બિંદુ P અને બિંદુ Q ના x નિર્દેશક સમાન છે. રેખ PR અને રેખ QS એ Y-અક્ષને લંબ દોરો.

$\therefore$ □ PQSR લંબચોરસ છે.

$\therefore$ PQ = RS

પરંતુ, RS = $y_2 - y_1$

$\therefore$ d(P,Q) = $y_2 - y_1$

કૃતિ :

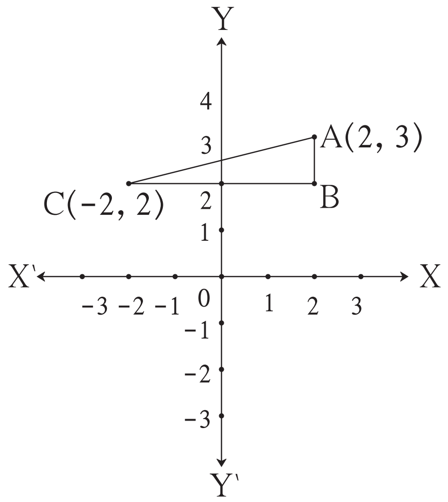
આકૃતિમાં રેખ AB || Y-અક્ષ અને રેખ CB || X-અક્ષ છે. બિંદુ A અને બિંદુ C ના નિર્દેશકો આપ્યા છે. નીચેના ખાના ભરી AC શોધો.
Δ ABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે.
પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી,

$(AB)^2 + (BC)^2 = \boxed{}$

AB, BC શોધવા માટે બિંદુ Bના નિર્દેશકો શોધીશું.

CB || X-અક્ષ $\therefore$ Bનો y નિર્દેશક = $\boxed{}$

BA || Y-અક્ષ $\therefore$ Bનો x નિર્દેશક = $\boxed{}$



આકૃતિ 5.6

$AB = 3 - \boxed{} = \boxed{}$ $\qquad$ $\therefore BC = \boxed{} - \boxed{} = 4$

$\therefore AC^2 = \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$ $\qquad$ $\therefore AC = \sqrt{17}$

જાણી લઈએ.

અંતરનું સૂત્ર (Distance formula)

આકૃતિ 5.7માં, $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$, XY સમતલમાં આવેલા બે બિંદુઓ છે.
બિંદુ Bમાંથી X-અક્ષ પર લંબ BP દોરો. તે જ રીતે બિંદુ Aમાંથી રેખ BP પર લંબ AD દોરો.

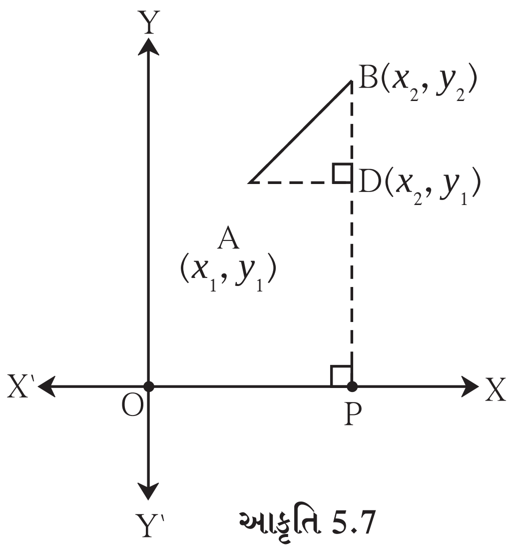
રેખ BP, Y-અક્ષને સમાંતર છે.

$\therefore$ બિંદુ D નો x નિર્દેશક x_2 છે.

રેખ AD, X-અક્ષને સમાંતર છે.

$\therefore$ બિંદુ D નો y નિર્દેશક y_1 છે.

$\therefore$ $AD = d(A, D) = x_2 - x_1$,
$BD = d(B, D) = y_2 - y_1$



આકૃતિ 5.7

કાટકોણ Δ ABD માં,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

આ નિષ્કર્ષને અંતરનું સૂત્ર કહેવાય છે.

ધ્યાનમાં રાખો કે, $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

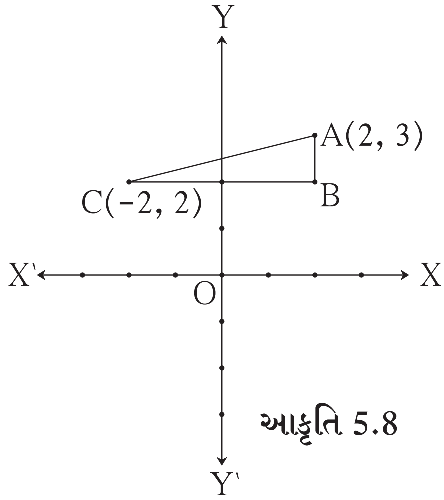
આગળની કૃતિમાં, આપણે રેખ ACની લંબાઈ શોધવા માટે, AB, BCની લંબાઈ શોધીને પાયથાગોરસનો પ્રમેયનો ઉપયોગ કર્યો. હવે આપણે અંતરનું સૂત્ર વાપરીને તે જ રેખાખંડોની લંબાઈ શોધીએ.

A(2, 3) અને C(−2, 2) આપેલું છે.

$A(x_1, y_1)$ અને $C(x_2, y_2)$ ધારીએ.

$x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -2, y_2 = 2$

$$AC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-2-2)^2+(2-3)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2+(-1)^2}$$
$$= \sqrt{16+1}$$
$$= \sqrt{17}$$



આકૃતિ 5.8

રેખ AB || Y−અક્ષ અને રેખ BC || X−અક્ષ.

∴ બિંદુ Bનો નિર્દેશક (2, 2) છે.

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{0+1} = 1$$

$$BC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-2-2)^2+(2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2+0} = 4$$

આકૃતિ 5.1માં, બિંદુ P અને Q વચ્ચેનું અંતર આપણે (−1) − (−5) = 4; આપણે શોધ્યું હતું. તે જ બિંદુના નિર્દેશક સમતલમાં (−1, 0) અને (−5, 0) હશે, અંતરનું ઉપરનું સૂત્ર વાપરીને બિંદુ P અને Q વચ્ચેનું અંતર આટલું જ આવશે, તે ચકાસી જુઓ.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

- આરંભબિંદુ Oના નિર્દેશક (0, 0) હોય છે અને બિંદુ Pના નિર્દેશક (x, y) હોય તો $d(O, P) = \sqrt{x^2+y^2}$.
- $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ આ બે બિંદુઓ XY સમતલમાં હોય તો

  $d(P, Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

  એટલે કે, $PQ^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) P(−1, 1), Q(5, −7) આ બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

ઉકેલ : $P(x_1, y_1)$ અને $Q(x_2, y_2)$ ધારીએ,

$x_1 = -1, \quad y_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = -7$

અંતરના સૂત્ર અનુસાર $d(P, Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$= \sqrt{[5-(-1)]^2+[(-7)-1]^2}$$

$$= \sqrt{(6)^2+(-8)^2}$$

$$= \sqrt{36+64}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{100} = 10$$

∴ બિંદુ P અને Q વચ્ચેનું અંતર 10 છે.

ઉદા. (2) A(−3, 2), B(1, −2) અને C(9, −10) બિંદુઓ સમરેખ છે તે દર્શાવો.

ઉકેલ : જો d(A, B); d(B, C) અને d(A, C) પૈકી બે અંતરોનો સરવાળો ત્રીજા અંતર જેટલું હોય, તો બિંદુ A, B, C સમરેખ હશે.

∴ d(A, B), d(B, C) અને d(A, C) શોધીએ.

બિંદુ Aના નિર્દેશક	બિંદુ Bના નિર્દેશક	(અંતરનું સૂત્ર)
(−3, 2)	(1, −2)	$d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	

$$\therefore d(A, B) = \sqrt{[1-(-3)]^2+[(-2)-2]^2} \quad \text{.......... (અંતરનું સૂત્ર)}$$

$$= \sqrt{(1+3)^2+(-4)^2}$$

$$= \sqrt{16+16}$$

$$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad \text{..........(I)}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(9-1)^2+(-10+2)^2}$$

$$= \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2} \quad \text{..........(II)}$$

અને $d(A, C) = \sqrt{(9+3)^2+(-10-2)^2}$

$$= \sqrt{144+144} = 12\sqrt{2} \quad \text{..........(III)}$$

$4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ .... (I), (II) અને (III) પરથી

∴ d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)

∴ A, B, C બિંદુઓ સમરેખ છે.

ઉદા. (3) P(6, −6), Q(3, −7) અને R(3, 3) બિંદુઓ સમરેખ છે કે તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : $PQ = \sqrt{(6-3)^2+(-6+7)^2}$ .... (અંતરનું સૂત્ર)

$= \sqrt{(3)^2+(1)^2} \quad = \sqrt{10}$ .... (I)

$QR = \sqrt{(3-3)^2+(-7-3)^2}$

$= \sqrt{(0)^2+(-10)^2} \quad = \sqrt{100}$ .... (II)

$PR = \sqrt{(3-6)^2+(3+6)^2}$

$= \sqrt{(3)^2+(9)^2} \quad = \sqrt{90}$ .... (III)

(I), (II) અને (III) પરથી $\sqrt{10}$, $\sqrt{100}$ અને $\sqrt{90}$ પૈકી $\sqrt{100}$ સૌથી મોટી સંખ્યા છે.

$(\sqrt{100})$ અને $(\sqrt{10}+\sqrt{90})$ સમાન છે કે તે જોઈએ.

એ માટે $(\sqrt{100})^2$ અને $(\sqrt{10}+\sqrt{90})^2$ ની તુલના કરો.

આ પરથી તમારા ધ્યાનમાં આવશે કે $(\sqrt{10}+\sqrt{90}) < (\sqrt{100})$ $\therefore PQ + PR \neq QR$

$\therefore$ P(6, −6), Q(3, −7) અને R(3, 3) બિંદુઓ સમરેખ નથી.

ઉદા. (4) (1, 7), (4, 2), (−1, −1) અને (−4, 4) ચોરસના શિરોબિંદુઓ છે, તે દર્શાવો.

ઉકેલ : જ્યારે ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ સમાન લંબાઈની અને બંને વિકર્ણો સમાન લંબાઈના હોય ત્યારે તે ચતુષ્કોણ ચોરસ હોય છે. $\therefore$ અંતરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને બધી બાજુની લંબાઈ અને કર્ણોની લંબાઈ શોધીએ.

ધારો કે , A(1, 7), B(4, 2), C(−1, −1) અને D(−4,4) એ આપેલા બિંદુઓ છે.

$AB = \sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

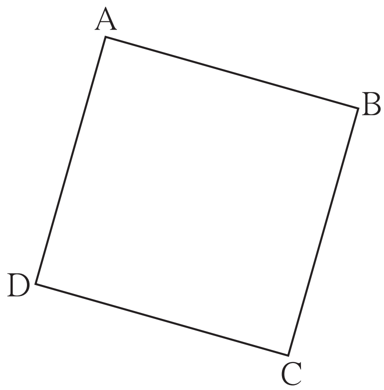
$BC = \sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$DA = \sqrt{(1+4)^2+(7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$



આકૃતિ 5.9

$\therefore$ AB = BC = CD = DA અને AC = BD

આ પરથી જણાય છે કે, ચતુષ્કોણની ચારે બાજુની લંબાઈ સમાન છે, તેમ જ બંને કર્ણ AC અને BDની લંબાઈ સમાન છે.

$\therefore$ (1,7), (4,2), (−1,−1) અને (−4,4) આ શિરોબિંદુઓથી તૈયાર થતો ચતુષ્કોણ ચોરસ છે.

ઉદા. (5) Y−અક્ષ પરના એવા બિંદુના નિર્દેશક શોધો, કે જે M (−5,−2) અને N(3,2)થી સમાન અંતરે છે.

ઉકેલ : ધારો કે, Y-અક્ષપરનું બિંદુ $P(0, y)$ એ બિંદુ M અને Nથી સમાન અંતરે છે.

$$\therefore PM = PN \qquad \therefore PM^2 = PN^2$$

$$\therefore [0-(-5)]^2 + [y-(-2)]^2 = (0-3)^2 + (y-2)^2 \text{ .... (અંતરના સૂત્ર પરથી)}$$

$$\therefore 25 + (y+2)^2 = 9 + y^2 - 4y + 4$$

$$\therefore 25 + y^2 + 4y + 4 = 13 + y^2 - 4y$$

$$\therefore 8y = -16 \quad \therefore y = -2$$

$\therefore$ M (−5, −2) અને N (3, 2) બિંદુઓથી સમાન અંતરે આવેલ Y−અક્ષ પરના બિંદુના નિર્દેશક (0, −2) છે.

ઉદા. (6) A(−3, −4), B(−5, 0), C(3, 0) એ Δ ABC શિરોબિંદુઓ છે. તો Δ ABC ના પરિકેન્દ્રના નિર્દેશક શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, બિંદુ $P(a, b)$, Δ ABC નું પરિકેન્દ્ર છે. $\therefore$ P એ બિંદુ A, B, C થી સમાન અંતરે છે.

$\therefore PA^2 = PB^2 = PC^2$ .... (I) $\qquad \therefore PA^2 = PB^2$

અંતરના સૂત્ર પરથી

$$(a+3)^2 + (b+4)^2 = (a+5)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 + 10a + 25 + b^2$$

$$\therefore -4a + 8b = 0$$

$$\therefore a - 2b = 0 \text{ .... (II)}$$

તેજ રીતે $PA^2 = PC^2$ .... (I) પરથી

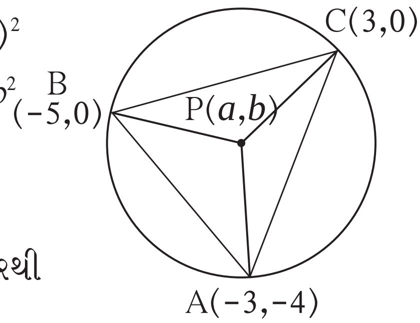
અંતરના સૂત્ર પરથી

$$\therefore (a+3)^2 + (b+4)^2 = (a-3)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 - 6a + 9 + b^2$$

$$\therefore 12a + 8b = -16$$

$$\therefore 3a + 2b = -4 \text{ .... (III)}$$



આકૃતિ 5.10

સમીકરણ (II) અને (III)ને છોડતા $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ પરિકેન્દ્રના નિર્દેશક $(-1, -\frac{1}{2})$ છે.

ઉદા. (7) બિંદુ (x, y) એ $(7, 1)$ અને $(3, 5)$ થી સમાન અંતરે હોય તો $y = x-2$ દર્શાવો.

ઉકેલ : ધારો કે, બિંદુ $P(x, y)$ એ $A(7, 1)$ અને $B(3, 5)$ થી સમાન અંતરે છે.

$\therefore \quad AP = BP$

$\therefore \quad AP^2 = BP^2$

$\therefore \quad (x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$ .... અંતરના સૂત્ર પરથી

$\therefore \quad x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$

$\therefore \quad -8x + 8y = -16$

$\therefore \quad x - y = 2$

$\therefore \quad y = x - 2$

ઉદા. (8) બિંદુ $A(2,-2)$ અને બિંદુ $B(-1, y)$ વચ્ચેનું અંતર 5 છે, તો y ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\therefore \ AB^2 = [(-1) - 2]^2 + [y - (-2)]^2$ .... અંતરના સૂત્ર પરથી

$\therefore \quad 5^2 = (-3)^2 + (y + 2)^2$

$\therefore \quad 25 = 9 + (y + 2)^2$

$\therefore \quad 16 = (y + 2)^2$

$\therefore \quad y + 2 = \pm\sqrt{16}$

$\therefore \quad y + 2 = \pm 4$

$\therefore \quad y = 4 - 2$ અથવા $y = -4 - 2$

$\therefore \quad y = 2$ અથવા $y = -6$

$\therefore \quad y$ ની કિંમત 2 અથવા -6 છે.

મહાવરાસંગ્રહ 5.1

1. નીચે આપેલી બિંદુઓની પ્રત્યેક જોડી વચ્ચેનું અંતર શોધો.

   (1) $A(2, 3), B(4, 1)$ (2) $P(-5, 7), Q(-1, 3)$ (3) $R(0, -3), S(0, \frac{5}{2})$

   (4) $L(5, -8), M(-7, -3)$ (5) $T(-3, 6), R(9, -10)$ (6) $W(\frac{-7}{2}, 4), X(11, 4)$

2. નીચેના બિંદુઓ સમરેખ છે કે નહીં તે નક્કી કરો.

   (1) $A(1, -3), B(2, -5), C(-4, 7)$ (3) $L(-2, 3), M(1, -3), N(5, 4)$

   (2) $R(0, 3), D(2, 1), S(3, -1)$ (4) $P(-2, 3), Q(1, 2), R(4, 1)$

3. X–અક્ષ પરનું એવું બિંદુ શોધો કે જે બિંદુ $A(-3, 4)$ અને $B(1, -4)$થી સમાન અંતરે હોય.

4. $P(-2, 2), Q(2, 2)$ અને $R(2, 7)$ એ કાટકોણ ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ છે, તે ચકાસો.

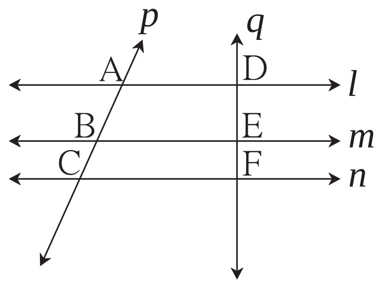
5. P(2, −2), Q(7, 3), R(11, −1) અને S (6, −6) શિરોબિંદુ હોય તેવો ચતુષ્કોણ સમાંતરભુજ છે તે દર્શાવો.
6. A(−4, −7), B(−1, 2), C(8, 5) અને D(5, −4) એ સમભુજ ચતુષ્કોણ ABCDના શિરોબિંદુઓ છે તે દર્શાવો.
7. જો બિંદુ L(x, 7) અને M(1, 15) વચ્ચેનું અંતર 10 હોય, તો xની કિંમત શોધો.
8. A(1, 2), B(1, 6), C($1 + 2\sqrt{3}$, 4) એ સમભુજ ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ છે તે દર્શાવો.

યાદ કરીએ.

ત્રણ સમાંતર રેખાના આંતરછેદનો ગુણધર્મ :

આકૃતિ 5.11માં રેખા l || રેખા m || રેખા n,
રેખા p અને q છેદિકા છે.

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$



આકૃતિ 5.11

જાણી લઈએ.

રેખાખંડનું વિભાજન (Division of a line segment)

આકૃતિ 5.12

આકૃતિ 5.12માં, AP = 6 અને PB = 10.

$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

આને જ જુદા શબ્દોમાં, 'બિંદુ P એ રેખ ABનું 3:5 ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.' એમ કહેવાય છે.

જ્યારે રેખાખંડ પરનું એક બિંદુ તે જ રેખાખંડનું આપેલા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતું હોય ત્યારે તે વિભાજન કરનાર બિંદુના નિર્દેશક કેવી રીતે શોધી શકાય તે જોઇએ.

જાણી લઈએ.

વિભાજનનું સૂત્ર (Section formula)

આકૃતિ 5.13માં, સમતલ XYમાંના રેખ AB પરનું બિંદુ P, રેખ ABનું $m : n$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

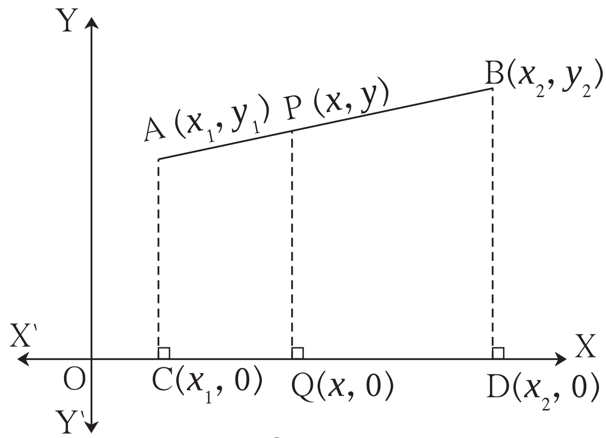
$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ અને $P(x, y)$ ધારીએ.

રેખ AC, રેખ PQ અને રેખ BD, X–અક્ષ પર લંબ રેખાખંડ દોર્યા.

$\therefore C(x_1, 0)$; $Q(x, 0)$ અને $D(x_2, 0)$.

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad CQ &= x - x_1 \\ \text{અને } QD &= x_2 - x \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

તેજ રીતે રેખ AC || રેખ PQ || રેખ BD.



આકૃતિ 5.13

$\therefore$ ત્રણ સમાંતર રેખાના આંતરછેદના ગુણધર્મ અનુસાર, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{CQ}{QD} = \dfrac{m}{n}$

તે જ રીતે , $CQ = x - x_1$ અને $QD = x_2 - x$ .... (I) પરથી

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

$$\therefore mx + nx = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x(m + n) = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

આ જ પ્રમાણે બિંદુ A, P અને Bમાંથી Y–અક્ષપર લંબ દોરીને ઉપર પ્રમાણે કૃતિ કરતા આપણને $y = \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}$ મળશે.

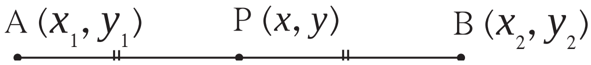
$\therefore$ બિંદુ $A(x_1, y_1)$ અને $B(x_2, y_2)$ને જોડનારા રેખ ABનું $m : n$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરનાર બિંદુના નિર્દેશક $\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$ હોય છે.

રેખાખંડના મધ્યબિંદુનું સૂત્ર (Mid-point formula)

A(x_1, y_1) અને B(x_2, y_2) આ બે બિંદુઓને જોડતા રેખ ABનું મધ્યબિંદુ P(x, y) હોય તો,

$m = n$ હવે વિભાજન સૂત્ર અનુસાર,

x અને y ની કિંમત લખીશું.



આકૃતિ 5.14

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$= \frac{mx_2 + mx_1}{m+m} \quad \because \quad m = n$$

$$= \frac{m(x_1 + x_2)}{2m}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$= \frac{my_2 + my_1}{m+m} \quad \because \quad m = n$$

$$= \frac{m(y_1 + y_2)}{2m}$$

$$= \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$\therefore$ મધ્યબિંદુ Pના નિર્દેશક $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ છે. એને જ **'મધ્યબિંદુનું સૂત્ર'** કહેવાય છે.

