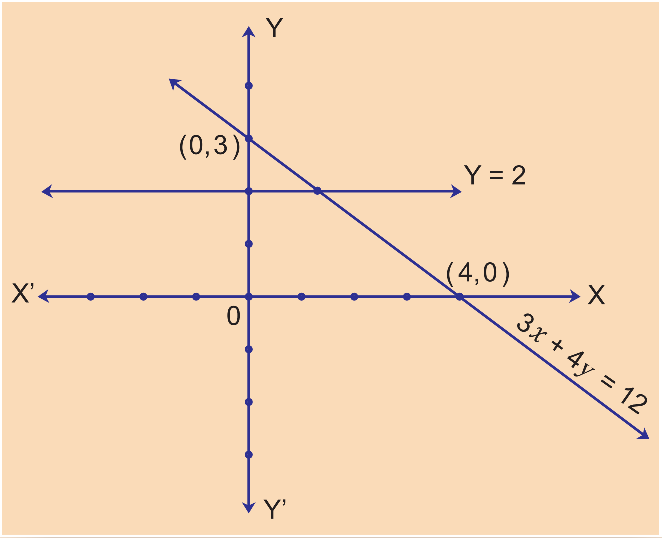
ગણિત ભાગ-I

ધોરણ - દસમું



$1 + 2 + 3 + \cdot \cdot \cdot \quad \cdot \cdot \cdot + 78 + 79 + 80$

$= (1 + 80) + (2 + 79) + \cdot \cdot \cdot + (39 + 42) + (40 + 41)$

ભારતનું સંવિધાન

ભાગ ૪ ક

નાગરિકોના મૂળભૂત કર્તવ્યો

અનુચ્છેદ ૫૧ ક

મૂળભૂત કર્તવ્ય - ભારતના પ્રત્યેક નાગરિકનું એ કર્તવ્ય છે કે તેણે -

(ક) સંવિધાનનું પાલન કરવું. સંવિધાનના આદર્શો, રાષ્ટ્રધ્વજ અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવો.

(ખ) સ્વાતંત્ર્ય ચળવળની પ્રેરણા આપનારા આદર્શોનું પાલન કરવું.

(ગ) દેશના સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડતા સુરક્ષિત રાખવા પ્રયત્નશીલ રહેવું.

(ઘ) આપણા દેશનું રક્ષણ કરવું, દેશની સેવા કરવી.

(ङ) દરેક પ્રકારના ભેદભાવને ભૂલીને એકતા અને બંધુત્વની ભાવના વિકસાવવી. સ્ત્રીઓના સન્માનને ઠેસ પહોંચાડનારી પ્રથાઓનો ત્યાગ કરવો.

(ચ) આપણી સંમિશ્ર સંસ્કૃતિના વારસાનું જતન કરવું.

(છ) નૈસર્ગિક પર્યાવરણનું જતન કરવું. સજીવ પ્રાણીઓ પ્રત્યે દયાભાવ રાખવો.

(જ) વૈજ્ઞાનિક દૃષ્ટિ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસાવૃત્તિ કેળવવી.

(ઝ) સાર્વજનિક માલમત્તાનું જતન કરવું. હિંસાનો ત્યાગ કરવો.

(ञ) દેશની ઉત્તરોત્તર પ્રગતિ માટે વ્યક્તિગત તેમજ સામૂહિક કાર્યમાં ઉત્તમતા-શ્રેષ્ઠતાનું સ્તર જાળવી રાખવાનો પ્રયત્ન કરવો.

(ટ) ૬થી ૧૪ વય જૂથના બાળકોને તેમના વાલીએ શિક્ષણની તક પૂરી પાડવી.

શાસન નિર્ણય ક્રમાંક : અભ્યાસ - 2116/(પ્ર.ક્ર. 43/16) એસડી-4 દિનાંક 25-4-2016 અન્વયે સ્થાપિત થયેલ સમન્વય સમિતિની દિનાંક 3-3-2017 રોજની બેઠકમાં આ પાઠ્યપુસ્તક નિર્ધારિત કરવાની માન્યતા આપવામાં આવી છે.

ગણિત

ભાગ-I

ધોરણ - દસમું

મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ, પુણે - 411 004.

NJAYCA

તમારાં સ્માર્ટફોનમાં DIKSHA APP દ્વારા પાઠ્યપુસ્તકનાં પહેલા પાનાં પરના Q.R. Codeથી ડિજિટલ પાઠ્યપુસ્તક અને દરેક પાઠમાં આપેલા Q.R. Codeથી તે સંબંધિત પાઠનાં અધ્યયન-અધ્યાપન માટે ઉપયોગી દૃશ્ય-શ્રાવ્ય સાહિત્ય ઉપલબ્ધ થશે.

પ્રથમાવૃત્તિ : 2018
પુનર્મુદ્રણ : 2022

© મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ, પુણે - 411 004.

મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ પાસે આ પુસ્તકના બધાં હક્ક રહેશે. આ પુસ્તકનો કોઈપણ ભાગ સંચાલક, મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળની લેખિત પરવાનગીવગર છાપી શકાશે નહિ.

ગણિત વિષયતજ્ઞ સમિતિ

ડૉ. મંગલા નારળીકર	(અધ્યક્ષ)
ડૉ. જયશ્રી અત્રે	(સદસ્ય)
શ્રી. વિનાયક ગોડબોલે	(સદસ્ય)
શ્રીમતી પ્રાજક્તિ ગોખલે	(સદસ્ય)
શ્રી. રમાકાંત સરોદે	(સદસ્ય)
શ્રી. સંદીપ પંચભાઈ	(સદસ્ય)
શ્રીમતી પૂજા જાધવ	(સદસ્ય)
શ્રીમતી ઉજ્જવલા ગોડબોલે	(સદસ્ય, સચિવ)

ગણિત વિષય - રાજ્ય અભ્યાસમંડળના સદસ્ય

શ્રીમતી જયશ્રી પુરંદરે	શ્રીમતી તરૂબેન પોપટ
શ્રી. રાજેન્દ્ર ચૌધરી	શ્રી. પ્રમોદ ઠોંબરે
શ્રી. રામા વ્હન્યાળકર	ડૉ. ભારતી સહસ્ત્રબુદ્ધે
શ્રી. આણ્ણાપા પરીટ	શ્રી. વસંત શેવાળે
શ્રી. અન્સાર શેખ	શ્રી. પ્રતાપ કાશિદ
શ્રી. શ્રીપાદ દેશપાંડે	શ્રી. મિલિંદ ભાકરે
શ્રી. સુરેશ દાતે	શ્રી. જ્ઞાનેશ્વર માશાળકર
શ્રી. ઉમેશ રેળે	શ્રી. ગણેશ કોલતે
શ્રી. બન્સી હાવળે	શ્રી. સંદેશ સોનાવણે
શ્રીમતી રોહિણી શિર્કે	શ્રી. સુધીર પાટીલ
શ્રી. પ્રકાશ ઝેંડે	શ્રી. પ્રકાશ કાપસે
શ્રી. લક્ષ્મણ દાવણકર	શ્રી. રવીન્દ્ર ખંદારે
શ્રી. શ્રીકાંત રત્નપારખી	શ્રીમતી સ્વાતિ ધર્માધિકારી
શ્રી. સુનિલ શ્રીવાસ્તવ	શ્રી. અરવિંદકુમાર તિવારી
શ્રી. અન્સારી અબ્દુલ હમીદ	શ્રી. મલ્લેશામ બેથી
શ્રીમતી સુવર્ણા દેશપાંડે	શ્રીમતી આર્યા ભિડે

પ્રમુખ સંયોજક : ઉજ્જવલા શ્રીકાંત ગોડબોલે
પ્ર. વિશેષાધિકારી ગણિત,
પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, પુણે.

ભાષાંતર : શ્રીમતી તરૂબેન પોપટ

સમીક્ષક : ધીરેન મનસુખલાલ દોશી
ધર્મિકા ધીરેન દોશી

ભાષાંતર સંયોજક : કેતકી નિતેશ જાની
વિશેષાધિકારી,
ગુજરાતી વિભાગ
પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, પુણે.

મુખપૃષ્ઠ અને સંગણકીય આલેખન : શ્રી સંદીપ કોળી, ચિત્રકાર, મુંબઈ.

અક્ષર ગૂંથણી : સમર્થ ગ્રાફિક્સ,
522, નારાયણ પેઠ,પુણે-30.

નિર્મિતિ : સચિન મેહતા
મુખ્ય નિર્મિતિ અધિકારી
સંજય કાંબળે
નિર્મિતિ અધિકારી
પ્રશાંત હરણે
સહાયક નિર્મિતિ અધિકારી

કાગળ : 70 જી.એસ.એમ. ક્રીમવ્હોવ્હ

મુદ્રણાદેશ :

મુદ્રક :

પ્રકાશક : શ્રી. વિવેક ઉત્તમ ગોસાવી, નિયંત્રક
પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ મંડળ,
પ્રભાદેવી, મુંબઈ - 25.

ભારતનું સંવિધાન

આમુખ

અમે ભારતના લોકો ભારતને એક સાર્વભૌમ સમાજવાદી બિનસાંપ્રદાયિક લોકતંત્રાત્મક પ્રજાસત્તાક તરીકે સંસ્થાપિત કરવાનો

તથા તેના સર્વ નાગરિકોને :

સામાજિક, આર્થિક અને રાજકીય ....ન્યાય

વિચાર, અભિવ્યક્તિ, માન્યતા,

ધર્મ અને ઉપાસનાની ....સ્વતંત્રતા

દરજ્જા અને તકની ....સમાનતા

પ્રાપ્ત થાય તેમ કરવાનો

અને તેઓ સર્વમાં

વ્યક્તિનું ગૌરવ અને રાષ્ટ્રની

એકતા અને અખંડતા સુદૃઢ કરે એવી ....બંધુતા

વિકસાવવાનો

ગંભીરતાપૂર્વક સંકલ્પ કરીને

અમારી સંવિધાનસભામાં ૨૬ નવેમ્બર, ૧૯૪૯ના રોજ આથી આ સંવિધાન અપનાવી, તેને અધિનિયમિત કરી અમને પોતાને અર્પિત કરીએ છીએ.

રાષ્ટ્રગીત

જનગણમન – અધિનાયક જય હે
ભારત – ભાગ્યવિધાતા.
પંજાબ, સિંધુ, ગુજરાત, મરાઠા,
દ્રાવિડ, ઉત્કલ, બંગ,
વિંધ્ય, હિમાચલ, યમુના, ગંગા,
ઉચ્છલ જલધિતરંગ,
તવ શુભ નામે જાગે, તવ શુભ આશિષ માગે,
ગાહે તવ જયગાથા.
જનગણ મંગલદાયક જય હે,
ભારત – ભાગ્યવિધાતા.
જય હે, જય હે, જય હે,
જય જય જય, જય હે.

પ્રતિજ્ઞા

ભારત મારો દેશ છે. બધા ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.

હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે. હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.

હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.

હું મારા દેશ અને દેશબાંધવો પ્રત્યે વફાદારી રાખવાની પ્રતિજ્ઞા લઉં છું. તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ સમાયેલું છે.

પ્રસ્તાવના

વિદ્યાર્થીમિત્રો,

ધોરણ 10 માં તમારું સ્વાગત !

આ વર્ષે ગણિત ભાગ I અને ગણિત ભાગ II આ બે પાઠ્યપુસ્તકોનો તમારે અભ્યાસ કરવાનો છે.

ગણિત ભાગ I માં બીજગણિત, આલેખ, અર્થ નિયોજન અને આંકડાશાસ્ત્ર આ મુખ્ય ક્ષેત્રો છે. આ વર્ષે તમારે ધોરણ ૯ સુધીમાં પરિચય કરેલાં ઘટકોનો જ થોડો વધુ અભ્યાસ કરવાનો છે. અર્થનિયોજનમાં નવી કરપ્રણાલિનો GST પરિચય આપ્યો છે. જ્યાં નવો ભાગ, સૂત્રો અથવા ઉપયોજન છે ત્યાં સ્પષ્ટીકરણ આપ્યું છે. દરેક પ્રકરણમાં નમૂના ઉદાહરણો તેમજ મહાવરા માટેના ઉદાહરણો આપ્યાં છે. તે ઉપરાંત પ્રજ્ઞાવાન વિદ્યાર્થીઓ માટે કેટલાંક આવ્હાનાત્મક પ્રશ્નો તારાંકિત કરેલાં છે. કેટલાંક વિદ્યાર્થી-ઓને ધોરણ-10 પછી ગણિતનો અભ્યાસ કરવો ન હોય તો પણ ગણિતની મૂળભૂત સંકલ્પનાઓ તેમને સમજાય, અન્ય ક્ષેત્રોમાં કામ કરતી વખતે જરૂર પૂરતું ગણિત આવડે, એવું જ્ઞાન આ પુસ્તકમાંથી મળશે. 'વધુ માહિતી માટે' આ શીર્ષક હેઠળ આપેલી માહિતી જે વિદ્યાર્થીઓને દસમી પછી ગણિતના અભ્યાસમાં પ્રાવિણ્ય મેળવવાની ઈચ્છા છે તેમને ઉપયોગી થશે. તેવા વિદ્યાર્થીઓએ આ ભાગનો જરૂર અભ્યાસ કરવો. આખું પુસ્તક એક વાર વાંચીને સમજી લેવું. 'ઍપ'ની માધ્યમથી Q.R. Code દ્વારા પ્રત્યેક પાઠ સંબંધિત વધુ માહિતી માટે આપને દશ્ય-શ્રાવ્ય સાહિત્ય ઉપલબ્ધ થશે. તે અભ્યાસ માટે ચોક્કસ ઉપયોગી થશે.

ધોરણ દસમાની પરીક્ષા મહત્ત્વની મનાય છે. આ બાબતનો તણાવ ન લેતાં, સરસ અભ્યાસ કરીને ઇચ્છિત યશની પ્રાપ્તિ માટે તમને શુભેચ્છા !

(ડૉ. સુનિલ મગર)
સંચાલક
મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ
અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ, પુણે.

પુણે
તા. : ૧૮ માર્ચ ૨૦૧૮, ગુડી પડવો
ભારતીય સૌર દિનાંક : ૨૭ ફાગણ ૧૯૩૯

ધોરણ 10 ગણિત ભાગ I ના અભ્યાસક્રમ દ્વારા વિદ્યાર્થીઓમાં નીચેની ક્ષમતાઓ વિકસિત થશે.

ક્ષેત્ર	ઘટક	ક્ષમતા વિધાનો
1. સંખ્યાજ્ઞાન	1.1 અંકગણિત શ્રેઢી	• અંકગણિત શ્રેઢી વિષયક ઉદાહણો ઉકેલતાં આવડે. • ભવિષ્યમાં પ્રાપ્ત કરવાના લક્ષ્ય માટે તબક્કાવાર નિયોજન કરતાં આવડે.
2. બીજગણિત	2.1 વર્ગસમીકરણો 2.2 દ્વિચલ રેખિક સમીકરણો	• વર્ગ સમીકરણના રૂપમાં વ્યક્ત થઈ શકે તેવા ઉદાહરણોનો ઉકેલ શોધતાં આવડે. • શાબ્દિક ઉદાહરણના ઉકેલ માટે કેટલાં ચલનો ઉપયોગ કરવો તેનો નિર્ણય લેતાં આવડે. • શાબ્દિક ઉદાહરણનું રૂપાંતર બે ચલવાળા સમીકરણમાં કરી તેનો ઉકેલ શોધતાં આવડે.
3. વ્યાવહારિક ગણિત	3.1 અર્થનિયોજન	• બચત, રોકાણ અંગેની સમજ નિર્માણ થાય. • ઉદ્યોગ, વ્યવસાય માટે જરૂરી આર્થિક વ્યવહારોનો પરિચય થાય.
4. આંકડાશાસ્ત્ર અને સંભાવના	4.1 સંભાવના 4.2 આલેખ અને કેન્દ્રિય પ્રવૃત્તિના પરિમાણો	• રમત ગમત, મતદાન વગેરે ક્ષેત્રમાં સંભાવનાનો ઉપયોગ કરતાં આવડે. • વિશેષ પ્રકારની માહિતી મેળવ્યા પછી તેનું આલેખ રૂપે/ ચિત્રરૂપે નિરૂપણ કરવા માટે યોગ્ય આલેખના પ્રકારની પસંદગી કરતાં આવડે. • વર્ગીકૃત સામગ્રી પરથી મધ્ય, મધ્યક, બહુલક શોધતાં આવડે.

શિક્ષકો માટે સૂચના

સૌ પ્રથમ પુસ્તકનું ઊંડાણપૂર્વક વાચન કરી સમજી લેવું. વિવિધ ઘટકોના સ્પષ્ટીકરણ તેમજ સૂત્રોની ચકાસણી જેવી મહત્ત્વની બાબતો માટે કૃતિઓની મદદ લેવી.

પ્રાત્યક્ષિક (પ્રયોગ) દ્વારા પણ મૂલ્યમાપન કરવાનું હોવાથી કૃતિઓ ઉપયોગી થશે. વિદ્યાર્થીઓને સ્વતંત્ર વિચાર કરવા માટે પ્રોત્સાહન આપવું. એક જ ઉદાહરણ જુદી જુદી રીતે, પરંતુ તર્કસંગત રીતે ઉકેલે ત્યારે શાબાશી આપવી.

પ્રયોગની યાદી (નમૂના યાદી)

1. આલેખપત્ર પર X-અક્ષ અથવા Y-અક્ષને સમાંતર રેખા દોરી તેના પરના કોઈપણ ચાર બિંદુના નિર્દેશકો લખો. નિર્દેશકો પરથી રેખાનું સમીકરણ કેવી રીતે તૈયાર થાય છે, તે લખો.

   [સમાંતર રેખાને બદલે આરંભબિંદુમાંથી જતી અથવા X અને Y અક્ષોને છેદતી રેખાઓ પણ લઇ શકાય.]

2. કોઈપણ દ્વિઅંકી સંખ્યા મનમાં નક્કી કરો. તે સંખ્યા મનમાં રાખી, તે ઓળખવા માટેનો કોયડો તૈયાર કરો. સંખ્યાના અંકો વચ્ચેના બે બૈજીક સંબંધ તૈયાર કરી કોયડો ઉકેલો.

   [આ જ પ્રયોગ ત્રણ અંકી સંખ્યા માટે પણ કરી શકાય.]

3. કોઈપણ ખાદ્યપદાર્થના પેકેટ ઉપર લખેલાં ઘટકોની માહિતી વાંચો. તે માહિતી દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ દોરો. દા.ત.બિસ્કીટના પડીકા પર કાર્બોદિત, પ્રોટીન, વિટામીન વગેરેનું કોષ્ટક જુઓ. તે કેટલાં વજન માટે આપ્યું છે. તે નોંધો. તે પરથી વજનનું વિતરણ દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ દોરો. તે માટે કાર્બોદિત, ચરબી, પ્રોટીન અને અન્ય એમ ચાર ભાગ કરી શકાશે.

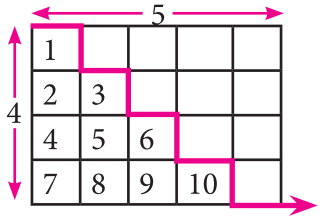
4. શિક્ષકે આપેલા આવૃત્તિ વિતરણ કોઠા પરથી સંગણકમાં Excel sheet તૈયાર કરો. તે પરથી સ્તંભાલેખ અને આવૃત્તિ બહુકોણ Excel માં તૈયાર કરો.

5. એક પાસો દસ વખત ફેંકીને મળતી નિષ્પત્તિ નોંધી તેનું કોષ્ટક તૈયાર કરો.

6. શિક્ષકે આપેલું જીએસટી વ્યવહારનું બિલ (ટેક્સ-ઈન્વોઇસ) જુઓ. તેમાંની બધી બાબતો નોંધો. તેમાં આપેલી કર આકારણીની ફરી ગણતરી કરો અને ગણતરી બરોબર છે તેની ખાતરી કરો.

7. શિક્ષકે કહ્યાં પ્રમાણે પ્રથમ n ક્રમિક પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો સરવાળો કરવા માટે આપેલી કૃતિ કરો. દા.ત. 1 થી 4 સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો સરવાળો કરવા માટે 4 × 5 માપનો એક ચોકઠાવાળો કાગળ (ગ્રીડપેપર) લો.

   આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેને કાપી લો. (અહીં n = 4 છે) તેથી $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ સૂત્ર ચકાસી જુઓ.



$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \therefore S_4 = \frac{4\ (4+1)}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

   [નોંધ : અહીં a = 1 અને d = 1 છે. વધારે સંખ્યાઓ લઈને તેમજ a અને d ની કિંમત બદલીને, સમ કે વિષમ સંખ્યાઓ અને ઘન સંખ્યાઓના સરવાળા માટે પણ આ કૃતિ કરી શકાય.]

8. એક કાર્ડપર આગળની બાજુએ $\alpha = 6$ અને પાછળની બાજુએ $\alpha = -6$ લખો. બીજા કાર્ડ પર દરેક પૃષ્ઠભાગ પર $\beta = -3$ અને $\beta = 7$ લખો. તે પરથી $(\alpha + \beta)$ અને $(\alpha\beta)$ ની જુદી જુદી કિંમતો તૈયાર થશે. તે કિંમતો વાપરીને વર્ગસમીકરણો તૈયાર કરો.

અનુક્રમણિકા

પ્રકરણ		પૃષ્ઠ ક્ર.
1.	દ્વિચલ રેખિક સમીકરણો	1 થી 29
2.	વર્ગ સમીકરણો	30 થી 54
3.	અંકગણિત શ્રેઢી	55 થી 80
4.	અર્થ નિયોજન	81 થી 112
5.	સંભાવના	113 થી 128
6.	આંકડાશાસ્ત્ર	129 થી 168
•	ઉત્તરસૂચિ	169 થી 176

1 દ્વિચલ રેખિક સમીકરણો

ચાલો શીખીએ.

- દ્વિચલ રેખિક સમીકરણો ઉકેલવાની પધ્ધતિ - આલેખ પધ્ધતિ, ક્રેમરની પધ્ધતિ.
- દ્વિચલ રેખિક સમીકરણોમાં રૂપાંતરિત થાય તેવા સમીકરણો.
- યુગપત્ સમીકરણોનું ઉપયોજન.

યાદ કરીએ.

દ્વિચલ રેખિક સમીકરણ (Linear equation in two variables)

જે સમીકરણમાં બે ચલ વાપર્યા હોય અને ચલયુક્ત પદનો ઘાત 1 હોય તેને દ્વિચલ રેખિક સમીકરણ કહે છે, તે આપણે પાછલાં ધોરણમાં શીખ્યા છીએ.

$ax + by + c = 0$ આ દ્વિચલ રેખિક સમીકરણનું **સામાન્ય રૂપ** છે. જેમાં a, b, c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને a અને b એક સાથે શૂન્ય ન હોય તે પણ આપણે જાણીએ છીએ.

દા.ત. $3x = 4y - 12$ આ સમીકરણનું $3x - 4y + 12 = 0$ એ **સામાન્ય રૂપ** છે.

કૃતિ : નીચેનો કોઠો પૂર્ણ કરો.

અનુક્રમાંક	સમીકરણ	દ્વિચલ રેખિક સમીકરણ છે કે નથી?
1	$4m + 3n = 12$	છે.
2	$3x^2 - 7y = 13$	
3	$\sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 16$	
4	$0x + 6y - 3 = 0$	
5	$0.3x + 0y - 36 = 0$	
6	$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 4$	
7	$4xy - 5y - 8 = 0$	

યુગપત્ રેખિક સમીકરણો (Simultaneous linear equations)

જ્યારે આપણે બે દ્વિચલ રેખિક સમીકરણોનો એક સાથે વિચાર કરીએ છીએ ત્યારે તે સમીકરણોને યુગપત્ સમીકરણો (યુગ્મ સમીકરણો) કહે છે.

પાછલાં ધોરણમાં આપણે એક ચલનો લોપ કરીને સમીકરણો ઉકેલવાની રીતનો અભ્યાસ કર્યો છે. પહેલાં તેનું પુનરાવર્તન કરીએ.

ઉદા. (1) નીચેનાં યુગપત્ સમીકરણો ઉકેલો.

$5x - 3y = 8;\ 3x + y = 2$

ઉકેલ :

રીત I : $5x - 3y = 8$ . . .(I)

$3x + y = 2$ . . .(II)

સમીકરણ (II)ની બન્ને બાજુને 3 વડે ગુણતાં

$9x + 3y = 6$ . . . (III)

$5x - 3y = 8$ . . . (I)

સમીકરણ (I) અને (III)નો સરવાળો કરીએ.

$$\begin{array}{r} 5x - 3y = 8 \\ + \quad 9x + 3y = 6 \\ \hline 14x \qquad = 14 \end{array}$$

$\therefore \quad x = 1$

$x = 1$ આ કિંમત સમીકરણ (II)માં મૂકીએ.

$3x + y = 2$

$\therefore \quad 3 \times 1 + y = 2$

$\therefore \quad 3 + y = 2$

$\therefore \quad y = -1$

$\therefore$ $x = 1, y = -1$ એ ઉકેલ છે.

આ ઉકેલ $(x, y) = (1, -1)$ એમ પણ લખી શકાય.

રીત (II)

$5x - 3y = 8$. . . (I)

$3x + y = 2$ . . . (II)

સમીકરણ (II) પરથી y ચલની કિંમત x ચલના રૂપમાં લખીએ.

$y = 2 - 3x$ . . . (III)

હવે y ની કિંમત સમીકરણ (I)માં મૂકીએ.

$5x - 3y = 8$

$\therefore \quad 5x - 3(2 - 3x) = 8$

$\therefore \quad 5x - 6 + 9x = 8$

$\therefore \quad 14x - 6 = 8$

$\therefore \quad 14x = 8 + 6$

$\therefore \quad 14x = 14$

$\therefore \quad x = 1$

$x = 1$ આ કિંમત સમીકરણ (III)માં મૂકીએ.

$y = 2 - 3x$

$\therefore \quad y = 2 - 3 \times 1$

$\therefore \quad y = 2 - 3$

$\therefore \quad y = -1$

$\therefore$ $x = 1, y = -1$ એ ઉકેલ છે.

ઉદા. **(2)** ઉકેલો : $3x + 2y = 29;\ 5x - y = 18$

ઉકેલ : $3x + 2y = 29$. . . (I) અને $5x - y = 18$ . . . (II)

આપેલાં સમીકરણો y ચલનો લોપ કરીને ઉકેલીએ. તે માટે નીચેના ચોકઠામાં યોગ્ય સંખ્યા લખો.

સમીકરણ (II) ને 2 વડે ગુણતાં

$\therefore \quad 5x \times \square - y \times \square = 18 \times \square$

$\therefore \quad 10x - 2y = \square$ . . . (III)

સમીકરણ (I)માં સમીકરણ (III) ઉમેરીએ.

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 29 \\ + \ \square - \square = \square \\ \hline \square = \square \end{array} \qquad \therefore x = \square$$

$x = 5$ આ કિંમત સમીકરણ (I)માં મૂકીએ.

$3x + 2y = 29$

$\therefore \quad 3 \times \square + 2y = 29$

$\therefore \quad \square + 2y = 29$

$\therefore \quad 2y = 29 - \square$

$\therefore \quad 2y = \square \qquad \therefore y = \square$

$(x, y) = (\square, \square)$ આ ઉકેલ છે.

ઉદા. **(3)** $15x + 17y = 21;\ 17x + 15y = 11$

ઉકેલ : $15x + 17y = 21$. . . (I)

$17x + 15y = 11$ . . . (II)

આ બે સમીકરણોમાં x અને y ના સહગુણકોની અદલાબદલી થયેલી દેખાય છે. આ પ્રકારનાં યુગપત્ સમીકરણો ઉકેલવા માટે બે સમીકરણોનો સરવાળો અને બાદબાકી કરવાથી બે નવા સાદા સમીકરણો મળે છે. તેના પરથી સહેલાઈથી આપેલાં સમીકરણોનો ઉકેલ મળે છે.

સમીકરણ (I) અને સમીકરણ (II)નો સરવાળો કરતાં,

$$\begin{array}{r} 15x + 17y = 21 \\ + \ 17x + 15y = 11 \\ \hline 32x + 32y = 32 \end{array}$$

સમીકરણની બન્ને બાજુને 32 વડે ભાગતાં,

$x + y = 1 \; . \; . \; . \quad \text{(III)}$

સમીકરણ (I)માંથી સમીકરણ (II) બાદ કરતાં.

$$\begin{array}{rl} & 15x + 17y = 21 \\ - & \underset{-}{17x} \underset{-}{+} 15y = \underset{-}{11} \\ \hline & -2x + 2y = 10 \end{array}$$

સમીકરણની બન્ને બાજુને 2 વડે ભાગતાં,

$-x + y = 5 \; . \; . \; . \quad \text{(IV)}$

સમીકરણ (III) અને સમીકરણ (IV)નો સરવાળો કરતાં.

$$\begin{array}{rl} & x + y = 1 \\ + & -x + y = 5 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore \quad 2y = 6 \qquad \therefore \quad y = 3$

$y = 3$ આ કિંમત સમીકરણ (III)માં મૂકતાં,

$x + y = 1$

$\therefore \quad x + 3 = 1$

$\therefore \quad x = 1 - 3 \qquad \therefore \; x = -2$

$(x, y) = (-2, 3)$ આ યુગપત્ સમીકરણોનો ઉકેલ છે.

મહાવરાસંગ્રહ 1.1

1. નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરી યુગપત્ સમીકરણો ઉકેલો.

$5x + 3y = 9 \text{ ----- (I)}$

$2x - 3y = 12 \text{ ----- (II)}$

સમી.(I) અને સમી.(II)નો સરવાળો કરતાં,

$$\begin{array}{rl} & 5x + 3y = 9 \\ + & 2x - 3y = 12 \\ \hline & \square \, x = \square \end{array}$$

$\therefore \; x = \dfrac{\square}{\square} \qquad \therefore \; x = \square$

$x = 3$ સમી.(I)માં મૂકતાં,

$5 \times \square + 3y = 9$

$\therefore \; 3y = 9 - \square$

$\therefore \; 3y = \square$

$\therefore \; y = \dfrac{\square}{3}$

$\therefore \; y = \square$

$(x, y) = (\square, \square)$ આ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

2. નીચેના યુગપત્ સમીકરણો ઉકેલો.

(1) $3a + 5b = 26$; $a + 5b = 22$ (2) $x + 7y = 10$; $3x - 2y = 7$

(3) $2x - 3y = 9$; $2x + y = 13$ (4) $5m - 3n = 19$; $m - 6n = -7$

(5) $5x + 2y = -3$; $x + 5y = 4$ (6) $\frac{1}{3}x + y = \frac{10}{3}$; $2x + \frac{1}{4}y = \frac{11}{4}$

(7) $99x + 101y = 499$; $101x + 99y = 501$

(8) $49x - 57y = 172$; $57x - 49y = 252$

યાદ કરીએ.

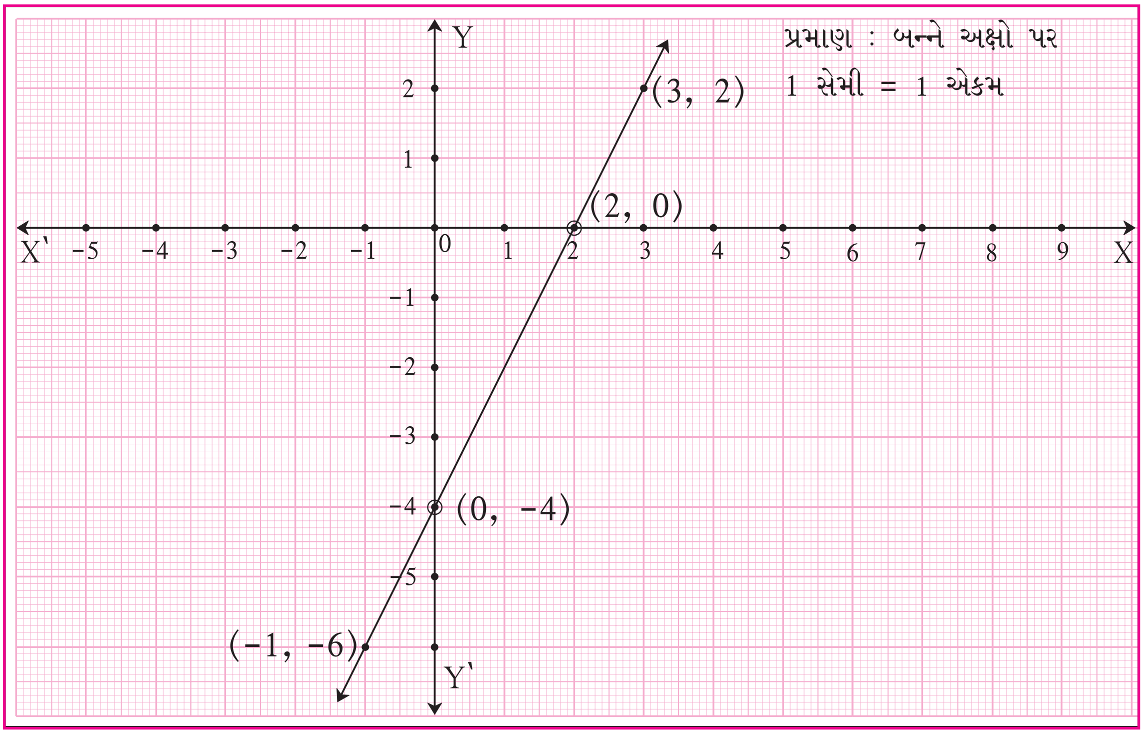
દ્વિચલ રેખિક સમીકરણનો આલેખ (Graph of a linear equation in two variables)

પાછલાં ધોરણમાં, દ્વિચલ રેખિક સમીકરણનો આલેખ એક સીધી રેખા હોય છે તે તમે શીખ્યા છો. સંખ્યાની જે ક્રમિક જોડ આપેલાં સમીકરણનું સમાધાન કરે તે જોડ તે સમીકરણનો ઉકેલ દર્શાવે છે. તેમજ એ ક્રમિક જોડ તે સમીકરણના આલેખ પરનું એક બિંદુ દર્શાવે છે.

ઉદા. $2x - y = 4$ નો આલેખ દોરો.

ઉકેલ : $2x - y = 4$ નો આલેખ દોરવા માટે (x, y)ની 4 ક્રમિક જોડીઓ શોધીએ. આ ક્રમિક જોડ મેળવવા માટે કોઠામાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે x અને yની કિંમત 'શૂન્ય' લેવી જેથી સહેલાઇથી ઉકેલ મળે.

x	0	2	3	-1
y	-4	0	2	-6
(x, y)	(0, -4)	(2, 0)	(3, 2)	(-1, -6)



દ્વિચલ રેખિક સમીકરણનો આલેખ દોરવા માટે નીચેના પગથિયાં ધ્યાનમાં લો.

આપેલા સમીકરણ માટે ઓછામાં ઓછી 4 ક્રમિક જોડ (બિંદુના નિર્દેશકો શોધો.)

↓

આલેખ પત્ર પર X-અક્ષ અને Y-અક્ષ નિશ્ચિત કરી બિંદુઓ સ્થાપો.

↓

બધા બિંદુઓ (એક જ રેખામાં) સમરેખ આવશે. તેમાંથી પસાર થતી રેખા દોરો.

રેખા નિશ્ચિત કરવા માટે બે બિંદુઓ પૂરતાં છે. પરંતુ તેમાંથી એક બિંદુના નિર્દેશકમાં ભૂલ થાય તો, રેખા ખોટી આવે.

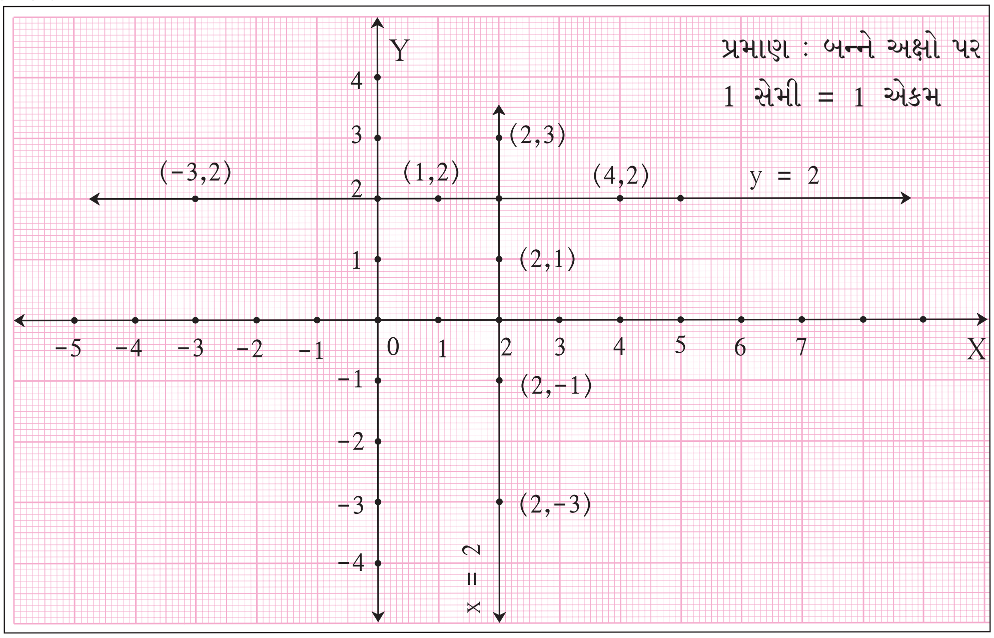
ત્રણ બિંદુઓના નિર્દેશકો કાઢીએ અને તેમાંથી એક ખોટો હોય તો ત્રણ બિંદુઓ સમરેખ આવે નહીં તે પરથી ક્યા એક બિંદુના નિર્દેશકો ખોટાં છે તે શોધતાં વાર લાગે.

ચાર બિંદુઓના નિર્દેશકો કાઢીએ અને તેમાંનો એક ખોટો હોય અને બાકીના ત્રણ સમરેખ હોય તો ભૂલ તરત ધ્યાનમાં આવે છે. આમ ચાર બિંદુઓ લેવા હિતાવહ છે.

$0x + y = 2$ આ સમીકરણ સગવડતા ખાતર $y = 2$ એમ લખાય છે. આ સમીકરણનો આ-લેખ X-અક્ષને સમાંતર હોય છે. કારણ x નિર્દેશક કોઈપણ લઈએ તો પણ દરેક બિંદુનો y નિર્દેશક 2 જ આવે છે.

x	1	4	-3
y	2	2	2
(x, y)	(1, 2)	(4, 2)	(-3, 2)

તેમજ $x + 0y = 2$ આ સમીકરણ $x = 2$ એમ લખાય છે અને તેનો આલેખ Y-અક્ષને સમાંતર હોય છે.



જાણી લઈએ.

યુગપત્ સમીકરણો ઉકેલવાની આલેખ પદ્ધતિ
(Solution of simultaneous equations by Graphical method)

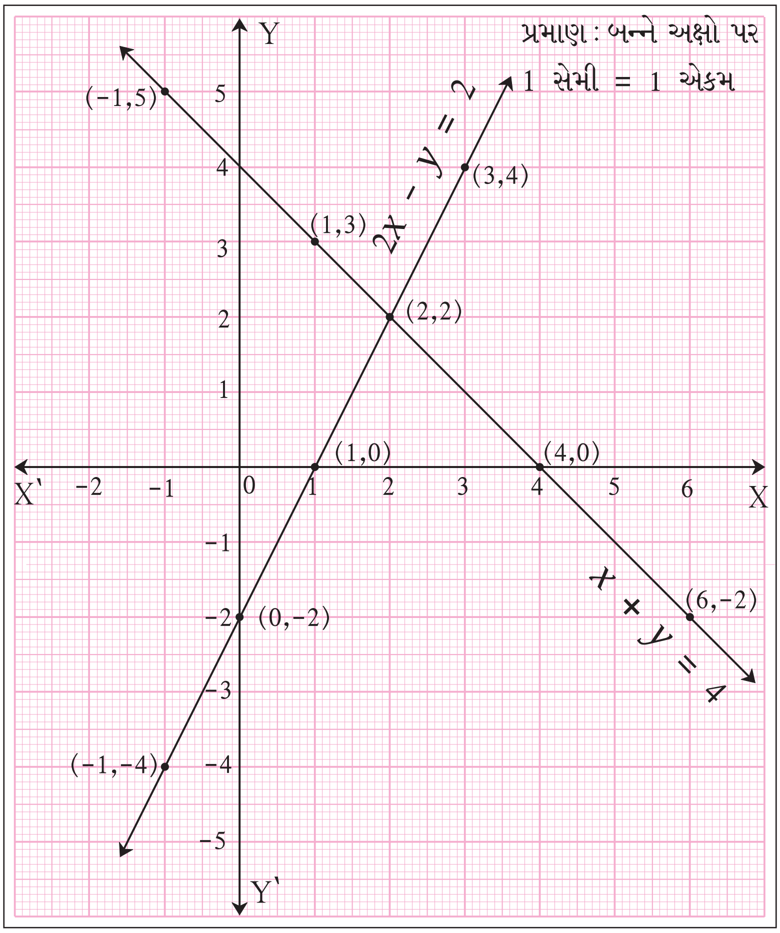
ઉદા. $x + y = 4$ અને $2x - y = 2$ આ સમીકરણના આલેખ દોરી તેનું નિરીક્ષણ કરીએ.

$x + y = 4$

x	-1	4	1	6
y	5	0	3	-2
(x, y)	$(-1, 5)$	$(4, 0)$	$(1, 3)$	$(6, -2)$

$2x - y = 2$

x	0	1	3	-1
y	-2	0	4	-4
(x, y)	$(0, -2)$	$(1, 0)$	$(3, 4)$	$(-1, -4)$



આલેખ પરનું દરેક બિંદુ તે આલેખના સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. બન્ને રેખાઓ પરસ્પર બિંદુ (2, 2) માં છેદે છે.

તેથી (2, 2) આ ક્રમિક જોડ એટલે કે $x = 2$ અને $y = 2$ આ કિંમતો $x + y = 4$ અને $2x - y = 2$ બન્ને સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

ચલની જે કિંમતોથી આપેલા યુગપત્ સમીકરણોનું સમાધાન થાય તે કિંમતો તે સમીકરણોનો ઉકેલ હોય છે.

$x + y = 4$ અને $2x - y = 2$ આ યુગપત્ સમીકરણોનો ઉકેલ $x = 2$ અને $y = 2$ છે.

આ સમીકરણો નિરસન પદ્ધતિથી ઉકેલો અને ચકાસો.

$x + y = 4 \; . \; . \; .$ (I)

$2x - y = 2 \; . \; . \; .$ (II)

સમીકરણ (I) અને (II) સરવાળો કરતાં,

$3x = 6 \;\; \therefore \; x = 2$

સમીકરણ (I) માં $x = 2$ મૂકતાં.

$x + y = 4$

$\therefore \; 2 + y = 4$

$\therefore \; y = 2$

કૃતિ I : $x - y = 1$; $5x - 3y = 1$ આ યુગપત્ સમીકરણો આલેખની રીતે ઉકેલવા માટે નીચેના કોઠા પૂર્ણ કરી નિર્દેશકો મેળવો.

$x - y = 1$

x	0		3	
y		0		-3
(x, y)				

$5x - 3y = 1$

x	2			-4
y		8	-2	
(x, y)				

- એક જ નિર્દેશક પધ્ધતિ લઈ બિંદુઓ સ્થાપન કરો.
- સમીકરણના આલેખ દોરો.
- બે રેખાના છેદનબિંદુના નિર્દેશકો વાંચો. તેના પરથી યુગપત્ સમીકરણોનો ઉકેલ લખો.

કૃતિ II : ઉપરના યુગપત્ સમીકરણો નિરસન પધ્ધતિથી ઉકેલો અને આલેખ પરથી મેળવેલો ઉકેલ ચકાસો.

વિચાર કરીએ.

$5x - 3y = 1$ નો આલેખ દોરવા માટે નીચેના કોઠામાં કેટલાંક નિર્દેશકો શોધીને આપ્યા છે. તે જુઓ.

x	0	$\frac{1}{5}$	1	-2
y	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{11}{3}$
(x, y)	$\left(0, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, 0\right)$	$\left(1, \frac{4}{3}\right)$	$\left(-2, -\frac{11}{3}\right)$

- બિંદુ સ્થાપન કરવા આ નિર્દેશકો સગવડ ભર્યા છે કે ?
- નિર્દેશકો શોધતી વખતે કઈ કાળજી લેવી જેથી બિંદુ સ્થાપવા સહેલાં પડે.

મહાવરાસંગ્રહ 1.2

1. નીચેના યુગપત્ સમીકરણો આલેખની રીતે ઉકેલવા કોઠામાં યોગ્ય સંખ્યા લખો.
   $x + y = 3$; $x - y = 4$

$x + y = 3$

x	3	□	□
y	□	5	3
(x, y)	(3, 0)	□	(0, 3)

$x - y = 4$

x	□	-1	0
y	0	□	-4
(x, y)	□	□	(0, -4)

2. નીચેના યુગપત્ સમીકરણો આલેખની મદદથી ઉકેલો.
   (1) $x + y = 6$; $x - y = 4$
   (2) $x + y = 5$; $x - y = 3$
   (3) $x + y = 0$; $2x - y = 9$
   (4) $3x - y = 2$; $2x - y = 3$
   (5) $3x - 4y = -7$; $5x - 2y = 0$
   (6)★ $2x - 3y = 4$; $3y - x = 4$

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

$x + 2y = 4$; $3x + 6y = 12$ આ યુગપત્ સમીકરણો આલેખ પધ્ધતિથી ઉકેલવા માટે નિશ્ચિત કરેલી કેટલીક ક્રમિક જોડીઓ નીચે આપેલી છે.

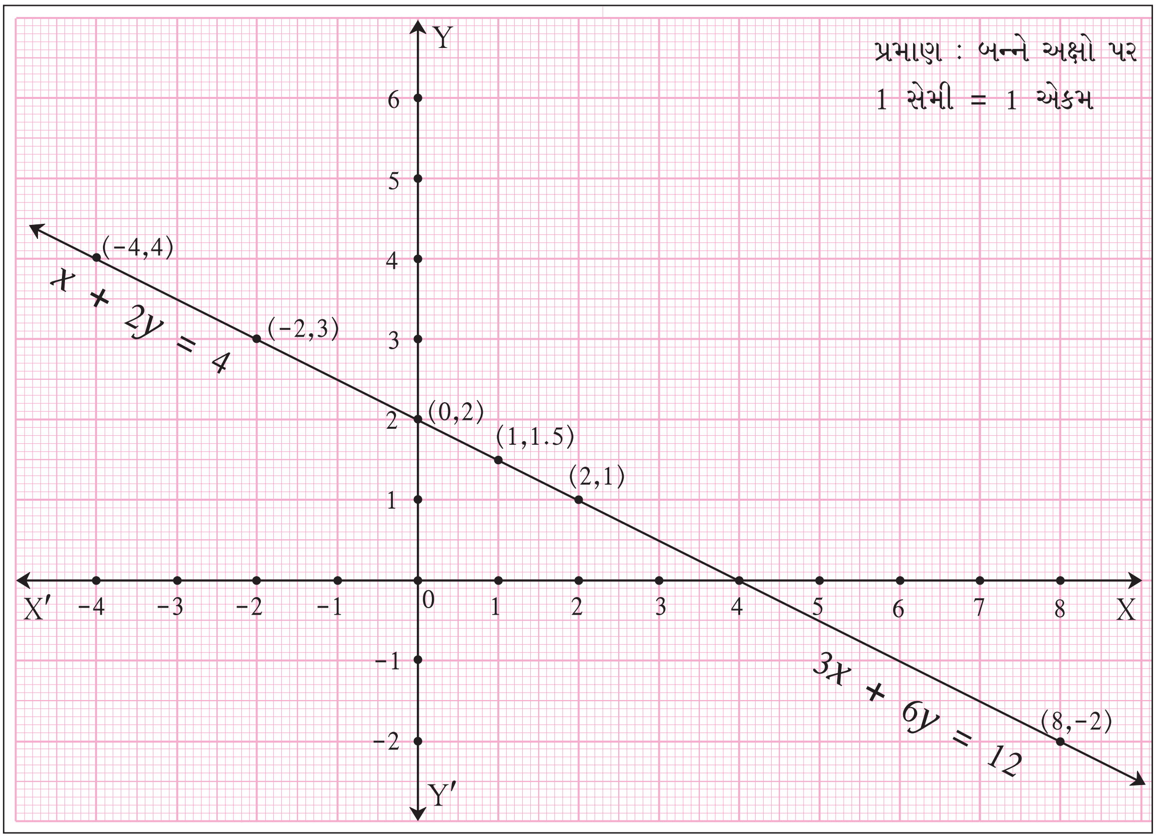
$x + 2y = 4$

x	-2	0	2
y	3	2	1
(x, y)	$(-2, 3)$	$(0, 2)$	$(2, 1)$

$3x + 6y = 12$

x	-4	1	8
y	4	1.5	-2
(x, y)	$(-4, 4)$	$(1, 1.5)$	$(8, -2)$

આ ક્રમિક જોડીઓનું સ્થાપન કરીને દોરેલો આલેખ નીચે આપ્યો છે. તેનું નિરીક્ષણ કરો અને તેની નીચે આપેલા પ્રશ્નો પર ચર્ચા કરો.