આપણે પાછલાં ધોરણમાં બે પરિમેય સંખ્યા a અને b સંખ્યારેખા પર દર્શાવી, તેમને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ $\frac{a+b}{2}$ હોય છે તે દર્શાવ્યું હતું. તે નિષ્કર્ષ હમણાં મળેલા સૂત્રનો વિશિષ્ટ પ્રકાર છે. તે ધ્યાનમાં રાખો.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) જો A(3, 5) B(7, 9) હોય અને બિંદુ Q, રેખ ABનું 2:3 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતું હોય, તો Q બિંદુના નિર્દેશક શોધો.

ઉકેલ : આપેલા ઉદાહરણમાં, $(x_1, y_1) = (3, 5)$

અને $(x_2, y_2) = (7, 9)$ ધારીએ.

તેમજ , $m : n = 2 : 3$

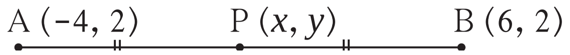
રેખાખંડના વિભાજનના સૂત્ર અનુસાર,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{2\times7+3\times3}{2+3} = \frac{23}{5} \quad ; \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{2\times9+3\times5}{2+3} = \frac{33}{5}$$

$\therefore$ બિંદુ Q ના નિર્દેશક $\left(\frac{23}{5}, \frac{33}{5}\right)$

ઉદા. **(2)** $A(-4, 2)$, $B(6, 2)$ આ રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ P હોય તો બિંદુ Pના નિર્દેશકો શોધો.

ઉકેલ :



આકૃતિ 5.15

$(-4, 2) = (x_1, y_1)$; $(6, 2) = (x_2, y_2)$ અને બિંદુ Pના નિર્દેશક (x, y) ધારીએ.

$\therefore$ મધ્યબિંદુના સૂત્ર અનુસાર,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$\therefore$ મધ્યબિંદુ Pના નિર્દેશક $(1,2)$ છે.

યાદ કરીએ.

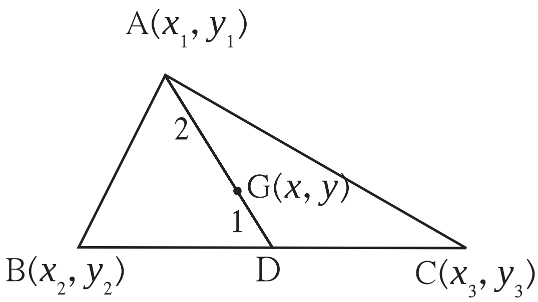
આપણે જાણીએ છીએ કે, ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એક સંપાતી (સંગામી) હોય છે.
તેમનું સંપાતિબિંદુ [ગુરૂત્વકેન્દ્ર (centroid)] મધ્યગાનું 2:1ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

જાણી લઈએ.

મધ્યગા સંપાતિબિંદુનું સૂત્ર [ગુરૂત્વકેન્દ્રનું સૂત્ર (Centroid formula)]

ત્રિકોણના ત્રણેય બિંદુના નિર્દેશકો આપ્યાં હોય ત્યારે વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને મધ્યગા સંપાતિબિંદુના નિર્દેશકો કેવી રીતે શોધાય તે આપણે જોઈએ.

ધારો કે, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ એ ΔABCના શિરોબિંદુ છે. રેખ AD, ΔABCની મધ્યગા છે. બિંદુ $G(x, y)$ તે ત્રિકોણનું મધ્યગાસંપાતિ બિંદુ છે. બિંદુ D, રેખ BCનું મધ્યબિંદુ છે.



આકૃતિ 5.16

$\therefore$ બિંદુ Dના નિર્દેશકો $x = \dfrac{x_2 + x_3}{2}$, $y = \dfrac{y_2 + y_3}{2}$ .... રેખાખંડના મધ્યબિંદુના સૂત્ર અનુસાર

બિંદુ $G(x, y)$, Δ ABCનું મધ્યગા સંપાતિબિંદુ છે. $\therefore$ AG : GD = 2 : 1

$\therefore$ રેખાખંડના વિભાજનના સૂત્ર અનુસાર,

$$x = \frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1 \times y_1}{2+1} = \frac{y_2 + y_3 + y_1}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

એટલે કે, શિરોબિંદુ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ધરાવતાં ત્રિકોણનાં મધ્યગા સંપાતિબિંદુના નિર્દેશકો $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ હોય છે.

આને જ **મધ્યગા સંપાતિબિંદુનું સૂત્ર** કહેવાય છે.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

- વિભાજનનું સૂત્ર

  (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) આ બે ભિન્ન બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડનું $m : n$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરનાર બિંદુના નિર્દેશક $\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ હોય છે.

- મધ્યબિંદુનું સૂત્ર

  (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) આ બે ભિન્નબિંદુને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના નિર્દેશક $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ હોય છે.

- મધ્યગા સંપાતિબિંદુનું સૂત્ર (ગુરૂત્વકેન્દ્રનું સૂત્ર)

  (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) જો ત્રિકોણના શિરોબિંદુના નિર્દેશક હોય તો મધ્યગા સંપાતિબિંદુના નિર્દેશક $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ હોય છે.

ગણેલાં ઉદાહરણો

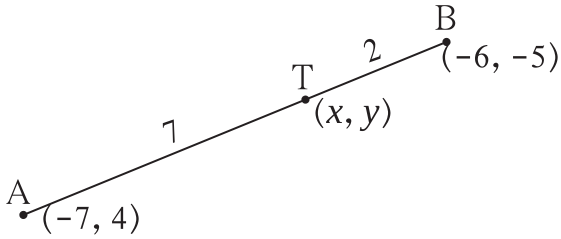
ઉદા. (1) A(−7,4) અને B(−6,−5) છે. બિંદુ T, રેખ ABનું 7:2ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે, તો બિંદુ Tના નિર્દેશક શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, બિંદુ Tના નિર્દેશક (x, y) છે.

∴ રેખાખંડના વિભાજનના સૂત્ર અનુસાર,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{7\times(-6)+2\times(-7)}{7+2}$$

$$= \frac{-42-14}{9} = \frac{-56}{9}$$



આકૃતિ 5.17

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{7\times(-5)+2\times(4)}{7+2}$$

$$= \frac{-35+8}{9} = \frac{-27}{9} = -3$$

∴ બિંદુ T ના નિર્દેશક $\left(\frac{-56}{9}, -3\right)$ છે.

ઉદા. (2) બિંદુ P(−4, 6) એ A(−6, 10) અને B(r, s)ને જોડતા રેખાખંડનું 2:1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે, તો બિંદુ Bના નિર્દેશક શોધો.

ઉકેલ : રેખાખંડના વિભાજનના સૂત્ર અનુસાર,

$$-4 = \frac{2\times r + 1\times(-6)}{2+1}$$

$\therefore \quad -4 = \frac{2r-6}{3}$

$\therefore \; -12 = 2r - 6$

$\therefore \quad 2r = -6$

$\therefore \quad r = -3$

$$6 = \frac{2\times s + 1\times 10}{2+1}$$

$\therefore \quad 6 = \frac{2s+10}{3}$

$\therefore \; 18 = 2s + 10$

$\therefore \; 2s = 8$

$\therefore \quad s = 4$

∴ બિંદુ B ના નિર્દેશક (−3, 4) છે.

ઉદા. (3) A(15,5), B(9,20) અને P(11,15) છે. A–P–B હોય તો બિંદુ P, રેખ AB નું ક્યા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. તે શોધો.

ઉકેલ : બિંદુ P(11,15) રેખ AB નું $m : n$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે, એમ ધારીએ,

∴ રેખાખંડના વિભાજનના સૂત્ર અનુસાર,

$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$

$\therefore\ 11 = \frac{9m+15n}{m+n}$

$\therefore\ 11m + 11n = 9m + 15n$

$\therefore\ 2m = 4n$

$\therefore\ \frac{m}{n} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$

$\therefore$ વિભાજનનો ગુણોત્તર 2 : 1 છે.

આ પ્રમાણે y –નિર્દેશકની કિંમત મૂકી મળતો ગુણોત્તર શોધો. તમારો નિષ્કર્ષ લખો.

ઉદા. (4) બિંદુ A (2,−2) અને B(−7,4)ને જોડતા રેખાખંડનું ત્રિવિભાજન કરનારા બિંદુના નિર્દેશક શોધો.

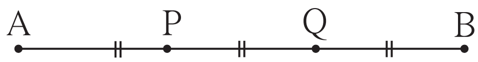
(રેખાખંડના જે બે બિંદુઓ તે રેખાખંડના ત્રણ સમાન ભાગ કરે છે, તે બિંદુઓને તે રેખાખંડાના ત્રિભાજક બિંદુ કહેવાય છે.)

ઉકેલ : ધારો કે, બિંદુ P અને Q એ બિંદુ A અને બિંદુ B ને જોડતા રેખાખંડના ત્રિવિભાજક બિંદુ છે, એટલે બિંદુ P અને Qને કારણે રેખ ABના ત્રણ સમાન ભાગ થાય છે.

AP = PQ = QB .... (I)

$\frac{AP}{PB} = \frac{AP}{PQ+QB} = \frac{AP}{AP+AP} = \frac{AP}{2AP} = \frac{1}{2}$ .... (I) પરથી

બિંદુ P રેખ AB નું 1:2ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 5.18

Pનો x નિર્દેશક $= \frac{1\times(-7)+2\times2}{1+2} = \frac{-7+4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$

Pનો y નિર્દેશક $= \frac{1\times4+2\times(-2)}{1+2} = \frac{4-4}{3} = \frac{0}{3} = 0$

તે જ રીતે બિંદુ Q, રેખ ABનું 2:1ના ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. માટે $\frac{AQ}{QB} = \frac{2}{1}$

Qનો x નિર્દેશક $= \frac{2\times(-7)+1\times2}{2+1} = \frac{-14+2}{3} = \frac{-12}{3} = -4$

Qનો y નિર્દેશક $= \frac{2\times4+1\times-2}{2+1} = \frac{8-2}{3} = \frac{6}{3} = 2$

$\therefore$ રેખાખંડના ત્રિભાજક બિંદુના નિર્દેશકો (−1, 0), (−4, 2) છે.

વધુ માહિતી માટે :

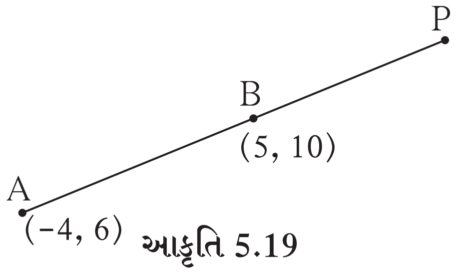
A અને B બિંદુને જોડતા રેખાખંડનું બાહ્યવિભાજન કેવી રીતે થાય છે, તે જોઇએ.

A(−4, 6), B(5, 10) બિંદુને જોડતા રેખાખંડ ABનું 3:1 ના ગુણોત્તરમાં બાહ્યવિભાજન કરનારા બિંદુ Pના નિર્દેશક કેવી રીતે શોધાય તે જુઓ.

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ એટલે કે AP, PB કરતા મોટો A−B−P છે.

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ એટલે કે AP = 3k, BP = k, તો AB = 2k

$$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{2}{1}$$



આકૃતિ 5.19

હવે B બિંદુ રેખાખંડ APનું 2 : 1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

A અને Bના નિર્દેશકો આપ્યા હોય ત્યારે બિંદુ Pના નિર્દેશક કેવી રીતે શોધાય તે આપણે શીખી ગયા છીએ.

મહાવરાસંગ્રહ 5.2

1. જો P બિંદુ A(−1,7) અને B(4,−3)ને જોડતા રેખાખંડનું 2 : 3નાં ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતું હોય તો બિંદુ Pના નિર્દેશકો શોધો.
2. નીચેના દરેક ઉદાહરણમાં રેખ PQનું a : b ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરનાર બિંદુ Aના નિર્દેશક શોધો.

   (1) P(−3, 7), Q(1, −4), a : b = 2 : 1

   (2) P(−2, −5), Q(4, 3), a : b = 3 : 4

   (3) P(2, 6), Q(−4, 1), a : b = 1 : 2
3. P−T−Q છે. બિંદુ T(−1, 6), બિંદુ P(−3, 10) અને બિંદુ Q(6, −8) ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે?
4. રેખ AB વર્તુળનો વ્યાસ છે અને બિંદુ P વર્તુળનું કેન્દ્ર છે. A(2, −3) અને P (−2, 0) હોય તો બિંદુ B ના નિર્દેશક શોધો.
5. બિંદુ A(8, 9) અને B(1, 2)ને જોડતા રેખ ABનું બિંદુ P(k, 7) કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તે શોધો અને kની કિંમત શોધો.
6. બિંદુઓ (22, 20) અને (0, 16) જોડનારા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના નિર્દેશક શોધો.
7. નીચે ત્રિકોણના શિરોબિંદુ આપેલા છે. પ્રત્યેક ત્રિકોણમાં મધ્યગા સંપાતિબિંદુ (ગુરૂત્વકેન્દ્ર)ના નિર્દેશક શોધો.

   (1)(−7, 6), (2, −2), (8, 5)

   (2) (3, −5), (4, 3), (11, −4)

   (3) (4, 7), (8, 4), (7, 11)

8. Δ ABC નું મધ્યગા સંપાતબિંદુ G છે. A, B અને G ના નિર્દેશકો અનુક્રમે (−14, −19), (3, 5) અને (−4, −7) છે. તો બિંદુ Cના નિર્દેશક શોધો.

9. ત્રિકોણનું મધ્યગા સંપાતબિંદુ G (1, 5) છે અને તેના શિરોબિંદુઓ A (h, −6), B (2, 3) અને C (−6, k) હોય તો h અને k ની કિંમત શોધો

10. બિંદુ A (2, 7) અને B(−4, −8)ને જોડનારા રેખ AB નું ત્રિવિભાજન કરનારા બિંદુના નિર્દેશક શોધો.

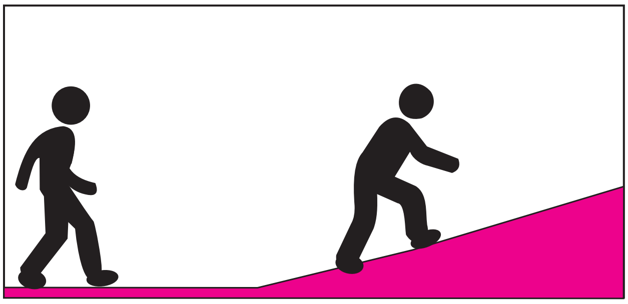
11. A (−14, −10), B(6, −2)ને જોડનારા રેખ AB નું ચાર એકરૂપ રેખાખંડોમાં વિભાજન કરનારા બિંદુના નિર્દેશકો શોધો.

12. A (20, 10), B(0, 20)ને જોડનારા રેખ AB નું પાંચ એકરૂપ રેખાખંડમાં વિભાજન કરનારા બિંદુના નિર્દેશક શોધો.

જાણી લઈએ.

રેખાનો ઢાળ (Slope of a line)

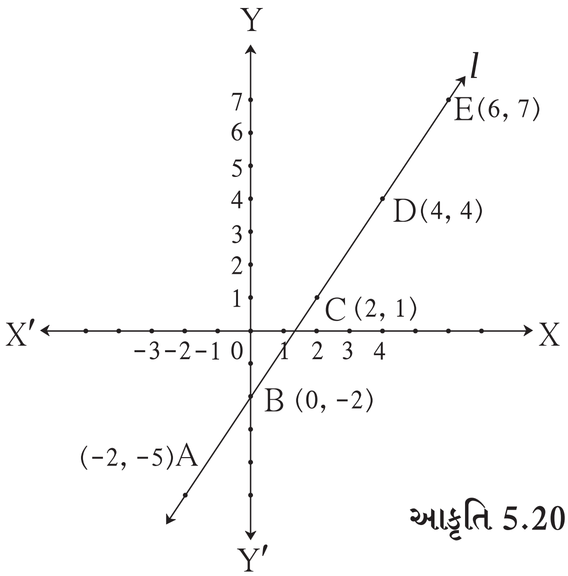
આપણે સપાટ જમીન પર ચાલીએ ત્યારે વધુ શ્રમ કરવો પડતો નથી. ઢાળ પર ચાલતી વખતે થોડો શ્રમ કરવો પડે છે. માણસને શ્વાસ ચડે છે. ઢાળવાળા રસ્તે ચાલતી વખતે ગુરૂત્વાકર્ષણ બળથી વિરૂદ્ધ કાર્ય કરવું પડે છે. એ આપણે વિજ્ઞાનમાં શીખ્યા છીએ.



સમતલીય નિર્દેશક ભૂમિતિમાં રેખાનો ઢાળ એ એક મહત્ત્વની સંકલ્પના છે. નીચે આપેલ કૃતિ દ્વારા આપણે તે સંકલ્પના સમજીએ.

કૃતિ I :

બાજુની આકૃતિમાં રેખા l પર A(−2, −5), B(0,−2), C(2,1), D(4,4), E(6,7) બિંદુઓ આવેલાં છે. આ નિર્દેશકોનો ઉપયોગ કરીને તૈયાર કરેલ નીચેના કોષ્ટકનું નિરીક્ષણ કરો.



આકૃતિ 5.20

અ. ક્ર.	પહેલું બિંદુ	બીજું બિંદુ	પહેલા બિંદુના નિર્દેશક (x_1, y_1)	બીજાબિંદુના નિર્દેશક (x_2, y_2)	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
1	C	E	(2, 1)	(6, 7)	$\frac{7-1}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
2	A	D	(-2, -5)	(4, 4)	$\frac{4-(-5)}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
3	D	A	(4, 4)	(-2, -5)	$\frac{-5-4}{-2-4} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$
4	B	C	--	--	--
5	C	A	--	--	--
6	A	C	--	--	--

કોષ્ટકક્રમાંના બાકીના ખાના પૂર્ણ કરીને કોષ્ટક પૂર્ણ કરો. આ પ્રમાણે રેખા l પરના બિંદુઓની હજુ કેટલીક જોડીઓ લો અને દરેક જોડી માટે $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ગુણોત્તર શોધો.

આ કૃતિ પરથી ધ્યાનમાં આવે છે કે રેખા l પરના કોઈપણ બે બિંદુ (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) માટે $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ગુણોત્તર અચળ છે.

રેખા l ના (x_1, y_1) અને (x_2, y_2) એ કોઈપણ બે બિંદુઓ હોય, તો $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ સ્થિર ગુણોત્તરને રેખા l નો ઢાળ કહેવાય છે.

રેખાનો ઢાળ સામાન્યરીતે m અક્ષર વડે દર્શાવાય છે.

$$\therefore \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

કૃતિ II : આકૃતિ 5.21માં રેખા l, t અને n, તેના પર કેટલાક બિંદુ આપેલા છે. તે પરથી રેખાનો ઢાળ શોધો.

તમારા ધ્યાનમાં આવશે કે,

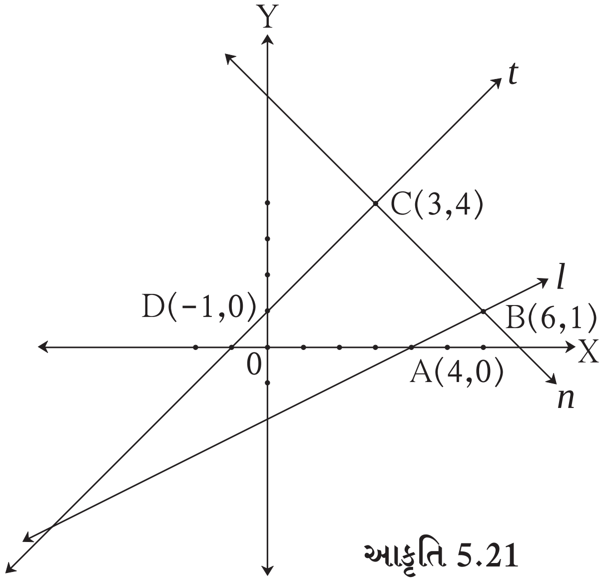
(1) રેખા l અને રેખા t નો ઢાળ ધન છે.

(2) રેખા n નો ઢાળ ઋણ છે.

(3) રેખા t નો ઢાળ, રેખા l ના ઢાળ કરતાં વધારે છે.

(4) X-અક્ષની ધન દિશા સાથે લઘુકોણ બનાવનાર રેખા l અને t નો ઢાળ ધન છે.

(5) X-અક્ષની ધન દિશા સાથે ગુરૂકોણ બનાવનાર રેખા n નો ઢાળ ઋણ છે.



આકૃતિ 5.21

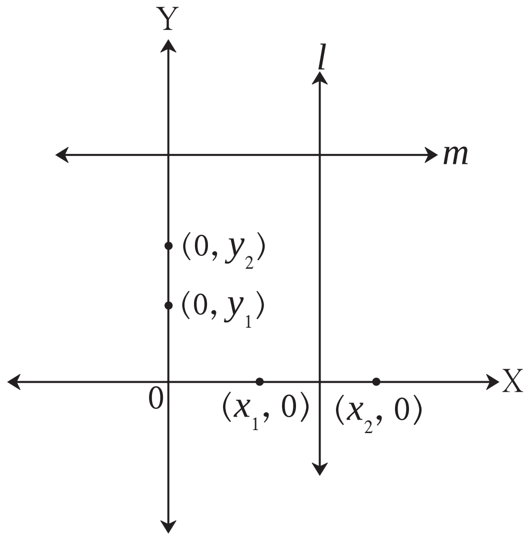
X-અક્ષ, Y-અક્ષ અને અક્ષને સમાંતર રેખાનો ઢાળ

આકૃતિ 5.22માં, $(x_1, 0)$ અને $(x_2, 0)$ એ X-અક્ષ પર આવેલાં બે બિંદુઓ છે.

X-અક્ષનો ઢાળ $= \dfrac{0-0}{x_2 - x_1} = 0$

તેમજ, $(0, y_1)$ અને $(0, y_2)$ એ Y-અક્ષ પર આવેલા બે બિંદુઓ છે.

Y-અક્ષનો ઢાળ $= \dfrac{y_2 - y_1}{0-0} = \dfrac{y_2 - y_1}{0}$,



આકૃતિ 5.22

પરંતુ 0 વડે ભાગી ન શકાય તેથી Y-અક્ષનો ઢાળ શોધી શકાય નહીં.