(1) ઉપરના બન્ને સમીકરણોનાં આલેખ એક જ છે કે ભિન્ન છે ?

(2) $x + 2y = 4$ અને $3x + 6y = 12$ આ યુગપત્ સમીકરણોના ઉકેલ ક્યા ક્યા છે ? કેટલાં છે ?

(3) ઉપરના બન્ને સમીકરણોમાં x અને y ના સહગુણકો અને અચલપદો વચ્ચે ક્યો સંબંધ દેખાઈ આવે છે ?

(4) બે દ્વિચલ રેખિક સમીકરણો આપ્યા હોય ત્યારે તેમનો આલેખ એક જ ક્યારે હોય છે તે કેવી રીતે ઓળખશો ?

હવે બીજું ઉદાહરણ જોઈએ.

$x - 2y = 4$ અને $2x - 4y = 12$ આ સમીકરણોનાં આલેખ એક જ નિર્દેશક પદ્ધતિ પર દોરો. આલેખનું નિરીક્ષણ કરો $x - 2y = 4$; $2x - 4y = 12$ આ યુગપત્ સમીકરણોનાં ઉકેલનો વિચાર કરો. x અને y ના સહગુણકો તેમજ અચળપદો વચ્ચેના સંબંધનો વિચાર કરીને તારણ કાઢો.

ICT Tools or Links

Geogebra software ની મદદથી X-અક્ષ અને Y-અક્ષ લો. વિવિધ યુગપત્ સમીકરણોના આલેખ દોરો અને તેના ઉકેલ તપાસો.

જાણી લઈએ.

નિશ્ચયક (Determinant)

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ આ ચાર ઘટકોનો નિશ્ચયક છે. તેમાં (a, b), (c, d) આડી હરોળ છે, અને $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ ઊભી હરોળ (ઊભા સ્તંભ) છે. આ નિશ્ચયકનો ઘાત 2 છે. કારણ કે દરેક આડી અને ઊભી હરોળમાં 2 ઘટકો છે. આ નિશ્ચયક એક સંખ્યા માટે લખાય છે. તે સંખ્યા $ad-bc$ છે.

એટલે $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$

$ad-bc$ એ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ આ નિશ્ચયકની કિંમત છે.

નિશ્ચયકને નામ આપવા માટે સામાન્ય રીતે A, B, C, D, ... એવા અંગ્રેજી કેપિટલ અક્ષરો વપરાય છે.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. નીચેના નિશ્ચયકોની કિંમત શોધો.

(1) $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ (2) $N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$ (3) $B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix}$

ઉકેલ :

(1) $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (5 \times 9) - (3 \times 7) = 45 - 21 = 24$

(2) $N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = [(-8) \times (4)] - [(-3\ ) \times 2] = -32 - (-6)$

$= -32 + 6 = -26$

(3) $B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = [2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}] - [2 \times 9] = 18 - 18 = 0$

જાણી લઈએ.

નિશ્ચયક પદ્ધતિ (ક્રેમર રૂલ) Determinant method (Cramer's Method)

આપેલાં યુગપત્ સમીકરણોને સહેલી રીતે અને ઓછામાં ઓછી જગ્યા વાપરીને નિશ્ચયકની મદદથી ઉકેલી શકાય છે. આને જ યુગપત્ સમીકરણો ઉકેલવાની નિશ્ચયક પદ્ધતિ કહે છે. આ પદ્ધતિ ગ્રેબ્રિયલ ક્રેમર આ સ્વીસ ગણિતજ્ઞે શોધી કાઢી તેથી તેને 'ક્રેમર્સરૂલ' કે ક્રેમરની પદ્ધતિ કહે છે.

આ પદ્ધતિમાં આપેલા યુગપત્ સમીકરણો $a_1x + b_1y = c_1$ અને $a_2x + b_2y = c_2$ એમ લખાય છે.

ધારોકે, $a_1x + b_1y = c_1$ . . . (I)

અને $a_2x + b_2y = c_2$ . . . (II)

અહીં a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 આ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

આપણે આ યુગપત્ સમીકરણો નિરસન પદ્ધતિથી ઉકેલીએ.

સમીકરણ (I) ને b_2 વડે ગુણતાં

$a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2$ . . . (III)

સમીકરણ (II) ને b_1 વડે ગુણતાં

$a_2b_1x + b_2b_1y = c_2b_1$ . . . (IV)

સમીકરણ (III) માંથી (IV) બાદ કરતાં,

$$\begin{array}{r} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \\ - \; a_2 b_1 x \pm b_2 b_1 y = - c_2 b_1 \\ \hline (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1 \end{array}$$

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \ldots \quad (V)$$

તે જ પ્રમાણે x નું નિરસન કરીને, $y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \ldots \quad (VI)$

ઉપરના ઉકેલમાં $c_1 b_2 - c_2 b_1$, $a_1 b_2 - a_2 b_1$, $a_1 c_2 - a_2 c_1$ આ રાશિઓ યાદ રાખવા અને થોડી જગ્યામાં વ્યવસ્થિત દર્શાવવા માટે નિશ્ચયકના રૂપમાં લખીશું.

નીચેના સમીકરણમાં સહગુણકો અને અચળ પદો જુઓ.

હવે $a_1 x + b_1 y = c_1$

અને $a_2 x + b_2 y = c_2$

અહીં $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ આ ત્રણ ઊભા સ્તંભ છે.

સમીકરણ (V) અને સમીકરણ (VI) માં x અને y ની કિંમતો નિશ્ચયકના રૂપમાં લખીએ.

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\text{અને } y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad (a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0$$

ધ્યાનમાં રાખવા માટે $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D$, $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_x$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_y$ થી દર્શાવીએ.

એટલે ટૂંકમાં, $x = \dfrac{D_x}{D}$ અને $y = \dfrac{D_y}{D}$

D, D_x, D_y આ નિશ્ચયકો લખવા માટે $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ આ પ્રમાણે સ્તંભોનો ક્રમ ધ્યાનમાં રાખો.

અને $\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$ આ સમીકરણો પરથી $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ આ ત્રણ સ્તંભ મળે છે.

- D માં અચળપદોનો $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ આ સ્તંભ લીધો નથી.
- D_x માટે D માંનો $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ આ x ના સહગુણકોનાં સ્તંભને બદલે તેની જગ્યાએ અચળ પદોનો સ્તંભ લીધો છે.
- D_y માટે D માંનો $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ આ y ના સહગુણકોનાં સ્તંભને બદલે તેની જગ્યાએ અચળ પદોનો સ્તંભ લીધો છે.

આ ધ્યાનમાં રાખો.

ક્રેમરની પધ્ધતિ વાપરીને યુગપત્ સમીકરણ ઉકેલવાની રીત

આપેલાં સમીકરણો $ax + by = c$ આ રૂપમાં લખો.

↓

D, D_x અને D_y આ નિશ્ચયકોની કિંમત શોધો.

↓

$x = \frac{D_x}{D}$ અને $y = \frac{D_y}{D}$

આ પ્રમાણે x અને y ની કિંમત શોધો.

ગેબ્રિયલ ક્રેમર (Gabriel Cramer)

(31 જુલાઈ, 1704 થી 4 જાન્યુઆરી, 1752)

આ સ્વિસ ગણિજ્ઞનો જન્મ જિનિવામાં થયો હતો. ગણિતમાં તેઓ નાનપણથી જ હોંશિયાર હતા. અઢાર વર્ષની વયે તેમને ડૉક્ટરેટની પદવી મળી હતી. જીનિવામાં તેઓ પ્રાધ્યાપક હતાં.

ગણેલું ઉદાહરણ

ઉદા. ક્રેમરની રીતે નીચેના યુગપત્ સમીકરણો ઉકેલો.

$$5x + 3y = -11 \; ; \; 2x + 4y = -10$$

ઉકેલ : આપેલાં સમીકરણો

$$5x + 3y = -11$$

$$2x + 4y = -10$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (2 \times 3) = 20 - 6 = 14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = (-11) \times 4 - (-10) \times 3 = -44 - (-30)$$

$$= -44 + 30 = -14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 5 \times (-10) - 2 \times (-11) = -50 - (-22)$$

$$= -50 + 22 = -28$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{14} = -1 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{14} = -2$$

$\therefore$ $(x, y) = (-1, -2)$ આપેલાં યુગપત્ સમીકરણોનો ઉકેલ છે.

કૃતિ 1 : નિશ્ચયક પદ્ધતિ વાપરી આપેલાં યુગપત્ સમીકરણો ઉકેલવા માટે નીચેના ચોક્ઠામાં યોગ્ય સંખ્યા લખો.

$$y + 2x - 19 = 0 \; ; \; 2x - 3y + 3 = 0$$

ઉકેલ : આપેલાં સમીકરણો $ax + by = c$ ના રૂપમાં લખીએ.

$$2x + y = 19$$

$$2x - 3y = -3$$

$$D = \begin{vmatrix} \square & \square \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \square \times (-3) - 2 \times \square = \square - \square$$

$$= \square - \square = \square$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & \square \\ \square & -3 \end{vmatrix} = 19 \times \square - \square \times \square = \square - \square$$

$$= \square$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \square & 19 \\ 2 & \square \end{vmatrix} = \square \times \square - \square \times \square$$

$$= \square - \square = \square$$

$x = \dfrac{D_x}{D}$	$y = \dfrac{D_y}{D}$
$\therefore \quad x = \dfrac{\square}{\square} = \square$	$y = \dfrac{\square}{\square} = \square$

$\therefore \quad (x, y) = (\square, \square)$ આ આપેલા યુગપત્ સમીકરણોનો ઉકેલ છે.

કૃતિ 2 : નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.

$3x - 2y = 3$ $\qquad$ $2x + y = 16$

આપેલાં સમીકરણોના નિશ્ચયકોની કિંમત

$D = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$ $\qquad$ $D_x = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$ $\qquad$ $D_y = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$

ક્રેમરની રીતે ઉકેલ આવશે

$x = \dfrac{\square}{\square} = \square$ $\qquad$ $y = \dfrac{\square}{\square} = \square$

$\therefore$ ઉકેલ $(\square, \square)$ છે.

$\therefore \; (x, y) = (\square, \square)$ આ ઉકેલ છે.

વિચાર કરીએ.

- જો D = 0 હોય તો ઉકેલનું સ્વરૂપ કેવું હશે ?
- સામાન્ય ઉકેલ શક્ય ન હોય તો તે સમીકરણની રેખાઓનું સ્વરૂપ શું હશે ?

મહાવરાસંગ્રહ 1.3

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \square - \square \times 4$

$= \square - 8$

$= \square$

2. નીચેના નિશ્ચયકોની કિંમત શોધો.

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

3. નીચેના યુગપત્ સમીકરણો ક્રેમરની પદ્ધતિથી ઉકેલો.

(1) $3x - 4y = 10$; $4x + 3y = 5$ (2) $4x + 3y - 4 = 0$; $6x = 8 - 5y$

(3) $x + 2y = -1$; $2x - 3y = 12$ (4) $6x - 4y = -12$; $8x - 3y = -2$

(5) $4m + 6n = 54$; $3m + 2n = 28$ (6) $2x + 3y = 2$; $x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$

દ્વિચલ રેખિક સમીકરણમાં રૂપાંતરિત થાય તેવાં સમીકરણો :
(Equations reducible to linear equations in two variables)

કૃતિ : નીચેનો કોઠો પૂર્ણ કરો.

સમીકરણ	ચલની સંખ્યા	રેખિક છે કે નહીં ?
$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 8$	2	નથી
$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 0$	$\square$	$\square$
$\frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 0$	$\square$	$\square$
$\frac{14}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5$	$\square$	$\square$

વિચાર કરીએ.

ઉપરના કોઠામાં આપેલાં દ્વિચલ સમીકરણો પૈકી કેટલાંક રેખિક સમીકરણો નથી પણ તેમનું રૂપાંતર રેખિક સમીકરણમાં થઈ શકે કે નહીં ?

ધ્યાનમાં રાખીએ.

આપેલાં સમીકરણોમાં આપેલાં ચલને બદલે બીજાં યોગ્ય ચલ લઈને નવા સમીકરણો બનાવીને તેને રેખિક સમીકરણનાં રૂપમાં લખી શકાય છે. $\frac{m}{n}$ સ્વરૂપમાં હોય તેવા કોઈપણ અપૂર્ણાંકનો છેદ શૂન્ય હોઈ શકે નહિ.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા.(1) ઉકેલો : $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

ઉકેલ : $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{y}\right) = 7 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{y}\right) = 5 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

સમીકરણ (I) અને (II) માં $\left(\frac{1}{x}\right) = m$ અને $\left(\frac{1}{y}\right) = n$ મૂકતાં નીચેના સમીકરણો મળે છે.

$4m + 5n = 7$ . . . (III)

$3m + 4n = 5$ . . . (IV)

આ સમીકરણો ઉકેલતાં,

$m = 3,\ n = -1$ આ કિંમતો મળે છે.

હવે, $m = \frac{1}{x}$ $\quad \therefore\ 3 = \frac{1}{x} \quad \therefore\ x = \frac{1}{3}$

તેમજ, $n = \frac{1}{y}$ $\quad \therefore\ -1 = \frac{1}{y} \quad \therefore\ y = -1$

$\therefore$ $(x, y) = (\frac{1}{3}, -1)$ આ આપેલા યુગપત્ સમીકરણોનો ઉકેલ છે.

ઉદા.(2) ઉકેલો : $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3$; $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

ઉકેલ : $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3$; $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x-y}\right) + 1\left(\frac{1}{x+y}\right) = 3 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

$$2\left(\frac{1}{x-y}\right) - 3\left(\frac{1}{x+y}\right) = 5 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

સમીકરણ (I) અને (II)માં $\left(\frac{1}{x-y}\right) = a$ અને $\left(\frac{1}{x+y}\right) = b$ મૂકતાં નીચેના સમીકરણો મળે છે.

$$4a + b = 3 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

$$2a - 3b = 5 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

સમીકરણ (III) અને (IV) ઉકેલતાં $a = 1$ અને $b = -1$ મળે છે.

પરંતુ $a = \left(\frac{1}{x-y}\right)$ અને $b = \left(\frac{1}{x+y}\right)$

$\left(\frac{1}{x-y}\right) = 1$ અને $\left(\frac{1}{x+y}\right) = -1$

$$x - y = 1 \quad . . . \quad \text{(V)}$$

$$x + y = -1 \quad . . . \quad \text{(VI)}$$

સમીકરણ (V) અને સમીકરણ (VI) ઉકેલતાં $x = 0$ અને $y = -1$ ઉકેલ મળે છે.

$\therefore$ $(x, y) = (0, -1)$ આપેલાં સમીકરણનો ઉકેલ છે.

વિચાર કરીએ.

ઉપરના ઉદાહરણોમાં રૂપાંતરિત કરેલાં યુગપત્ સમીકરણો નિરસન પદ્ધતિથી ઉકેલ્યાં છે. તે સમીકરણો ક્રેમરની પદ્ધતિ અથવા આલેખ પદ્ધતિથી ઉકેલી શકાય કે ? કરી જુઓ.

કૃતિ : સમીકરણોનો ઉકેલ શોધવા માટે નીચેની કૃતિ કરો.

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2 \ ; \ \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

$\left(\frac{1}{x-1}\right) = m$ અને $\left(\frac{1}{y-2}\right) = n$ મૂકતાં,

નવાં સમીકરણો

$\square$; $6m - 3n = 1$

સમીકરણો ઉકેલતાં,

$m = \square$ અને $n = \square$

m અને n ની કિંમત મૂકીને મળતાં સમીકરણો

$\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{3}$; $\square$

સમીકરણો ઉકેલતાં,

$x = \square$ અને $y = \square$

$\therefore$ $(x, y) = (\ \ , \ \ )$ આપેલાં યુગપત્ સમીકરણોનો ઉકેલ છે.

મહાવરાસંગ્રહ 1.4

1. નીચેના યુગપત્ સમીકરણો ઉકેલો.

(1) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 15$; $\frac{8}{x} + \frac{5}{y} = 77$

(2) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$; $\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

(3) $\frac{27}{x-2} + \frac{31}{y+3} = 85$; $\frac{31}{x-2} + \frac{27}{y+3} = 89$

(4) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$; $\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$

જાણી લઈએ.

યુગપત્ સમીકરણોનું ઉપયોજન (Application of simultaneous equations)

કૃતિ : અહીં ચોકઠાની નીચે આપેલી સૂચના પ્રમાણે તૈયાર થતાં સમીકરણો ચોકઠામાં લખો. તે પરથી સાર્થક અને સાક્ષીની ઉંમર શોધો.

સાર્થકની ઉંમર, સાક્ષીની ઉંમરના બમણાં કરતાં 8 વરસ ઓછી છે.

હું સાર્થક. મારી આજની ઉંમર x વર્ષ છે.

મારી આજની ઉંમર y વર્ષ છે. હું સાક્ષી.

4 વર્ષ પહેલાં સાક્ષીની ઉંમર સાર્થક કરતાં 3 વર્ષે ઓછી હતી.

સાર્થક અને સાક્ષીની આજની ઉંમરનો સરવાળો 25 વર્ષ છે.

ઉદા. (1) એક લંબચોરસની પરિમિતિ 40 સેમી છે. લંબચોરસની લંબાઇ તેની પહોળાઈના બમણાં કરતા 2 સેમી વધારે છે. તો લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, લંબચોરસની લંબાઇ x સેમી અને પહોળાઈ y સેમી છે.

પહેલી શરત પ્રમાણે,

$$2(x + y) = 40$$

$$x + y = 20 \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

બીજી શરત પ્રમાણે,

$$x = 2y + 2$$

$$\therefore \quad x - 2y = 2 \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

સમીકરણ (I) અને (II) નિશ્ચયક પદ્ધતિથી ઉકેલીએ,

$$x + y = 20$$

$$x - 2y = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = [1 \times (-2)] - (1 \times 1) = -2 - 1 = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = [20 \times (-2)] - (1 \times 2) = -40 - 2 = -42$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2) - (20 \times 1) = 2 - 20 = -18$$

$x = \frac{D_x}{D}$ અને $y = \frac{D_y}{D}$

$\therefore x = \frac{-42}{-3}$ અને $y = \frac{-18}{-3}$

$\therefore x = 14$ અને $y = 6$

$\therefore$ લંબચોરસની લંબાઈ 14 સેમી અને પહોળાઈ 6 સેમી છે.

ઉદા. (2)

સેલ ! સેલ !! સેલ !!! ફક્ત બે દિવસ માટે !

મારી પાસે કેટલીક કાંટાવાળી ઘડિયાળો છે અને
કેટલીક ડિજિટલ ઘડિયાળો છે. તે હું સસ્તા દરે વેંચીશ.

પહેલાં દિવસનું વેંચાણ	
કાંટાવાળી ઘડિયાળો	= 11
ડિજિટલ ઘડિયાળો	= 6
મને મળ્યા →	4330 રૂપિયા

બીજા દિવસનું વેંચાણ	
કાંટાવાળી ઘડિયાળો	= 22
ડિજિટલ ઘડિયાળો	= 5
મને મળ્યા →	7330 રૂપિયા

તો મેં વેંચેલાં દરેક પ્રકારના ઘડિયાળની કિંમત કેટલી ?

ઉકેલ : ધારોકે, એક કાંટાવાળી ઘડિયાળની કિંમત $= x$ રૂપિયા

અને એક ડિજિટલ ઘડિયાળની કિંમત $= y$ રૂપિયા

પહેલી શરત પ્રમાણે,

$$11x + 6y = 4330 \quad \ldots \quad (I)$$

બીજી શરત પ્રમાણે,

$$22x + 5y = 7330 \quad \ldots \quad (II)$$

સમીકરણ (I) ને 2 વડે ગુણતાં,

$$22x + 12y = 8660 \quad \ldots \quad (III)$$

સમીકરણ (II) માંથી સમીકરણ (III) બાદ કરતાં.

$$\begin{array}{r} 22x + 5y = 7330 \\ -\;\; \underline{\overset{-}{}22x \underset{-}{+} 12y = \underset{-}{}8660} \\ -7y = -1330 \end{array}$$

$$\therefore \quad y = 190$$

$y = 190$ આ કિંમત સમીકરણ (I) માં મૂકતાં,

$$11x + 6y = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 6(190) = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 1140 = 4330$$

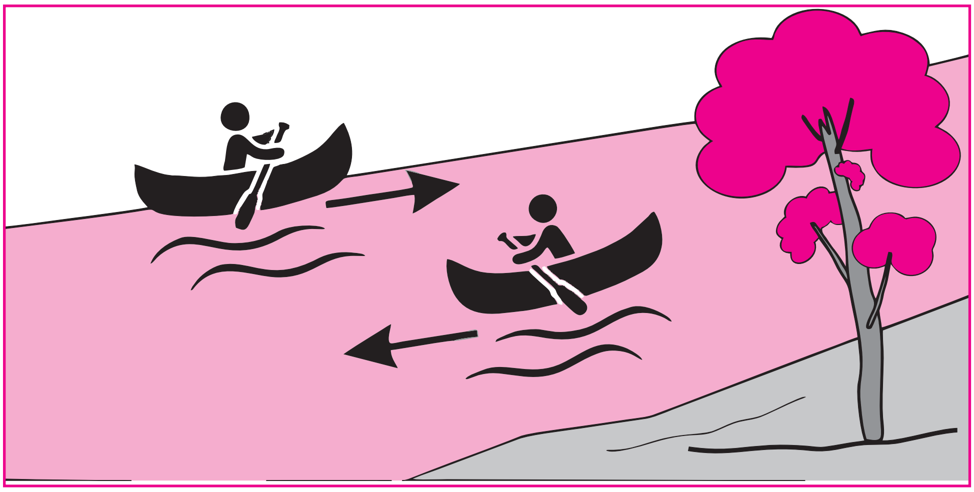
$$\therefore \quad 11x = 3190$$

$$\therefore \quad x = 290$$

$\therefore$ એક કાટાંવાળી ઘડિયાળની કિંમત 290 રૂપિયા અને

એક ડિજિટલ ઘડિયાળની કિંમત 190 રૂપિયા છે.

ઉદા. (3)



એક હોડી 6 કલાકમાં પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં 16 કિમી અને પ્રવાહની દિશામાં 24 કિમી જાય છે.

તે જ હોડી 13 કલાકમાં પ્રવાહની વિરૂધ્ધ દિશામાં 36 કિમી અને પ્રવાહની દિશામાં 48 કિમી જાય છે.

તો કહો જોઈએ ! હોડીનો શાંત પાણીમાં વેગ અને પ્રવાહનો વેગ કેટલો હશે?

ઉકેલ : ધારોકે, શાંત પાણીમાં હોડીનો વેગ = x કિમી/કલાક અને પ્રવાહનો વેગ = y

$\therefore$ હોડીનો પ્રવાહની દિશામાં વેગ = $(x + y)$ કિમી/કલાક

હોડીનો પ્રવાહની વિરુધ્ધ દિશામાં વેગ = $(x - y)$ કિમી/કલાક

અંતર = વેગ $\times$ સમય $\therefore$ સમય = $\frac{\text{અંતર}}{\text{વેગ}}$

હોડીને પ્રવાહની વિરુધ્ધ દિશામાં 16 કિમી જવા માટે લાગતો સમય = $\frac{16}{x-y}$ કલાક

હોડીને પ્રવાહની દિશામાં 24 કિમી જવા માટે લાગતો સમય = $\frac{24}{x+y}$ કલાક

પહેલી શરત પ્રમાણે,

$$\frac{16}{x-y} + \frac{24}{x+y} = 6 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

બીજી શરત પ્રમાણે,

$$\frac{36}{x-y} + \frac{48}{x+y} = 13 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

સમીકરણ (I) અને (II)માં $\frac{1}{x-y} = m$ અને $\frac{1}{x+y} = n$ મૂકતાં નીચેના બે સમીકરણો મળે છે.

$16m + 24n = 6 \quad . . . \quad \text{(III)}$

$36m + 48n = 13 \quad . . . \quad \text{(IV)}$

સમીકરણ (III) અને (IV) ઉકેલતાં $m = \frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{12}$

m અને n ની કિંમત મૂકતાં નીચેના સમીકરણો મળે છે.

$x - y = 4$ . . . (V)

$x + y = 12$ . . . (VI)

સમીકરણ (V) અને (VI) ઉકેલતાં $x = 8$, $y = 4$ મળે છે.

$\therefore$ હોડીનો શાંત પાણીમાં વેગ = 8 કિમી/કલાક અને પ્રવાહનો વેગ = 4 કિમી/કલાક.

ઉદા. **(4)** કેટલીક રકમ કેટલાંક બાળકોમાં સરખે ભાગે વહેંચી. જો 10 બાળકો વધારે હોત તો દરેકને 2 રૂપિયા ઓછાં મળ્યા હોત અને જો 15 બાળકો ઓછાં હોત તો દરેકને 6 રૂપિયા વધારે મળ્યા હોત. તો કુલ રકમ કેટલી હતી ? તે રકમ કેટલાં બાળકોને વહેંચી ?

ઉકેલ : ધારોકે બાળકોની સંખ્યા x રૂપિયા અને દરેકને મળતી રકમ y રૂપિયા છે.

$\therefore$ કુલ xy રૂપિયા વહેંચ્યા.

પહેલી શરત પ્રમાણે,

$$(x + 10)(y - 2) = xy$$

$$\therefore \quad xy - 2x + 10y - 20 = xy$$

$$\therefore \quad -2x + 10y = 20$$

$$\therefore \quad -x + 5y = 10 \quad . . . \quad (I)$$

બીજી શરત પ્રમાણે,

$$(x - 15)(y + 6) = xy$$

$$\therefore \quad xy + 6x - 15y - 90 = xy$$

$$\therefore \quad 6x - 15y = 90$$

$$\therefore \quad 2x - 5y = 30 \quad . . . \quad (II)$$

સમીકરણ (I) માં સમીકરણ (II) ઉમેરતાં,

$$\begin{array}{rr} & -x + 5y = 10 \\ + & 2x - 5y = 30 \\ \hline & x = 40 \end{array}$$

$x = 40$ આ કિંમત સમીકરણ (I)માં મૂકતાં.

$$-x + 5y = 10$$

$$\therefore \quad -40 + 5y = 10$$

$$\therefore \quad 5y = 50$$

∴ $y = 10$

કુલ રકમ $= xy = 40 \times 10 = 400$ રૂપિયા

∴ 40 બાળકોને 400 રૂપિયા સરખે ભાગે વહેંચ્યા હતા.

ઉદા. (5) એક ત્રણ અંકી સંખ્યા તેના અંકોના સરવાળાના 17 ગણાં જેટલી છે. તેમાં 198 ઉમેરતાં તે જ અંકો ઉલટ ક્રમે આવે તેવી સંખ્યા મળે છે, આ સંખ્યાના એકમ અને શતક સ્થાનના અંકોનો સરવાળો, વચ્ચેના અંક કરતાં 1 જેટલો ઓછો છે. તો તે ત્રણ અંકી સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે, શતક સ્થાનનો અંક x અને એકમ સ્થાનનો અંક y છે.

દશક સ્થાનનો અંક (વચ્ચેનો અંક) = આજુબાજુના અંકના સરવાળા કરતાં 1 થી વધારે છે.

શતક	દશક	એકમ
x	$x + y + 1$	y

∴ ત્રણ અંકી સંખ્યા $= 100x + 10(x + y + 1) + y$

$= 100x + 10x + 10y + 10 + y = 110x + 11y + 10$

આ સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો $= x + (x + y + 1) + y = 2x + 2y + 1$

∴ પહેલી શરત પ્રમાણે,

ત્રણ અંકી સંખ્યા = 17 × (અંકોનો સરવાળો)

∴ $110x + 11y + 10 = 17 \times (2x + 2y + 1)$

∴ $110x + 11y + 10 = 34x + 34y + 17$

∴ $76x - 23y = 7 \ . \ . \ . \quad \text{(I)}$

આપેલી સંખ્યાના અંક ઉલટ ક્રમે લખતાં મળતી નવી સંખ્યા

$= 100y + 10(x + y + 1) + x = 110y + 11x + 10$

આપેલી સંખ્યા $= 110x + 11y + 10$

આપેલી બીજી શરત પ્રમાણે, આપેલી સંખ્યા + 198 = અંક ઉલટ ક્રમે લખતાં મળતી સંખ્યા

∴ $110x + 11y + 10 + 198 = 110y + 11x + 10$

∴ $99x - 99y = -198$

∴ $x - y = -2$

એટલે કે $x = y - 2 \ . \ . \ . \quad \text{(II)}$

સમીકરણ (II)માં મળેલી x ની કિંમત સમીકરણ (I)માં મૂકતાં,

∴ $76(y - 2) - 23y = 7$

∴ $76y - 152 - 23y = 7$

$53y = 159$

$\therefore$ $y = 3$ $\therefore$ એકમ સ્થાનનો અંક $= 3$

$y = 3$ આ કિંમત સમીકરણ (II) માં મૂકતાં,

$x = y - 2$

$\therefore$ $x = 3 - 2 = 1$

$\therefore$ $x = 1$ $\therefore$ શતક સ્થાનનો અંક $= 1$

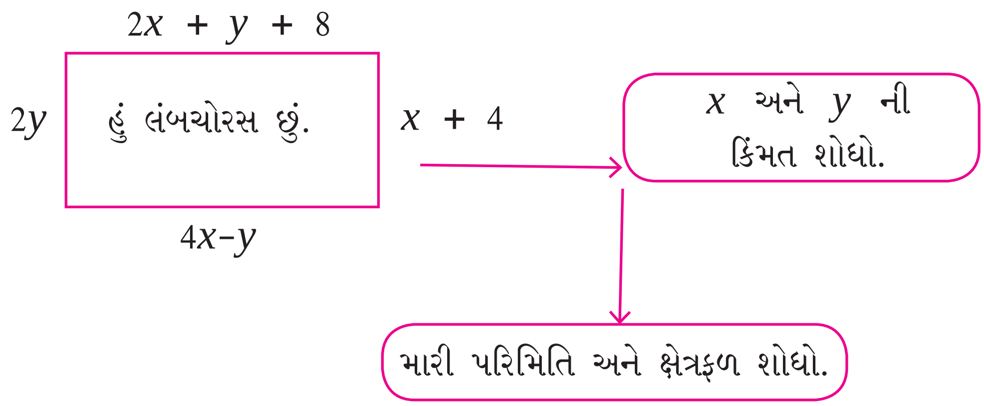
દશક સ્થાને અંક = વચ્ચેનો અંક $= x + y + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$

$\therefore$ આપેલી ત્રણ અંકી સંખ્યા = 153.

મહાવરાસંગ્રહ 1.5

1. બે સંખ્યાઓ વચ્ચેનો તફાવત 3 છે. મોટી સંખ્યાના ત્રણ ગણાં અને નાની સંખ્યાના બમણાંનો સરવાળો 19 છે. તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

2. કૃતિ પૂર્ણ કરો.



3. પિતાની ઉંમરમાં દીકરાની ઉંમરના બમણા ઉમેરતાં સરવાળો 70 આવે છે. દીકરાની ઉંમરમાં પિતાની ઉંમરના બમણા ઉમેરતાં સરવાળો 95 આવે છે. તો બન્નેની ઉંમર શોધો.

4. એક અપૂર્ણાંકનો છેદ, તેના અંશના બમણા કરતાં 4 થી મોટો છે. જો અંશ અને છેદ બન્નેમાંથી 6 બાદ કરીએ તો છેદ, અંશના 12 ગણાં જેટલો થાય છે. તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.

5. 10 ટનની ક્ષમતાવાળો એક માલવાહક ટ્રક A અને B એમ બે પ્રકારનાં જુદા જુદા વજનના બૉક્સથી ભર્યો છે. જો A પ્રકારના 150 બૉક્સ અને B પ્રકારના 100 બૉક્સ ટ્રકમાં મૂકીએ તો તે ટ્રકની 10 ટનની ક્ષમતા પૂર્ણ થાય છે. જો A પ્રકારના 260 બૉક્સ ભરીએ તો ટ્રકની 10 ટનની ક્ષમતા પૂર્ણ કરવા માટે B પ્રકારના 40 બૉક્સ ટ્રકમાં ભરવા પડે છે. તો દરેક પ્રકારના બૉક્સનું વજન કેટલું હશે ?

6. ★ વિશાલે 1900 કિમી પ્રવાસ પૈકી કેટલુંક અંતર બસમાં અને બાકીનું અંતર વિમાન દ્વારા પૂર્ણ કર્યું. બસનો સરાસરી વેગ, દર કલાકે 60 કિમી છે. જ્યારે વિમાનનો વેગ દર કલાકે 700 કિમી છે. જો આ પ્રવાસ તેણે 5 કલાકમાં પૂરો કર્યો હોય તો વિશાલે બસમાં કેટલા કિલોમીટરનો પ્રવાસ કર્યો હશે ?

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 1

1. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ માટે આપેલા પર્યાયોમાંથી યોગ્ય પર્યાય શોધો.

(1) $4x + 5y = 19$ નો આલેખ દોરવા માટે $x = 1$ હોય ત્યારે y ની કિંમત કેટલી ?

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) -3

(2) x અને y આ ચલવાળા યુગપત સમીકરણ માટે જો $D_x = 49$, $D_y = -63$ અને $D = 7$ હોય તો $x =$ કેટલા ?

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{-1}{7}$

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}$ આ નિશ્ચયકની કિંમત કેટલી ?

(A) -1 (B) -41 (C) 41 (D) 1

(4) $x + y = 3$; $3x - 2y - 4 = 0$ આ યુગપત્ સમીકરણો ક્રેમર રૂલથી ઉકેલવા માટે D ની કિંમત કેટલી ?

(A) 5 (B) 1 (C) -5 (D) -1

(5) $ax + by = c$; અને $mx + ny = d$ આ યુગપત્ સમીકરણો માટે જો $an \neq bm$ તો આપેલા સમીકરણો માટે–

(A) એક જ સામાન્ય ઉકેલ મળશે. (B) ઉકેલ મળશે નહીં.

(C) અસંખ્ય ઉકેલ મળશે. (D) ફક્ત બે જ ઉકેલ મળશે.

2. $2x - 6y = 3$ આ સમીકરણનો આલેખ દોરવા માટે નીચેનો કોઠો પૂર્ણ કરો.

x	-5	☐
y	☐	0
(x, y)	☐	☐

3. નીચેના યુગપત્ સમીકરણો આલેખની પધ્ધતિથી ઉકેલો.

(1) $2x + 3y = 12$; $x - y = 1$

(2) $x - 3y = 1$; $3x - 2y + 4 = 0$

(3) $5x - 6y + 30 = 0$; $5x + 4y - 20 = 0$

(4) $3x - y - 2 = 0$; $2x + y = 8$

(5) $3x + y = 10$; $x - y = 2$

4. નીચેના નિશ્ચયકોની કિંમત શોધો.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

5. નીચેના યુગપત્ સમીકરણો ક્રેમરની પધ્ધતિથી ઉકેલો.

(1) $6x - 3y = -10$; $3x + 5y - 8 = 0$

(2) $4m - 2n = -4$; $4m + 3n = 16$

(3) $3x - 2y = \frac{5}{2}$; $\frac{1}{3}x + 3y = -\frac{4}{3}$

(4) $7x + 3y = 15$; $12y - 5x = 39$

(5) $\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x-y}{4}$

6. નીચેના યુગપત્ સમીકરણો ઉકેલો.

(1) $\frac{2}{x} + \frac{2}{3y} = \frac{1}{6}$; $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 0$ (2) $\frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 27$; $\frac{13}{2x+1} + \frac{7}{y+2} = 33$

(3) $\frac{148}{x} + \frac{231}{y} = \frac{527}{xy}$; $\frac{231}{x} + \frac{148}{y} = \frac{610}{xy}$ (4) $\frac{7x-2y}{xy} = 5$; $\frac{8x+7y}{xy} = 15$

(5) $\frac{1}{2(3x+4y)} + \frac{1}{5(2x-3y)} = \frac{1}{4}$; $\frac{5}{(3x+4y)} - \frac{2}{(2x-3y)} = -\frac{3}{2}$

7. નીચેના શાબ્દિક ઉદાહરણો ઉકેલો.

(1) એક દ્વિઅંકી સંખ્યા અને તેના અંકોની અદલબદલ કરીને મળતી સંખ્યા, આ બન્નેનો સરવાળો 143 છે. જો આપેલી સંખ્યામાં એકમ સ્થાનનો અંક, એ દશક સ્થાનના અંક કરતાં 3 થી મોટો હોય તો તે મૂળ સંખ્યા શોધો. જવાબ શોધવા માટે નીચે આપેલી કૃતિ પૂર્ણ કરો.

ધારોકે, એકમ સ્થાનનો અંક = x

દશક સ્થાનનો અંક = y

∴ મૂળ સંખ્યા = $\square\, y + x$

અંકોની અદલબદલ કરવાથી મળતી સંખ્યા = $\square\, x + y$

પહેલી શરત પ્રમાણે,

બે અંકી (મૂળ) સંખ્યા + અંકોની અદલબદલથી મળતી સંખ્યા = 143

$\boxed{10y + x} + \square = 143$

$\square\, x + \square\, y = 143$

$x + y = \square$ . . . . . (I)

બીજી શરત પ્રમાણે,

એકમ સ્થાનનો અંક = દશક સ્થાનનો અંક + 3

$x = \square + 3$

$x - y = 3$ . . . . . (II)

સમીકરણ (I) માં સમીકરણ (II) ઉમેરતાં,

$2x = \square \qquad \therefore\ x = 8$

$x = 8$ સમીકરણ (I) માં મૂકતાં,

$x + y = 13$

$8 + \square = 13$

$\therefore\ y = \square$

મૂળ સંખ્યા $= 10\,y + x$

$= \square + 8 = 58$

(2) કાંતાબેન દુકાનમાંથી દોઢ કિલોગ્રામ ચાની ભૂક્કી અને પાંચ કિગ્રા સાકર (ખાંડ) લાવ્યા. દુકાનેથી ઘરે આવવા માટે 50 રૂપિયા રીક્ષાભાડું આપ્યું. આમ તેમને કુલ 700 રૂપિયા ખર્ચ થયો. પછી તેમને સમજાયું કે, આ જ વસ્તુઓ ઑનલાઈન ઑર્ડર કરી મંગાવતાં તે જ દરે ઘર પહોંચ મળે છે, તેથી પછીના મહિને તેમણે 2 કિગ્રા ચાની ભૂક્કી અને 7 કિગ્રા સાકર ઑનલાઈન ઑર્ડર કરી મંગાવી, તેનો 880 રૂપિયા ખર્ચ થયો. તો ચાની ભૂક્કી અને સાકરનો પ્રતિકિલોગ્રામ દર શોધો.

(3) અનુષ્કા પાસે 100 રૂપિયાની $\boxed{x}$ નોટો અને 50 રૂપિયાની $\boxed{y}$ નોટો છે.

અનુષ્કાને આનંદે ઉપર પ્રમાણે નોટોના રૂપમાં આપેલી રકમ 2500 રૂપિયા છે. સમીકરણ - - - - - - - - I	આનંદે, તેણીને નોટોની સંખ્યાની અદલબદલ કરીને પૈસા આપ્યા હોત તો અનુષ્કા પાસેની રકમ 500 રૂપિયા ઓછી થાત. સમીકરણ - - - - - - - - II

સમીકરણો ઉકેલો અને જવાબ શોધો.

100 રૂપિયાની નોટોની સંખ્યા $\square$, 50 રૂપિયાની નોટોની સંખ્યા $\square$

(4) મનિષા અને સવિતાની આજની ઉંમરનો સરવાળો 31 વર્ષ છે. ત્રણ વર્ષ પહેલાં મનિષાની ઉંમર, સવિતાની તે વખતની ઉંમરનાં ચાર ગણા જેટલી હતી. તો બન્નેની આજની ઉંમર શોધો.

(5)★ એક કારખાનામાં કુશળ અને અકુશળ કામદારોને મળતી મજૂરીનો ગુણોત્તર 5:3 છે. તેમની એક કુશળ અને એક અકુશળ કામદારોની એક દિવસની કુલ મજૂરી 720 રૂપિયા છે. તો દરેક કુશળ અને અકુશળ કામદારની મજૂરી કેટલી હશે?

(6)★ એક સીધા રસ્તા પર A અને B એમ બે સ્થળો છે. તેના વચ્ચેનું અંતર 30 કિમી છે. હમીદ મોટર સાયકલ પર A થી B ની દિશામાં જવા માટે નીકળે છે. તે જ સમયે જોસેફ મોટર સાયકલ પર B થી A ની દિશામાં જવા માટે નીકળે છે. તે બન્ને 20 મિનિટમાં એક બીજાને મળે છે. જોસેફ તે જ સમયે નીકળી વિરૂધ્ધ દિશામાં ગયો હોત તો તે હમીદને ત્રણ કલાકે મળ્યો હોત તો બન્નેનાં પ્રવાસનો વેગ કેટલો હતો ?

NJJUDX

2 વર્ગસમીકરણો

ચાલો શીખીએ.

- વર્ગસમીકરણ : પરિચય
- વર્ગસમીકરણ ઉકેલવાની પધ્ધતિઓ
- વર્ગસમીકરણના મૂળ
- મૂળ અને સહગુણક વચ્ચેનો સંબંધ
- વર્ગસમીકરણોનું ઉપયોજન

યાદ કરીએ.

વિદ્યાર્થી મિત્રો, ધોરણ નવમાં આપણે બહુપદીનો અભ્યાસ કર્યો છે. જેમાં બહુપદીના ઘાત પરથી પડતાં પ્રકારોનો પણ અભ્યાસ કર્યો છે. એક ચલવાળી જે બહુપદીનો ઘાત 1 હોય તેને રેખિક બહુપદી અને ઘાત 2 હોય તેને વર્ગ બહુપદી કહે છે.

કૃતિ : નીચેની બહુપદીઓનું રેખિક અને વર્ગીય બહુપદીમાં વર્ગીકરણ કરો.

$5x + 9$, $x^2 + 3x - 5$, $3x - 7$, $3x^2 - 5x$, $5x^2$

રેખિક બહુપદી	વર્ગ બહુપદી

હવે આપણે વર્ગ બહુપદીની કિંમત 0 લઈને જે સમીકરણ મળે છે તેનો અભ્યાસ કરીશું. આવા સમીકરણને વર્ગસમીકરણ કહે છે. આપણે રોજીંદા જીવનમાં અનેકવાર આ વર્ગસમીકરણોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

ઉદા. : સંકેતે 200 ચોરસ મીટર ક્ષેત્રફળનો એક લંબચોરસાકાર ભૂખંડ ખરીદયો. ભૂખંડની લંબાઈ, તેની પહોળાઈ કરતાં 10 મીટર વધુ હતી તો તે ભૂખંડની લંબાઈ અને પહોળાઈ કેટલી હશે ?

ધારોકે, ભૂખંડની પહોળાઈ x મીટર છે.

$\therefore$ લંબાઈ = $(x + 10)$ મીટર

લંબચોરસાકાર ભૂખંડનું ક્ષેત્રફળ = લંબાઈ × પહોળાઈ

$\therefore$ $200 = (x + 10) \times x$

$\therefore$ $200 = x^2 + 10x$

એટલે કે, $x^2 + 10x = 200$

$\therefore$ $x^2 + 10x - 200 = 0$

હવે $x^2 + 10x - 200 = 0$ આ વર્ગસમીકરણ ઉકેલીને આપણે ભૂખંડની પહોળાઈ અને લંબાઈ શોધી શકીશું. વર્ગસમીકરણ કેવી રીતે ઉકેલાય? તેનો અભ્યાસ કરીએ.

યાદ કરીએ.

કૃતિ : $x^2 + 3x - 5$, $3x^2 - 5x$, $5x^2$; આ બહુપદીને ઘાતાંક રૂપમાં લખીને તેના સહગુણકો નીચેના ચોકઠામાં લખો.

$x^2 + 3x - 5$, $3x^2 - 5x + 0$, $5x^2 + 0x + 0$

- ✦ x^2 ના સહગુણકો અનુક્રમે [1], [3] અને [5] છે. એટલે કે 0 નથી.
- ✦ x ના સહગુણકો અનુક્રમે 3, [ ] અને [ ] છે.
- ✦ અચળ પદ અનુક્રમે [ ], [ ] અને [ ] છે.

અહીં બીજી અને ત્રીજી બહુપદીમાં અચળ પદ 0 છે.

વર્ગસમીકરણનું સામાન્યરૂપ (Standard form of quadratic equation)

જાણી લઈએ.

જે એક ચલવાળાં સમીકરણમાં બધા ઘાતાંક પૂર્ણ સંખ્યા હોય અને ચલનો મોટામાં મોટો ઘાતાંક 2 હોય, તે સમીકરણ વર્ગસમીકરણ હોય છે.

તે સામાન્ય રૂપમાં $ax^2 + bx + c = 0$ એમ લખાય છે. અહીં a, b અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને a શૂન્યેતર સંખ્યા છે.

$ax^2 + bx + c = 0$ આ સ્વરૂપને વર્ગસમીકરણનું સામાન્યરૂપ કહે છે.

કૃતિ : નીચેનો કોઠો પૂર્ણ કરો.

વર્ગસમીકરણ	સામાન્યરૂપ	a	b	c
$x^2 - 4 = 0$	$x^2 + 0x - 4 = 0$	1	0	−4
$y^2 = 2y - 7$	. . . .	. . .	. . .	. . .
$x^2 + 2x = 0$	. . . .	. . .	. . .	. . .

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. **(1)** નીચેના પૈકી વર્ગસમીકરણો ક્યા તે નક્કી કરો.

(1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ (2) $9y^2 + 5 = 0$

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ (4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

ઉકેલ : (1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ આમાં x એક જ ચલ છે અને ચલનો મોટામાં મોટો ઘાતાંક 2 છે.

$\therefore$ આ સમીકરણ વર્ગસમીકરણ છે.

(2) $9y^2 + 5 = 0$ આમાં $\square$ ચલ છે અને ચલનો સૌથી મોટો ઘાત $\square$ છે.

$\therefore$ આ સમીકરણ વર્ગસમીકરણ $\square$.

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ આમાં એક જ ચલ હોવાં છતાં ચલનો સૌથી મોટો ઘાત 2 નથી.

$\therefore$ આ સમીકરણ વર્ગસમીકરણ $\square$.

(4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

$\therefore$ $l(l - 5) + 2(l - 5) = 0$

$\therefore$ $l^2 - 5l + 2l - 10 = 0$

$\therefore$ $l^2 - 3l - 10 = 0$ આમાં $\square$ એ એક જ ચલ છે અને ચલનો સૌથી મોટો ઘાતાંક $\square$ છે.

$\therefore$ આપેલું સમીકરણ વર્ગસમીકરણ $\square$.

જાણી લઈએ.

વર્ગસમીકરણનાં મૂળ (ઉકેલ, બીજ) (Roots of a quadratic equation)

આપણે પાછલાં ધોરણમાં જોયું છે કે, x ની કિંમત a મૂકીને બહુપદીની કિંમત શૂન્ય આવતી હોય તો $(x-a)$ એ તે બહુપદીનો અવયવ હોય છે. એટલે કે, $p(x)$ આ બહુપદી માટે $p(a) = 0$ હોય તો $(x-a)$ એ $p(x)$ નો અવયવ હોય છે. આ સ્થિતિમાં a આ $p(x) = 0$ નો એક ઉકેલ છે અથવા a એ $p(x) = 0$ નું મૂળ (Root) છે એમ કહે છે.

દા.ત.

$x^2 + 5x - 6$ આ બહુપદીમાં $x = -6$ મૂકતાં,

$x^2 + 5x - 6 = (-6)^2 + 5 \times (-6) - 6$

$= 36 - 30 - 6 = 0$

$\therefore$ $x = -6$ આ $x^2 + 5x - 6 = 0$ સમીકરણનો એક ઉકેલ છે. એટલે કે, -6 એ $x^2 + 5x - 6 = 0$ આ સમીકરણનું એક મૂળ છે.

$x^2 + 5x - 6$ આ બહુપદીમાં $x = 2$ મૂકતાં,

$x^2 + 5x - 6 = 2^2 + 5 \times 2 - 6$

$= 4 + 10 - 6$

$= 8 \neq 0$

$\therefore$ $x = 2$ એ $x^2 + 5x - 6 = 0$ આ સમીકરણનો ઉકેલ નથી.

ગણેલું ઉદાહરણ

ઉદા. $2x^2 - 7x + 6 = 0$ આ સમીકરણના (i) $x = \frac{3}{2}$ અને (ii) $x = -2$ મૂળ છે કે ? તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : (i) $2x^2 - 7x + 6$ આ બહુપદીમાં $x = \frac{3}{2}$ કિંમત મૂકીને બહુપદીની કિંમત શોધીએ.

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{3}{2}\right) + 6$$

$$= 2 \times \frac{9}{4} - \frac{21}{2} + 6$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{21}{2} + \frac{12}{2} = 0$$

$\therefore$ આ સમીકરણનો $x = \frac{3}{2}$ એ એક ઉકેલ છે.