આ જ પ્રમાણે રેખા m ની જેમ X-અક્ષને સમાંતર આવેલી કોઈપણ રેખાનો ઢાળ શોધીને જુઓ. તે શૂન્ય આવશે. તે જ રીતે, રેખા l ની જેમ Y-અક્ષને સમાંતર આવેલી રેખાનો ઢાળ શોધી શકાય નહીં, તે સમજી શકાય.

રેખાનો ઢાળ - ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરીને

આકૃતિ 5.23માં, બિંદુ $P(x_1, y_1)$ અને $Q(x_2, y_2)$ એ રેખા l પરના બે બિંદુ આવેલા છે.

રેખા l એ અક્ષને બિંદુ T માં છેદે છે,

રેખ QS $\perp$ X-અક્ષ, રેખ PR $\perp$ રેખ QS $\therefore$ રેખ PR $\parallel$ રેખ TS .... સંગતકોણ કસોટી

$\therefore$ $QR = y_2 - y_1$ અને $PR = x_2 - x_1$

$\therefore \quad \dfrac{QR}{PR} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .... (I)

રેખા TQ એ X–અક્ષ સાથે 'θ' ખુણો બનાવે છે.

$\therefore \quad \dfrac{QR}{PR} = \tan\theta$ .... (II)

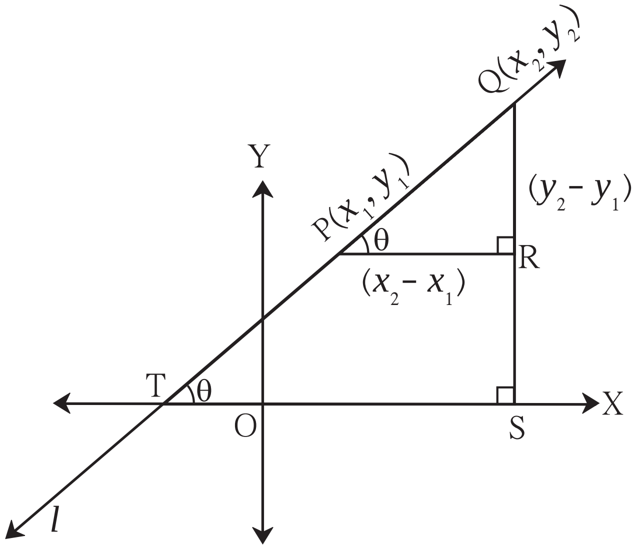
$\therefore$ (I) અને (II) પરથી, $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$

$\therefore \quad m = \tan\theta$

હવે, રેખ PR || રેખ TS, છેદિકા રેખા l

$\therefore \quad \angle QPR = \angle QTS$ .... સંગતખૂણા (કોણ)

આ પરથી, રેખાએ X–અક્ષની ધન દિશા સાથે બનાવેલા ખૂણાનો **tan** ગુણોત્તર એટલે તે રેખાનો ઢાળ એવી વ્યાખ્યા કરી શકાય.



આકૃતિ 5.23

બે રેખાનો ઢાળ સરખો હોય ત્યારે તે રેખા X–અક્ષની ધન દિશા સાથે સમાન માપના ખૂણા બનાવે છે.

$\therefore$ તે બે રેખા સમાંતર હોય છે.

સમાંતર રેખાનો ઢાળ (Slope of parallel lines)

કૃતિ :

આકૃતિ 5.24માં, રેખા l અને રેખા t આ બંને રેખાએ X–અક્ષની ધન દિશામાં બનાવેલો ખૂણો θ છે.

$\therefore$ રેખા l || રેખા t .... સંગતકોણ કસોટી

રેખા l પરના બિંદુ A(–3, 0) અને બિંદુ B(0, 3) ધ્યાનમાં લો. રેખા AB નો ઢાળ શોધો.

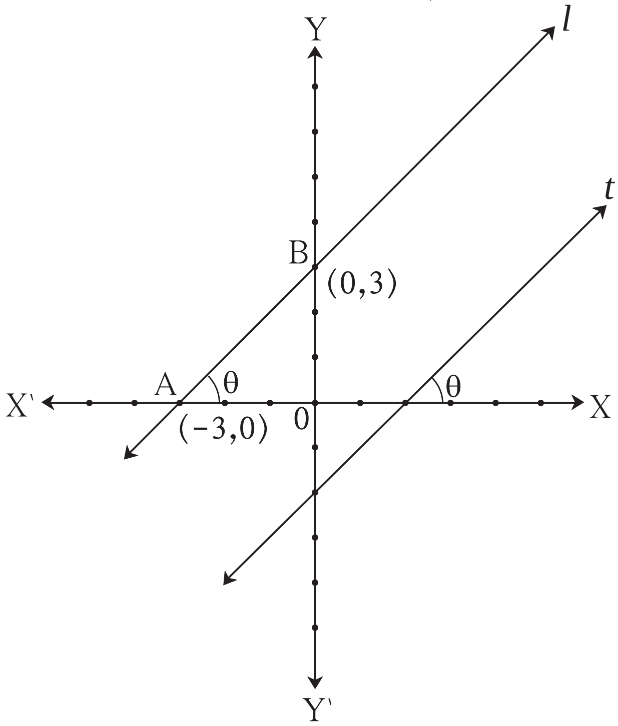
રેખા AB નો ઢાળ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \dfrac{\boxed{} - \boxed{}}{\boxed{} - \boxed{}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$

$= \boxed{}$

આ જ પ્રમાણે રેખા t પર કોઈપણ એક બિંદુ લઈ તેનો ઢાળ શોધો.

આ પરથી સમાંતર રેખાનો ઢાળ સમાન હોય છે કે તે તમે ચકાસી શકશો.



આકૃતિ 5.24

અહીં $\theta = 45^\circ$ છે.

ઢાળ, $m = \tan\theta$ લઈ બંને સમાંતર રેખાનો ઢાળ સમાન છે તે ચકાસી જુઓ.

આ પ્રમાણે $\theta = 30^\circ$, $\theta = 60^\circ$ લઈ સમાંતર રેખાનો ઢાળ સમાન હોય છે તે ચકાસી જુઓ.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

X-અક્ષનો અથવા X-અક્ષને સમાંતર રેખાનો ઢાળ શૂન્ય હોય છે.

Y-અક્ષનો અથવા Y-અક્ષને સમાંતર રેખાનો ઢાળ નક્કી કરી શકાય નહીં.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) A (−3, 5), અને B (4, −1) બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, $y_1 = 5$, $y_2 = -1$

$\therefore$ રેખા AB નો ઢાળ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-1-5}{4-(-3)} = \dfrac{-6}{7}$

ઉદા. (2) P(−2, 3), Q(1, 2), R(4, 1) આ બિંદુઓ સમરેખ છે. તે દર્શાવો.

ઉકેલ : P(−2, 3), Q(1, 2) અને R(4, 1) આ આપેલા બિંદુઓ છે.

રેખા PQ નો ઢાળ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2-3}{1-(-2)} = -\dfrac{1}{3}$

રેખા QR નો ઢાળ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1-2}{4-1} = -\dfrac{1}{3}$

રેખા PQ અને રેખા QR નો ઢાળ સમાન છે.

પરંતુ બિંદુ Q બંને રેખા પર છે.

$\therefore$ બિંદુ P, Q, R સમરેખ છે.

ઉદા. (3) જો P(k, 0) અને Q(−3, −2), બિંદુઓને જોડતી રેખાનો ઢાળ $\dfrac{2}{7}$ હોય તો k ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : P(k, 0) અને Q(−3, −2)

રેખા PQ નો ઢાળ $= \dfrac{-2-0}{-3-k} = \dfrac{-2}{-3-k}$

રેખા PQ નો ઢાળ $\dfrac{2}{7}$ આપ્યો છે.

$\therefore \dfrac{-2}{-3-k} = \dfrac{2}{7}$ $\quad \therefore -14 = -6-2k$ $\quad \therefore 2k = 8$ $\quad \therefore k = 4$

ઉદા. **(4)** A (6, 1), B (8, 2), C (9, 4) અને D (7, 3) એ □ABCD શિરોબિંદુઓ છે તો □ABCD સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે. તે દર્શાવો.

ઉકેલ : તમે જાણો છે કે, રેખાનો ઢાળ = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

રેખા AB નો ઢાળ = $\frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2}$ .... (I)

રેખા BC નો ઢાળ = $\frac{4-2}{9-8} = 2$ .... (II)

રેખા CD નો ઢાળ = $\frac{3-4}{7-9} = \frac{1}{2}$ .... (III)

રેખા DA નો ઢાળ = $\frac{3-1}{7-6} = 2$ .... (IV)

રેખા AB નો ઢાળ = રેખા CD નો ઢાળ .... (I) અને (III) પરથી

$\therefore$ રેખા AB || રેખા CD

રેખા BC નો ઢાળ = રેખા DA નો ઢાળ .... (II) અને (IV) પરથી

$\therefore$ રેખા BC || રેખા DA

માટે, ચતુષ્કોણની સંમુખ બાજુઓની બંને જોડી પરસ્પર સમાંતર છે.

$\therefore$ □ABCD સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ છે.

મહાવરાસંગ્રહ 5.3

1. રેખાએ X–અક્ષની ધન દિશા સાથે બનાવેલા ખૂણા નીચે આપ્યા છે, તેના પરથી તે રેખાના ઢાળ શોધો.

   (1) 45° (2) 60° (3) 90°

2. નીચેના બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ શોધો.

   (1) A (2, 3) અને B (4, 7) (2) P (–3, 1) અને Q (5, –2)

   (3) C (5, –2) અને D (7, 3) (4) L (–2, –3) અને M (–6, –8)

   (5) E(–4, –2) અને F (6, 3) (6) T (0, –3) અને S (0, 4)

3. નીચેના બિંદુઓ સમરેખ છે કે નહીં, તે ચકાસો.

   (1) A(–1, –1), B(0, 1), C(1, 3) (2) D(–2, –3), E(1, 0), F(2, 1)

   (3) L(2, 5), M(3, 3), N(5, 1) (4) P(2, –5), Q(1, –3), R(–2, 3)

   (5) R(1, –4), S(–2, 2), T(–3, 4) (6) A(–4, 4), K$\left(-2, \frac{5}{2}\right)$, N(4, –2)

4. A (1, –1),B (0, 4),C (–5, 3) એ ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ છે તો પ્રત્યેક બાજુનો ઢાળ શોધો.

5. A (–4, –7),B (–1, 2), C (8, 5) અને D (5, –4) એ ABCD સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણના શિરોબિંદુઓ છે, એ દર્શાવો.

6. $R(1, -1)$ અને $S(-2, k)$ છે. રેખા RS નો ઢાળ -2 હોય તો k ની કિંમત શોધો.

7. $B(k, -5)$ અને $C(1, 2)$ ને જોડતી રેખાનો ઢાળ 7 હોય તો k ની કિંમત શોધો.

8. $P(2, 4)$, $Q(3, 6)$, $R(3, 1)$ અને $S(5, k)$ છે અને રેખા PQ એ રેખા RS ને સમાંતર છે. તો k ની કિંમત શોધો.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 5

1. યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

(1) રેખ AB, Y-અક્ષને સમાંતર છે. બિંદુ A ના નિર્દેશક $(1,3)$ હોય તો, બિંદુ B ના નિર્દેશક .... હોઇ શકે.

(A) $(3,1)$ (B) $(5,3)$ (C) $(3,0)$ (D) $(1,-3)$

(2) નીચેનામાંથી .... બિંદુ X-અક્ષ પર આરંભબિંદુની જમણી દિશામાં છે.

(A) $(-2,0)$ (B) $(0,2)$ (C) $(2,3)$ (D) $(2,0)$

(3) બિંદુ $(-3,4)$ આરંભબિંદુથી ...... અંતરે છે.

(A) 7 (B) 1 (C) 5 (D) -5

(4) એક રેખાએ X-અક્ષની ધન દિશા સાથે 30° નો ખૂણો બનાવ્યો છે. તો તે રેખાનો ઢાળ .... છે.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

2. નીચેના બિંદુઓ સમરેખ છે કે નહીં તે નક્કી કરો.

(1) $A(0,2)$, $B(1,-0.5)$, $C(2,-3)$

(2) $P(1, 2)$, $Q(2, \frac{8}{5})$, $R(3, \frac{6}{5})$

(3) $L(1,2)$, $M(5,3)$, $N(8,6)$

3. $P(0,6)$ અને $Q(12,20)$ ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના નિર્દેશકો શોધો.

4. $A(3,8)$ અને $B(-9,3)$ બિંદુને જોડતા રેખાખંડને Y-અક્ષ ક્યા ગુણોત્તરમાં વિભાજીત કરે છે ?

5. X-અક્ષ પર $P(2,-5)$ અને $Q(-2,9)$ થી સમાન અંતરે આવેલું બિંદુ શોધો.

6. નીચેના બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

(1) $A(a, 0)$, $B(0, a)$ (2) $P(-6, -3)$, $Q(-1, 9)$ (3) $R(-3a, a)$, $S(a, -2a)$

7. એક ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ $A(-3,1)$, $B(0,-2)$ અને $C(1,3)$ છે તો તે ત્રિકોણના પરિકેન્દ્રના નિર્દેશક શોધો.

8. નીચેના બિંદુને જોડતા રેખાખંડોથી ત્રિકોણ તૈયાર કરી શકાશે કે ? ત્રિકોણ તૈયાર કર્યા પછી તેમની બાજુ પરથી તે ત્રિકોણનો પ્રકાર જણાવો.

(1) L (6,4) , M (−5,−3) , N (−6,8)

(2) P (−2,−6) , Q (−4,−2), R (−5,0)

(3) A ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), B ($-\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$), C ($-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$)

9. જો P (−12,−3) અને Q (4, k) ને જોડાતી રેખાનો ઢાળ $\frac{1}{2}$ છે. તો k ની કિંમત શોધો.

10. A(4, 8) અને B(5, 5) બિંદુને જોડતી રેખા, C(2,4) અને D(1,7) બિંદુને જોડતી રેખાને સમાંતર છે તે દર્શાવો.

11. P(1,−2), Q(5,2), R(3,−1), S(−1,−5) એ સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણના શિરોબિંદુઓ છે. તે દર્શાવો.

12. જો P(2,1), Q(−1,3), R(−5,−3) અને S(−2,−5) હોય તો □PQRS લંબચોરસ છે તે દર્શાવો.

13. A (−1, 1), B (5, −3) અને C (3, 5) શિરોબિંદુ ધરાવતા ત્રિકોણની ત્રણેય મધ્યગાની લંબાઈ શોધો.

14★. જો D (−7, 6), E (8, 5) અને F (2, −2) એ ત્રિકોણની બાજુઓના મધ્યબિંદુ હોય તો તે ત્રિકોણની મધ્યગા સંપાતિબિંદુના નિર્દેશકો શોધો.

15. A(4, −1), B(6, 0), C(7, −2) અને D(5, −3) એ ચોરસના શિરોબિંદુઓ છે તે દર્શાવો.

16. A(7, 1), B(3, 5) અને C(2, 0) શિરોબિંદુઓ ધરાવતા ત્રિકોણના પરિવર્તુળના કેન્દ્રના નિર્દેશક અને પરિવર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

17. જો A(4,−3) અને B(8,5), તો રેખ AB નું 3:1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરનાર બિંદુના નિર્દેશકો શોધો.

18★. A(−4, −2), B(−3, −7) C(3, −2) અને D(2, 3) બિંદુઓને ક્રમથી જોડતા તૈયાર થતા ચતુષ્કોણ ABCD નો પ્રકાર કહો.

19★. રેખ AB પર આવેલા બિંદુ P, Q, R અને S ને કારણે તે રેખાખંડના પાંચ એકરૂપ ભાગ થાય છે. જો A−P−Q − R−S−B અને Q(12, 14), S(4, 18) ; હોય તો A, P, R અને B ના નિર્દેશક શોધો.

20. બિંદુઓ P (6,−6), Q (3,−7) અને R (3,3) માંથી પસાર થતા વર્તુળના કેન્દ્રના નિર્દેશક શોધો.

21★. સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણના ત્રણ શિરોબિંદુના નિર્દેશક A (5,6), B (1,−2) અને C (3,−2) હોય તો ચોથા બિંદુના નિર્દેશકોની શક્ય હોય તેટલી જોડીઓ શોધો.

22. A (1,7), B (6,3) C (0,−3) અને D (−3,3) શિરોબિંદુઓ ધરાવતા ચતુષ્કોણના વિકર્ણોનો ઢાળ શોધો.

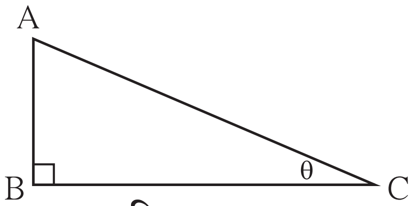
6 ત્રિકોણમિતિ

ચાલો, શીખીએ.

- ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરો
- ત્રિકોણમિતિય નિત્યસમાનતા
- ઉન્નતકોણ અને અવનતકોણ
- ઊંચાઈ અને અંતર પરના ઉદાહરણો

યાદ કરીએ.

1. બાજુની આકૃતિના ખાલી જગ્યા પૂરો.



આકૃતિ 6.1

$\sin\theta = \dfrac{\square}{\square}$, $\cos\theta = \dfrac{\square}{\square}$,

$\tan\theta = \dfrac{\square}{\square}$

2. નીચેના ગુણોત્તરો વચ્ચેનો સંબંધ પૂર્ણ કરો.

(i) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \square$ (ii) $\sin\theta = \cos(90 - \square)$

(iii) $\cos\theta = \sin(90 - \square)$ (iv) $\tan\theta \tan(90 - \theta) = \square$

3. નીચેનું સમીકરણ પૂર્ણ કરો.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \square$

4. નીચેના ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોની કિંમત લખો.

(i) $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{\square}$ (ii) $\cos 30^\circ = \dfrac{\square}{\square}$ (iii) $\tan 30^\circ = \dfrac{\square}{\square}$

(iv) $\sin 60^\circ = \dfrac{\square}{\square}$ (v) $\cos 45^\circ = \dfrac{\square}{\square}$ (vi) $\tan 45^\circ = \square$

ધોરણ નવમાં આપણે લઘુકોણના કેટલાક ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોનો અભ્યાસ કર્યો છે. આ વર્ષે આપણે લઘુકોણના જ બીજા કેટલાક ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો અભ્યાસ કરીશું.

જાણી લઈએ.

કોસેક, સેક અને કૉટ્ ગુણોત્તરો (cosec, sec and cot ratios)

ખૂણાના સાઈન ગુણોત્તરના વ્યસ્તાંકને કોસીકેન્ટ (cosecant) ગુણોત્તર કહેવાય છે.

તેને ટૂંકમાં cosec લખવામાં આવે છે. $\therefore$ $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

તેજ રીતે કોસાઈન અને ટૅન્જન્ટ્ ગુણોત્તરોના વ્યસ્તાંકને અનુક્રમે સીકેન્ટ્ (seacant) અને કૉટૅન્જન્ટ્ (cotangent) ગુણોત્તર કહેવામાં આવે છે. તે ટૂંકમાં અનુક્રમે sec અને cot લખાય છે.

$\therefore$ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ અને $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

આકૃતિ 6.2 માં,

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{AC}{AB}$$

એટલે કે, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{કર્ણ}}{\angle\theta\text{ની સામેની બાજુ}}$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}}$$

$$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{પાસેની બાજુ}}{\text{સામેની બાજુ}}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

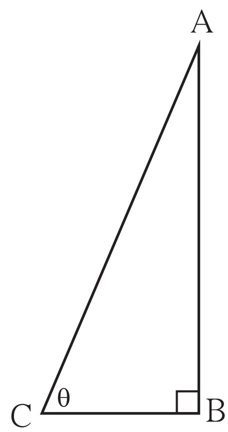
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AC}{BC}$$

એટલે કે, $\sec\theta = \dfrac{\text{કર્ણ}}{\angle\theta\text{ની પાસેની બાજુ}}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ તે તમે જાણો છો.

$$\therefore \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$



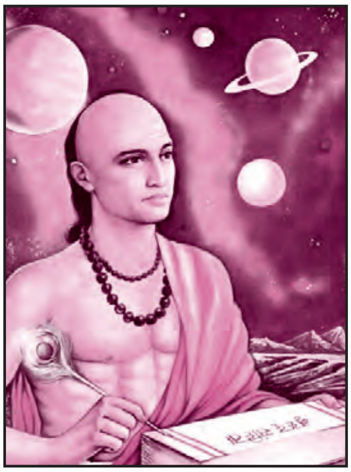
આકૃતિ 6.2

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

cosec, sec અને cot સંદર્ભે ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોનો પરસ્પર સંબંધ

- $\dfrac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\,\theta \quad \therefore \sin\theta \times \text{cosec}\,\theta = 1$
- $\dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \quad \therefore \cos\theta \times \sec\theta = 1$
- $\dfrac{1}{\tan\theta} = \cot\theta \quad \therefore \tan\theta \times \cot\theta = 1$

વધુ માહિતી માટે



મહાન ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી આર્યભટ્ટનો જન્મ ઈ.સ.476માં કુસુમપૂરમાં થયો હતો. જે હાલમાં બિહારના પટના શહેરની પાસે આવેલું છે. તેમણે ગણિતની ત્રણ શાખાઓ અંકગણિત, બીજગણિત અને ભૂમિતિમાં નક્કર કાર્ય કર્યું. તેમણે 'આર્ટભટીય' ગ્રંથમાં ગણિતના અનેક નિષ્કર્ષોને સૂત્રરૂપમાં લખ્યા છે. દા.ત.

(1) અંકગણિત શ્રેણીમાં n-મું પદ શોધવાનું અને પહેલા n પદોના સરવાળાનું સૂત્ર

(2) $\sqrt{2}$ ની કિંમત શોધવાનું સૂત્ર

(3) π ની ચાર દશાંશ સ્થળ સુધીની ચોક્કસ કિંમત 3.1416 વગેરે...

ખગોળશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં તેમણે ત્રિકોણમિતિનો ઉપયોગ કર્યો અને ***જ્યા ગુણોત્તર*** *(sine ratio)* સંકલ્પનાનો પ્રથમ વાર ઉપયોગ કર્યો.

તેમના સમયનાં જગતમાં ગણિતના જ્ઞાનનો વિચાર કરીએ તો તેમની ગણિત વિષયમાં કામગિરી સર્વ શ્રેષ્ઠ હતી. તેથી તેમના ગ્રંથનો પ્રસાર સંપૂર્ણ ભારતમાં, તેમજ અરબસ્તાન દ્વારા યુરોપમાં પણ થયો હતો.

પૃથ્વી સ્થિર છે અને સૂર્ય, ચંદ્ર, તારા વિશિષ્ટ ક્રમથી પૃથ્વીની ફરતે ફરે છે એવો તે સમયના બધા નિરીક્ષકોનો મત હતો. પરંતુ હોડી દ્વારા જનારને કિનારા પરના ઝાડ અને વસ્તુઓ વિરુધ્ધ દિશામાં જતા હોય તેવો ભાસ થાય છે. તેવો જ ભાસ પૃથ્વી પરના લોકોને સૂર્ય, તારા વગેરે માટે થાય છે. એટલે પૃથ્વી ભ્રમણ કરે છે એવું આર્યભટીયમાં લખ્યું છે.

19 એપ્રિલ, 1975ના દિવસે ભારતે પોતાનો પહેલો ઉપગ્રહ અવકાશમાં મોકલ્યો. આ ઉપગ્રહને 'આર્યભટ્ટ' નામ આપીને દેશે આ મહાન ગણિતશાસ્ત્રીનું યથાયોગ્ય સન્માન કર્યું.

✻ $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ અને 90° ના ખૂણાના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનું કોષ્ટક.

ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તર	ખૂણાનું માપ (θ)				
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	અવ્યાખ્યાયિત
$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	અવ્યાખ્યાયિત	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	અવ્યાખ્યાયિત
$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	અવ્યાખ્યાયિત	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

જાણી લઈએ.

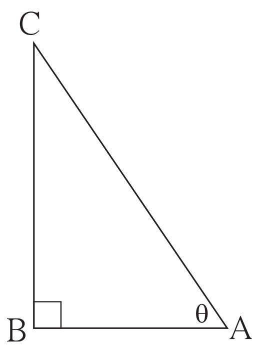
ત્રિકોણમિતિય નિત્યસમાનતા (Trigonometrical identities)

બાજુની આકૃતિ 6.3માં, કાટકોણ Δ ABCમાં, $\angle B = 90^\circ$

(i) $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$ (ii) $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$

(iii) $\tan\theta = \frac{BC}{AB}$ (iv) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{BC}$

(v) $\sec\theta = \frac{AC}{AB}$ (vi) $\cot\theta = \frac{AB}{BC}$



આકૃતિ 6.3

તેમ જ પાયથાગોરસના સિધ્ધાંત અનુસાર,

$BC^2 + AB^2 = AC^2$ . . . . .(I)

સમીકરણ (I) ની બંને બાજુઓને AC^2 વડે ભાગતાં,

$$\frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$\therefore \dfrac{BC^2}{AC^2} + \dfrac{AB^2}{AC^2} = 1$

$\therefore \left(\dfrac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 = 1$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ .... [$(\sin\theta)^2$ ને $\sin^2\theta$ અને $(\cos\theta)^2$ ને $\cos^2\theta$ લખવામાં આવે છે.]

$\therefore$ **$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$** .... (II)

હવે સમીકરણ (II) નો બંને બાજુએ $\sin^2\theta$ વડે ભાગતાં.

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$\therefore$ **$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$** .... (III)

તેજ રીતે, સમીકરણ (II) નો બંને બાજુએ $\cos^2\theta$ વડે ભાગતાં.

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\therefore \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\therefore$ **$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$** .... (IV)

સમીકરણ (II), (III), અને (IV) એ મૂળભૂત ત્રિકોણમિતિય નિત્યસમાનતા છે.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) જો $\sin\theta = \dfrac{20}{29}$ હોય તો $\cos\theta$ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : **રીત I**

આપણે જાણીએ છીએ કે ,

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \left(\dfrac{20}{29}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \dfrac{400}{841} + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \cos^2\theta = 1 - \dfrac{400}{841}$

$= \dfrac{441}{841}$

બંને બાજુનું વર્ગમૂળ કાઢતાં.

$\therefore \cos\theta = \dfrac{21}{29}$

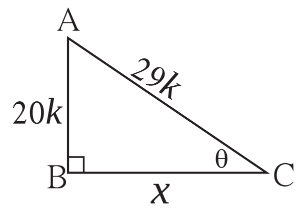
રીત II

$\sin\theta = \dfrac{20}{29}$

પરંતુ આકૃતિ પરથી, $\sin\theta = \dfrac{AB}{AC}$

$\therefore AB = 20k$ અને $AC = 29k$

$BC = x$ ધારીએ.



આકૃતિ 6.4

પાયથાગોરસના સિધ્ધાંત અનુસાર,

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore (20k)^2 + x^2 = (29k)^2$

$\therefore 400k^2 + x^2 = 841k^2$

$\therefore x^2 = 841k^2 - 400k^2$

$= 441k^2$

$\therefore x = 21k$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{21k}{29k} = \dfrac{21}{29}$

ઉદા. (2) જો $\sec\theta = \frac{25}{7}$ હોય તો $\tan\theta$ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : રીત I

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore 1 + \tan^2\theta = \left(\frac{25}{7}\right)^2$

$\therefore \tan^2\theta = \frac{625}{49} - 1$

$= \frac{625-49}{49}$

$= \frac{576}{49}$

$\therefore \tan\theta = \frac{24}{7}$

રીત II

આકૃતિ પરથી,

$\sec\theta = \frac{PR}{PQ}$

$\therefore PQ = 7k, PR = 25k$

પાયથાગોરસના પ્રમેય અનુસાર,

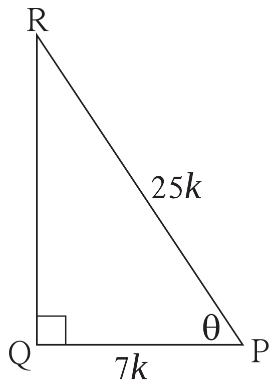
$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

$\therefore (7k)^2 + QR^2 = (25k)^2$

$\therefore QR^2 = 625k^2 - 49k^2 = 576k^2$

$\therefore QR = 24k$

હવે, $\tan\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$



આકૃતિ 6.5

ઉદા. (3) જો $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$ હોય તો $\sec\theta$ અને $\operatorname{cosec}\theta$ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$

$\therefore 5\sin\theta = 12\cos\theta$

$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5}$

$\therefore \tan\theta = \frac{12}{5}$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \sec^2\theta$

$\therefore 1 + \frac{144}{25} = \sec^2\theta$

$\therefore \frac{25+144}{25} = \sec^2\theta$

$\therefore \sec^2\theta = \frac{169}{25}$

$\therefore \sec\theta = \frac{13}{5}$

$\therefore \cos\theta = \frac{5}{13}$

હવે, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\therefore \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$

$= 1 - \frac{25}{169}$

$= \frac{144}{169}$

$\therefore \sin\theta = \frac{12}{13}$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{12}$

ઉદા. (4) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ હોય તો $\frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta}$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : રીત I

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \sin^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore \sin^2\theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \operatorname{cosec}\theta = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

રીત II

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ આપણે જાણીએ છીએ.

$\therefore \quad \theta = 30^\circ$

$\therefore \sec\theta = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

ઉદા. (5) સાબિત કરો કે, $\sec x + \tan x = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

ઉકેલ : $\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

ઉદા. (6) નીચેના સમીકરણમાં θ નું નિરસન કરો.

$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta$

$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta$

ઉકેલ :

$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta$ .... (I)

$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta$ .... (II)

સમીકરણ (I) અને (II) નો સરવાળો કરતાં,

$x + y = 2a \cot\theta$

$\therefore \cot\theta = \dfrac{x+y}{2a}$ .... (III)

સમીકરણ (II) માંથી (I) બાદ કરતાં,

$y - x = 2b \operatorname{cosec}\theta$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{y-x}{2b}$ .... (IV)

હવે, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$$\therefore \left(\frac{y-x}{2b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{2a}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{(y-x)^2}{4b^2} - \frac{(y+x)^2}{4a^2} = 1$$

અથવા $\left(\dfrac{y-x}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{y+x}{a}\right)^2 = 4$

મહાવરાસંગ્રહ 6.1

1. જો $\sin\theta = \dfrac{7}{25}$ તો $\cos\theta$ અને $\tan\theta$ ની કિંમત શોધો.

2. જો $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ તો $\sec\theta$ અને $\cos\theta$ ની કિંમત શોધો.

3. જો $\cot\theta = \dfrac{40}{9}$ તો $\operatorname{cosec}\theta$ અને $\sin\theta$ ની કિંમત શોધો.

4. જો $5\sec\theta - 12\operatorname{cosec}\theta = 0$ હોય તો $\sec\theta$, $\cos\theta$ અને $\sin\theta$ ની કિંમત શોધો.

5. જો $\tan\theta = 1$ હોય તો $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta}$ ની કિંમત શોધો.

6. સાબિત કરો.

   (1) $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

   (2) $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$

(3) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

(4) $(\sec\theta - \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta) = \tan\theta \cdot \sec\theta$

(5) $\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \cdot \sec\theta$

(6) $\dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

(7) $\sin^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$

(8) $\sec\theta + \tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

(9) જો $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 2$ હોય તો સાબિત કરો કે $\tan^2\theta + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = 2$

(10) $\dfrac{\tan A}{(1+\tan^2 A)^2} + \dfrac{\cot A}{(1+\cot^2 A)^2} = \sin A \cos A$

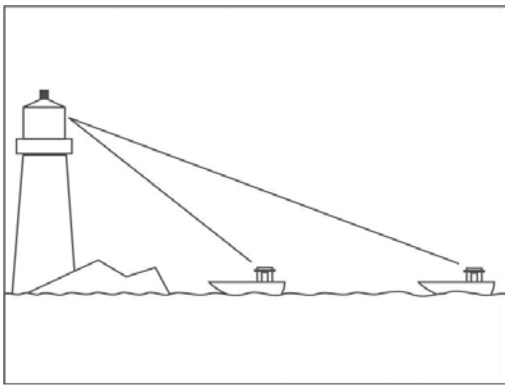
(11) $\sec^4 A\,(1 - \sin^4 A) - 2\tan^2 A = 1$

(12) $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} = \dfrac{\tan\theta + \sec\theta + 1}{\tan\theta + \sec\theta - 1}$

જાણી લઈએ.

ત્રિકોણમિતિનું ઉપયોજન (Application of trigonometry)

ઘણીવાર આપણને મિનારાની, ઇમારતની અથવા ઝાડની ઊંચાઈ, તેમજ દીવાદાંડીથી જહાજનું અંતર અથવા નદીના કિનારાની પહોળાઈ જાણવી પડે છે. આ અંતર આપણે પ્રત્યક્ષ રીતે માપી શકતા નથી. પરંતુ ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરીને ઊંચાઈ અથવા અંતર નક્કી કરી શકીએ છીએ.



આકૃતિ 6.6

ઊંચાઈ અથવા અંતર નક્કી કરવા માટે, આપણે પહેલાં આપેલી માહિતી દર્શાવતી કાચી આકૃતિ દોરીશું. ઝાડ, ટેકરી, મિનારા જેવી વસ્તુઓ જમીનને લંબ છે, તે દર્શાવવા માટે આપણે આકૃતિમાં લંબરેખાખંડોનો ઉપયોગ કરીશું. આપણે નિરીક્ષકની ઊંચાઈ ધ્યાનમાં લેવાના નથી. સામાન્ય રીતે નિરીક્ષકની દૃષ્ટિ ક્ષિતિજ સમાંતર છે. એવું માનીશું.

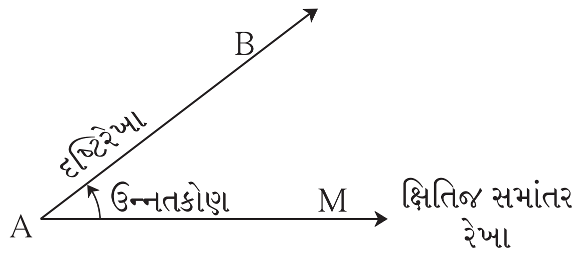
પહેલા આપણે કેટલીક સંબંધિત સંજ્ઞાનો અભ્યાસ કરીશું.

(i) દષ્ટિરેખા (Line of vision) :

બિંદુ 'A' સ્થળે ઊભેલો નિરીક્ષક બિંદુ 'B' તરફ જોતો હોય તો રેખા ABને દષ્ટિરેખા કહેવાય છે.

(ii) ઉન્નતકોણ (Angle of elevation) :

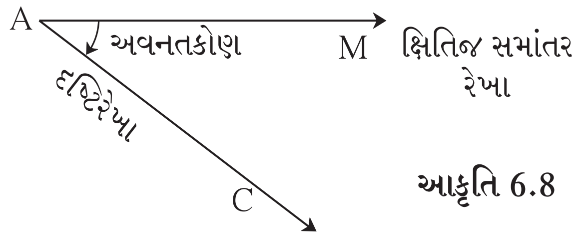
નિરીક્ષકની સામાન્ય દષ્ટિરેખા AM ક્ષિતિજ સમાંતર છે. નિરીક્ષણ માટેનું બિંદુ B, જો બિંદુ Aની તુલનામાં વધુ ઊંચાઈ પર આવેલું હોય તો દષ્ટિરેખા AB, રેખ AM સાથે જે ખૂણો બનાવે છે તે ઉન્નતકોણ હોય છે. આકૃતિમાં $\angle$ MAB ઉન્નતકોણ છે.



આકૃતિ 6.7

(iii) અવનતકોણ (Angle of depression) :

નિરીક્ષણ માટેનું બિંદુ C જો ક્ષિતિજ સમાંતર રેખા AMથી નીચે આવેલું હોય તો દષ્ટિરેખા AC રેખા AM સાથે અવનત કોણ બનાવે છે. આકૃતિમાં $\angle$ MAC અવનતકોણ છે.



આકૃતિ 6.8

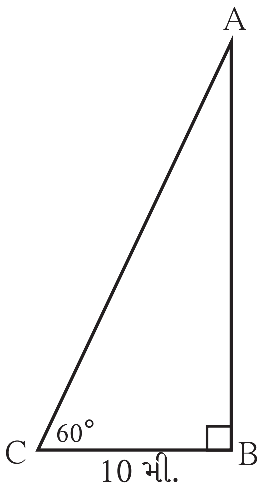
જ્યારે આપણે ક્ષિતિજ સમાંતર રેખાથી ઉપરની દિશામાં જોઈએ છીએ. ત્યારે તૈયાર થતો ખૂણો ઉન્નતકોણ હોય છે.

જ્યારે આપણે ક્ષિતિજ સમાંતર રેખાની નીચેની દિશામાં જોઈએ છીએ. ત્યારે તૈયાર થતો ખૂણો અવનતકોણ હોય છે.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) એક ઝાડના થડથી 10 મી. અંતરે આવેલ નિરીક્ષક ઝાડની ટોચ જોવા માટે 60° નો ઉન્નતકોણ બનાવે છે. તો ઝાડની ઊંચાઈ કેટલી ? ($\sqrt{3}$ = 1.73)

ઉકેલ : આકૃતિ 6.9માં, AB ઝાડ છે અને નિરીક્ષક બિંદુ C પાસે છે.



આકૃતિ 6.9

રેખ AB = h = ઝાડની ઊંચાઈ .

નિરીક્ષકનું ઝાડથી અંતર BC = 10 મી.

અને ઉન્નતકોણ $(\theta) = \angle BCA = 60^\circ$

આકૃતિ પરથી, $\tan\theta = \dfrac{AB}{BC}$ .... (I)

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ .... (II)

$\therefore \quad \dfrac{AB}{BC} = \sqrt{3}$ .... (I) અને (II) પરથી

$\therefore \quad AB = BC\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

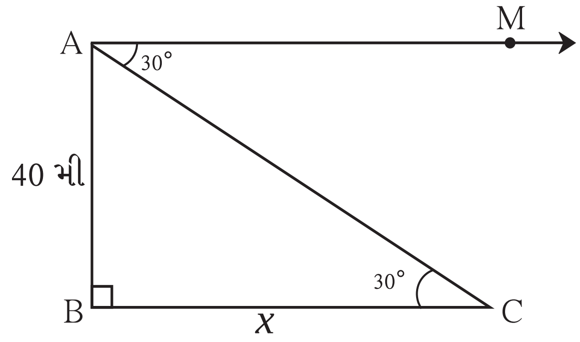
$\therefore \quad AB = 10 \times 1.73 = 17.3$ મી.

$\therefore$ ઝાડની ઊંચાઈ 17.3 મી. છે.

ઉદા. (2) 40 મી ઊંચી ઇમારતની છત પરથી, તે ઇમારતથી કેટલાક મીટરના અંતરે ઊભેલા સ્કૂટર તરફ જોતા 30° માપનો અવનતકોણ બને છે, તો તે સ્કૂટર ઇમારતથી કેટલું દૂર ઊભું છે ?
($\sqrt{3} = 1.73$)

ઉકેલ : આકૃતિ 6.10માં રેખ AB ઇમારત છે. ઇમારતથી 'x' મી અંતરે 'C' સ્થળે સ્કૂટર ઊભું છે.

આકૃતિમાં, A સ્થળે નિરીક્ષક ઊભો છે.
AM ક્ષિતિજ સમાંતર રેખા છે.
$\angle$ MAC અવનતકોણ છે.
$\angle$ MAC અને $\angle$ ACB વ્યુત્ક્રમકોણો એકરૂપ છે, તે ધ્યાનમાં રાખો.



આકૃતિ 6.10

આકૃતિ પરથી, $\tan 30^\circ = \dfrac{AB}{BC}$

$\therefore \quad \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{40}{x}$

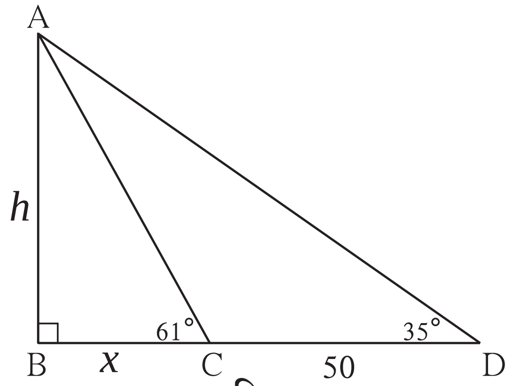
$\therefore \quad x = 40\sqrt{3}$

$= 40 \times 1.73$

$= 69.\ 20$ મી.

$\therefore$ તે સ્કૂટર ઇમારતથી 69.20 મી અંતરે ઊભું છે.

ઉદા. (3) નદીના કિનારાની પહોળાઈ શોધવા માટે એક માણસે એક કિનારાની વિરુધ્ધ બાજુએ આવેલા મિનારાની ટોચ તરફ જોતા 61°નો ઉન્નતકોણ બન્યો. તેજ રેખામાં 50 મી પાછળ જઈને મિનારાની ટોચ તરફ જોતા 35°નો ઉન્નતકોણ બંને છે. તો નદીના કિનારાની પહોળાઈ અને મિનારાની ઊંચાઈ શોધો.
($\tan 61^\circ \approx 1.8$, $\tan 35^\circ \approx 0.7$)



આકૃતિ 6.11

ઉકેલ : રેખ AB સામેના કિનારે આવેલો મિનારો છે. 'A' ટોચ અને રેખ BC નદીના કિનારાની પહોળાઈ છે. મિનારાની ઊંચાઈ h મી અને નદી કિનારાની પહોળાઈ x મી ધારીએ.

આકૃતિ પરથી, $\tan 61^\circ = \dfrac{h}{x}$

$\therefore \quad 1.8 = \dfrac{h}{x}$

$h = 1.8 \times x$

$10h = 18x$ .... (I)..... 10 વડે ગુણતાં,

કાટકોણ Δ ABDમાં,

તેમ જ, $\tan 35 = \dfrac{h}{x + 50}$

$\therefore \quad 0.7 = \dfrac{h}{x + 50}$

$\therefore \quad h = 0.7\,(x + 50)$

$\therefore \quad 10h = 7\,(x + 50)$ .... (II)

$\therefore \quad 18x = 7(x + 50)$

[(I) અને (II) પરથી]

$\therefore\ 18x = 7x + 350$

$\therefore\ 11x = 350$

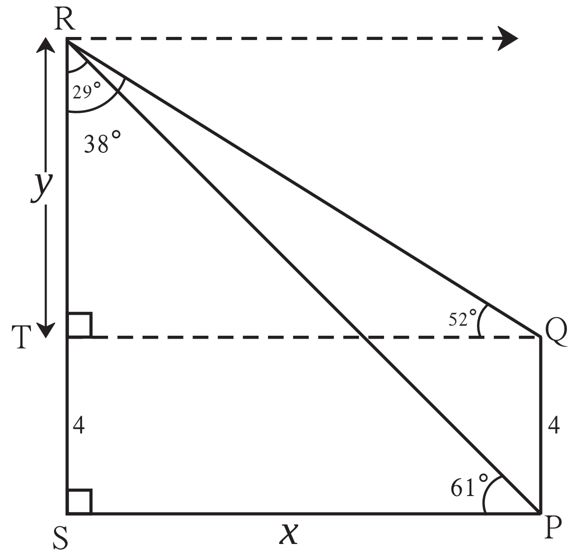
$\therefore \quad x = \dfrac{350}{11} = 31.82$

હવે, $h = 1.8x = 1.8 \times 31.82$

$= 57.28$ મી.

$\therefore$ નદી કિનારાની પહોળાઈ = 31.82 મી. મિનારાની ઊંચાઈ = 57.28 મી.

ઉદા. (4) રોશની ઘરના દરવાજામાં ઊભી હતી. ઘરથી થોડા અંતરે આવેલા ઝાડની ટોચ પર એક ગરુડ બેઠેલું જોયું, ત્યારે તેની દષ્ટિનો ઉન્નતકોણ 61° હતો. ગરુડ વધુ સ્પષ્ટ દેખાય તે માટે ઘરથી 4 મીટર ઉંચાઈ પર આવેલી અગાશી પર ગઈ ત્યાંથી જોતા તેની દષ્ટિનો ઉન્નતકોણ 52° હતો. તો તે ગરુડ જમીનથી કેટલી ઊંચાઈએ હતું ? (જવાબ નજીકના પૂર્ણાંક સુધી શોધો.)