(ii) $2x^2 - 7x + 6$ આ બહુપદીમાં $x = -2$ મૂકીને બહુપદીના કિંમત શોધીએ.

$$2x^2 - 7x + 6 = 2(-2)^2 - 7(-2) + 6$$

$$= 2 \times 4 + 14 + 6$$

$$= 28 \neq 0$$

$\therefore$ $x = -2$ એ $2x^2 - 7x + 6 = 0$ આ સમીકરણનો ઉકેલ નથી.

કૃતિ : જો $x = 5$ એ $kx^2 - 14x - 5 = 0$ નું એક મૂળ હોય, તો k ની કિંમત શોધવા માટે નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.

ઉકેલ : $kx^2 - 14x - 5 = 0$ આ વર્ગસમીકરણનું એક મૂળ $\square$ છે.

$\therefore$ $x = \square$ આ કિંમત વર્ગસમીકરણમાં મૂકીએ.

$\therefore$ $k\square^2 - 14\square - 5 = 0$

$\therefore$ $25k - 70 - 5 = 0$

$\therefore$ $25k - \square = 0$

$\therefore$ $25k = \square$

$\therefore$ $k = \frac{\square}{\square} = 3$

આ ધ્યાનમાં રાખો.

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ આ વર્ગસમીકરણનું સામાન્યરૂપ છે. જેમાં a, b અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને a શૂન્યેતર સંખ્યા છે.

(2) ચલની જે કિંમતોથી વર્ગસમીકરણની બન્ને બાજુઓ સમાન થાય છે. (એટલે કે, વર્ગસમીકરણનું સમાધાન થાય છે) તે કિંમતોને વર્ગસમીકરણના ઉકેલ અથવા મૂળ કહે છે.

મહાવરાસંગ્રહ 2.1

1. કોઈપણ બે વર્ગસમીકરણો લખો.

2. નીચેના સમીકરણો પૈકી વર્ગસમીકરણો ઓળખીને લખો.

(1) $x^2 + 5x - 2 = 0$ (2) $y^2 = 5y - 10$ (3) $y^2 + \frac{1}{y} = 2$

(4) $x + \frac{1}{x} = -2$ (5) $(m + 2)(m - 5) = 0$ (6) $m^3 + 3m^2 - 2 = 3m^3$

3. નીચેના સમીકરણો $ax^2 + bx + c = 0$ ના રૂપમાં લખો, દરેકમાંથી a, b, c ની કિંમત લખો.

(1) $2y = 10 - y^2$ (2) $(x - 1)^2 = 2x + 3$ (3) $x^2 + 5x = -(3 - x)$

(4) $3m^2 = 2m^2 - 9$ (5) $p(3 + 6p) = -5$ (6) $x^2 - 9 = 13$

4. વર્ગસમીકરણની સામે આપેલ ચલની કિંમતો સમીકરણના મૂળ છે કે નહીં? તે નક્કી કરો.

(1) $x^2 + 4x - 5 = 0$, $x = 1, -1$ (2) $2m^2 - 5m = 0$, $m = 2, \frac{5}{2}$

5. જો $x = 3$ એ $kx^2 - 10x + 3 = 0$ આ સમીકરણનું એક મૂળ હોય તો, k ની કિંમત શોધો.

6. $5m^2 + 2m + k = 0$ આ વર્ગસમીકરણનું એક મૂળ $\frac{-7}{5}$ હોય તો k ની કિંમત શોધવા માટે નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.

ઉકેલ : $5m^2 + 2m + k = 0$ આ વર્ગસમીકરણનું એક મૂળ $\square$ છે.

$\therefore$ $m = \square$ ઉપરના સમીકરણમાં મૂકતાં.

$\therefore$ $5 \times \square^2 + 2 \times \square + k = 0$

$\therefore$ $\square + \square + k = 0$

$\therefore$ $\square + k = 0$

$\therefore$ $k = \square$

યાદ કરીએ.

આપણે ગયા વર્ષે બહુપદીના પ્રકરણમાં $x^2 - 4x - 5$, $2m^2 - 5m$, $a^2 - 25$ જેવી બહુપદીઓના અવયવ પાડવાની પધ્ધતિઓનો અભ્યાસ કર્યો છે. નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરી તેનું પુનરાવર્તન કરીએ.

કૃતિ : નીચેની વર્ગપદીના અવયવ પાડો.

(1) $x^2 - 4x - 5$

$= \underline{x^2 - 5x} + \underline{1x - 5}$

$= x(\ldots\ldots) + 1(\ldots\ldots)$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

(2) $2m^2 - 5m$

$= \ldots\ldots\ldots$

(3) $a^2 - 25$

$= a^2 - 5^2$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

જાણી લઈએ.

અવયવ પદ્ધતિથી વર્ગસમીકરણના ‘મૂળ’ શોધવા.

(Solution of a quadratic equation by factorisation)

આપણે ચલની જુદી જુદી કિંમતો મૂકીને વર્ગસમીકરણના મૂળ નક્કી કર્યા. પરંતુ આ રીતે સમય વધારે લાગે છે. તેથી આપણે આ વિભાગમાં ‘વર્ગસમીકરણના મૂળ શોધવાની ‘અવયવ પદ્ધતિ’ નો અભ્યાસ કરવાના છીએ.

$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$

અહીં $(x - 5)$ અને $(x + 1)$ આ વર્ગબહુપદી $x^2 - 4x - 5$ ના બે રેખિક અવયવો છે. તેથી આ બહુપદી પરથી મળતું $x^2 - 4x - 5 = 0$ આ વર્ગસમીકરણ છે. તે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

$(x - 5)(x + 1) = 0$

જો બે સંખ્યાઓનો ગુણાકાર શૂન્ય હોય તો તે બે સંખ્યાઓ પૈકી ઓછામાં ઓછી એક સંખ્યા ‘શૂન્ય’ હોય છે.

$\therefore$ $x - 5 = 0$ અથવા $x + 1 = 0$

$\therefore$ $x = 5$ અથવા $x = -1$

$\therefore$ આપેલા વર્ગસમીકરણનાં મૂળ 5 અને -1 છે.

આ ઉદાહરણ ઉકેલતી વખતે આપણે સૌ પ્રથમ વર્ગ બહુપદીના બે રેખિક અવયવો મેળવીએ છીએ. તેથી આ પદ્ધતિને વર્ગસમીકરણ ઉકેલવાની અવયવ પદ્ધતિ કહે છે.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. નીચેના વર્ગસમીકરણો અવયવ પદ્ધતિથી ઉકેલો.

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$ (2) $3x^2 - x - 10 = 0$

(3) $3y^2 = 15y$ (4) $x^2 = 3$ (5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

$\therefore \underline{m^2 - 13m} - \underline{1m + 13} = 0$

$\therefore m(m - 13) - 1(m - 13) = 0$

$\therefore (m - 13)(m - 1) = 0$

$\therefore m - 13 = 0$ અથવા $m - 1 = 0$

$\therefore m = 13$ અથવા $m = 1$

$\therefore$ આપેલાં વર્ગસમીકરણના મૂળ 13 અને 1 છે.

(2) $3x^2 - x - 10 = 0$

$\therefore \underline{3x^2 - 6x} + \underline{5x - 10} = 0$

$\therefore 3x(x - 2) + 5(x - 2) = 0$

$\therefore (3x + 5)(x - 2) = 0$

$\therefore 3x + 5 = 0$ અથવા $x - 2 = 0$

$\therefore x = -\frac{5}{3}$ અથવા $x = 2$

$\therefore$ આપેલાં વર્ગસમીકરણના મૂળ $-\frac{5}{3}$ અને 2 છે.

(3) $3y^2 = 15y$

$\therefore\ 3y^2 - 15y = 0$

$\therefore\ 3y(y - 5) = 0$

$\therefore\ 3y = 0$ અથવા $y - 5 = 0$

$\therefore\ y = 0$ અથવા $y = 5$

$\therefore$ વર્ગસમીકરણના મૂળ 0 અને 5 છે.

(4) $x^2 = 3$

$\therefore\ x^2 - 3 = 0$

$\therefore\ x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

$\therefore\ (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore x + \sqrt{3} = 0$ અથવા $x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ x = -\sqrt{3}$ અથવા $x = \sqrt{3}$

$\therefore$ વર્ગસમીકરણના મૂળ $-\sqrt{3}$ અને $\sqrt{3}$ છે.

(5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

$\therefore\ 6\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ 6\sqrt{3}x^2 + 9x - 2x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore 3\sqrt{3}x(2x + \sqrt{3}) - 1(2x + \sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ (2x + \sqrt{3})(3\sqrt{3}x - 1) = 0$

$\therefore 2x + \sqrt{3} = 0$ અથવા $3\sqrt{3}x - 1 = 0$

$\therefore\ 2x = -\sqrt{3}$ અથવા $3\sqrt{3}x = 1$

$\therefore\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ અથવા $x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$\therefore$ વર્ગસમીકરણના મૂળ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ અને $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ છે.

$6\sqrt{3} \times -\sqrt{3} = -18$

-18 → 9, -2

$9 = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

મહાવરાસંગ્રહ 2.2

1. નીચેના વર્ગસમીકરણો અવયવ પદ્ધતિથી ઉકેલો.

(1) $x^2 - 15x + 54 = 0$ (2) $x^2 + x - 20 = 0$ (3) $2y^2 + 27y + 13 = 0$

(4) $5m^2 = 22m + 15$ (5) $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$ (6) $6x - \frac{2}{x} = 1$

(7) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ આ વર્ગસમીકરણ અવયવની રીતે ઉકેલવા માટે નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.

ઉકેલ (7) : $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore\ \sqrt{2}x^2 + \square + \square + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore\ x(.\ .\ .\ .\ .) + \sqrt{2}(.\ .\ .\ .\ .) = 0$

$\therefore$ $(\,.\,.\,.\,.\,.\,)(x + \sqrt{2}\,) = 0$

$\therefore$ $(\,.\,.\,.\,.\,.\,) = 0$ અથવા $(x + \sqrt{2}\,) = 0$

$\therefore$ $x = \square$ અથવા $x = -\sqrt{2}$

$\therefore$ વર્ગસમીકરણના મૂળ $\square$ અને $-\sqrt{2}$ છે.

(8)★ $3x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 2 = 0$ (9) $2m\,(m - 24) = 50$

(10) $25m^2 = 9$ (11) $7m^2 = 21m$ (12) $m^2 - 11 = 0$

જાણી લઈએ.

પૂર્ણ વર્ગની પધ્ધતિથી વર્ગસમીકરણ ઉકેલવા
(Solution of a quadratic equation by completing the square)

શિક્ષક : $x^2 + 10x + 2 = 0$ વર્ગસમીકરણ છે કે નહીં ?

યોગેશ : હા સર, કારણ તે $ax^2 + bx + c = 0$ રૂપમાં છે. અહીં x ચલનો મોટામાં મોટો ઘાતાંક 2 છે. a ની કિંમત શૂન્ય નથી.

શિક્ષક : આ સમીકરણ તમે ઉકેલી શકશો કે ?

વર્ષા : ના સર, કારણ 2 ના એવા અવયવો પાડી શકાતા નથી, કે જેનો સરવાળો 10 આવે.

શિક્ષક : એટલે જ આવા ઉદાહરણો ઉકેલવા માટે જુદી રીત વાપરવી પડે છે. તે રીતે સમજી લઈએ.

સૌ પ્રથમ $x^2 + 10x$ આ પદાવલિમાં યોગ્ય પદ ઉમેરી તેને પૂર્ણ વર્ગ પદાવલિ બનાવીએ.

જો $x^2 + 10x + k = (x + a)^2$

તો $x^2 + 10x + k = x^2 + 2ax + a^2$

$\therefore$ સહગુણકોની તુલના કરતા, $10 = 2a$ અને $k = a^2$

$\therefore$ $a = 5$ અને તેથી $k = a^2 = (5)^2 = 25$

હવે, $x^2 + 10x + 2 = (x + 5)^2 - 25 + 2 = (x + 5)^2 - 23$

$x^2 + 10x + 2 = 0$ આ વર્ગસમીકરણ તમે ઉકેલી શકશો કે?

રેહાના : હા સર, સમીકરણની ડાબી બાજુ બે પદોના વર્ગોની બાદબાકીના રૂપમાં હોવાથી તેના અવયવો પાડી શકાશે.

$(x + 5)^2 - (\sqrt{23}\,)^2 = 0$

$\therefore$ $(x + 5 + \sqrt{23}\,)(x + 5 - \sqrt{23}\,) = 0$

$\therefore$ $x + 5 + \sqrt{23} = 0$ અથવા $x + 5 - \sqrt{23} = 0$

$\therefore$ $x = -5 - \sqrt{23}$ અથવા $x = -5 + \sqrt{23}$

હમીદ : સર, ઉકેલ કાઢવા માટે જરા જુદી રીત પણ મારા ધ્યાનમાં આવી છે.

$(x + 5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$

$\therefore (x + 5)^2 = (\sqrt{23})^2$

$\therefore x + 5 = \sqrt{23}$ અથવા $x + 5 = -\sqrt{23}$

$\therefore x = -5 + \sqrt{23}$ અથવા $x = -5 - \sqrt{23}$

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) ઉકેલો : $5x^2 - 4x - 3 = 0$

ઉકેલ : સમીકરણમાંની વર્ગ બહુપદીનું રૂપાંતર, બે વર્ગોની બાદબાકીના રૂપમાં લાવવા માટે x^2 નો સહગુણક 1 કરવો સગવડ ભર્યો રહેશે. તેથી સમીકરણને 5 વડે ભાગીએ,

$x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$

હવે જો, $x^2 - \frac{4}{5}x + k = (x - a)^2$ તો $x^2 - \frac{4}{5}x + k = x^2 - 2ax + a^2$.

$x^2 - \frac{4}{5}x$ ની તુલના $x^2 - 2ax$ સાથે કરતાં,

$-2ax = -\frac{4}{5}x \quad \therefore a = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$

$\therefore \quad k = a^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

હવે, $x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$

$\therefore \quad x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{4}{25} - \frac{3}{5} = 0$

$\therefore \quad \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{5}\right) = 0$

$\therefore \quad \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{19}{25}\right) = 0$

$\therefore \quad \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{19}{25}\right)$

$\therefore \quad x - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{19}}{5}$ અથવા $x - \frac{2}{5} = -\frac{\sqrt{19}}{5}$

$\therefore \quad x = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5}$ અથવા $x = \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$

$\therefore \quad x = \frac{2+\sqrt{19}}{5}$ અથવા $x = \frac{2-\sqrt{19}}{5}$

$\therefore$ વર્ગસમીકરણના મૂળ $\frac{2+\sqrt{19}}{5}$ અને $\frac{2-\sqrt{19}}{5}$ છે.

> સમીકરણ $x^2 + bx + c = 0$ રૂપમાં હોય, ત્યારે
> $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$
> આ રૂપમાં,
> એટલે જ કે, $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ આ રૂપમાં લખી શકાય છે.

ઉદા. (2) ઉકેલો : $x^2 + 8x - 48 = 0$

રીત I : પૂર્ણ વર્ગ પદ્ધતિ

$x^2 + 8x - 48 = 0$

$\therefore\ x^2 + 8x + 16 - 16 - 48 = 0$

$\therefore\ (x + 4)^2 - 64 = 0$

$\therefore\ (x + 4)^2 = 64$

$\therefore\ x + 4 = 8$ અથવા $x + 4 = -8$

$\therefore\ x = 4$ અથવા $x = -12$

$\therefore$ વર્ગસમીકરણના મૂળ 4 અને −12.

રીત II : અવયવ પદ્ધતિ

$x^2 + 8x - 48 = 0$

$\therefore\ x^2 + 12x - 4x - 48 = 0$

$\therefore\ x(x + 12) - 4(x + 12) = 0$

$\therefore\ (x + 12)(x - 4) = 0$

$\therefore\ x + 12 = 0$ અથવા $x - 4 = 0$

$\therefore\ x = -12$ અથવા $x = 4$

મહાવરાસંગ્રહ 2.3

નીચેના વર્ગસમીકરણો પૂર્ણ વર્ગ પદ્ધતિ ઉકેલો.

(1) $x^2 + x - 20 = 0$ (2) $x^2 + 2x - 5 = 0$ (3) $m^2 - 5m = -3$

(4) $9y^2 - 12y + 2 = 0$ (5) $2y^2 + 9y + 10 = 0$ (6) $5x^2 = 4x + 7$

જાણી લઈએ.

વર્ગસમીકરણ ઉકેલવાનું સૂત્ર (Formula for solving a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c$ આ રાશિને a વડે ભાગતાં ($\because a \neq 0$) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ આ રાશિ મળે છે.

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ આ રાશિ બે વર્ગોની બાદબાકીના રૂપમાં માંડીને $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ આ વર્ગસમીકરણના એટલે જ $ax^2 + bx + c = 0$ આ વર્ગસમીકરણના મૂળ એટલે કે ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

$ax^2 + bx + c = 0 \ldots$ (I)

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \ldots\ldots$ બન્ને બાજુએ a વડે ભાગતાં,

$$\therefore\quad x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore\quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$\therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0 \qquad \therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$\therefore\ x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ અથવા $x+\frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$\therefore\ x = -\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ અથવા $x = -\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$\therefore x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ અથવા $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

આ ઉકેલ ટૂંકમાં $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ આ રીતે લખાય છે અને તે α (આલ્ફા), β (બીટા) અક્ષરોવડે દર્શાવાય છે. $\therefore\ \alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ અને $\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ . . . . (I)

$ax^2 + bx + c = 0$ આ સમીકરણમાં a, b, c ની કિંમત $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ આ રાશિમાં મૂકીને સાદું રૂપ આપતાં, સમીકરણના ઉકેલ મળે છે. એટલે $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ને વર્ગસમીકરણ ઉકેલવાનું સૂત્ર કહે છે.

વર્ગસમીકરણના બે ઉકેલ પૈકી કોઈપણ ઉકેલ પૈકી કોઈપણ અક્ષરથી દર્શાવીએ તો પણ ચાલે.

વિધાન (I) ને બદલે $\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ અને $\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ એમ પણ દર્શાવી શકાય.

$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ તો $\alpha > \beta$, $\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ તો $\alpha < \beta$ એ ધ્યાનમાં રાખો.

ગણેલાં ઉદાહરણો

સૂત્રનો ઉપયોગ કરી નીચેના વર્ગસમીકરણ ઉકેલો.

ઉદા.(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

ઉકેલ : $m^2 - 14m + 13 = 0$ ને

$ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$a = 1,\ b = -14,\ c = 13,$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 13$

$= 196 - 52$

$= 144$

$m = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-14)\pm\sqrt{144}}{2\times 1}$

$= \frac{14\pm 12}{2}$

$\therefore\ m = \frac{14+12}{2}$ અથવા $m = \frac{14-12}{2}$

$\therefore\ m = \frac{26}{2}$ અથવા $m = \frac{2}{2}$

$\therefore\ m = 13$ અથવા $m = 1$

$\therefore$ વર્ગસમીકરણના મૂળ 13 અને 1 છે.

ઉદા. (2) $x^2 + 10x + 2 = 0$

ઉકેલ : $x^2 + 10x + 2 = 0$ ને

$ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$a = 1,\ b = 10,\ c = 2,$

$\therefore \quad b^2 - 4ac = (10)^2 - 4 \times 1 \times 2$

$= 100 - 8$

$= 92$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{4 \times 23}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2}$$

$$= \frac{2(-5 \pm \sqrt{23})}{2}$$

$\therefore \quad x = -5 \pm \sqrt{23}$

$\therefore \quad x = -5 + \sqrt{23}$ અથવા $x = -5 - \sqrt{23}$

$\therefore$ વર્ગસમીકરણના મૂળ $-5 + \sqrt{23}$ અને $-5 - \sqrt{23}$

ઉદા. (3) $x^2 - 2x - 3 = 0$

ઉકેલ : આપેલા સમીકરણને $ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$a = 1,\ b = -2,\ c = -3,$

$\therefore \quad b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$

$\therefore \quad x = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2}$ અથવા $x = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2}$

$= \frac{2+4}{2}$ અથવા $\frac{2-4}{2}$

$= 3$ અથવા -1

વધુ માહિતી માટે :

$x^2 - 2x - 3 = 0$ આ વર્ગસમીકરણ આલેખની રીતે ઉકેલ્યું છે તે સમજી લો.

$x^2 - 2x - 3 = 0$ એટલે જ $x^2 = 2x + 3$

x ની જે કિંમતોથી $x^2 = 2x + 3$ આ સમીકરણનું સમાધાન થશે, તે કિંમતો આ સમીકરણના ઉકેલ હશે.

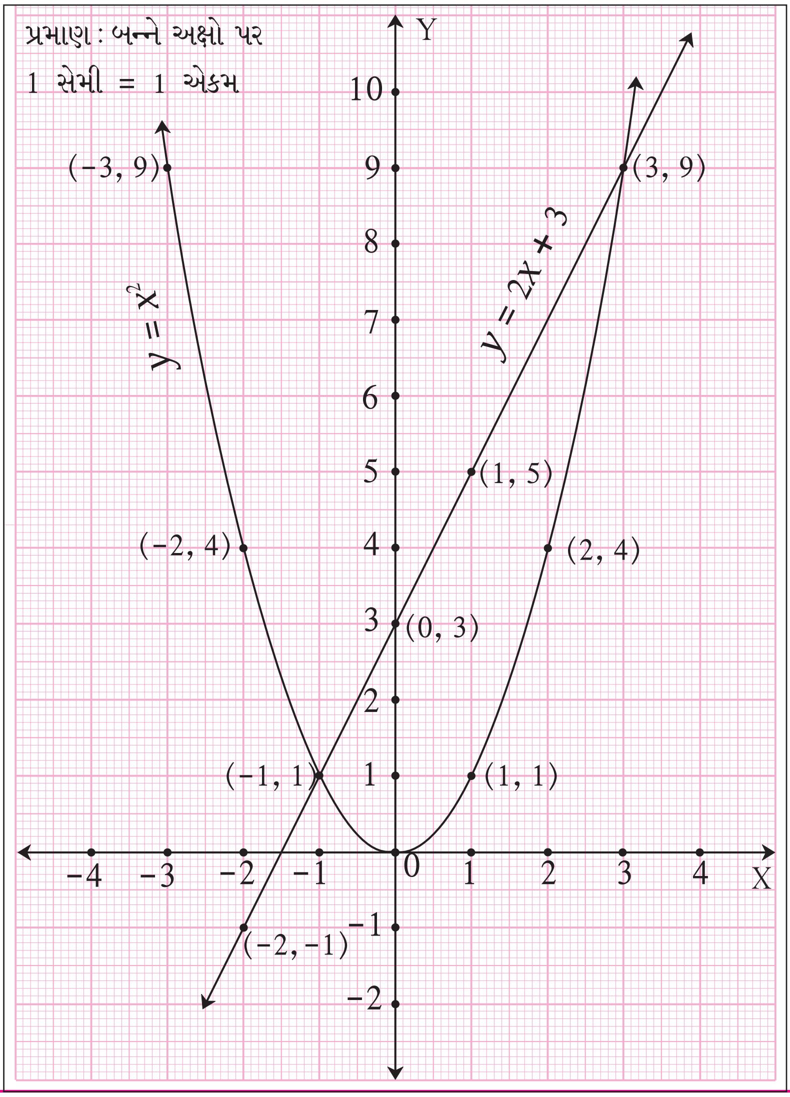
$y = x^2 = 2x + 3$ ધારીએ. $y = x^2$ અને $y = 2x + 3$ આ સમીકરણોના આલેખ દોરીએ.

$y = x^2$

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y = 2x + 3$

x	-1	0	1	-2
y	1	3	5	-1



આ બન્ને આલેખ પરસ્પર $(-1, 1)$ અને $(3, 9)$ બિંદુમાં છેદે છે. $\therefore$ $x^2 = 2x + 3$ આ સમીકરણના, એટલે કે, $x^2 - 2x - 3 = 0$ ના બે ઉકેલ $x = -1$ અથવા $x = 3$ છે.

બાજુની આકૃતિમાં $y = x^2$ અને $y = 2x + 3$ આ બે સમીકરણોના આલેખ દોર્યાં છે. તેમના છેદન બિંદુઓ $x^2 = 2x + 3$ આ સમીકરણના એટલે કે, $x^2 - 2x - 3 = 0$ નો ઉકેલ કેવી રીતે મળે છે ? તે સમજી લો.

ઉદા. (4) $25x^2 + 30x + 9 = 0$

ઉકેલ : $25x^2 + 30x + 9 = 0$ ને

$ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$a = 25,\ b = 30,\ c = 9,$

$\therefore \quad b^2 - 4ac = (30)^2 - 4 \times 25 \times 9$

$= 900 - 900 \quad = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-30 \pm \sqrt{0}}{2 \times 25}$$

$\therefore \quad x = \frac{-30+0}{50}$ અથવા $x = \frac{-30-0}{50}$

$\therefore \quad x = -\frac{30}{50}$ અથવા $x = -\frac{30}{50}$

$\therefore \quad x = -\frac{3}{5}$ અથવા $x = -\frac{3}{5}$

ધ્યાનમાં રાખો કે, $25x^2 + 30x + 9 = 0$ સમીકરણનાં બન્ને મૂળ સમાન છે.