આકૃતિ 6.12

($\tan 61^\circ = 1.80$, $\tan 52^\circ = 1.28$, $\tan 29^\circ = 0.55$, $\tan 38^\circ = 0.78$)

ઉકેલ : ધારો કે, આકૃતિ 6.12માં PQ ઘર અને SR ઝાડ છે. ગરુડનું સ્થાન R પાસે છે.

રેખ QT $\perp$ રેખ RS દાર્યો.

$\therefore$ $\square$ TSPQ લંબચોરસ છે.

SP = x અને TR = y ધારીએ.

SP = TQ = x અને PQ = ST = y .....[$\because$ લંબચોરસની સામસામેની બાજુ]

હવે, Δ RSPમાં, $\angle$ PRS = 90° - 61° = 29°

તેમ જ, Δ RTQમાં, $\angle$ QRT = 90° - 52° = 38°

$\therefore \tan \angle PRS = \tan 29^\circ = \frac{SP}{RS}$

$\therefore 0.55 = \frac{x}{y+4}$

$\therefore x = 0.55(y + 4)$ .... (I)

તેમ જ, $\tan \angle QRT = \frac{TQ}{RT}$

$\therefore \tan 38^\circ = \frac{x}{y}$ .... [$\because$ SP = TQ = x]

$\therefore 0.78 = \frac{x}{y}$

$\therefore x = 0.78y$ .... (II)

$\therefore 0.78y = 0.55(y + 4)$ .... (I) અને (II) પરથી

$\therefore 78y = 55(y + 4)$

$\therefore 78y = 55y + 220$

$\therefore 23y = 220$

$\therefore y = 9.565 = 10$ (નજીકના પૂર્ણાંકમાં)

$\therefore$ RS = $y + 4 = 10 + 4 = 14$

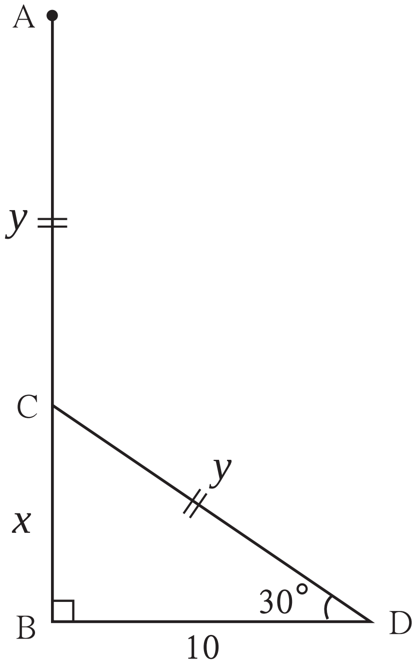
$\therefore$ ગરુડ જમીનથી 14 મીટર અંતરે હતું.

ઉદા. (5) વાવાઝોડાને કારણે એક ઝાડ તૂટી ગયું અને ઝાડની ટોચ જમીનને અડચો અને અડેલો ભાગ જમીન સાથે 30°નો ખૂણો બનાવે છે. ઝાડની ટોચ અને થડ વચ્ચેનું અંતર 10 મી હોય તો ઝાડની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, આકૃતિ 6.13માં, AB ઝાડ અને 'A' ઝાડની ટોચ છે. વાવાઝોડાને કારણે ઝાડ 'C' આગળથી તૂટી પડ્યું અને D સ્થળે જમીનને અડ્યું.

$\angle$ CDB = 30°, BD = 10 મી, BC = x મી, CA= CD = y મી

કાટકોણ Δ CDBમાં,



આકૃતિ 6.13

$$\tan 30° = \frac{BC}{BD}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{10}$$

$$\therefore \quad x = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 30° = \frac{BD}{CD}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{y}$$

$$\therefore \quad y = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad x + y = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad x + y = 10\sqrt{3}$$

$\therefore$ ઝાડની ઊંચાઈ $10\sqrt{3}$ મી છે.

મહાવરાસંગ્રહ 6.2

1. એક વ્યક્તિ એક ચર્ચથી 80 મી. અંતરે ઊભો છે. તે વ્યક્તિએ ચર્ચની છત તરફ જોતા 45° માપનો ઉન્નતકોણ બને છે. તો ચર્ચની ઊંચાઈ કેટલી ?
2. દીવાદાંડી પરથી એક જહાજ તરફ જોતા 60°નો અવનતકોણ બનાવે છે. જો દીવાદાંડીની ઊંચાઈ 90 મી હોય તો તે જહાજ દીવાદાંડીથી કેટલા અંતરે હશે ? ($\sqrt{3}$ =1.73)
3. 12 મી પહોળા રસ્તાની બંને તરફ સામસામે બે ઇમારતો આવેલી છે. તે પૈકી એક ઇમારતની ઊંચાઈ 10 મી છે. અને તેની છત પરથી બીજી ઇમારતની છત તરફ જોતા 60°નો ઉન્નતકોણ બને છે, તો બીજી ઇમારતની ઊંચાઈ કેટલી ?
4. જમીન પર 18 મી અને 7 મી ઊંચાઈના બે થાંભલા આવેલા છે. તેમની ઉપરની ટોચોને જોડતાં તારની લંબાઈ 22 મી છે, તો તે તારે ક્ષિતિજ સમાંતર સપાટી સાથે બનાવેલા ખૂણાનું માપ શોધો.
5. વાવાઝોડાને કારણે એક ઝાડ વચમાંથી તૂટી ગયું અને ઝાડની ટોચ જમીનને અડતાં 60°નો ખૂણો તૈયાર થયો. ઝાડની ટોચ અને થડ વચ્ચેનું અંતર 20 મી હોય તો ઝાડની ઊંચાઈ શોધો.
6. એક પતંગ ઊડાડતાં તે જમીનથી 60 મી લંબઊંચાઈએ પહોંચે છે. પતંગના દોરાનો છેડો જમીન પર બાંધતા જમીન અને દોરા વચ્ચે 60°નો ખૂણો તૈયાર થાય છે. દોરો ક્યાંય પણ વળેલો નથી એવું ધારીને દોરાની લંબાઈ શોધો. ($\sqrt{3}$ =1.73)

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 6

1. નીચેના પ્રશ્નો માટે યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

(1) $\sin\theta \ \ \text{cosec}\theta$ = કેટલા ?

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

(2) $\text{cosec}45°$ ની કિંમત નીચેનામાંથી કઈ ?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) $1 + \tan^2\theta$ = કેટલા ?

(A) $\cot^2\theta$ (B) $\text{cosec}^2\theta$ (C) $\sec^2\theta$ (D) $\tan^2\theta$

(4) જ્યારે આપણે ક્ષિતિજ સમાંતર રેખાની ઉપરની દિશામાં જોઈએ, ત્યારે .... કોણ બને છે.

(A) ઉન્નતકોણ (B) અવનતકોણ (C) શૂન્ય (D) રેખિક

2. જો $\sin\theta = \frac{11}{61}$ હોય તો નિત્યસમાનતા ઉપયોગ કરીને $\cos\theta$ ની કિંમત શોધો.

3. જો $\tan\theta = 2$, હોય તો અન્ય ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોની કિંમત શોધો.

4. જો $\sec\theta = \frac{13}{12}$, હોય તો અન્ય ત્રિકોણમિતિય ગુણોત્તરોની કિંમત શોધો.

5. સાબિત કરો.

(1) $\sec\theta\,(1 - \sin\theta)\,(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

(2) $(\sec\theta + \tan\theta)\,(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

(3) $\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \times \text{cosec}^2\theta$

(4) $\cot^2\theta - \tan^2\theta = \text{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$

(5) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

(6) $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

(7) $\sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3\sec^2 x \times \tan^2 x$

(8) $\frac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}$

(9) $\frac{\tan^3\theta - 1}{\tan\theta - 1} = \sec^2\theta + \tan\theta$

(10) $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$

6. એક છોકરો એક ઇમારતથી 48 મીટરને અંતરે ઊભો છે. ત્યાંથી તે ઇમારતની ટોચ તરફ જોતા 30°નો ઉન્નતકોણ તૈયાર થાય છે. તો તે ઇમારતની ઊંચાઈ કેટલી ?

7. નિરીક્ષકે દીવાદાંડી પરથી એક જહાજ તરફ જોતા 30°નો અવનત કોણ બનાવે છે. જો દીવાદાંડીની ઊંચાઈ 100 મી હોય તો તે જહાજ દીવાદાંડીથી કેટલા અંતરે હશે.

8. 15 મી પહોળા રસ્તાની બંને બાજુ સામસામે બે ઇમારતો આવેલી છે. તે પૈકી એકની ઊંચાઈ 12 મી છે અને તેની છત પરથી બીજી ઇમારતની છત તરફ જોતાં 30°નો ઉન્નત કોણ બને છે. તો તે ઇમારતની ઊંચાઈ કેટલી ?

9. અગ્નિશામકદળના વાહન પરથી નિસરણી (સીડી) વધુમાં વધુ 70° ના ખૂણે ઊંચી કરી શકાય છે. તે સમયે તેની વધુમાં વધુ લંબાઈ 20 મી હોય છે. નિસરણીનો વાહન પરનો છેડો જમીનથી 2 મી ઊંચાઈએ આવેલો હોય તો તે સીડીનો બીજો છેડો જમીનથી વધુમાં વધુ કેટલી ઊંચાઈએ પહોંચ્યો હશે ? ($\sin 70^\circ \approx 0.94$)

10. આકાશમાં ઉડતાં વિમાનચાલકે વિમાનને નીચે ઉતારવાની શરૂઆત કરી ત્યારે 20°નો અવનતકોણ બનાવ્યો, ત્યારે તે વિમાનની સરાસરી ઝડપ 200 કિમી/કલાક હતી. તે વિમાન 54 સેકંડમાં વિમાન મથક પર ઉતર્યું. વિમાન મથક તરફ નીચે ઉતારવાની શરૂઆત કરી તે ક્ષણે તે વિમાન જમીનથી કેટલી ઊંચાઈએ હશે ? ($\sin 20^\circ \approx 0.342$)

QNNCH9

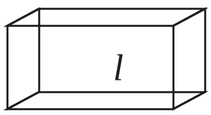
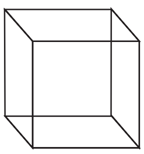
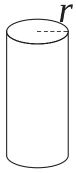
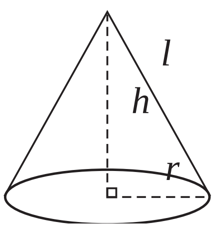
7 મહત્ત્વમાપન

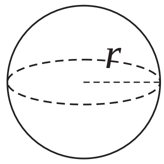
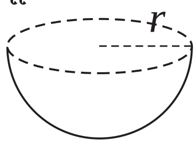
ચાલો, શીખીએ.

- વિવિધ ઘનાકૃતિના પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ પર આધારિત મિશ્ર ઉદાહરણો.
- વર્તુળચાપ - વર્તુળચાપની લંબાઈ
- વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ
- વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ

યાદ કરીએ.

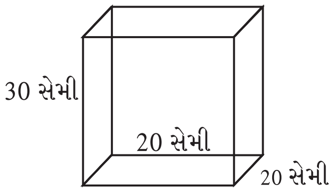
પાછલા ધોરણમાં આપણે કેટલીક ત્રિપરિમાણીય આકૃતિઓના પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળનો અભ્યાસ કર્યો છે. તે માટે ઉપયોગી સૂત્રો યાદ કરીએ.

ક્ર.	ત્રિપરિમાણીય આકૃતિ	સૂત્રો
1 .	લંબઘન 	ઊભા પૃષ્ઠોનું પૃષ્ઠફળ $= 2h\,(l + b)$ કુલ પૃષ્ઠફળ $= 2\,(lb + bh + hl)$ લંબઘનનું ઘનફળ $= lbh$
2 .	ઘન 	ઘનનું ઊભું પૃષ્ઠફળ $= 4l^2$ ઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= 6l^2$ ઘનનું ઘનફળ $= l^3$
3 .	વર્તુળાકાર નળાકાર 	વર્તુળાકાર નળાકારનું વક્રપૃષ્ઠફળ $= 2\pi rh$ વર્તુળાકાર નળાકારનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= 2\pi r\,(r + h)$ વર્તુળાકાર નળાકારનું ઘનફળ $= \pi r^2 h$
4 .	શંકુ 	શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$ શંકુનું વક્રપૃષ્ઠફળ $= \pi rl$ શંકુનું કુલપૃષ્ઠફળ $= \pi r\,(r + l)$ શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

ક્ર.	ત્રિપરિમાણીય આકૃતિ	સૂત્રો
5.	ગોળો (ગોલક) 	ગોળાનું પૃષ્ઠફળ = $4\ \pi r^2$ ગોળાનું ઘનફળ = $\frac{4}{3}\ \pi r^3$
6.	અર્ધગોળો 	અર્ધગોળાનું વક્રપૃષ્ઠફળ = $2\pi r^2$ નક્કર અર્ધગોળાનું કુલપૃષ્ઠફળ = $3\pi r^2$ અર્ધગોળાનું ઘનફળ = $\frac{2}{3}\ \pi r^3$

નીચેના ઉદાહરણો ગણો

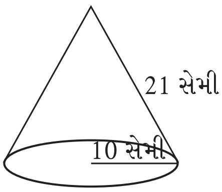
ઉદા.(1)



આકૃતિ 7.1

બાજુની આકૃતિમાં 30 સેમી ઊંચો, 20 સેમી લાંબો, અને 20 સેમી પહોળો તેલનો ડબ્બો છે. તેમાં કેટલા લિટર તેલ સમાશે? (1 લિટર = 1000 સેમી^{3})

ઉદા.(2)



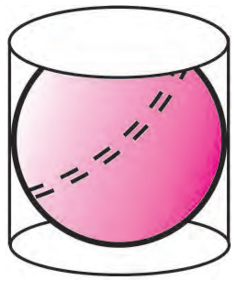
આકૃતિ 7.2

બાજુની આકૃતિમાં વિદુષકની (જોકર) ટોપી અને ટોપીના માપ દર્શાવ્યા છે. તે ટોપી તૈયાર કરવા માટે કેટલું કાપડ જોઈશે ?

વિચાર કરીએ.

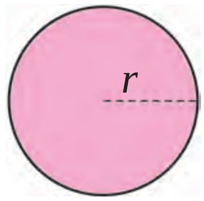
બાજુની આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક વર્તુળાકાર નળાકારની અંદર એક દડો છે. દડો વર્તુળાકાર નળાકારના તળીયાના ઉપરના પૃષ્ઠભાગને અને વક્રપૃષ્ઠને સ્પર્શે છે. વર્તુળાકાર નળાકારના પાયાની ત્રિજ્યા *r* હોય તો

1. ગોળાની ત્રિજ્યા અને વર્તુળાકાર નળાકારની ત્રિજ્યાનો ગુણોત્તર કેટલો ?
2. વર્તુળાકાર નળાકારના વક્રપૃષ્ઠફળ અને ગોળાના વક્રપૃષ્ઠફળનો ગુણોત્તર કેટલો ?
3. વર્તુળાકાર નળાકારના ઘનફળ અને ગોળાના ઘનફળનો ગુણોત્તર કેટલો ?

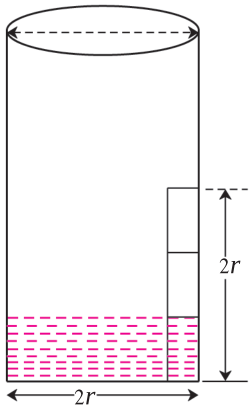


આકૃતિ 7.3

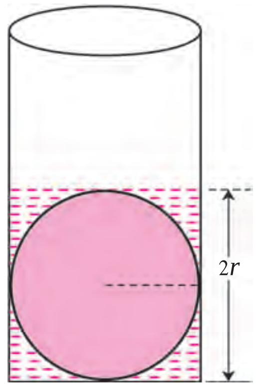
કૃતિ :



આકૃતિ 7.4



આકૃતિ 7.5



આકૃતિ 7.6

ઉપરની આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક દડો અને દડાની ત્રિજ્યા (r) જેટલી જ ત્રિજ્યા ધરાવતું એક બીકર લો. બીકરના વ્યાસ ($2r$) જેટલી જ લંબાઈની એક કાગળની પટ્ટી લો. તેની લંબાઈના ત્રણ સમાન ભાગ કરતી બે રેખા પટ્ટી પર દોરો તે પટ્ટી બીકરના તળિયાથી ઉપર તરફ એમ ઊભી ચોંટાડો. બીકરમાં કાગળની પટ્ટીના નીચેના પહેલા ભાગ સુધી પાણી ભરો. ત્યારબાદ દડાને બીકરના તળિયા સુધી સ્પર્શે તે રીતે મૂકો. બીકરના પાણીની સપાટી કેટલી વધી તે જુઓ.

પાણીની સપાટી કાગળની પટ્ટીની પૂર્ણ ઊંચાઈ જેટલી આવેલી દેખાય છે.

આ નિરીક્ષણ પરથી દડાના ઘનફળનું સૂત્ર કેવી રીતે મળે છે તે સમજીએ.

બીકરનો આકાર વર્તુળાકાર નળાકાર છે. માટે બીકરની 2r જેટલી ઊંચાઈ સુધીના ભાગનું ઘનફળ, વર્તુળાકાર નળાકારના ઘનફળના સૂત્ર દ્વારા મળશે. નળાકારના ઘનફળ માટે V ધારીએ.

$\therefore\ V = \pi \times r^2 \times 2r = 2\pi r^3$

પરંતુ V = દડાનું ઘનફળ + પહેલા ભરેલા પાણીનું ઘનફળ

= દડાનું ઘનફળ + $\frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$\therefore$ દડાનું ઘનફળ $= V - \frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \dfrac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3} \qquad = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

$\therefore$ ગોળાના ઘનફળનું સૂત્ર ; $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ મળશે.

(આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને આકૃતિ 7.3ના સંદર્ભમાં પ્રશ્નક્રમાંક 3નો ઉત્તર હવે તમે શોધી શકશો.)

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) એક વર્તુળાકાર નળાકાર પાણીની ટાંકીની ત્રિજ્યા 2.8 મી અને ઊંચાઈ 3.5 મી છે. તે ટાંકીમાં કેટલા લિટર પાણી સમાશે ? એક વ્યક્તિને રોજ સરાસરી 70 લિટર પાણી જોઈએ છે, તો પૂર્ણ ભરેલી ટાંકીમાંનું પાણી રોજ કેટલી વ્યક્તિઓને પૂરું પડશે ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

ઉકેલ : ત્રિજ્યા (r) = 2.8 મીટર, ઊંચાઈ (h) = 3.5 મીટર, $\pi = \frac{22}{7}$

પાણીની ટાંકીની ધારકતા = વર્તુળાકાર નળાકાર ટાંકીનું ઘનફળ

$= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \times 3.5$

= 86.24 મી^{3}

= 86.24 × 1000 લિટર (∵ 1મી^{3} = 1000 લિટર)

= 86240.00 લિટર

∴ ટાંકીમાં 86240 લિટર પાણી સમાશે.

એક વ્યક્તિને દરરોજ 70 લિટર પાણી જોઈએ છે.

∴ પૂર્ણ ભરેલી ટાંકીનું પાણી $\frac{86240}{70}$ = 1232 વ્યક્તિઓને પૂરું પડશે.

ઉદા. (2) 30 સેમી ત્રિજ્યાવાળો એક નક્કર ગોળો ઓગાળી તેમાંથી 10 સેમી ત્રિજ્યા અને 6 સેમી ઊંચાઈ ધરાવતા નક્કર વર્તુળાકાર નળાકાર તૈયાર કર્યા, તો કેટલા વર્તુળાકાર નળાકાર તૈયાર થશે ?

ઉકેલ : ગોળાની ત્રિજ્યા r = 30 સેમી

વર્તુળાકાર નળાકારની ત્રિજ્યા R = 10 સેમી

વર્તુળાકાર નળાકારની ઊંચાઈ H = 6 સેમી

ધારો કે n વર્તુળાકાર નળાકાર તૈયાર થશે.

∴ ગોળાનું ઘનફળ = n × એક વર્તુળાકાર નળાકારનું ઘનફળ

∴ વર્તુળાકાર નળાકારની સંખ્યા = n = $\frac{\text{ગોળાનું ઘનફળ}}{\text{એક વર્તુળાકાર નળાકારનું ઘનફળ}}$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi (r)^3}{\pi (R)^2 H}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\times(30)^3}{10^2\times 6} \qquad = \frac{\frac{4}{3}\times 30\times 30\times 30}{10\times 10\times 6} = 60$$

∴ કુલ 60 વર્તુળાકાર નળાકાર તૈયાર થશે.

ઉદા. (3) સર્કસના તંબુનો નીચેનો ભાગ વર્તુળાકાર નળાકાર અને તેની ઉપરનો ભાગ શંકુ આકારનો છે. તંબુના તળિયાનો વ્યાસ 48 મી અને વર્તુળાકાર નળાકાર ભાગની ઊંચાઈ 15 મી છે. જો તંબુની કુલ ઊંચાઈ 33 મી હોય તો તંબુ માટે જોઈતા કપડાનું ક્ષેત્રફળ અને તંબુમાંની હવાનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : તંબુની કુલ ઊંચાઈ 33 મી છે.

વર્તુળાકાર ભાગની ઊંચાઈ = H ધારીએ. H = 15 મી છે.

$\therefore$ શંકુ આકારભાગની લંબ ઊંચાઈ h = (33−15) = 18 મી છે.

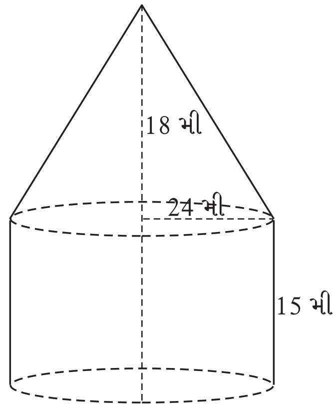
શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ $(l) = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{24^2 + 18^2}$

$= \sqrt{576 + 324}$

$= \sqrt{900}$

$l = 30$ મી



આકૃતિ 7.7

સર્કસના તંબુ માટે જોઈતું કાપડ = વર્તુળાકાર નળાકાર ભાગનું વક્રપૃષ્ઠફળ + શંકુ આકાર ભાગનું વક્રપૃષ્ઠફળ

$= 2\pi rH + \pi rl$

$= \pi r\,(2H + l)$

$= \frac{22}{7} \times 24\,(2 \times 15 + 30)$

$= \frac{22}{7} \times 24 \times 60$

= 4,525.71 ચોમી.