તેમજ $25x^2 + 30x + 9 = 0$.

એટલે કે $(5x + 3)^2 = 0$ છે તે પણ ધ્યાનમાં લો.

ઉદા. (5) $x^2 + x + 5 = 0$

ઉકેલ : $x^2 + x + 5 = 0$ ને

$ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$a = 1,\ b = 1,\ c = 5,$

$\therefore \quad b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 5$

$= 1 - 20$

$= -19$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

પરંતુ $\sqrt{-19}$ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી. તેથી આપેલાં વર્ગસમીકરણના મૂળ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી.

કૃતિ : $2x^2 + 13x + 15 = 0$ વર્ગસમીકરણ અવયવ પધ્ધતિથી, પૂર્ણ વર્ગ પધ્ધતિથી અને વર્ગ સૂત્ર વાપરી ઉકેલો. દરેક વખતે જવાબ સમાન જ આવે છે તે ચકાસી જુઓ.

મહાવરાસંગ્રહ 2.4

1. નીચેના વર્ગસમીકરણોની તેના સામાન્યરૂપ સાથે તુલના કરીને a, b, c ની કિંમત લખો.

   (1) $x^2 - 7x + 5 = 0$ (2) $2m^2 = 5m - 5$ (3) $y^2 = 7y$

2. નીચેના વર્ગસમીકરણો સૂત્રની મદદથી ઉકેલો.

   (1) $x^2 + 6x + 5 = 0$ (2) $x^2 - 3x - 2 = 0$ (3) $3m^2 + 2m - 7 = 0$

   (4) $5m^2 - 4m - 2 = 0$ (5) $y^2 + \frac{1}{3}y = 2$ (6) $5x^2 + 13x + 8 = 0$

3. $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ આ વર્ગસમીકરણ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને ફ્લોચાર્ટમાં આપેલી માહિતીને આધારે ઉકેલો.

ઉકેલ : $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ ને $ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવીને a, b, c ની કિંમત શોધો. → $b^2 - 4ac$ ની કિંમત શોધો. → વર્ગસમીકરણ ઉકેલવાનું સૂત્ર લખો. → સૂત્રમાં કિંમતો મૂકી ઉકેલ શોધો.

જાણી લઈએ.

વર્ગસમીકરણના મૂળનું સ્વરૂપ (Nature of roots of a quadratic equation)

વર્ગસમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ના મૂળ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ છે. તે આપણે જાણીએ છીએ.

(1) જો $b^2 - 4ac = 0$ હોય, તો $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$ $\therefore$ $x = \dfrac{-b + 0}{2a}$ અથવા $x = \dfrac{-b - 0}{2a}$

$\therefore$ વર્ગસમીકરણના મૂળ વાસ્તવિક અને સમાન હોય છે.

(2) જો $b^2 - 4ac > 0$ હોય, તો $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

એટલે કે, $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ અને $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore$ વર્ગસમીકરણના મૂળ વાસ્તવિક અને અસમાન હોય છે.

(3) જો $b^2 - 4ac < 0$ હોય તો $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ આ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી, એટલે કે વર્ગસમીકરણના મૂળ વાસ્તવિક નથી.

વર્ગસમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ ના મૂળનું સ્વરૂપ $b^2 - 4ac$ ની કિંમત પરથી નક્કી થાય છે. તેથી $b^2 - 4ac$ ને વર્ગસમીકરણનો વિવેચક (discriminant) કહે છે. તેને Δ (ડેલ્ટા) ચિહ્ન વડે દર્શાવાય છે. (Δ એ ગ્રીક અક્ષર છે.)

કૃતિ : નીચે આપેલી માહિતી પરથી ખાલી જગ્યા પૂરો.

	વિવેચકની કિંમત		મૂળનું સ્વરૂપ
(1)	50	→	
(2)	-30	→	
(3)	0	→	

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) $x^2 + 10x - 7 = 0$ આ વર્ગસમીકરણમાં વિવેચકની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $x^2 + 10x - 7 = 0$ ને $ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$a = 1,\ b = 10\ ,\ c = -7\ ,$

$\therefore b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times (-7)$

$= 100 + 28$

$= 128$

ઉદા. (2) વિવેચકની કિંમત પરથી વર્ગસમીકરણના મૂળનું સ્વરૂપ નક્કી કરો.

(i) $2x^2 - 5x + 7 = 0$

ઉકેલ : $2x^2 - 5x + 7 = 0$ ને

$ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$a = 2,\ b = -5\ ,\ c = 7$

$\therefore \quad b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7$

$\therefore \quad \Delta = 25 - 56$

$= -31$

$\therefore \quad b^2 - 4ac < 0$

$\therefore$ વર્ગસમીકરણના મૂળ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી.

(ii) $x^2 + 2x - 9 = 0$

ઉકેલ : $x^2 + 2x - 9 = 0$ ને

$ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$a = \square,\ b = 2,\ c = \square$

$\therefore \quad b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times \square \times \square$

$\therefore \quad \Delta = 4 + \square$

$= 40$

$\therefore \quad b^2 - 4ac > 0$

$\therefore$ વર્ગસમીકરણનાં મૂળ અસમાન અને વાસ્તવિક છે.

(iii) $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$

ઉકેલ : $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ ને

$ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

અહીં $a = \sqrt{3},\ b = 2\sqrt{3}\ ,\ c = \sqrt{3}\ ,$

$\therefore \quad b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$= 4 \times 3 - 4 \times 3$

$= 12 - 12$

$= 0$

$\therefore$ વર્ગસમીકરણના મૂળ સમાન અને વાસ્તવિક છે.

જાણી લઈએ.

વર્ગસમીકરણના મૂળ અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ
(Relation between roots and coefficients of a quadratic equation)

જો $ax^2 + bx + c = 0$ વર્ગસમીકરણના α અને β બે મૂળ હોય તો,

$$\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= -\frac{2b}{2a}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

તેથી

$$\alpha \times \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\times\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

$$\therefore \alpha\,\beta = \frac{c}{a}$$

કૃતિ : આપેલાં ચોકઠામાં યોગ્ય સંખ્યા લખો.

$10x^2 + 10x + 1 = 0$ માટે $\alpha + \beta = \square$ અને

$\alpha \times \beta = \square$

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) α અને β એ વર્ગસમીકરણ $2x^2 + 6x - 5 = 0$ ના મૂળ છે, તો $\alpha + \beta$ અને $\alpha \times \beta$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $2x^2 + 6x - 5 = 0$ ને $ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$\therefore$ $a = 2,\ b = 6,\ c = -5$

$\therefore$ $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$

અને $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$

ઉદા. (2) $x^2 - 13x + k = 0$ આ વર્ગસમીકરણનાં મૂળ વચ્ચેનો તફાવત 7 છે, તો k ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $x^2 - 13x + k = 0$ ને $ax^2 + bx + c = 0$ સાથે સરખાવતાં,

$a = 1,\ b = -13,\ c = k$

ધારો કે, α અને β એ આપેલા વર્ગસમીકરણના મૂળ છે અને $\alpha > \beta$

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-13)}{1} = 13 \ldots$ (I)

પરંતુ $\alpha - \beta = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (આપ્યું છે.) (II)

$2\alpha = 20 \ldots\ldots\ldots$ (સમીકરણ (I) એ (II) નો સરવાળો કરતાં)

$\therefore \quad \alpha = 10$

$\therefore \quad 10 + \beta = 13 \ldots\ldots$ ((I) પરથી)

$\therefore \quad \beta = 13 - 10$

$\therefore \quad \beta = 3$

પરંતુ $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$

$\therefore \quad 10 \times 3 = \frac{k}{1}$

$\therefore \quad k = 30$

ઉદા. (3) જો α અને β એ $x^2 + 5x - 1 = 0$ આ વર્ગસમીકરણના મૂળ હોય, તો

(i) $\alpha^3 + \beta^3$ (ii) $\alpha^2 + \beta^2$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $x^2 + 5x - 1 = 0$

અહીં $a = 1,\ b = 5,\ c = -1$

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$

$\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$

(i) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= (-5)^3 - 3 \times (-1) \times (-5)$

$= -125 - 15$

$\alpha^3 + \beta^3 = -140$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (-5)^2 - 2 \times (-1)$

$= 25 + 2$

$\alpha^2 + \beta^2 = 27$

જાણી લઈએ.

મૂળ આપ્યા હોય તો વર્ગસમીકરણ મેળવવું
(How to obtain a quadratic equation having given roots)

ધારોકે, α અને β એ x ચલવાળાં વર્ગસમીકરણનાં મૂળ છે.

$\therefore\ x = \alpha$ અથવા $x = \beta$

$\therefore\ x - \alpha = 0$ અથવા $x - \beta = 0$

$\therefore\ (x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$\therefore\ x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0$

$\therefore\ x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha\beta = 0$

એટલે કે, α અને β મૂળ હોય તેવું વર્ગસમીકરણ

x^2 – (મૂળનો સરવાળો) x + મૂળનો ગુણાકાર = 0 આ સૂત્ર દ્વારા મળશે.

કૃતિ (I) : મૂળોનો સરવાળો 10 અને ગુણાકાર 9 હોય તેવું વર્ગસમીકરણ લખો.

વર્ગસમીકરણ $x^2 - \square\, x + \square = \square$

કૃતિ (II) : $\alpha = 2$ અને $\beta = 5$ મૂળ હોય તેવું વર્ગસમીકરણ કયું ?

$x^2 - (\square + \square)\, x + \square \times \square = 0$

એટલે કે, $x^2 + \square\, x + \square = 0$

ગણેલું ઉદાહરણ

ઉદા. વર્ગસમીકરણનાં મૂળ –3 અને –7 હોય તેવું વર્ગસમીકરણ તૈયાર કરો.

ઉકેલ : ધારોકે, $\alpha = -3$ અને $\beta = -7$

$\therefore\ \alpha + \beta = (-3) + (-7) = -10$ અને $\alpha \times \beta = (-3) \times (-7) = 21$

$\therefore$ મળતું વર્ગસમીકરણ, $x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha\beta = 0$

$\therefore\ x^2 - (-10) x + 21 = 0$

$\therefore\ x^2 + 10x + 21 = 0$

ધ્યાનમાં રાખીએ.

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ વર્ગસમીકરણના મૂળ α અને β હોય તો,

(i) $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ અને $\beta = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(ii) $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ અને $\alpha \times \beta = \dfrac{c}{a}$

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ આ વર્ગસમીકરણના મૂળનું સ્વરૂપ $b^2 - 4ac$ની કિંમત પર આધારિત હોય છે. તેથી $b^2 - 4ac$ને વિવેચક (discriminant) કહે છે. વિવેચક Δ આ ગ્રીક ચિહ્ન વડે દર્શાવાય છે.

(3) જો $\Delta = 0$ હોય, તો વર્ગસમીકરણનાં બન્ને મૂળ સમાન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય છે.

જો $\Delta > 0$ હોય, તો વર્ગસમીકરણના મૂળ ભિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય છે.

જો $\Delta < 0$ હોય, તો વર્ગસમીકરણના મૂળ વાસ્તવિક સંખ્યા હોતી નથી.

(4) જેના મૂળ α અને β હોય તેવું વર્ગસમીકરણ $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ હોય છે.

મહાવરાસંગ્રહ 2.5

1. નીચેનાં ખાલી ચોકઠા પૂર્ણ કરો.

(1) વર્ગસમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ → $b^2 - 4ac = 5$ / $b^2 - 4ac = -5$ → મૂળનું સ્વરૂપ

(2) મૂળોનો સરવાળો $= -7$ → વર્ગસમીકરણ . . . . ← મૂળોનો ગુણાકાર $= 5$

(3) જો α અને β એ આપેલાં વર્ગસમીકરણના મૂળ હોય, તો

$2x^2 - 4x - 3 = 0$ → $\alpha + \beta = \dots\dots$; $\alpha \times \beta = \dots\dots$

2. નીચેનાં વર્ગસમીકરણો માટે વિવેચકની કિંમત શોધો.

(1) $x^2 + 7x - 1 = 0$ (2) $2y^2 - 5y + 10 = 0$ (3) $\sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} = 0$

3. વિવેચકની કિંમત શોધી તે પરથી નીચેનાં વર્ગસમીકરણના મૂળનું સ્વરૂપ નક્કી કરો.

(1) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (2) $2y^2 - 7y + 2 = 0$ (3) $m^2 + 2m + 9 = 0$

4. જે વર્ગસમીકરણના મૂળ નીચે પ્રમાણે હોય તેવા વર્ગસમીકરણ તૈયાર કરો.

(1) 0 અને 4 (2) 3 અને -10 (3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (4) $2-\sqrt{5}$, $2+\sqrt{5}$

★ 5. $x^2 - 4kx + k + 3 = 0$ આ વર્ગસમીકરણના મૂળોનો સરવાળો, તેનાં ગુણાકારના બમણા જેટલો છે તો k ની કિંમત શોધો.

★ 6. જો α અને β એ $y^2 - 2y - 7 = 0$ આ વર્ગસમીકરણના મૂળ હોય તો,

(1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\alpha^3 + \beta^3$ ની કિંમત શોધો.

7. નીચેના દરેક વર્ગસમીકરણના મૂળ સમાન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય તો k ની કિંમત શોધો.

(1) $3y^2 + ky + 12 = 0$ (2) $kx(x - 2) + 6 = 0$

જાણી લઈએ.

વર્ગસમીકરણનું ઉપયોજન (Application of quadratic equation)

રોજીંદા જીવનમાં અનેક પ્રશ્નોના ઉકેલ માટે વર્ગસમીકરણો ઉપયોગી થાય છે. આ બાબતનો આપણે અહીં અભ્યાસ કરવાના છીએ.

ઉદા. (1) તિવસા ગામના શ્રી. રત્નાકરરાવના ખેતરમાં એક લંબઘનાકાર 'ડુંગળી ઘર' છે. તેના તળિયાની લંબાઈ, તેની પહોળાઈ કરતાં 7 મીટર વધારે છે. અને કર્ણ તેની લંબાઈ કરતાં 1 મીટર વધારે છે. તો તે ડુંગળી ઘરનાં તળિયાની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે, લંબઘનાકાર ડુંગળીઘરના તળિયાની પહોળાઈ x મીટર છે.

$\therefore$ લંબાઈ = $(x + 7)$ મીટર, કર્ણ = $x + 7 + 1 = (x + 8)$ મીટર

પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી,

$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$

$x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$

$\therefore$ $x^2 + 14x - 16x + 49 - 64 = 0$

$\therefore$ $x^2 - 2x - 15 = 0$

$\therefore$ $\underline{x^2 - 5x} + \underline{3x - 15} = 0$

$\therefore$ $x(x - 5) + 3(x - 5) = 0$

$\therefore$ $(x - 5)(x + 3) = 0$

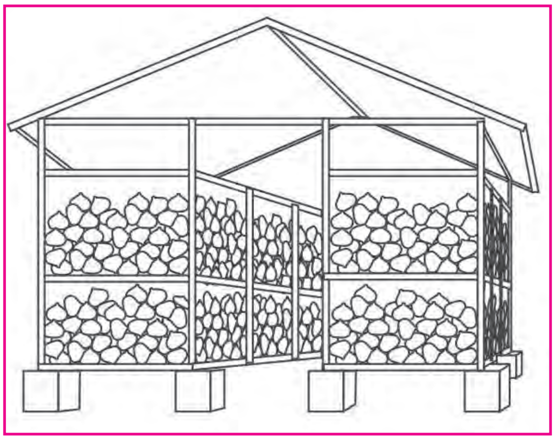
$\therefore$ $x - 5 = 0$ અથવા $x + 3 = 0$

$\therefore$ $x = 5$ અથવા $x = -3$

પરંતુ, પહોળાઈ ઋણ ન હોય. $\therefore x \neq -3$

$\therefore$ $x = 5$ અને $x + 7 = 5 + 7 = 12$

$\therefore$ ડુંગળીઘરના તળિયાની લંબાઈ 12 મીટર અને પહોળાઈ 5 મીટર હશે.



ડુંગળી ઘર

ઉદા. (2) એક આગગાડી એક મૂલ્ય વેગથી 360 કિમી અંતર કાપે છે. પરંતુ તેનો વેગ કલાકે 5 કિમી વધારતાં તેટલું જ અંતર કાપવા માટે 48 મિનિટ ઓછી લાગે છે. તો ગાડીનો શરૂઆતનો વેગ શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે, ગાડીનો શરૂઆતનો વેગ કલાકે x કિમી છે.

$\therefore$ વેગ વધાર્યા બાદ ગાડીનો વેગ $(x+5)$ કિમી થાય છે.

360 કિમી અંતર કાપવા માટે લાગતો શરૂઆતનો સમય = $\frac{\text{અંતર}}{\text{વેગ}} = \frac{360}{x}$ કલાક.

વેગ વધાર્યા બાદ તેટલું જ અંતર કાપવા માટે લાગતો સમય = $\frac{360}{x+5}$ કલાક.

આપેલી શરત પ્રમાણે,

$\frac{360}{x+5} = \frac{360}{x} - \frac{48}{60}$ ------ ($\because$ 48 મિનિટ = $\frac{48}{60}$ કલાક)

$\therefore$ $\frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = \frac{48}{60}$

$\therefore$ $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{48}{60\times360}$ ------ (બન્ને બાજુને 360 વડે ભાગતાં)

$\therefore$ $\frac{x+5-x}{x(x+5)} = \frac{4}{5\times360}$

$\therefore$ $\frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{5\times90}$

$\therefore$ $\frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{450}$

$\therefore$ $x^2 + 5x = 2250$

$\therefore$ $x^2 + 5x - 2250 = 0$

$\therefore$ $x^2 + 50x - 45x - 2250 = 0$ $\quad$ -2250: $+50$, -45

$\therefore$ $x(x+50) - 45(x+50) = 0$

$\therefore$ $(x+50)(x-45) = 0$

$\therefore$ $x + 50 = 0$ અથવા $x - 45 = 0$

$\therefore$ $x = -50$ અથવા $x = 45$

પરંતુ, વેગ ઋણ ન હોય. $\therefore x \neq -50$

$\therefore$ $x = 45$

$\therefore$ આગગાડીની શરૂઆતનો વેગ કલાકે 45 કિમી હશે.

મહાવરાસંગ્રહ 2.6

1. પ્રગતિની 2 વર્ષ પહેલાંની ઉંમર અને 3 વર્ષ પછીની ઉંમરનો ગુણાકાર 84 છે. તો તેની આજની ઉંમર શોધો.

2. બે ક્રમિક સમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાના વર્ગોનો સરવાળો 244 છે, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

3. શ્રી. મધુસૂદનના સંતરાના બાગમાં આડી હરોળમાંના ઝાડની સંખ્યા, ઊભી હરોળમાંના ઝાડની સંખ્યા કરતાં 5 વધારે છે. જો સંતરાના બાગમાં કુલ 150 ઝાડ છે. તો આડી અને ઊભી હરોળમાંના ઝાડની સંખ્યા કેટલી ? આપેલો ફ્લો ચાર્ટનીની મદદથી ઉદાહરણ ઉકેલો.

ધારોકે, ઊભી હરોળમાંના ઝાડ x → આડી હરોળમાંના ઝાડની સંખ્યા = ... → કુલ ઝાડ = ... → વર્ગસમીકરણ તૈયાર કરો. → x ની કિંમત શોધો. → ઊભી હરોળમાં ઝાડની સંખ્યા કેટલી ? → આડી હરોળમાં કેટલાં ઝાડ છે?

4. વિવેક, કિશોર કરતાં 5 વર્ષ મોટો છે. તેમની બન્નેની ઉંમરના વ્યસ્તાંકનો સરવાળો $\frac{1}{6}$ છે, તો તેમની આજની ઉંમર શોધો.

5. સુયશને ગણિતની પહેલી કસોટી પરીક્ષામાં મળેલાં ગુણ કરતાં, બીજી કસોટીમાં 10 ગુણ વધારે મળ્યા. બીજી કસોટીના ગુણનાં 5 ગણા એ પહેલી કસોટીમાં મળેલા ગુણના વર્ગ જેટલાં છે. તો તેને પહેલી કસોટીમાં કેટલાં ગુણ મળ્યા હશે ?

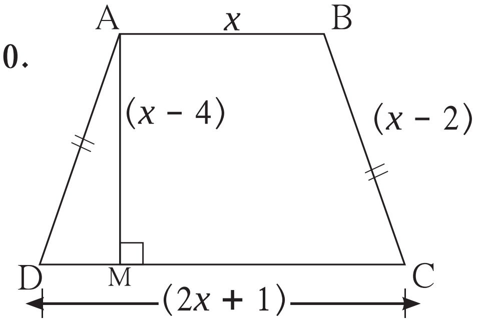
★ 6. શ્રી કાસમનો માટીના વાસણો બનાવવાનો લઘુઉદ્યોગ છે. તે દરરોજ નિશ્ચિત સંખ્યામાં વાસણો બનાવે છે. દરેક વાસણનું નિર્મિતિ મૂલ્ય, દરરોજ તૈયાર થતાં વાસણોની સંખ્યાના 10 ગણા કરતાં 40 રૂપિયા વધારે છે. જો એક દિવસમાં તૈયાર થતાં વાસણોની કિંમત 600 રૂપિયા હોય તો દરેક વાસણનું નિર્મિતિ મૂલ્ય અને દરરોજ તૈયાર થતાં વાસણોની સંખ્યા શોધો.

★ 7. એક નદીમાં હોડી દ્વારા પ્રવાહની વિરૂદ્ધ દિશામાં 36 કિમી. જઈને ફરી તે જ જગ્યાએ આવવા માટે પ્રતિકને 8 કલાક લાગે છે. હોડીનો શાંત પાણીમાં વેગ કલાકે 12 કિમી હોય તો નદીના પ્રવાહનો વેગ શોધો.

★ 8. પિંટુને એક કામ કરવા માટે નિશુ કરતાં 6 દિવસ વધારે લાગે છે. બન્ને મળીને તે કામ 4 દિવસમાં પૂરું કરે છે. તો બંનેને એકલા હાથે કામ પૂરું કરવા કેટલા દિવસ લાગશે ?

9. 460 ને એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા વડે ભાગતા મળતું ભાગફળ, ભાજકના 5 ગણા કરતાં 6 જેટલું વધારે છે અને શેષ 1 આવે છે તો ભાગફળ અને ભાજક શોધો.

10.



બાજુમાં આપેલાં સમલંબ □ABCDમાં AB || CD છે. તેનું ક્ષેત્રફળ 33 ચોરસ સેમી છે. તો આકૃતિમાં આપેલી માહિતી પરથી ચતુષ્કોણની ચારેય બાજુની લંબાઈ નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરીને શોધો.

ઉકેલ : □ABCD સમલંબ ચતુષ્કોણ છે. AB || CD

A (□ABCD) = $\frac{1}{2}$(AB + CD) × □

∴ 33 = $\frac{1}{2}$(x + 2x + 1) × □

∴ □ = (3x + 1) × □

∴ 3x^2 + □ − □ = 0

∴ 3x (. . . .) +10(. . . .) = 0

∴ (3x +10)(----) = 0

∴ (3x +10) = 0 અથવા □ = 0

∴ x = $-\frac{10}{3}$ અથવા x = □

પરંતુ, લંબાઈ ઋણ ન હોય.

∴ $x \neq -\frac{10}{3}$ ∴ x = □

AB = ---, CD = ---, AD = BC = ---

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 2

1. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ માટે યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

(1) નીચેના પૈકી વર્ગસમીકરણ કયું છે ?

(A) $\frac{5}{x} - 3 = x^2$ (B) $x(x + 5) = 2$ (C) $n - 1 = 2n$ (D) $\frac{1}{x^2}(x + 2) = x$

(2) નીચેના પૈકી કયું વર્ગસમીકરણ નથી ?

(A) $x^2 + 4x = 11 + x^2$ (B) $x^2 = 4x$ (C) $5x^2 = 90$ (D) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(3) $x^2 + kx + k = 0$ નું મૂળ વાસ્તવિક અને સમાન હોય, તો k ની કિંમત નીચેનામાંથી કઈ ?

(A) 0   (B) 4   (C) 0 અથવા 4   (D) 2

(4) $\sqrt{2}x^2 - 5x + \sqrt{2} = 0$ માટે વિવેચકની કિંમત નીચે પૈકી કઈ ?

(A) −5   (B) 17   (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2} - 5$

(5) નીચેનાં પૈકી કયા વર્ગસમીકરણનાં મૂળ 3 અને 5 છે ?