તંબુમાંની હવાનું ઘનફળ = વર્તુળાકાર નળાકાર ભાગનું ઘનફળ + શંકુ આકાર ભાગનું ઘનફળ

$= \pi r^2 H + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \pi r^2 \left(H + \frac{1}{3}h\right)$

$= \frac{22}{7} \times 24^2\,(15 + \frac{1}{3} \times 18)$

$= \frac{22}{7} \times 576 \times 21$

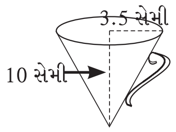
= 38,016 ઘમી.

$\therefore$ તંબુ માટે જોઈતા કાપડનું ક્ષેત્રફળ = 4,525.71 ચોમી.

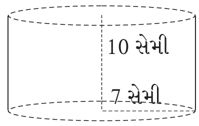
$\therefore$ તંબુમાંની હવાનું ઘનફળ = 38,016 ઘમી.

મહાવરાસંગ્રહ 7.1

1. એક શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા 1.5 મી અને તેની લંબઊંચાઈ 5 સેમી છે, તો તે શંકુનું ઘનફળ શોધો.
2. 6 સેમી વ્યાસ ધરાવતા ગોળાનું ઘનફળ શોધો.
3. એક વર્તુળાકાર નળાકારના પાયાની ત્રિજ્યા 5 સેમી અને ઊંચાઈ 40 સેમી હોય તો તેનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.
4. એક ગોળાની ત્રિજ્યા 7 સેમી હોય તો તેનું વક્રપૃષ્ઠફળ શોધો.
5. ધાતુના એક લંબઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 44 સેમી, 21 સેમી અને 12 સેમી છે. તેને ઓગાળીને 24 સેમી ઊંચાઈના શંકુ તૈયાર કર્યા. તો શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા શોધો.
6.



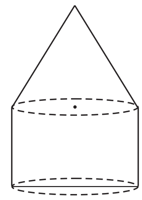
આકૃતિ 7.8
શંકુ આકાર પાણીનો જગ



આકૃતિ 7.9
વર્તુળાકાર નળાકાર પાત્ર (વાસણ)

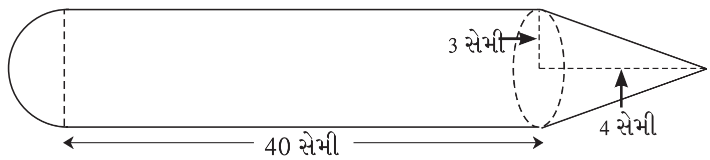
આકૃતિ 7.8 અને 7.9 માંના પાત્રોના માપ જુઓ. તે પરથી વર્તુળાકાર નળાકાર પીપમાં કેટલા જગ પાણી સમાશે તે શોધો.

7. બાજુની આકૃતિ 7.10માં, વર્તુળાકાર નળાકાર અને શંકુના પાયા સમાન છે. વર્તુળાકાર નળાકાર ભાગની ઊંચાઈ 3 સેમી અને પાયાનું ક્ષેત્રફળ 100 ચોસેમી છે. જો સંપૂર્ણ ઘનાકૃતિનું ઘનફળ 500 ઘનસેમી હોય તો સંપૂર્ણ ઘનાકૃતિની ઊંચાઈ શોધો.



આકૃતિ 7.10

8. બાજુની આકૃતિ 7.11માં, આપેલી માહિતી પરથી અર્ધગોળો, વર્તુળાકાર નળાકાર અને શંકુ વડે તૈયાર થતી આકૃતિનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.

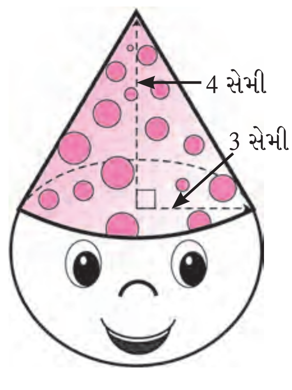


આકૃતિ 7.11

9. આકૃતિ 7.12માં, વર્તુળાકાર નળાકાર ચપટી ગોળીઓનું 10 સેમી લાંબુ એક આવરણ છે. એક ગોળીની ત્રિજ્યા 7 મિમી અને ઊંચાઈ 5 મિમી હોય તો આવરણમાં કેટલી ગોળીઓ સમાશે ?

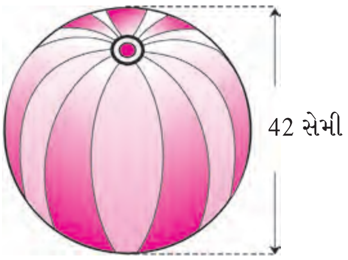
આકૃતિ 7.12

10. આકૃતિ 7.13માં, બાળકનું એક રમકડું છે. જે એક અર્ધગોળ અને એક શંકુની મદદથી તૈયાર કરવામાં આવ્યું છે. આકૃતિમાં દર્શાવેલા માપ પરથી રમકડાનું ઘનફળ અને પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = 3.14$)



આકૃતિ 7.13

11. આકૃતિમાં દર્શાવેલાં બેસ બોલનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધો.



આકૃતિ 7.14

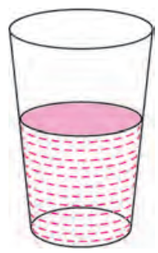
12. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, એક વર્તુળાકાર નળાકાર ગ્લાસમાં પાણી છે અને તેમાં 2 સેમી વ્યાસ ધરાવતી એક ધાતુની ગોળી ડૂબાડવામાં આવી છે. તો પાણીનું ઘનફળ શોધો.

આકૃતિ 7.15

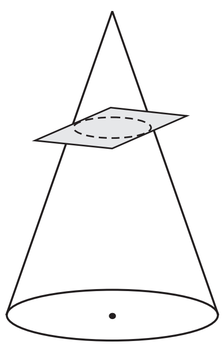
જાણી લઈએ.

શંકુછેદ (frustum of the cone)

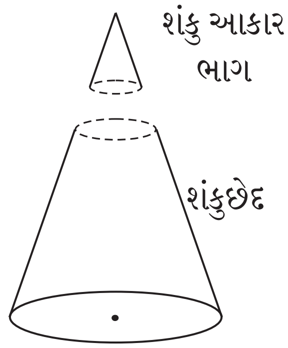
આપણે પાણી પીવા ગ્લાસનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. *l* આ ગ્લાસનો આકાર, તેમજ પાણીનો આકાર એ શંકુછેદનો આકાર છે.



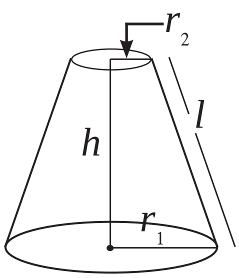
આકૃતિ 7.16



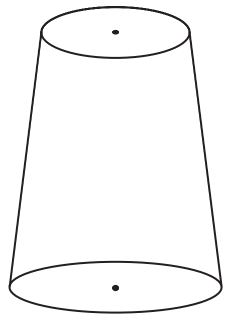
આકૃતિ 7.17
શંકુ કાપતા



આકૃતિ 7.18
શંકુ કાપ્યા પછી જુદા થયેલા બે ભાગ



આકૃતિ 7.19
શંકુછેદ



આકૃતિ 7.20
ઊંધો મૂકેલો ગ્લાસ

આકૃતિમાં એક શંકુ ઊંધો મૂકવામાં આવ્યો છે. આ શંકુના પાયાને સમાંતર કાપ મૂકતાં તૈયાર થયેલા બે ભાગોમાંથી એક ભાગનો આકાર શંકુજ છે. બાકીના ભાગને શંકુછેદ (frustum) કહેવાય છે.

શંકુની જેમ જ શંકુછેદનું પણ પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધી શકાય છે. તેના માટે આપણે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

આ ધ્યાનમાં રાખીએ.

h = શંકુછેદની ઊંચાઈ, l = શંકુછેદની ત્રાંસી ઊંચાઈ,

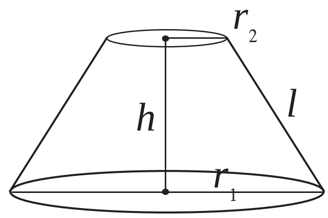
r_1 અને r_2 = શંકુછેદની વર્તુળાકાર બાજુની ત્રિજ્યા ($r_1 > r_2$)

શંકુછેદની ત્રાંસી ઊંચાઈ = $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

શંકુછેદનું વક્રપૃષ્ઠફળ $= \pi l\,(r_1 + r_2)$

શંકુછેદનું કુલપૃષ્ઠફળ $= \pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

શંકુછેદનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$



આકૃતિ 7.21

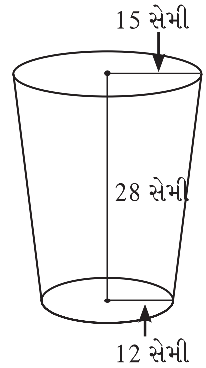
ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) એક શંકુછેદ આકારની બાલદીની ઊંચાઈ 28 સેમી છે. બાલદીની બંને વર્તુળાકાર બાજુની ત્રિજ્યા 12 સેમી અને 15 સેમી છે. તો બાલદીમાં કેટલા લિટર પાણી સમાશે ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

ઉકેલ : બાલદીની વર્તુળાકાર બાજુઓની ત્રિજ્યા r_1 = 15 સેમી, r_2 = 12 સેમી
બાલદીની ઊંચાઈ h = 28 સેમી

બાલદીની ધારકતા = શંકુછેદનું ઘનફળ

$$= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 28\,(15^2 + 12^2 + 15 \times 12)$$
$$= \frac{22 \times 4}{3} \times (225 + 144 + 180)$$
$$= \frac{22 \times 4}{3} \times 549$$
$$= 88 \times 183$$
$$= 16104 \text{ સેમી}^3 = 16{,}104 \text{ લિટર}$$



આકૃતિ 7.22

બાલદીમાં 16.104 લિટર પાણી સમાશે.

ઉદા. (2) શંકુ વર્તુળાકાર ભાગોની ત્રિજ્યા 14 સેમી અને 8 સેમી છે. જો શંકુછેદની ઊંચાઈ 8 સેમી હોય તો નીચેની કિંમત શોધો. (π= 3.14)

i) શંકુછેદનું વક્રપૃષ્ઠફળ ii) શંકુછેદનું કુલપૃષ્ઠફળ iii) શંકુછેદનું ઘનફળ

ઉકેલ : ત્રિજ્યા r_1 = 14 સેમી , r_2 = 8 સેમી, ઊંચાઈ h = 8 સેમી

શંકુછેદની ત્રાંસી ઊંચાઈ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$$= \sqrt{8^2 + (14-8)^2}$$
$$= \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ સેમી}$$

શંકુછેદનું વક્રપૃષ્ઠફળ $= \pi(r_1 + r_2)\, l$

$= 3.14 \times (14 + 8) \times 10$

$= 690.8$ ચોસેમી

શંકુછેદનું કુલપૃષ્ઠફળ $= \pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$= 3.14 \times 10\,(14 + 8) + 3.14 \times 14^2 + 3.14 \times 8^2$

$= 690.8 + 615.44 + 200.96$

$= 690.8 + 816.4$

$= 1507.2$ ચોસેમી

શંકુછેદનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\,\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 8\,(14^2 + 8^2 + 14 \times 8)$

$= 3114.88$ ઘસેમી

મહાવરાસંગ્રહ 7.2

1. 30 સેમી ઊંચાઈ ધરાવતી શંકુછેદ આકારની પાણીની બાલદીની વર્તુળાકાર બાજુઓની ત્રિજ્યા 14 સેમી અને 7 સેમી હોય તો બાલદીમાં કેટલા લિટર પાણી સમાશે ? (1 લિટર = 1000 ઘનસેમી)

2. શંકુછેદના વર્તુળાકાર ભાગની ત્રિજ્યા 14 સેમી અને 6 સેમી છે અને તેની ઊંચાઈ 6 સેમી હોય તો નીચેની કિંમતો શોધો. ($\pi = 3.14$)

   (1) શંકુછેદનું વક્રપૃષ્ઠફળ. (2) શંકુછેદનું કુલપૃષ્ઠફળ. (3) શંકુછેદનું ઘનફળ.

3. આકૃતિ 7.23માં, એક શંકુછેદના વર્તુળાકાર પાયાનો પરિઘ અનુક્રમે 132 સેમી અને 88 સેમી છે અને ઊંચાઈ 24 સેમી છે. તો તે શંકુછેદનું વક્રપૃષ્ઠફળ શોધવા માટે નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો. ($\pi = \frac{22}{7}$)

   પરિઘ$_1$ $= 2\pi r_1 = 132$

   $r_1 = \frac{132}{2\pi} = \boxed{}$ સેમી

   પરિઘ$_2$ $= 2\pi r_2 = 88$

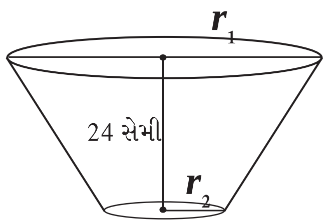
   $r_2 = \frac{88}{2\pi} = \boxed{}$ સેમી

   શંકુછેદની ત્રાંસી ઊંચાઈ $= l$

   $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

   $l = \sqrt{\boxed{}^2 + \boxed{}^2}$

   $l = \boxed{}$ સેમી



આકૃતિ 7.23

શંકુછેદનું વક્રપૃષ્ઠફળ = $\pi(r_1 + r_2)l$

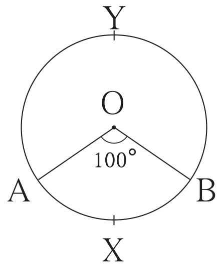
$= \pi \times \boxed{} \times \boxed{}$

$= \boxed{}$ ચોસેમી

યાદ કરીએ.

બાજુની આકૃતિને આધારે નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.

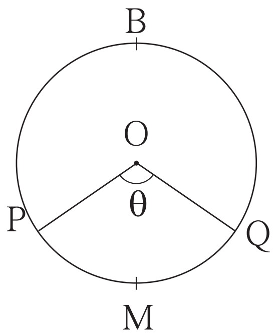
ચાપનો પ્રકાર	ચાપનું નામ	ચાપનું માપ
લઘુચાપ	ચાપ AXB	....
....	ચાપ AYB	....



આકૃતિ 7.24

જાણી લઈએ.

વૃતાંશ (Sector of a circle)



આકૃતિ 7.25

આકૃતિમાં કેન્દ્રિયકોણને કારણે વર્તુળનું બે ભાગમાં વિભાજન થયું છે. આ દરેક ભાગને વૃતાંશ કહેવાય છે.

વર્તુળની બે ત્રિજ્યા અને તેમના છેડાને જોડતાં વર્તુળચાપના અંતર્ગત ભાગને વૃતાંશ કહેવાય છે.

આકૃતિમાં O –PMQ અને O-PBQ આ બે વૃત્તાંશ છે.

લઘુવૃતાંશ (Minor sector) :

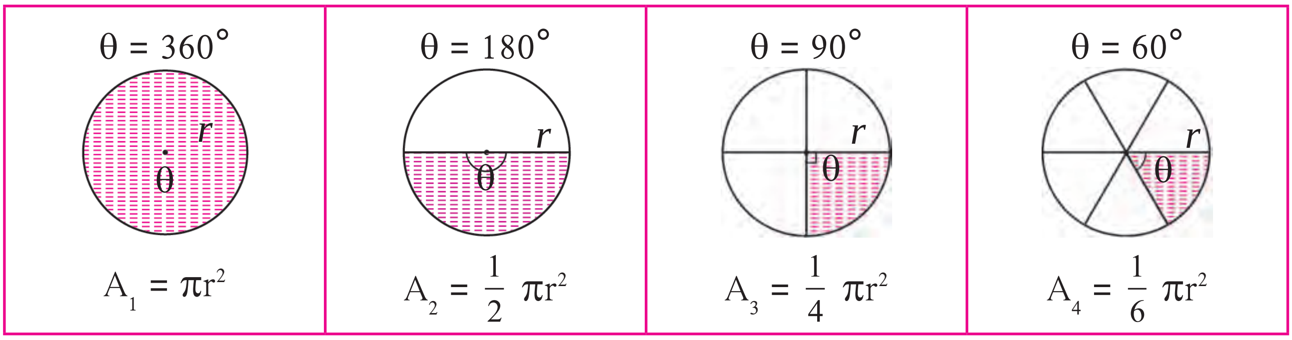
બે ત્રિજ્યા અને તેમના સંગત લઘુચાપ અંતર્ગત આવેલા વૃત્તાંશને લઘુવૃતાંશ કહેવાય છે. આકૃતિમાં O–PMQ લઘુવૃત્તાંશ છે.

ગુરૂવૃતાંશનું ક્ષેત્રફળ (Major sector) :

બે ત્રિજ્યા અને સંગત ગુરૂચાપને અંતર્ગત આવેલા વૃત્તાંશને ગુરૂવૃત્તાંશ કહેવાય છે. આકૃતિમાં O-PBQ ગુરૂવૃત્તાંશ છે.

વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ (Area of a sector)

નીચેની આકૃતિઓમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સમાન ત્રિજ્યા ધરાવતા વર્તુળોના છાયાંકિત ભાગોના ક્ષેત્રફળોનું નિરીક્ષણ કરો અને નીચેનો કોષ્ટક પૂર્ણ કરો.



આકૃતિ 7.26

વર્તુળનો કેન્દ્રિયકોણનું માપ = 360° = પૂર્ણ ખૂણો.

વર્તુળનો કેન્દ્રિયકોણ = 360° , વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = πr^2			
વૃતાંશ	વૃતાંશના ચાપનું માપ	$\frac{\theta}{360}$	વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ A
A_1	360°	$\frac{360}{360} = 1$	$1 \times \pi r^2$
A_2	180°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \pi r^2$
A_3	90°	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times \pi r^2$
A_4	60°	....	....
A	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

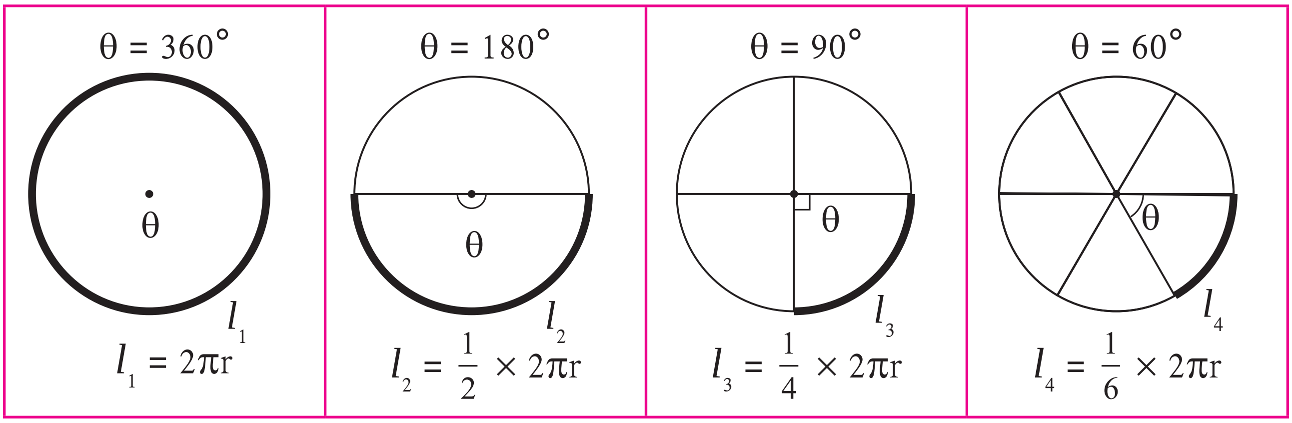
કોષ્ટક પરથી ધ્યાનમાં આવે છે કે, વર્તુળના ક્ષેત્રફળને $\frac{\theta}{360}$ વડે ગુણતાં, ચાપનું માપ θ ધરાવતા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ મળે છે. તે નીચે મુજબ સૂત્ર રૂપે લખી શકાય.

$$\text{વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ (A)} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

આ સૂત્ર પરથી $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360}$; એટલે કે $\frac{\text{વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ}}{\text{વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{\theta}{360}$

વર્તુળચાપની લંબાઈ (Length of an arc)

નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે સમાન ત્રિજ્યા ધરાવતાં વર્તુળોના ઘેરા રંગ દર્શાવેલા વર્તુળચાપની લંબાઈનું નિરીક્ષણ કરો અને નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો.



આકૃતિ 7.27

વર્તુળનો પરિઘ = $2\pi r$

વર્તુળચાપની લંબાઈ	વર્તુળ ચાંપનું માપ (θ)	$\frac{\theta}{360}$	વર્તુળચાપની લંબાઈ (l)
l_1	360°	$\frac{360}{360} = 1$	$1 \times 2\pi r$
l_2	180°	$\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 2\pi r$
l_3	90°	$\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 2\pi r$
l_4	60°	....	....
l	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

ઉપરના આકૃતિબંધ પરથી (pattern) ધ્યાનમાં આવે છે કે, વર્તુળના પરિઘને $\frac{\theta}{360}$ વડે ગુણતા, ચાપનું માપ θ હોય તેવા વર્તુળચાપની લંબાઈ મળશે. તેને સૂત્રરૂપે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

વર્તુળચાપની લંબાઈ $(l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

આ સૂત્ર પરથી,

$$\therefore \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$$

$$\frac{\text{વર્તુળચાપની લંબાઈ}}{\text{પરિઘ}} = \frac{\theta}{360}$$

વર્તુળચાપની લંબાઈ અને વૃત્તાંશના ક્ષેત્રફળ વચ્ચેનો સંબંધ

વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ I

તેમ જ વર્તુળચાપની લંબાઈ $(l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$\therefore \quad \frac{\theta}{360} = \frac{l}{2\pi r} \quad \text{.......... II}$$

$$A = \frac{l}{2\pi r} \times \pi r^2$$ .... I અને II પરથી

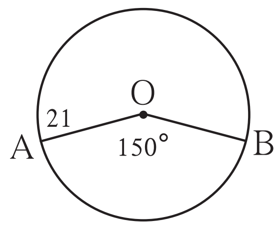
$$A = \frac{1}{2}\, l r = \frac{lr}{2}$$

$$\therefore \text{ વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ } = \frac{\text{વર્તુળચાપની લંબાઈ} \times \text{ત્રિજ્યા}}{2}$$

તેમ જ $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) 21 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતા વૃત્તાંશના ખૂણાનું માપ 150° હોય તો વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ અને સંગત વર્તુળચાપની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ 7.28

ઉકેલ : અહીં $r = 21$ સેમી, $\theta = 150$, $\pi = \frac{22}{7}$

વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ(A) $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{150}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

$= \frac{1155}{2}$ સેમી^{2}

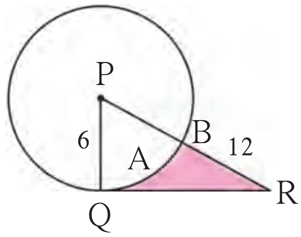
$= 577.5$ સેમી^{2}

વર્તુળચાપની લંબાઈ $= l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$= \frac{150}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$

$= 55$ સેમી

ઉદા. (2) આકૃતિમાં, વર્તુળનું કેન્દ્ર P અને અને વર્તુળની ત્રિજ્યા 6 સેમી છે. રેખ QR વર્તુળનો સ્પર્શક છે. PR = 12 સેમી હોય તો છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\sqrt{3}$ = 1.73)



આકૃતિ 7.29

ઉકેલ : વર્તુળના સ્પર્શ બિંદુમાંથી દોરેલી ત્રિજ્યા સ્પર્શક ને લંબ હોય છે.

$\therefore$ Δ PQRમાં, $\angle$ PQR = 90°, PQ = 6 સેમી, PR = 12 સેમી

$\therefore$ $PQ = \frac{PR}{2}$

જો કાટકોણ ત્રિકોણની એક બાજુ કર્ણ કરતા અડધી લંબાઈની હોય તો તે બાજુની સામેના ખૂણાનું માપ 30° હોય છે.

$\therefore$ $\angle R = 30°$ અને $\angle P = 60°$

30°-60°-90° ના પ્રમેય મુજબ, $QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times PR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$

$QR = 6\sqrt{3}$ સેમી

$\therefore$ $A(\Delta PQR) = \frac{1}{2} QR \times PQ$

$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6$

$= 18\sqrt{3} = 18 \times 1.73$

= 31.14 સેમી^{2}

વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$\therefore$ $A(P\text{-}QAB) = \frac{60}{360} \times 3.14 \times 6^2$

$= \frac{1}{6} \times 3.14 \times 6 \times 6 \quad = 3.14 \times 6$

= 18.84 સેમી^{2}

છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ = A(Δ PQR) - A(P-QAB)

= 31.14 - 18.84

= 12.30 સેમી^{2}

છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ = 12.30 સેમી^{2}

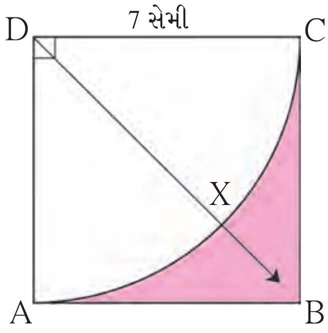
કૃતિ : આપેલી આકૃતિમાં, ચોરસ ABCD ની બાજુ 7 સેમી છે. બિંદુ D ને કેન્દ્ર માનીને DA ત્રિજ્યા લઈને

દોરેલો વૃત્તાંશ D − AXC છે, તો છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે ખાલી ચોકઠા પૂર્ણ કરીને ઉદાહરણ પૂર્ણ કરો.

ઉકેલ : ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = $\boxed{\qquad\qquad}$ (સૂત્ર)

$= \boxed{\qquad\qquad}$

= 49 ચોસેમી



આકૃતિ 7.30

વૃત્તાંશ(D− AXC)નું ક્ષેત્રફળ = $\boxed{\qquad\qquad}$ (સૂત્ર)

$= \dfrac{\boxed{\quad}}{360} \times \dfrac{22}{7} \times \boxed{\quad}$

= 38.5 ચોસેમી

છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ = $\boxed{\qquad\qquad}$ નું ક્ષેત્રફળ − $\boxed{\qquad\qquad}$ નું ક્ષેત્રફળ

$= \boxed{\qquad}$ ચોસેમી − $\boxed{\qquad}$ ચોસેમી

$= \boxed{\qquad}$ ચોસેમી

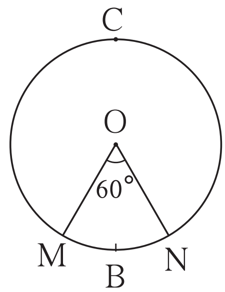
મહાવરાસંગ્રહ 7.3

1. વર્તુળની ત્રિજ્યા 10 સેમી છે. વર્તુળચાપનું માપ 54° હોય તો તે ચાપના અંતર્ગત વૃતાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π =3.14)
2. એક વર્તુળચાપનું માપ 80° અને ત્રિજ્યા 18 સેમી છે. તો તે વર્તુળચાપની લંબાઇ શોધો. (π =3.14)
3. વૃત્તાંશની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી અને વર્તુળચાપની લંબાઈ 2.2 સેમી હોય તો વૃતાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
4. વર્તુળની ત્રિજ્યા 10 સેમી છે, તેના વૃતાંશનું ક્ષેત્રફ્ળ 100 ચોસેમી છે. તો તેના સંગત ગુરૂવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π =3.14)
5. 15 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ 30 ચોસેમી હોય તો સંબંધિત વર્તુળચાપની લંબાઈ શોધો.
6. બાજુની આકૃતિમાં વર્તુળની ત્રિજ્યા 7 સેમી અને m(ચાપ MBN)= 60° હોય તો

   (1) વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

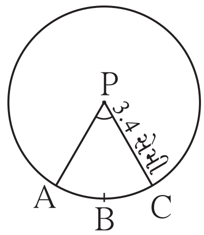
   (2) A(O − MBN) શોધો.

   (3) A(O − MCN) શોધો.



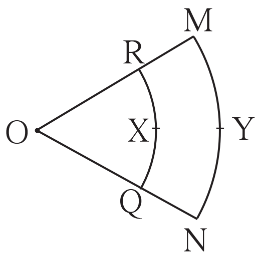
આકૃતિ 7.31

7. 3.4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વૃત્તાંશની પરિમિતિ 12.8 સેમી છે. તો વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 7.32

8. આકૃતિમાં, બિંદુ O વૃત્તાંશનું કેન્દ્ર છે.



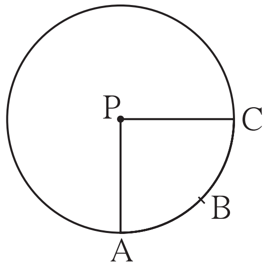
આકૃતિ 7.33

$\angle ROQ = \angle MON = 60^\circ$, OR = 7 સેમી, OM = 21 સેમી, હોય તો ચાપ RXQ અને ચાપ MYN ની લંબાઈ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$)

9. આકૃતિમાં A(P–ABC) = 154 ચોસેમી અને વર્તુળની ત્રિજ્યા 14 સેમી હોય તો,

(1) $\angle$ APCનું માપ શોધો.

(2) ચાપ ABCની લંબાઈ શોધો.



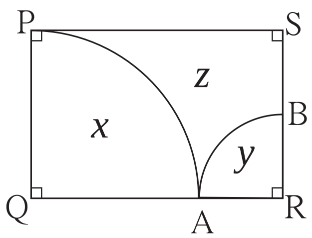
આકૃતિ 7.34

10. વૃત્તાંશની ત્રિજ્યા 7 સેમી છે. જો વૃત્તાંશના ચાપનું માપ નીચે મુજબ હોય તો વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(1) 30° (2) 210° (3) 3 કાટકોણ

11. લઘુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ 3.85 ચોસેમી અને સંગત કેન્દ્રિયકોણનું માપ 36° હોય તો તે વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

12. આકૃતિમાં □ PQRS લંબચોરસ છે. PQ = 14 સેમી, QR = 21 સેમી, તો આકૃતિમાં દર્શાવેલ x, y અને z ભાગોનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 7.35

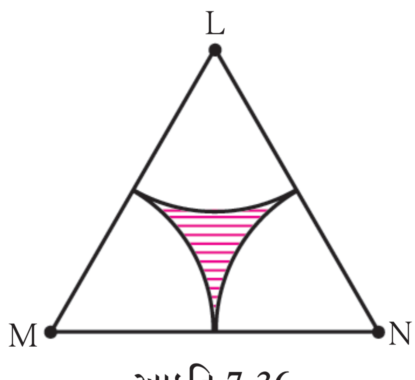
13. Δ LMN સમભુજ ત્રિકોણ છે. LM = 14 સેમી. ત્રિકોણના પ્રત્યે શિરોબિંદુને કેન્દ્રબિંદુ લઈ 7 સેમી ત્રિજ્યાના ત્રણ વૃત્તાંશ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે દોર્યા. તે પરથી,

(1) A (Δ LMN) = ?

(2) એક વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(3) ત્રણ વૃત્તાંશનું કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો.

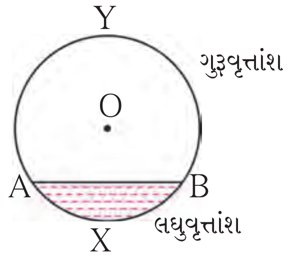
(4) રેખાંકિત ભાગોનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 7.36

જાણી લઈએ.

વૃત્તખંડ - વર્તુળખંડ (segment of a circle)



આકૃતિ 7.37

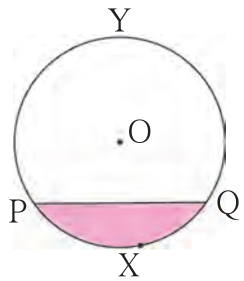
વૃત્તખંડ એટલે જીવા અને સંગત વર્તુળચાપની અંતર્ગત આવેલો ભાગ.

લઘુવૃત્ત ખંડ : જીવા અને લઘુચાપમાં અંતર્ગત ભાગને લઘુવૃત્ત ખંડ કહે છે. આકૃતિમાં વૃત્તખંડ AXB લઘુવૃત્ત ખંડ છે.

ગુરૂવૃત્તખંડ : જીવા અને ગુરૂચાપમાં અંતર્ગત ભાગને ગુરૂવૃત્તખંડ કહેવાય છે. આકૃતિમાં વૃત્તખંડ AYB ગુરૂવૃત્તખંડ છે.

અર્ધવૃત્ત ખંડ : વ્યાસને કારણે તૈયાર થનારા વૃત્તખંડને અર્ધવૃત્તખંડ કહેવાય છે. .

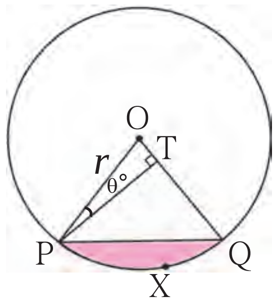
વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ (Area of a Segment)



આકૃતિ 7.38

આકૃતિમાં PXQ લઘુવૃત્તખંડ છે. તો વૃત્તખંડ PYQ ગુરૂવૃત્તખંડ છે.

લઘુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે શોધી શકાય ?



આકૃતિ 7.39

વર્તુળકેન્દ્ર O થી OP અને OQ બે ત્રિજ્યા દોરીશું. તમે વૃત્તાંશ O-PXQનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકશો. તેજ રીતે Δ OPQ નું ક્ષેત્રફળ શોધી શકશો. વૃત્તાંશના ક્ષેત્રફળમાંથી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ બાદ કરીએ તો વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ મળશે.

વૃત્તખંડ PXQનું ક્ષેત્રફળ = વૃતાંશ (O – PXQ)નું ક્ષેત્રફળ – Δ OPQનું ક્ષેત્રફળ

$= \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2$ – Δ OPQનું ક્ષેત્રફળ ---------- (I)

આકૃતિમાં Δ OPQમાં, રેખ PT એ બાજુ OQ પર લંબ છે.

કાટકોણ Δ OTPમાં, $\sin \theta = \dfrac{PT}{OP}$

$\therefore$ PT = OP $\times$ sin θ

PT = r sin θ $\qquad$ ($\because$ OP = r)

Δ OPQ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times$ પાયો $\times$ ઊંચાઈ

$= \frac{1}{2} \times OQ \times PT$

$= \frac{1}{2} \times r \times r \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times r^2 \sin\theta$ ---------------- (ii)

(I) અને (II) પરથી,

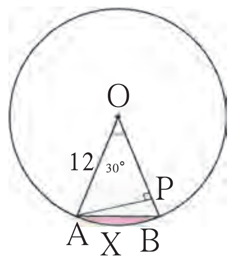
વૃત્તખંડ PXQ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

$$= r^2\left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$$

(આપણે લઘુકોણના જ સાઈન ગુણોત્તરો શીખ્યા છીએ. માટે θ નું માપ 90° અથવા તેના કરતા ઓછું હોય ત્યારે જ આ સૂત્ર વાપરી શકીશું. એ ધ્યાનમાં રાખો.)

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. **(1)** આકૃતિમાં $\angle AOB = 30^\circ$, OA = 12 સેમી તો લઘુવૃતખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14 લો.)



આકૃતિ 7.40

રીત I :

$r = 12, \theta = 30^\circ, \pi = 3.14$

વૃત્તાંશ O–AXB નું

ક્ષેત્રફળ $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 12^2$

$= 3.14 \times 12$

= 37.68 ચોસેમી

$A(\Delta OAB) = \frac{1}{2} r^2 \times \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times 12^2 \times \sin 30$

$= \frac{1}{2} \times 144 \times \frac{1}{2}$

.....($\because \sin 30 = \frac{1}{2}$)

= 36 ચોસેમી

વૃત્તખંડ AXB નું ક્ષેત્રફળ = વૃત્તાંશ (O - AXB) નું ક્ષેત્રફળ - A(Δ OAB)

= 37.68 - 36

= 1.68 ચોસેમી

રીત II :

$$\text{વૃત્તખંડ AXB નું ક્ષેત્રફળ} = r^2\left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$$

$$= 12^2\left[\frac{3.14\times 30}{360} - \frac{\sin 30}{2}\right]$$

$$= 144\left[\frac{3.14}{12} - \frac{1}{2\times 2}\right]$$

$$= \frac{144}{4}\left[\frac{3.14}{3} - 1\right]$$

$$= 36\left[\frac{3.14-3}{3}\right]$$

$$= \frac{36}{3}\times 0.14 = 12 \times 0.14$$

= 1.68 ચોસેમી

ઉદા. (2) P કેન્દ્રવાળા વર્તુળની ત્રિજ્યા 10 સેમી છે. જીવા AB વર્તુળકેન્દ્ર સાથે કાટકોણ બનાવે છે. તો લઘુવૃત્તખંડ અને ગુરૂવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો.(π = 3.14)

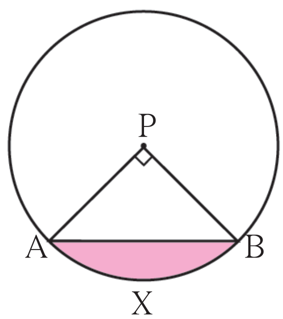
ઉકેલ : r = 10 સેમી, θ = 90, π = 3.14

$$\text{વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{90}{360}\times 3.14 \times 10^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 314$$

= 78.5 ચોસેમી



આકૃતિ 7.41

$$A(\Delta APB) = \frac{1}{2} \times \text{પાયો} \times \text{ઊંચાઈ}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10$$

= 50 ચોસેમી

લઘુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ = વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ - ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

= 78.5 - 50

= 28.5 ચોસેમી

ગુરૂવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ = વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ – લઘુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ

$= 3.14 \times 10^2 - 28.5$

$= 314 - 28.5$

$= 285.5$ ચોસેમી

ઉદા. (3) 14 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતા વર્તુળમાં એક નિયમિત ષટ્કોણ અંતર્ગત છે. તો ષટ્કોણની બહારના અને વર્તુળની અંદરના ભાગોનું ક્ષેત્રફળ શોધો.($\pi = \frac{22}{7}$, $\sqrt{3} = 1.732$)

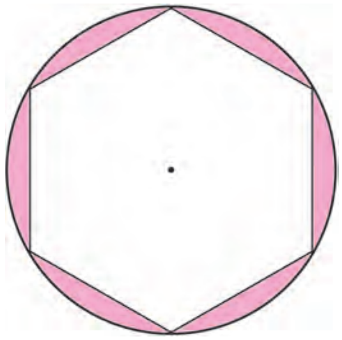
ઉકેલ : ષટ્કોણની બાજુ = ષટ્કોણના પરિવર્તુળની ત્રિજ્યા

$\therefore$ ષટ્કોણની બાજુ = 14 સેમી

ષટ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ (બાજુ)^2

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14^2$

$= 509.208$ ચોસેમી



આકૃતિ 7.42

વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 616$ ચોસેમી

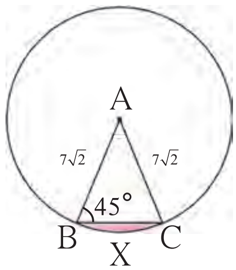
ષટ્કોણની બહારના અને વર્તુળના અંદરના ભાગનું ક્ષેત્રફળ = વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ–નિયમિત ષટ્કોણનું ક્ષેત્રફળ

$= 616 - 509.208$

$= 106.792$ ચોસેમી

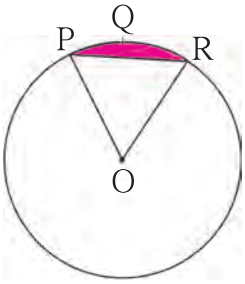
મહાવરાસંગ્રહ 7.4

1. આકૃતિ 7.43માં, A કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં $\angle ABC = 45^\circ$, AC = $7\sqrt{2}$ સેમી,હોય તો વૃત્તખંડ BXC નું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{2} = 1.41$)



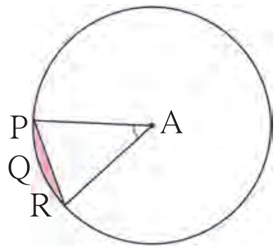
આકૃતિ 7.43

2. આકૃતિ 7.44માં, O વર્તુળનું કેન્દ્ર છે. m(ચાપ PQR) = 60°, OP = 10 સેમી, હોય તો છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)



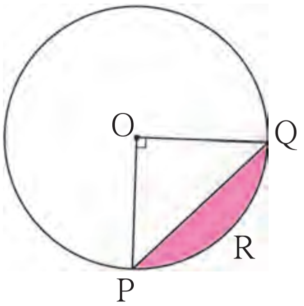
આકૃતિ 7.44

3. આકૃતિ 7.45માં, A કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં $\angle PAR = 30°$ AP = 7.5 હોય તો વૃત્તખંડ PQRનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14)



આકૃતિ 7.45

4. આકૃતિ 7.46માં, O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા PQ છે. $\angle POQ = 90°$, અને છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ 114 ચોસેમી છે. તો વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો. (π = 3.14)



આકૃતિ 7.46

5. 15 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતા વર્તુળની જીવા PQ વર્તુળના કેન્દ્ર સાથે 60° નો ખૂણો બનાવે છે. તે જીવાને કારણે તૈયાર થતા ગુરૂવૃત્તખંડ અને લઘુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14, $\sqrt{3}$ = 1.73)

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 7

1. **નીચેના પર્યાયો પૈકી યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.**

(1) જો વર્તુળના પરિઘ અને વર્તુળના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર 2:7 હોય તો વર્તુળનો પરિઘ કેટલો ?

(A) 14π (B) $\frac{7}{\pi}$ (C) 7π (D) $\frac{14}{\pi}$

(2) 44 સેમી લંબાઈ ધરાવતા વર્તુળચાપનું માપ 160° હોય તો વર્તુળનો પરિઘ કેટલો ?

(A) 66 સેમી (B) 44 સેમી (C) 160 સેમી (D) 99 સેમી

(3) ચાપનું માપ 90° અને 7 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતા વૃત્તાંશની પરિમિતિ શોધો.

(A) 44 સેમી (B) 25 સેમી (C) 36 સેમી (D) 56 સેમી

(4) પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી અને ઊંચાઈ 24 સેમી ધરાવતા શંકુનું વક્રપૃષ્ઠફળ કેટલું ?

(A) 440 સેમી^{2} (B) 550 સેમી^{2} (C) 330 સેમી^{2} (D) 110 સેમી^{2}

(5) 5 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતા વર્તુળાકાર નળાકારનું વક્રપૃષ્ઠફળ 440 સેમી^{2} હોય તો વર્તુળાકાર નળાકારની ઊંચાઈ કેટલી ?

(A) $\frac{44}{\pi}$ સેમી (B) 22π સેમી (C) 14 સેમી (D) $\frac{22}{\pi}$ સેમી

(6) એક શંકુને ઓગાળીને તેના પાયાની ત્રિજ્યા જેટલી જ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર નળાકાર તૈયાર કર્યા. જો વર્તુળાકાર નળાકારની ઊંચાઈ 5 સેમી હોય તો શંકુની ઊંચાઈ કેટલી ?

(A) 15 સેમી (B) 10 સેમી (C) 18 સેમી (D) 5 સેમી

(7) 0.01 સેમી બાજુ ધરાવતા ઘનનું ઘનફળ કેટલા ઘનસેમી ?

(A) 1 (B) 0.001 (C) 0.0001 (D) 0.000001

(8) એક ઘનમીટર ઘનફળ ધરાવતા ઘનની બાજુની લંબાઈ કેટલી હશે ?

(A) 1 સેમી (B) 10 સેમી (C) 100 સેમી (D) 1000 સેમી

2. એક શંકુછેદ આકારના કપડા ધોવાના ટબની ઊંચાઈ 21 સેમી છે. ટબની બંને વર્તુળાકાર બાજુઓની ત્રિજ્યા 20 સેમી અને 15 સેમી છે. તો ટબમાં કેટલા લિટર પાણી સમાશે ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

3★. 1 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતી પ્લાસ્ટિકની નાની ગોળીઓ ઓગાળીને વર્તુળાકાર નળાકાર ડબ્બો તૈયાર કર્યો. ડબ્બાની જાડાઈ 2 સેમી અને ઊંચાઈ 90 સેમી, બાહ્યત્રિજ્યા 30 સેમી હોય તો તે ડબ્બો બનાવવા માટે કેટલી ગોળીઓ ઓગાળવી પડી હશે ?