(A) $x^2 - 15x + 8 = 0$ (B) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(C) $x^2 + 3x + 5 = 0$ (D) $x^2 + 8x - 15 = 0$

(6) નીચેના પૈકી કયા સમીકરણના મૂળોનો સરવાળો −5 છે ?

(A) $3x^2 - 15x + 3 = 0$ (B) $x^2 - 5x + 3 = 0$

(C) $x^2 + 3x - 5 = 0$ (D) $3x^2 + 15x + 3 = 0$

(7) $\sqrt{5}m^2 - \sqrt{5}m + \sqrt{5} = 0$ ને નીચેના પૈકી કયું વિધાન લાગુ પડે છે ?

(A)મૂળ વાસ્તવિક અને અસમાન   (B) મૂળ વાસ્તવિક અને સમાન

(C) મૂળ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી.   (D) ત્રણ મૂળ

(8) $x^2 + mx - 5 = 0$ આ વર્ગસમીકરણનું એક મૂળ 2 છે, તો m ની કિંમત નીચેનામાંથી કઈ ?

(A) −2   (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

2. નીચેના પૈકી વર્ગસમીકરણો ઓળખો.

(1) $m^2 + 2m + 11 = 0$ (2) $x^2 - 2x + 5 = x^2$ (3) $(x + 2)^2 = 2x^2$

3. નીચેના દરેક વર્ગસમીકરણ માટે વિવેચકની કિંમત શોધો.

(1) $2y^2 - y + 2 = 0$ (2) $5m^2 - m = 0$ (3) $\sqrt{5}x^2 - x - \sqrt{5} = 0$

4. $2x^2 + kx - 2 = 0$ આ વર્ગસમીકરણનું એક મૂળ -2 છે તો k ની કિંમત શોધો.

5. નીચેના મૂળ હોય, એવા વર્ગસમીકરણ તૈયાર કરો.

(1) 10 અને −10 (2) $1-3\sqrt{5}$ અને $1+3\sqrt{5}$ (3) 0 અને 7

6. નીચેના વર્ગસમીકરણનાં મૂળનું સ્વરૂપ નક્કી કરો.

(1) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (2) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$ (3) $m^2 - 2m + 1 = 0$

7. નીચેનાં વર્ગસમીકરણો ઉકેલો.

(1) $\frac{1}{x+5} = \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0, x + 5 \neq 0)$ (2) $x^2 - \frac{3x}{10} - \frac{1}{10} = 0$ (3) $(2x + 3)^2 = 25$

(4) $m^2 + 5m + 5 = 0$ (5) $5m^2 + 2m + 1 = 0$ (6) $x^2 - 4x - 3 = 0$

8.★ $(m - 12)x^2 + 2(m - 12)x + 2 = 0$ આ વર્ગસમીકરણના મૂળ વાસ્તવિક અને સમાન હોય, તો m ની કિંમત શોધો.

9. એક વર્ગસમીકરણના બે મૂળનો સરવાળો 5 અને મૂળના ઘનનો સરવાળો 35 હોય, તો તે વર્ગસમીકરણ શોધો.

10.★ એવું વર્ગસમીકરણ તૈયાર કરો કે જેના મૂળ $2x^2 + 2(p + q)x + p^2 + q^2 = 0$ આ વર્ગસમીકરણનાં મૂળના સરવાળાનો વર્ગ અને બાદબાકીનો વર્ગ હોય.

11. મુકુંદ પાસે સાગર કરતાં 50 રૂપિયા વધારે છે. તેમનાં પાસેની રકમનો ગુણાકાર 15000 છે તો દરેક પાસે કેટલી રકમ હશે ?

12.★ બે સંખ્યાના વર્ગોનો તફાવત 120 છે. નાની સંખ્યાનો વર્ગ, એ મોટી સંખ્યા કરતાં બમણો છે, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

13. રંજનના જન્મદિવસ નિમિત્તે 540 સંતરા કેટલાંક વિદ્યાર્થીઓ વચ્ચે સમાન રીતે વહેંચવાના છે. જો 30 વિદ્યાર્થીઓ વધારે હોત તો દરેક ત્રણ સંતરા ઓછાં મળ્યા હોત. તો વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા તે શોધો.

14.★ તળવેલ ગામના ખેડૂત શ્રી દિનેશના લંબચોરસાકાર ખેતરની લંબાઇ, તેની પહોળાઈના બમણા કરતાં 10 મીટર વધારે છે. તેમણે તેમનાં ખેતરમાં વરસાદના પાણીનો સંગ્રહ કરવા માટે ખેતરની પહોળાઈના $\frac{1}{3}$ ગણી બાજુ હોય તેવા ચોરસાકૃતિ તળાવનું નિર્માણ કર્યું. જેથી મૂળ ખેતરનું ક્ષેત્રફળ, તળાવના ક્ષેત્રફળ કરતાં 20 ગણું થાય છે. તો ખતરની લંબાઈ, પહોળાઈ અને તળાવની બાજુની લંબાઈ શોધો.

15.★ એક ટાંકી બે નળની મદદથી 2 કલાકમાં પૂર્ણ ભરાય છે. તે પૈકી ફક્ત નાના નળથી ટાંકી ભરાવા માટે લાગતો સમય, મોટાં નળથી ટાંકી ભરાવા માટે લાગતા સમય કરતાં ત્રણ કલાક વધારે હોય છે. તો દરેક નળ વડે ટાંકી ભરાતાં કેટલો સમય લાગે છે ?

3 અંકગણિત શ્રેઢી

ચાલો શીખીએ.

- શ્રેણી (ક્રમિકા)
- અંકગણિત શ્રેઢી
- અંકગણિત શ્રેઢીનું n મું પદ
- અંકગણિત શ્રેઢીના n પદોનો સરવાળો.

જાણી લઈએ.

શ્રેણી (ક્રમિકા) (Sequence)

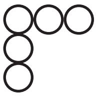
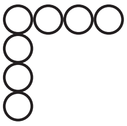
આપણે 1, 2, 3, 4, . . .આ સંખ્યાઓ ક્રમસર લખીએ છીએ. આ સંખ્યા શ્રેણી છે. આ સંખ્યા શ્રેણીમાંની કોઈપણ સંખ્યા કેટલામા સ્થાને છે તે આપણે કહી શકીએ છીએ. જેમકે 13 આ સંખ્યા 13 મા સ્થાને છે. સંખ્યાની બીજી શ્રેણી 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, . . . જુઓ. આ સંખ્યાઓ વિશિષ્ટ ક્રમમાં લખેલી છે. અહીં $16 = 4^2$ આ સંખ્યા ચોથા ક્રમાંકે છે. તો $25 = 5^2$ આ સંખ્યા પાંચમા સ્થાને છે. $49 = 7^2$ આ સંખ્યા સાતમા સ્થાને છે. આ સંખ્યા શ્રેણીમાંની કોઈપણ સંખ્યા કેટલામા સ્થાને છે, તે કહી શકાય છે.

જે ગણમાંની પ્રાકૃતિક સંખ્યાના પ્રમાણે વિશિષ્ટ ક્રમસર માંડેલી હોય, એવી સંખ્યાના સમૂહને **'શ્રેણી'** અથવા **'ક્રમિકા'** કહે છે.

ક્રમિકામાં વિશિષ્ટ સ્થાને વિશિષ્ટ સંખ્યા લખેલી હોય છે. તે સંખ્યાઓ $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots, a_n$ એમ ક્રમસર દર્શાવીએ તો a_1 એ પહેલી, a_2 એ બીજી ... એ પ્રમાણે a_n એ n મી સંખ્યા છે તે સ્પષ્ટ થાય છે. સંખ્યા શ્રેણી $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ એવા અક્ષરો વડે દર્શાવાય છે. તેમાં નિશ્ચિત ક્રમે સંખ્યાઓ લખી છે તે સમજાય છે.

એકાદ વર્ગના વિદ્યાર્થીઓ કવાયત માટે મેદાન પર ગયા પછી એક લાઈનમાં ઊભાં રહે છે. તેમનો ક્રમ નિશ્ચિત હોય, ત્યારે તેમની ક્રમિકા તૈયાર થાય છે. કેટલીક શ્રેણીમાં વિશિષ્ટ આકૃતિબંધ (Pattern) હોય છે તે આપણે અનુભવ્યું છે.

કૃતિ : નીચેનો આકૃતિબંધ પૂર્ણ કરો.

આકૃતિબંધ									
વર્તુળોની સંખ્યા	1	3	5	7					

આકૃતિબંધ	ΔΔ Δ ΔΔ	ΔΔΔ Δ Δ ΔΔΔ	ΔΔΔΔ Δ Δ Δ ΔΔΔΔ				
ત્રિકોણાની સંખ્યા	5	8	11				

સંખ્યાનો તૈયાર થયેલો આકૃતિ બંધ જુઓ. આગલી સંખ્યા પરથી પછીની સંખ્યા મેળવવાનો નિયમ શોધો. આ નિયમ પરથી પછીની બધી સંખ્યાઓ લખી શકાય છે.

આપેલી સંખ્યા શ્રેણી જુઓ. 2, 11, −6, 0, 5, −37, 8, 2, 61

અહીં $a_1 = 2, a_2 = 11, a_3 = -6, \ldots$ આ સંખ્યાની યાદી પણ શ્રેણી જ છે. પરંતુ વિશિષ્ટ પદો તે સ્થાને કેમ છે ? તે કહી શકાતું નથી. તેમજ ક્રમવાર આવતાં પદો વચ્ચે કયો સંબંધ છે, એ ચોક્કસપણે કહી શકાતું નથી.

સામાન્ય રીતે જે શ્રેણીમાં પછીના પદ નક્કી કરવા માટેનો નિયમ હોય તેવી જ શ્રેણીઓનો વિચાર કરી શકાય છે.

ઉદા. (1) 4, 8, 12, 16, . . . (2) 2, 4, 8, 16, 32, . . .

(3) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \ldots$

શ્રેણીમાંના પદો (Terms in a sequence)

શ્રેણીમાંના ક્રમસર આવતાં પદો $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n \ldots$ આ પ્રકારે દર્શાવવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે આ શ્રેણી ટૂંકમાં $\{t_n\}$ એમ લખાય છે. શ્રેણી અનંત હોય, તો પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક n, સાથે સંબંધિત એક સંખ્યા હોય છે તેમ માનવામાં આવે છે.

કૃતિ I : નીચેની શ્રેણી જુઓ. તેમાંના પદના ક્રમાંક $t_1, t_2, t_3 \ldots$ વડે દર્શાવો.

(1) 9, 15, 21, 27, . . . અહીં $t_1 = 9$, $t_2 = 15$, $t_3 = 21, \ldots$

(2) 7, 7, 7, 7, . . . અહીં $t_1 = 7$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square, \ldots$

(3) −2, −6, −10, −14, . . . અહીં $t_1 = -2$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square, \ldots$

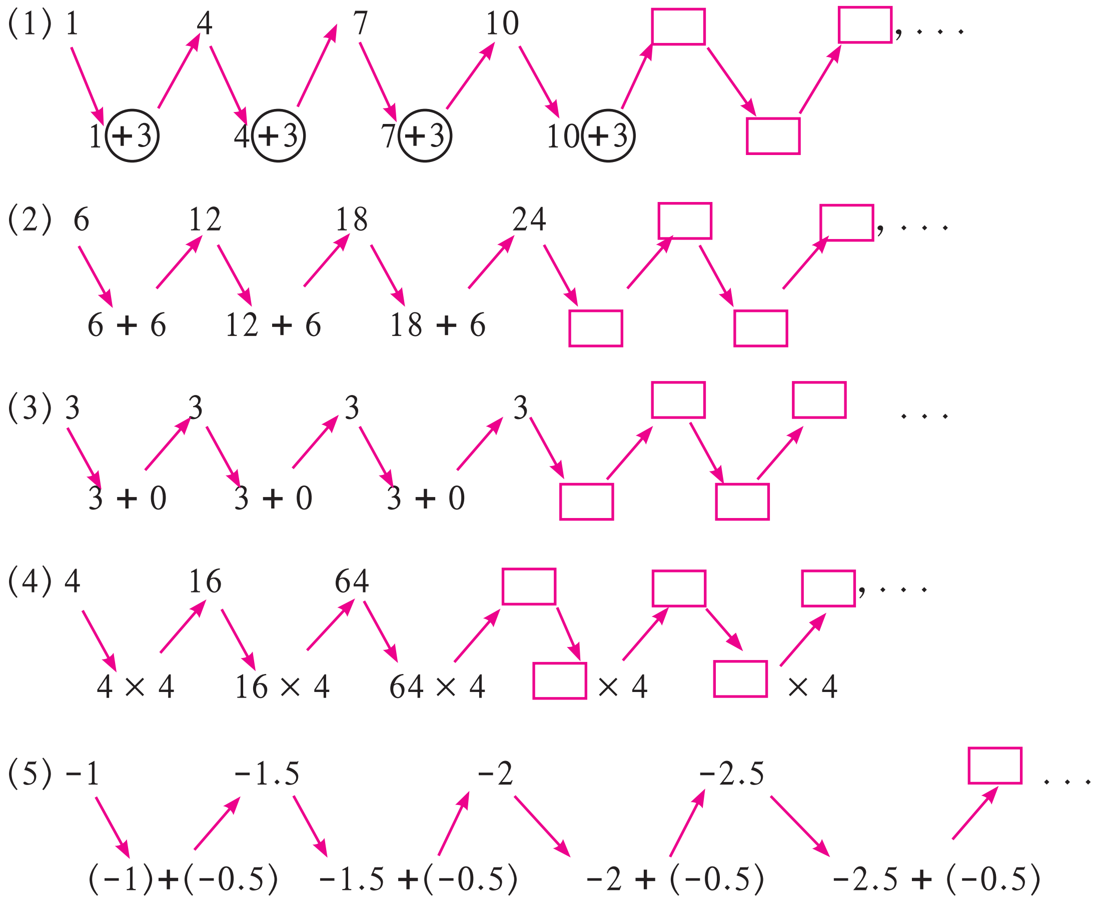
કૃતિ II : નીચે કેટલીક સંખ્યાશ્રેણી આપી છે. તેના આપેલાં પદોમાં કોઈ નિયમ મળી આવે છે કે ? બે શ્રેણીઓ વચ્ચે સમાનતા શોધો.

શ્રેણીઓના પદોમાં કોઈ નિયમ મળી આવે છે કે ? તે શોધવા માટે નીચે આપેલી માંડણી જુઓ અને ખાલી ચોકઠાંમાં યોગ્ય સંખ્યા લખો.

(1) 1, 4, 7, 10, 13, . . . (2) 6, 12, 18, 24, . . . (3) 3, 3, 3, 3, . . .

(4) 4, 16, 64, . . . (5) −1, −1.5, −2, −2.5, . . . (6) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$

આ શ્રેણીના પદોવચ્ચેનો સંબંધ શોધીએ. તે માટે કરેલો વિચાર જુઓ.



(6) 1^3, 2^3, 3^3, . . .

અહીં ક્રમિકા (1), (2), (3), (5) માં આગલાં પદમાં નિશ્ચિત સંખ્યા ઉમેરતાં તરત જ પછીનું પદ મળે છે, એ સમાનતા છે. આ પ્રકારની શ્રેણીને 'અંકગણિત શ્રેઢી' કહે છે.

ઉપરના શ્રેણી (4) અંકગણિત શ્રેઢી નથી. કારણ અહીં આગળના પદને નિશ્ચિત સંખ્યા વડે ગુણવાથી પછીનું પદ મળે છે. આવી શ્રેણીને ભૌમિતિક શ્રેઢી (Geometric Progression) કહે છે.

ઉપરના શ્રેણી (6) અંકગણિત શ્રેઢી નથી તેમજ ભૌમિતિક શ્રેઢી પણ નથી.

આ વર્ષે આપણે અંકગણિત શ્રેઢીનો જ અભ્યાસ કરવાના છીએ.

અંકગણિત શ્રેઢી (Arithmetic Progression)

નીચે આપેલી શ્રેણીમાં આવતાં પછીના ત્રણ પદો લખો.

(1) 100, 70, 40, 10, . . .   (2) −7, −4, −1, 2, . . .   (3) 4, 4, 4, . . .

આપેલી શ્રેણીના આગળના પદો શોધવા માટે શું કર્યું છે ? તે જુઓ.

પહેલું પદ બીજું પદ ત્રીજુ પદ

(1) 100 70 40 10 -20 -50 . . .

100+(-30) 70+(-30) 40+(-30) 10+(-30) (-20)+(-30)

(2) -7 -4 -1 2 5 8 . . .

-7+3 -4+3 -1+3 2+3 5+3

(3) 4 4 4 4 4 . . .

4 + 0 4 + 0 4 + 0 4 + 0

ઉપરની સંખ્યાની દરેક યાદીમાં, દરેક પદ તેની આગલી સંખ્યામાં વિશિષ્ટ સંખ્યા ઉમેરવાથી તૈયાર થયું છે. બે ક્રમાગત પદો વચ્ચેનો તફાવત અચળ છે.

ઉદા. (1) માં તફાવત ઋણ સંખ્યા, (2) માં તફાવત ધન સંખ્યા અને (3) માં તફાવત 0 છે.

ક્રમસર આવતાં પદો વચ્ચેનો તફાવત 'અચળ' હોય તો તેને **'સામાન્ય તફાવત' (Common difference)** કહે છે. જે d વડે દર્શાવાય છે.

આપેલી શ્રેણીમાં કોઈપણ બે ક્રમાગત પદો વચ્ચેનો તફાવત $(t_{n+1} - t_n)$ અચળ હોય તો તેવી શ્રેણીને 'અંકગણિત શ્રેઢી' કહે છે. આ શ્રેઢીમાં $t_{n+1} - t_n = d$ આ સામાન્ય તફાવત છે.

અંકગણિત શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય

તો $t_1 = a$, $t_2 = a + d$, $t_3 = (a + d) + d = a + 2d$

આમ પહેલું પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તેવી અંકગણિત શ્રેઢી

$a, (a + d), (a + 2d), (a + 3d), \ldots$ હોય છે.

અંકગણિત શ્રેઢી સંબંધિત કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

(1) અરિફા દર મહિને 100 રૂપિયાની બચત કરે છે. એક વર્ષના દરેક મહિનાને અંતે તેની કુલ બચત નીચે પ્રમાણે થશે.

મહિનો	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
બચત (₹)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

દરેક મહિનાની કુલ બચત દર્શાવતી સંખ્યા 'અંકગણિત શ્રેઢી' છે.

(2) પ્રણવે તેના મિત્ર પાસેથી 10000 રૂપિયા ઉછીના લીધા અને દર મહિને 1000 રૂપિયા પ્રમાણે ચૂકવવાનું નક્કી કર્યું. તો દરેક મહિનામાં ચૂકવવાની બાકી રહેલી રકમ નીચે પ્રમાણે છે.

મહિનાનો ક્રમ	1	2	3	4	5	...	...	...	...
ચૂકવવાની બાકી રકમ ₹	10,000	9,000	8,000	7,000	...	...	2,000	1,000	0

(3) 5 નો ઘડિયો, એટલે 5 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાઓ જુઓ.

5, 10, 15, 20, . . . 50, 55, 60, ... આ અંકગણિત શ્રેઢી છે.

ઉપર(1) અને(2) માંની અંકગણિત શ્રેઢી સાન્ત શ્રેઢી છે. જ્યારે (3) માંની અંકગણિત શ્રેઢી અનંત શ્રેઢી છે.

આ ધ્યાનમાં રાખો.

(1) જો શ્રેણીમાં $(t_{n+1} - t_n)$ આ તફાવત અચળ હોય તો તે શ્રેણીને અંકગણિત શ્રેઢી (A.P.) કહે છે.

(2) અંકગણિત શ્રેઢીના બે ક્રમાગત (ક્રમિક) પદો વચ્ચેના 'સામાન્ય તફાવત' d વડે દર્શાવાય છે.

(3) d ની કિંમત ધન, ઋણ કે શૂન્ય હોઈ શકે છે.

(4) અંકગણિત શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તો તે શ્રેઢીના પદો a, $(a + d)$, $(a + 2d)$, . . . હોય છે.

કૃતિ : સાન્ત અંકગણિત શ્રેઢી અને અનંત અંકગણિત શ્રેઢીનું એક-એક ઉદાહરણ આપો.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. **(1)** નીચેના પૈકી કઈ શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે તે ઓળખો. જો શ્રેઢી હોય તો તેના પછીના (આગળનાં) બે પદો શોધો.

(i) 5, 12, 19, 26, . . . (ii) 2, −2, −6, −10, . . .

(iii) 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . . (iv) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ . . .

ઉકેલ : (i) 5, 12, 19, 26, . . . આ શ્રેણીમાં,

પ્રથમ પદ $= t_1 = 5, \quad t_2 = 12, \quad t_3 = 19, \ldots$

$t_2 - t_1 = 12 - 5 = 7$

$t_3 - t_2 = 19 - 12 = 7$

અહીં પ્રથમ પદ = 5 અને સામાન્ય તફાવત = d = 7 છે. તે અચળ છે.

∴ આ શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે. તેના પછીના બે પદો

$26 + 7 = 33, \quad 33 + 7 = 40.$

અહીં 33 અને 40 એ આપેલી શ્રેઢીના પછીના બે પદો છે.

(ii) 2, −2, −6, −10, . . . આ શ્રેણીમાં,

$t_1 = 2, \quad t_2 = -2, \quad t_3 = -6, \quad t_4 = -10 \ldots$

$t_2 - t_1 = -2 - 2 = -4$

$t_3 - t_2 = -6 - (-2) = -6 + 2 = -4$

$t_4 - t_3 = -10 - (-6) = -10 + 6 = -4$

આથી બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત, એટલે $t_{n+1} - t_n = -4$ છે. $\therefore$ $d = -4$ એ સામાન્ય તફાવત છે. જે અચળ છે. $\therefore$ આ આપેલી શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે.

આ શ્રેઢીના પછીના બે પદો $(-10) + (-4) = -14$ અને $(-14) + (-4) = -18$ છે.

(iii) 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . . આ શ્રેણીમાં,

$t_1 = 1, \; t_2 = 1, \; t_3 = 2, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 3, \quad t_6 = 3 \ldots$

$t_2 - t_1 = 1 - 1 = 0, \qquad t_3 - t_2 = 2 - 1 = 1$

$t_4 - t_3 = 2 - 2 = 0, \qquad t_3 - t_2 \neq t_2 - t_1$

આ શ્રેણીમાં ક્રમિક આવતાં બે પદો વચ્ચેનો તફાવત અચળ નથી. $\therefore$ આપેલી શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી નથી.

(iv) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ આ શ્રેણીમાં,

$t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = -\frac{1}{2}, \quad t_4 = -\frac{3}{2}$

$t_2 - t_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_3 - t_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_4 - t_3 = -\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

અહીં સામાન્ય તફાવત $d = -1$ અચળ છે.

$\therefore$ આપેલી શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે.

તેનાં પછીના બે પદો શોધીએ.

$-\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}, \qquad -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$

$\therefore$ પછીનાં બે પદો $-\frac{5}{2}$ અને $-\frac{7}{2}$ છે.

ઉદા. **(2)** નીચે પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d આપેલાં છે. તે પરથી પ્રથમ ચાર પદ શોધીને અંકગણિત શ્રેઢી લખો.

(i) $a = -3, \quad d = 4$ (ii) $a = 200, \quad d = 7$

(iii) $a = -1, d = -\frac{1}{2}$ (iv) $a = 8, \quad d = -5$

ઉકેલ : (i) $a = -3, d = 4$ પરથી,

$a = t_1 = -3$

$t_2 = t_1 + d = -3 + 4 = 1$

$t_3 = t_2 + d = 1 + 4 = 5$

$t_4 = t_3 + d = 5 + 4 = 9$

$\therefore$ અંકગણિત શ્રેઢી $-3, 1, 5, 9, \ldots$

(iii) $a = -1, d = -\frac{1}{2}$

$a = t_1 = -1$

$t_2 = t_1 + d = -1 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

$t_3 = t_2 + d = -\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{2} = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-\frac{1}{2})$

$= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ અંકગણિત શ્રેઢી $-1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \ldots$

(ii) $a = 200, d = 7$

$a = t_1 = 200$

$t_2 = t_1 + d = 200 + 7 = 207$

$t_3 = t_2 + d = 207 + 7 = 214$

$t_4 = t_3 + d = 214 + 7 = 221$

$\therefore$ અંકગણિત શ્રેઢી $200, 207, 214, 221, \ldots$

(iv) $a = 8, d = -5$

$a = t_1 = 8$

$t_2 = t_1 + d = 8 + (-5) = 3$

$t_3 = t_2 + d = 3 + (-5) = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-5) = -7$

$\therefore$ અંકગણિત શ્રેઢી $8, 3, -2, -7, \ldots$

મહાવરાસંગ્રહ 3.1

1. નીચેના પૈકી કઇ શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે ? જો અંકગણિત શ્રેઢી હોય તેનો સામાન્ય તફાવત d શોધો.