4. 16 સેમી લંબાઈ, 11 સેમી પહોળાઈ અને 10 સેમી ઊંચાઈ ધરાવતા ધાતુના લંબઘનમાંથી 2 મિમી જાડાઈ અને 2 સેમી વ્યાસ ધરાવતા કેટલાક સિક્કા તૈયાર કર્યા. તો કેટલા સિક્કા તૈયાર થશે ?

5. એક રોલરનો વ્યાસ 120 સેમી અને લંબાઈ 84 સેમી છે. એક મેદાન એકવાર સપાટ કરતા તેના 200 આંટા પૂર્ણ થાય છે. તો 10 રૂ. પ્રતિ ચોમીટર ના દરે તે મેદાન સપાટ કરવા માટે લાગતો કુલ ખર્ચ શોધો.

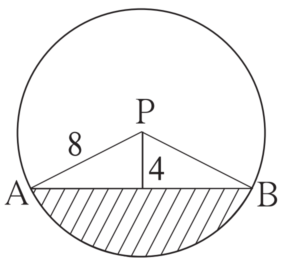
6. વ્યાસ 12 સેમી, જાડાઈ 0.01 મીટર ધરાવતા ધાતુના પોકળગોળાના બહારના ભાગનું પૃષ્ઠફળ શોધો. અને ધાતુની ઘનતા 8.88 ગ્રામ પ્રતિ ઘનસેંટીમીટર હોય તો તે ગોળાનું દ્રવ્યમાન (દળ) શોધો.

7. એક વર્તુળાકાર નળાકાર બાલદીના પાયાનો વ્યાસ 28 સેમી અને ઊંચાઈ 20 સેમી છે. તે બાલદી રેતીથી પૂર્ણપણે ભરેલી છે. બાલદીની રેતીને જમીન પર એવી રીતે ઠાલવી કે રેતીનો શંકુ તૈયાર થયો. રેતીના શંકુની ઊંચાઈ 14 સેમી હોય તો શંકુના પાયાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

8. એક ધાતુના ગોળાની ત્રિજ્યા 9 સેમી છે. આ ગોળો ઓગાળીને તેમાંથી 4 મિમી વ્યાસ ધરાવતો તાર તૈયાર કર્યો તો તારની લંબાઈ કેટલી મીટર હશે ?

9. 6 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતા એક વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ 15π સેમી^{2} છે. તો તે વૃત્તાંશના ચાપનું માપ શોધો અને વર્તુળચાપની લંબાઈ શોધો.

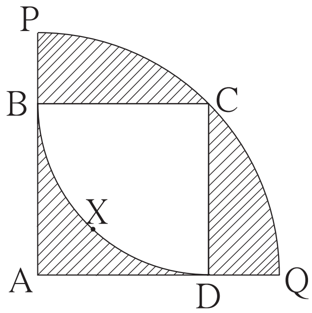
10.



આકૃતિ 7.47

આકૃતિમાં વર્તુળનું કેન્દ્ર P અને રેખ AB એ જીવા છે. PA = 8 સેમી અને જીવા AB વર્તુળકેન્દ્રથી 4 સેમી અંતરે આવેલી હોય તો છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

11. વૃત્તાંશ A–PCQમાં □ABCD ચોરસ છે. C – BXD વૃત્તાંશની ત્રિજ્યા 20 સેમી હોય તો છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે નીચેની કૃતિ કરો.



આકૃતિ 7.48

ઉકેલ : ચોરસ ABCD ની બાજુ = વૃત્તાંશ C – BXD ની ત્રિજ્યા = $\boxed{}$ સેમી

ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = બાજુ^{2} = $\boxed{}^2$ = $\boxed{}$ ..... (I)

ચોરસમાંના છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ

= ચોરસ ABCDનું ક્ષેત્રફળ – વૃત્તાંશ C – BXDનું ક્ષેત્રફળ

$$= \boxed{} - \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \boxed{} - \frac{90}{360} \times \frac{3.14}{1} \times \frac{400}{1}$$

$$= \boxed{} - 314$$

$$= \boxed{}$$

મોટા વૃત્તાંશની ત્રિજ્યા = ચોરસ ABCDના વિકર્ણની લંબાઈ

$= 20\sqrt{2}$

મોટા વૃત્તાંશના ચોરસની બહારના છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ

= વૃત્તાંશ A – PCQ નું ક્ષેત્રફળ – ચોરસ ABCD નું ક્ષેત્રફળ

= A(A – PCQ) – A(□ ABCD)

$$= \left(\frac{\theta}{360} \times \pi \times r^2\right) - \boxed{}^2$$

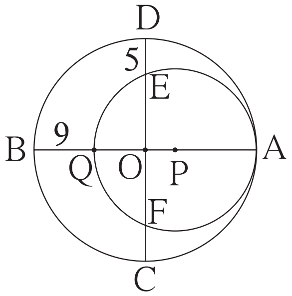
$$= \frac{90}{360} \times 3.14\,(20\sqrt{2})^2 - (20)^2$$

$$= \boxed{} - \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$

∴ છાયાંકિત ભાગનું કુલ ક્ષેત્રફળ = 86 + 228 = 314 ચોસેમી

12.



આકૃતિ 7.49

O અને P કેન્દ્ર ધરાવતા વર્તુળો બિંદુ Aમાં અંદરથી સ્પર્શે છે. જો , BQ = 9, DE = 5, હોય તો વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધવા માટે નીચેની કૃતિ કરો.

ઉકેલ : મોટા વર્તુળની ત્રિજ્યા R ધારીએ.

નાના વર્તુળની ત્રિજ્યા r ધારીએ.

OA, OB, OC અને OD એ મોટા વર્તુળની ત્રિજ્યા $\therefore$ OA = OB = OC = OD = R

$PQ = PA = r$

$OQ = OB - BQ = \boxed{\quad}$

$OE = OD - DE = \boxed{\quad}$

P કેન્દ્ર ધરાવતા વર્તુળમાં બે જીવાના આંતરવિભાજનના ગુણધર્મ અનુસાર.

$OQ \times OA = OE \times OF$

$\boxed{\quad} \times R = \boxed{\quad} \times \boxed{\quad} \quad \ldots(\because\ OE = OF)$

$R^2 - 9R = R^2 - 10R + 25$

$R = \boxed{\quad}$

$AQ = 2r = AB - BQ$

$2r = 50 - 9 = 41$

$r = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$

ઉત્તરસૂચિ

પ્રકરણ 1 સરૂપતા

મહાવરાસંગ્રહ 1.1

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. 3 4. 1:1 5. (1) $\frac{BQ}{BC}$, (2) $\frac{PQ}{AD}$, (3) $\frac{BC}{DC}$, (4) $\frac{DC \times AD}{QC \times PQ}$

મહાવરાસંગ્રહ 1.2

1. (1) દુભાજક છે. (2) દુભાજક નથી. (3) દુભાજક છે.

2. $\frac{PN}{NR} = \frac{PM}{MQ} = \frac{3}{2}$ એટલે રેખા NM || બાજુ RQ 3. QP = 3.5 5. BQ = 17.5

6. QP = 22.4 7. x = 6 ; AE = 18 8. LT = 4.8 9. x = 10

10. પક્ષ, XQ, PD, પક્ષ, $\frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}} = \frac{\boxed{XQ}}{\boxed{QE}}$, પ્રમાણનો મૂળભૂત પ્રમેય, $\frac{\boxed{XP}}{\boxed{PD}} = \frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}}$

મહાવરાસંગ્રહ 1.3

1. Δ ABC ~ Δ EDC ખૂખૂ સરૂપતા કસોટી 2. Δ PQR ~ Δ LMN ; બાબાબા સરૂપતા કસોટી

3. 12 મીટર 4. AC = 10.5 6. OD = 4.5

મહાવરાસંગ્રહ 1.4

1. ક્ષેત્રફળોના ગુણોત્તર = 9 : 25 2. $\boxed{PQ^2}$, $\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}$ 3. $\boxed{A(\Delta\ PQR)} = \frac{16}{25}$, $\frac{4}{5}$

4. MN = 15 5. 20 સેમી 6. $4\sqrt{2}$

7. $\boxed{PF}$; $\boxed{x}$ + $\boxed{2x}$; $\boxed{\angle FPQ}$; $\boxed{\angle FQP}$; $\frac{DF^2}{PF^2}$; $\boxed{20}$; $\boxed{45}$; $\boxed{45}$ – $\boxed{20}$; $\boxed{\text{25 ચોરસ એકમ}}$

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 1

1. (1) (B), (2) (B), (3) (B), (4) (D), (5) (A)

2. $\frac{7}{13}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{13}{20}$ 3. 9 સેમી 4. $\frac{3}{4}$ 5. 11 સેમી 6. $\frac{25}{81}$ 7. 4

8. PQ = 80, QR = $\frac{280}{3}$, RS = $\frac{320}{3}$ 9. $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MQ}} = \frac{\boxed{PX}}{\boxed{XQ}}$, $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MR}} = \frac{\boxed{PY}}{\boxed{YR}}$,

10. $\frac{AX}{XY} = \frac{3}{2}$ 12. $\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{3}+\boxed{2}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}}$, $\boxed{\text{ખૂ-ખૂ}}$, $\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$, $\boxed{22.5}$

પ્રકરણ 2 પાયથાગોરસનો પ્રમેય

મહાવરાસંગ્રહ 2.1

1. પાયથાગોરસના ત્રયકો ; (1), (3), (4), (6) 2. NQ = 6 3. QR = 20.5

4. RP = 12, PS = $6\sqrt{3}$ **5.** $\boxed{\text{પક્ષ}}$, $\boxed{45^\circ}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{2}$

6. બાજુ = $5\sqrt{2}$ સેમી, પરિમિતિ = $20\sqrt{2}$ સેમી **7.** (1) 18 (2) $4\sqrt{13}$ (3) $6\sqrt{13}$ **8.** 37 સેમી
10. 8.2 મી.

મહાવરાસંગ્રહ 2.2

1. 12 **2.** $2\sqrt{10}$ **4.** 18 સેમી

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 2

1. (1) (B), (2) (B), (3) (A), (4) (C), (5) (D), (6) (C), (7) (B), (8) (A).
2. (1) $a\sqrt{3}$, (2) કાટકોણ ત્રિકોણ છે. (3) 61 સેમી, (4) 15 સેમી, (5) $x\sqrt{2}$, (6) $\angle$ PRQ
3. RS = 6 સેમી, ST = $6\sqrt{3}$ સેમી **4.** 20 સેમી **5.** બાજુ = 2 સેમી, પરિમિતિ = 6 સેમી
6. 7 **7.** AP = $2\sqrt{7}$ સેમી **10.** 7.5 કિમી/કલાક **12.** 8 સેમી **14.** 8 સેમી
15. 192 ચોરસ એકમ **17.** 58 **18.** 26

પ્રકરણ 3 વર્તુળ

મહાવરાસંગ્રહ 3.1

1. (1) 90°, સ્પર્શક-ત્રિજ્યા પ્રમેય (2) 6 સેમી ; કારણ લંબઅંતર (3) $6\sqrt{2}$ સેમી (4) 45°
2. (1) $5\sqrt{3}$ સેમી (2) 30° (3) 60° **4.** 9 સેમી

મહાવરાસંગ્રહ 3.2

1. 1.3 સેમી 2. 9.7 સેમી **4.** (3) 110° **5.** $4\sqrt{6}$ સેમી

મહાવરાસંગ્રહ 3.3

1. m(ચાપ DE) = 90°, m(ચાપ DEF) = 160°

મહાવરાસંગ્રહ 3.4

1. (1) 60° (2) 30° (3) 60° (4) 300° **2.** (1) 70° (2) 220° (3) 110° (4) 55°
3. $\angle$R = 92°; $\angle$N = 88° **7.** 44° **8.** 121°

મહાવરાસંગ્રહ 3.5

1. PS = 18; RS = 10, **2.** (1) 7.5 (2) 12 અથવા 6
3. (1) 18 (2) 10 (3) 5 **4.** 4

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 3

1. (1) D (2) B (3) B (4) C (5) C (6) D (7) A (8) B (9) A (10) C
2. (1) 9 સેમી (2) વર્તુળના અંતર્ભાગમાં (3) 2 બિંદુ, 12 સેમી
3. (1) 6 (2) $\angle$K = 30°; $\angle$M = 60° **5.** 10 **6.** (1) 9 સેમી (2) 6.5 સેમી

(3) 90° ; MS : SR = 2 : 1 **9.** $4\sqrt{3}$ સેમી

13. (1) 180° (2) $\angle$ AQP $\cong$ $\angle$ ASQ $\cong$ $\angle$ ATQ

(3) $\angle$ QTS $\cong$ $\angle$ SQR $\cong$ $\angle$ SAQ (4) 65°, 130° (5) 100° **14.**(1) 70°

(2) 130° (3) 210° **15.** (1) 56° (2) 6 (3) 16 અથવા 9 **16.** (1) 15.5°

(2) 3.36 (3) 6 **18.** (1) 68° (2) OR = 16.2, QR = 13 (3) 13 **21.** 13

પ્રકરણ 4 ભૌમિતિક રચના

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 4

1. (1) C (2) A (3) A

પ્રકરણ 5 નિર્દેશક ભૂમિતિ

મહાવરાસંગ્રહ 5.1

1. (1) $2\sqrt{2}$ (2) $4\sqrt{2}$ (3) $\frac{11}{2}$ (4) 13 (5) 20 (6) $\frac{29}{2}$

2. (1) સમરેખ છે. (2) સમરેખ નથી. (3) સમરેખ નથી. (4) સમરેખ છે.

3. $(-1, 0)$ **7.** 7 અથવા -5

મહાવરાસંગ્રહ 5.2

1. (1, 3) **2.** (1) $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ (2) $\left(\frac{4}{7},-\frac{11}{7}\right)$ (3) $\left(0,\frac{13}{3}\right)$ **3.** 2:7 **4.** $(-6, 3)$

5. 2:5, $k = 6$ **6.** (11, 18) **7.** (1) (1, 3) (2) $(6, -2)$ (3) $\left(\frac{19}{3},\frac{22}{3}\right)$

8. $(-1, -7)$ **9.** $h = 7$, $k = 18$ **10.** (0, 2) ; $(-2, -3)$

11. $(-9, -8)$, $(-4, -6)$, $(1, -4)$ **12.** (16, 12), (12, 14), (8, 16), (4, 18)

મહાવરાસંગ્રહ 5.3

1. (1) 1 (2) $\sqrt{3}$ (3) ઢાળ શોધી શકાય નહીં.

2. (1) 2 (2) $-\frac{3}{8}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{5}{4}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) ઢાળ શોધી શકાય નહીં.

3. (1) સમરેખ છે. (2) સમરેખ છે. (3) સમરેખ નથી. (4) સમરેખ છે.
(5) સમરેખ છે. (6) સમરેખ છે.

4. -5; $\frac{1}{5}$; $-\frac{2}{3}$ 6. $k = 5$ 7. $k = 0$ 8. $k = 5$

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 5

1. (1) D (2) D (3) C (4) C

2. (1) સમરેખ છે. (2) સમરેખ છે. (3) સમરેખ નથી. 3. (6, 13) 4. 1:3

5. $(-7, 0)$ **6.** (1) $a\sqrt{2}$ (2) 13 (3) $5a$ **7.** $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

8. (1) હા, વિષમભુજ ત્રિકોણ, (2) નથી. (3) હા, સમભુજ ત્રિકોણ. **9.** $k = 5$

13. $5, 2\sqrt{13}, \sqrt{37}$ **14.** $(1, 3)$ **16.** $\left(\frac{25}{6}, \frac{13}{6}\right)$, ત્રિજ્યા = $\frac{13\sqrt{2}}{6}$ **17.** $(7, 3)$

18. સમાંતરભુજ ચતુષ્કોણ **19.** A(20, 10), P(16, 12), R(8, 16), B(0, 20). **20.** $(3, -2)$

21. $(7, 6)$, $(-1, -10)$ અને $(3, 6)$ **22.** 10 અને 0

પ્રકરણ 6 ત્રિકોણમિતિ

મહાવરાસંગ્રહ 6.1

1. $\cos\theta = \frac{24}{25}$; $\tan\theta = \frac{7}{24}$ **2.** $\sec\theta = \frac{5}{4}$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$

3. $\operatorname{cosec}\theta = \frac{41}{9}$; $\sin\theta = \frac{9}{41}$ **4.** $\sec\theta = \frac{13}{5}$; $\cos\theta = \frac{5}{13}$; $\sin\theta = \frac{12}{13}$

5. $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta} = \frac{1}{2}$

મહાવરાસંગ્રહ 6.2

1. ચર્ચની ઊંચાઈ 80 મીટર

2. જહાજનું દીવાદાંડીથી અંતર 51.60 મીટર

3. બીજી ઇમારતની ઊંચાઈ $(10 + 12\sqrt{3})$ મીટર

4. તારે ક્ષિતિજ સમાંતર કરેલો ખૂણો 30°

5. ઝાડની ઊંચાઈ $(40 + 20\sqrt{3})$ મીટર

6. પતંગની દોરીની લંબાઈ 69.20 મીટર

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 6

1. (1) A (2) B (3) C (4) A

2. $\cos 60 = \frac{60}{61}$ **3.** $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sec\theta = \sqrt{5}$; $\cot\theta = \frac{1}{2}$

4. $\sin\theta = \frac{5}{13}$; $\cos\theta = \frac{12}{13}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$; $\tan\theta = \frac{5}{12}$; $\cot\theta = \frac{12}{5}$

6. ઇમારતની ઊંચાઈ $16\sqrt{3}$ મીટર

7. જહાજનું દીવાદાંડી સુધીનું અંતર $100\sqrt{3}$ મીટર

8. ઇમારતની ઊંચાઈ $(12 + 5\sqrt{3})$ મીટર

9. સીડીનો બીજો છેડો જમીનથી વધુમાં વધુ 20.80 મીટર ઊંચે હશે.

10. વિમાન જમીનથી 1026 મીટર ઊંચાઈએ હશે.

પ્રકરણ 7 મહત્ત્વમાપન

મહાવરાસંગ્રહ 7.1

1. 11.79 ઘસેમી 2. 113.04 ઘસેમી 3. 1413 ચોસેમી (π = 3.14 લેતાં) 4. 616 ચોસેમી
5. 21 સેમી 6. 12 જગ 7. 9 સેમી 8. 273π ચોસેમી 9. 20 ગોળી
10. 94.20 ઘસેમી, 103.62 ચોસેમી 11. 5538.96 ચોસેમી, 38772.72 ઘસેમી
12. 1468.67π ઘસેમી

મહાવરાસંગ્રહ 7.2

1. 10.780 લિટર 2. (1) 628 ચોસેમી (2) 1356.48 ચોસેમી (3) 1984.48 ઘસેમી

મહાવરાસંગ્રહ 7.3

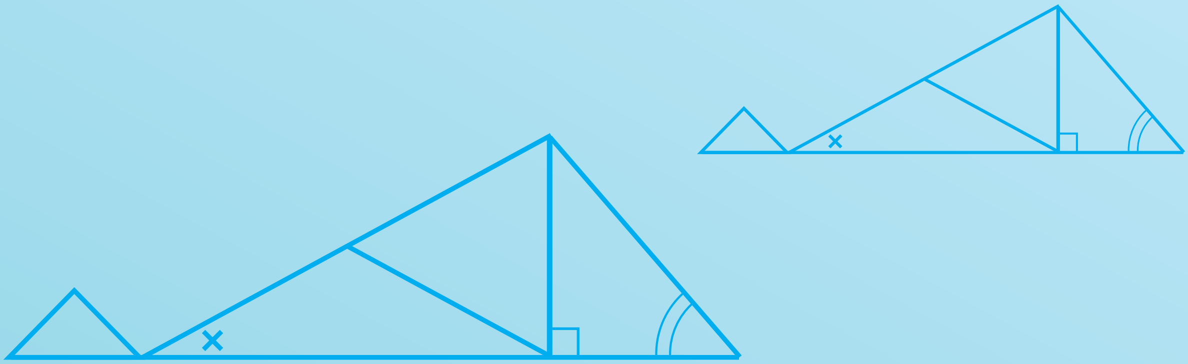
1. 47.1 ચોસેમી 2. 25.12 સેમી 3. 3.85 ચોસેમી 4. 214 ચોસેમી 5. 4 સેમી
6. (1) 154 ચોસેમી (2) 25.7 ચોસેમી (3) 128.3 ચોસેમી 7. 10.2 ચોસેમી
8. 7.3 સેમી ; 22 સેમી 9. (1) 90° (2) 22 સેમી
10.(1) 12.83 ચોસેમી (2) 89.83 ચોસેમી (3) 115.5 ચોસેમી 11. 3.5 સેમી
12. x = 154 ચોસેમી ; y = 38.5 ચોસેમી ; z = 101.5 ચોસેમી
13. (1) 84.87 ચોસેમી (2) 25.67 ચોસેમી (3) 77.01 ચોસેમી (4) 7.86 ચોસેમી

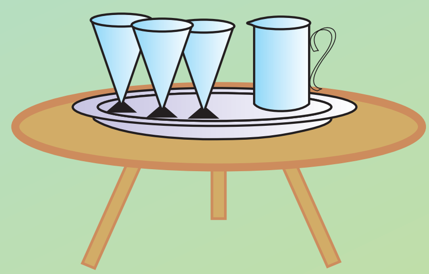
મહાવરાસંગ્રહ 7.4

1. 3.92 ચોસેમી 2. 9.08 ચોસેમી 3. 0.65625 ચોરસ એકમ 4. 20 સેમી
5. 20.43 ચોસેમી ; 686.07 ચોસેમી

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 7

1. (1) A, (2) D, (3) B, (4) B, (5) A, (6) A, (7) D, (8) C.
2. 20.35 લિટર 3. 7830 ધાતુની ગોળી 4. 2800 સિક્કા($\pi = \frac{22}{7}$ લેતાં) 5. 6336 રૂપિયા
6. 452.16 ચોસેમી ; 3383.19 ગ્રામ 7. 2640 ચોસેમી 8. 243 મીટર
9. 150°; 5π સેમી 10. 39.31 ચોસેમી





મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ અને
અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ,
પુણે ૪૧૧ ००४.

गुजराती गणित इ.१०वी भाग-२ ₹ 77.00