(1) $2, 4, 6, 8, \ldots$ (2) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$ (3) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(4) $0.3, 0.33, .0333, \ldots$ (5) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (6) $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \ldots$

(7) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \ldots$ (8) $127, 132, 137, \ldots$

2. નીચે અંકગણિત શ્રેઢીનું ‘પ્રથમ પદ a ’અને ‘સામાન્ય તફાવત d ’ આપેલાં છે તે પરથી અંકગણિત શ્રેઢી લખો.

(1) $a = 10, d = 5$ (2) $a = -3, d = 0$ (3) $a = -7, d = \frac{1}{2}$

(4) $a = -1.25, d = 3$ (5) $a = 6, d = -3$ (6) $a = -19, d = -4$

3. નીચેની દરેક અંકગણિત શ્રેઢી માટે પ્રથમ પદ અને સામાન્ય તફાવત શોધો.

(1) 5, 1, −3, −7, . . .   (2) 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, . . .

(3) 127, 135, 143, 151, . . .   (4) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}$, . . .

વિચાર કરીએ.

- 5, 8, 11, 14, . . . આ અંકગણિત શ્રેઢી છે કે ? જો હોય તો તેનું 100 મું પદ શોધો. આ શ્રેઢીમાં 92 હશે કે ? 61 હશે કે ?

જાણી લઈએ.

અંકગણિત શ્રેઢીનું n મું પદ (n^{th} term of an A. P.)

5, 8, 11, 14, . . . આ શ્રેણીમાં બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત 3 છે તેથી તે શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે. અહીં પ્રથમ પદ 5 છે. 5 માં 3 ઉમેરતાં 8 એ બીજું પદ મળે છે. આ રીતે 100 મું પદ મેળવવા માટે શું કરવું પડશે ?

	પહેલું પદ	બીજું પદ	ત્રીજું પદ	. . .
સંખ્યા	5,	5 + 3 = 8,	8 + 3 = 11,	. . .

આ રીતે 100 મું પદ શોધવા ઘણો સમય જોઈશે. તે માટે સૂત્ર મળે છે કે ? તે જોઈએ.

5	8	11	14	. . .	. . .	. . .	. . .
5	5 + 1 × 3	5 + 2 × 3	5 + 3 × 3	. . .	5 + (n − 1) × 3	5 + n × 3	. . .
પહેલું પદ t_1	બીજું પદ t_2	ત્રીજું પદ t_3	ચોથું પદ t_4	. . .	n મું પદ t_n	n + 1 મું પદ t_{n+1}	. . .

સામાન્ય રીતે; t_1, t_2, t_3, . . . આ અંકગણિત શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તો

$$t_1 = a$$

$$t_2 = t_1 + d = a + d = a + (2 - 1)\, d$$

$$t_3 = t_2 + d = a + d + d = a + 2d = a + (3 - 1)d$$

$$t_4 = t_3 + d = a + 2d + d = a + 3d = a + (4 - 1)d$$

$t_n = a + (n - 1)\, d$ આ સૂત્ર મળે છે.

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને 5, 8, 11, 14, . . . આ અંકગણિત શ્રેઢીનું 100 મું પદ શોધીએ. અહીં $a = 5$ અને $d = 3$ છે.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore \; t_{100} = 5 + (100 - 1) \times 3$$

$$= 5 + 99 \times 3$$

$$= 5 + 297$$

$$= 302$$

આ અંકગણિત શ્રેઢીનું 100 મું પદ 302 છે.

હવે 61 આ સંખ્યા શ્રેઢીમાં છે કે ? તેનો જવાબ શોધવા આ જ સૂત્ર વાપરીએ.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$t_n = 5 + (n - 1) \times 3$$

જો 61 એ n મું પદ એટલે કે $t_n = 61$ મૂકતાં,

$$61 = 5 + 3n - 3$$

$$= 3n + 2$$

$$\therefore \; 3n = 59$$

$$\therefore \; n = \frac{59}{3}$$

અહીં n પૂર્ણ સંખ્યા નથી.

∴ 61 આ સંખ્યા શ્રેઢીમાં નથી.

આ પ્રમાણે જ 5, 8, 11, 14,... આ શ્રેઢીમાં 92 આ સંખ્યા છે કે, તે તમે ચકાસો.

વિચાર કરીએ.

કબીરની મમ્મી તેના દરેક જન્મદિવસે તેની ઊંચાઈ માપીને નોંધે છે. તે 1 વર્ષનો થયો ત્યારે તેની ઉંચાઈ 70 સેંમી હતી. 2 વર્ષનો થયો ત્યારે તે 80 સેંમી ઊંચો હતો. 3 વર્ષનો થયો ત્યારે તેની ઊંચાઈ 90 સેંમી હતી. તેની મીરાંમાસી દસમીમાં ભણતી હતી. તેણે કહ્યું, ‘કબીરની ઊંચાઈ દર વર્ષે અંકગણિત શ્રેઢીમાં વધે છે. એવું દેખાય છે.’ એમ માનીને તેણે કબીર 15 વર્ષનો થશે. અને દસમીમાં આવશે ત્યારે તેની ઊંચાઈ કેટલી થશે, તે શોધ્યું. તેના આશ્ચર્યનો પાર ન રહ્યો. તમે પણ કબીરની ઊંચાઈ અંકગણિત શ્રેઢીમાં વધે છે એમ માનીને તે 15 વર્ષનો થશે ત્યારે તેની ઊંચાઈ કેટલી થશે ? તે શોધો.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) આપેલી અંકગણિત શ્રેઢી માટે t_n શોધો અને તે પરથી તેનું 30 મું પદ શોધો.

3, 8, 13, 18, . . .

ઉકેલ : આપેલી અંકગણિત શ્રેઢી 3, 8, 13, 18, . . .

અહીં $t_1 = 3$, $t_2 = 8$, $t_3 = 13$, $t_4 = 18$, . . .

$d = t_2 - t_1 = 8 - 3 = 5$, $n = 30$

આપણને ખબર છે કે, $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore t_n = 3 + (n - 1) \times 5 \because a = 3,\ d = 5$

$\therefore t_n = 3 + 5n - 5$

$\therefore t_n = 5n - 2$

$\therefore$ 30-મું પદ $= t_{30} = 5 \times 30 - 2$

$= 150 - 2 = 148$

ઉદા. (2) નીચેની અંકગણિત શ્રેઢીનું કેટલામું પદ 560 છે?

2, 11, 20, 29, . . .

ઉકેલ : આપેલી અંકગણિત શ્રેઢી 2, 11, 20, 29, . .

અહીં, $a = 2$, $d = 11 - 2 = 9$

આ શ્રેઢીનું n મું પદ 560 છે તો, $t_n = 560$

$t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore 560 = 2 + (n - 1) \times 9$

$= 2 + 9n - 9$

$\therefore 9n = 567$

$\therefore n = \frac{567}{9} = 63$

$\therefore$ આપેલી અંકગણિત શ્રેઢીનું 63 મું પદ 560 છે.

ઉદા. (3) આપેલી શ્રેણી 5, 11, 17, 23, . . . છે આ શ્રેણીમાં 301 આ સંખ્યા છે કે ?

ઉકેલ : 5, 11, 17, 23, . . .આ શ્રેણીમાં,

$t_1 = 5$, $t_2 = 11$, $t_3 = 17$, $t_4 = 23$, . . .

$t_2 - t_1 = 11 - 5 = 6$

$t_3 - t_2 = 17 - 11 = 6$

$\therefore$ આ શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે.

તેનું પ્રથમ પદ $a = 5$ અને $d = 6$

જો n મું પદ 301 હોય, તો

$t_n = a + (n - 1)d = 301$

$\therefore 301 = 5 + (n - 1) \times 6$

$= 5 + 6n - 6$

$\therefore 6n = 301 + 1 = 302$

$\therefore n = \frac{302}{6}$, આ ધન પૂર્ણાંક નથી.

આ પરથી આપેલી શ્રેણીમાં 301 સંખ્યા નથી.

ઉદા. (4) 4 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી બે અંકી સંખ્યાઓ કેટલી છે ?

ઉકેલ : 4 વડે ભાગી શકાય તેવી બે અંકી સંખ્યાઓ 12, 16, 20, 24, . . . 96 છે.

આ કેટલી સંખ્યાઓ છે? તે શોધીએ.

$t_n = 96$, $a = 12$, $d = 4$, $n = ?$

$\therefore$ આ પરથી nની કિંમત શોધીએ.

$t_n = a + (n - 1)d$. . .સૂત્ર

$96 = 12 + (n - 1) \times 4$

$= 12 + 4n - 4$

$\therefore 4n = 88$

$\therefore n = 22$

$\therefore$ 4 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાતી હોય તેવી બે અંકી સંખ્યાઓ 22 છે.

ઉદા. (5) જો એક અંકગણિત શ્રેઢીનું 10 મું પદ 25 અને 18 મું પદ 41 હોય તો તેનું 38 મું પદ શોધો. તેમજ n મું પદ 99 હોય તો n ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપેલી અંકગણિત શ્રેઢીમાં $t_{10} = 25$ અને $t_{18} = 41$ છે.

તમે જાણો છો, $t_n = a + (n - 1)d$ સૂત્ર વાપરીને,

$\therefore \quad t_{10} = a + (10 - 1)\,d$

$\therefore \quad 25 = a + 9d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$

તે જ રીતે $t_{18} = a + (18 - 1)\,d$

$\therefore \quad 41 = a + 17d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$

$25 = a + 9d \ldots\ldots\ldots\ldots$ (I) પરથી.

$a = 25 - 9d.$

આ કિંમત સમીકરણ II માં મૂકીએ.

સમીકરણ (II) $\quad a + 17d = 41$ છે.

$\therefore \quad 25 - 9d + 17d = 41$

$\therefore \quad 8d = 41 - 25 = 16$

$\therefore \quad d = 2$

$d = 2$ આ કિંમત સમીકરણ I માં મૂકતાં,

$a + 9d = 25$

$\therefore a + 9 \times 2 = 25$

$\therefore a + 18 = 25$

$\therefore a = 7$

હવે, $\quad t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore \quad t_{38} = 7 + (38 - 1) \times 2$

$= 7 + 37 \times 2$

$= 7 + 74$

$= 81$

n મું પદ 99 હોય તો n ની કિંમત શોધવાની છે.

$t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore \quad 99 = 7 + (n - 1) \times 2$

$\therefore \quad 99 = 7 + 2n - 2$

$\therefore \quad 99 = 5 + 2n$

$\therefore \quad 2n = 94$

$\therefore \quad n = 47$

$\therefore$ આપેલી અંકગણિત શ્રેઢીનું 38 મું પદ 81 છે, અને 99 એ 47 મું પદ છે.

મહાવરાસંગ્રહ 3.2

1. આપેલી અંકગણિત શ્રેઢી પરથી ચોકઠામાં યોગ્ય સંખ્યા લખો.

(1) 1, 8, 15, 22, . . .

અહીં $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, $t_4 = \square$, . . .

$t_2 - t_1 = \square - \square = \square$

$t_3 - t_2 = \square - \square = \square$ $\therefore d = \square$

(2) 3, 6, 9, 12, . . .

અહીં $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, $t_4 = \square$, . . .

$t_2 - t_1 = \square$, $t_3 - t_2 = \square$ $\therefore d = \square$

(3) −3, −8, −13, −18, . . .

અહીં $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, $t_4 = \square$, . . .

$t_2 - t_1 = \square$, $t_3 - t_2 = \square$ $\therefore a = \square$, $d = \square$

(4) 70, 60, 50, 40, . . .

અહીં $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, $t_4 = \square$, . . .

$\therefore a = \square$, $d = \square$

2. નીચેની શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે કે તે નક્કી કરો. જો અંકગણિત શ્રેઢી હોય તો તેનું વીસમું પદ શોધો.

−12, −5, 2, 9, 16, 23, 30, . . .

3. આપેલી અંકગણિત શ્રેઢી 12, 16, 20, 24, . . . છે. તેનું 24 મું પદ શોધો.

4. નીચેની અંકગણિત શ્રેઢીનું 19 મું પદ શોધો.

7, 13, 19, 25, . . .

5. નીચેની અંકગણિત શ્રેઢીનું 27 મું પદ શોધો.

9, 4, −1, −6, −11, . . .

6. ત્રણ અંકી પ્રાકૃતિક સંખ્યાના સમૂહમાં 5 વડે વિભાજ્ય હોય તેવી સંખ્યાઓ કેટલી છે ?

7. એક અંકગણિત શ્રેઢીનું 11 મું પદ 16 અને 21 મું પદ 29 છે. તો તે શ્રેઢીનું 41 પદ શોધો.

8. 11, 8, 5, 2, . . . આ અંકગણિત શ્રેઢીમાં −151 આ સંખ્યા કેટલામું પદ હશે ?

9. 10 થી 250 સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ પૈકી 4 વડે વિભાજ્ય હોય તેવી સંખ્યાઓ કેટલી ?

10. એક અંકગણિત શ્રેઢીનું 17 મું પદ તેના 10 માં પદ કરતાં 7 વધારે છે. તો સામાન્ય તફાવત d શોધો.

ચતુર શિક્ષિકા

એક હતો રાજા. તેણે રાજકુમાર યશવંત અને રાજકુમારી ગીતાદેવીને ઘોડે સવારી શીખવવા માટે અનુક્રમે તારા અને મીરા આ બે શિક્ષિકાઓની નિમણૂંક કરી. તેણે બંને શિક્ષિકાઓને વાર્ષિક કેટલો પગાર આપવો તે પૂછ્યું.

તારાએ કહ્યું, ''મને પહેલા મહિનામાં 100 સોનામહોરો આપવી અને પછીના દરેક મહિને પગારમાં 100 સોનામહોરોનો વધારો કરવો. મીરાએ કહ્યું, ''મને પહેલાં મહિનામાં 10 સોનામહોરો આપવી અને પછીના દરેક મહિનામાં આગલા મહિના કરતાં બમણો પગાર આપવો.''

મહારાજે તે માન્ય કર્યું. ત્રણ મહિના પછી રાજકુમાર યશવંતે પોતાની બહેનને કહ્યું, ''મારી શિક્ષિકા તમારી શિક્ષિકાથી વધારે હોંશિયાર છે. તેણીને વધારે પગાર મળે છે.'' ગીતાદેવીએ કહ્યું, ''મને પણ પહેલાં એમજ લાગ્યું, એટલે મેં મીરાબેનને પૂછ્યું પણ ખરૂં કે, ''તમે આટલો ઓછો પગાર કેમ માંગ્યો ?'' ત્યારે તેમણે હસીને કહ્યું કે, ''આઠ મહિના પછી ગંમત જો જે?'' પછી મેં નીચે પ્રમાણે આઠમાં મહિનાનો પગાર શોધ્યો. તું પણ ચકાસી જો.

મહિના	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
તારાનો પગાર	100	200	300	400	500	600	700	800	900	-	-	-
મીરાનો પગાર	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	-	-	-

તમે ઉપરનો કોઠો પૂર્ણ કરો.

તારાનો પગાર 100, 200, 300, 400, . . . આ અંકગણિત શ્રેઢી છે. તે સમજાયું કે ?

$t_1 = 100, \quad t_2 = 200, t_3 = 300, . . . \qquad t_2 - t_1 = 100 = d$

સામાન્ય તફાવત 100 છે.

મીરાનો પગાર 10, 20, 40, 80, . . . આ અંકગણિત શ્રેઢી નથી કારણ કે, 20 − 10 = 10, 40 − 20 = 20, 80 − 40 = 40 એટલે કે ક્રમવાર સંખ્યાઓમાં તફાવત અચળ નથી.

માત્ર આ શ્રેઢીમાં દરેક પદ તેના આગળના પદથી બમણું થતું જાય છે.

અહીં $\frac{t_2}{t_1} = \frac{20}{10} = 2, \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{40}{20} = 2, \qquad \frac{t_4}{t_3} = \frac{80}{40} = 2$

$\therefore \frac{t_{n+1}}{t_n}$, એટલે કે પછીનું પદ અને આગલા પદનો ગુણોત્તર સમાન આવે છે. આવી સંખ્યા શ્રેણીને ભૌમિતિક શ્રેઢી (Geometric Progression) કહે છે. $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ આ ગુણોત્તર 1 કરતાં વધારે હોય તો, ભૌમિતિક શ્રેઢી, અંકગણિત શ્રેઢી કરતાં ઝડપથી વધતી જાય છે તે અનુભવો.

જો આ ગુણોત્તર 1 કરતાં ઓછો હોય તો તે શ્રેઢી કેવી રીતે બદલાતી જાય છે તે પણ અનુભવો.

આપણે આ પૈકી ફક્ત અંકગણિત શ્રેઢીનો જ અભ્યાસ કરવાના છીએ. અંકગણિત શ્રેઢીનું n મું પદ કેવી રીતે શોધવું તે આપણે જોયું. હવે પહેલા n પદોનો સરવાળો કેવી રીતે કરવો તે જોઈએ.

ઝટપટ સરવાળો

ત્રણસો વર્ષ પહેલાંની વાત છે. જર્મનીમાં બ્યૂટનેર (Buttner) નામનાં ગુરૂજીની એક શિક્ષકી (માત્ર એક જ શિક્ષક ધરાવતી) શાળા હતી. તેમને ત્યાં જોહાન માર્ટિન બાર્ટેલસ એક માત્ર મદદનીશ હતો. તેનું કામ હતું બાળકોને મૂળાક્ષરો શીખવવા અને લેખન કરી આપવું. બ્યૂટનેર કડક અને શિસ્ત પ્રિય ગુરૂ હતાં. બ્યૂટનેર ગુરૂજીને એક કામ તુરંત પૂર્ણ કરવાનું હતું. વર્ગમાં બાળકો મસ્તી-તોફાન ન કરે એટલે તેમને કોઈક કામમાં રોકાયેલા રાખવા માટે ગણતરીનું કામ આપવાનું નક્કી કર્યું.

તેમણે બાળકોને કહ્યું કે, ‘‘1 થી 100 સુધીની સંખ્યા પાટી પર લખો અને તેનો સરવાળો કરો.’’ ગુરૂજીએ તેમનું કામ શરૂ કર્યું. બાળકોએ સંખ્યાઓ લખવાનું શરૂ કર્યું. પાંચ મિનિટમાં એક પાટી ઉંધી મૂકવાનો અવાજ આવ્યો તેમણે વિદ્યાર્થી કાર્લ ગાઉસ સામે જોયું અને પૂછ્યું, ‘‘આ શું ? મેં તને 1 થી 100 અંક લખીને તેનો સરવાળો કર-વાનું કહ્યું છે. પાટી કેમ ઉંધી મૂકી દીધી ? તારે કશું કરવું જ નથી કે શું ?’’

કાર્લ ગાઉસ બોલ્યા, ‘‘મારો સરવાળો થઈ ગયો.’’

ગુરૂજીએ કહ્યું, ‘‘શું ! આટલી ઝડપથી સરવાળો કર્યો જ કેવી રીતે ? તે તો સંખ્યા પણ લખી નહીં હોય. કે’તો કેટલો જવાબ આવ્યો તારો ?’’

કાર્લ ગાઉસ બોલ્યા, ‘‘પાંચ હજાર પચાસ.’’

ગુરૂજી આશ્ચર્યચકિત થઈ ગયા. તેમણે પૂછ્યું, ‘‘તેં કેવી રીતે જવાબ શોધ્યો ?’’

કાર્લ ગાઉસે નીચે પ્રમાણે ઝટપટ સરવાળો કર્યો હતો.

સળંગ ક્રમશઃ સંખ્યા	1	2	3	4	. . . .	100
	+	+	+	+		+
ઉલટ ક્રમે સંખ્યા	100	99	98	97	. . . .	1
સરવાળો	101	101	101	101		101

દરેક જોડીમાંની સંખ્યાનો સરવાળો101 આવે છે. આ સરવાળો 100 વખત આવ્યો તેથી 100 × 101 નો ગુણાકાર કર્યો તો તે 10100 થાય. અહીં 1 થી 100 સુધીની સંખ્યા બે વાર ધ્યાનમાં લીધી, એટલે 10,100 ના અર્ધા કર્યા. તે 5050 આવ્યા. તેથી 1, 2, 3, . . . , 100 નો સરવાળો 5050. ગુરૂજીએ તેમને શાબાશી આપી.

ગાઉસે સરવાળો કરવા માટે વાપરેલી રીત પરથી અંકગણિત શ્રેઢીના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો શોધવાનું સૂત્ર મેળવીએ.

જોહાન ફ્રેડરિચ કાર્લ ગાઉસ

30 એપ્રિલ 1777 - 23 ફેબ્રુઆરી 1855

કાર્લ ગાઉસ એક મહાન જર્મન ગણિતજ્ઞ હતાં. તેમનો જન્મ બ્રૉડન સ્વાઈકમાં રહેતા એક અશિક્ષિત કુટુંબમાં થયો હતો. બ્યૂટનેરની સ્કૂલમાં તેણે પોતાનું બુધ્ધિ ચાતુર્ય દર્શાવ્યું. તે પછી બ્યૂટનેરનો મદદનીશ જોહાન માર્ટિન બાર્ટેલસની ગાઉસ સાથે મિત્રતા થઈ. બન્નેએ મળીને બીજગણિત પર એક પુસ્તક બહાર પાડ્યું. બાર્ટેલસે, ગાઉસની અસામાન્ય પ્રતિભા અનેક જણની નજરમાં આણી દીધી.

જાણી લઈએ.

અંકગણિત શ્રેઢીના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો. (Sum of first n terms of an A. P.)

અંકગણિત શ્રેઢી $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots a+(n-1)d$

આ શ્રેઢીમાં a પ્રથમ પદ અને d સામાન્ય તફાવત છે. આ શ્રેઢીના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો S_n લઈએ.

$$S_n = [a] + [a+d] + \ldots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]$$

આ પદો ઉલટ ક્રમે માંડતાં,

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \ldots + [a+d] + [a]$$

સરવાળો કરતાં,

$$2S_n = [a+a+(n-1)d] + [a+d+a+(n-2)d] + \ldots + [a+(n-2)d+a+d] + [a+(n-1)d+a]$$

$$2S_n = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + \ldots + [2a+(n-1)d] \ldots n \text{ વખત.}$$

$$2S_n = n\,[2a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \quad \text{અથવા} \quad S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

દા.ત., 14, 16, 18, . . . આ અંકગણિત શ્રેઢીના પ્રથમ 100 પદોનો સરવાળો શોધીએ.

અહીં $a = 14,\ d = 2,\ n = 100$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore S_{100} = \frac{100}{2}[2 \times 14 + (100-1) \times 2]$$

$$= 50\,[28 + 198]$$

$$= 50 \times 226 = 11{,}300$$

$\therefore$ આપેલી શ્રેઢીના પ્રથમ 100 પદોનો સરવાળો 11,300 છે.

ધ્યાનમાં રાખીએ.

આપેલી અંકગણિત શ્રેઢી (A.P.)નું પ્રથમ પદ a અને સામાન્ય તફાવત d હોય તો,

$$t_n = a+(n-1)d \quad \text{અને}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

અંકગણિત શ્રેઢીના પ્રથમ n પદોના સરવાળાનું હજુ એક સૂત્ર મેળવીએ.

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots [a + (n - 1)d]$ આ અંકગણિત શ્રેઢીમાં

પ્રથમ પદ = $t_1 = a$ છે અને n મું પદ $[a + (n - 1)d]$ છે.

હવે $S_n = \frac{n}{2} [\underline{a} + \underline{a + (n-1)d}]$

$\therefore S_n = \frac{n}{2} [t_1 + t_n] = \frac{n}{2}$ [પ્રથમ પદ + અંતિમ પદ]

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને બીજાં કેટલાક મહત્ત્વના સૂત્રો ઉદાહરણોમાંથી મેળવીએ.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) પહેલી n પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : પહેલી n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ $1, 2, 3, \ldots, n$.

અહીં $a = 1$, $d = 1$, n મું પદ = n

$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$S_n = \frac{n}{2}$ [પ્રથમ પદ + અંતિમ પદ]

$= \frac{n}{2} [1 + n]$

$= \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore$ પહેલી n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો $\frac{n(n+1)}{2}$ હોય છે.

ઉદા. (2) પહેલી n સમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : પહેલી n સમ પ્રાકૃતિક સંખ્યા $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$.

t_1 = પ્રથમ પદ = 2 , t_n = અંતિમ પદ = $2n$

રીત I

$S_n = \frac{n}{2} [t_1 + t_n]$

$= \frac{n}{2} [2 + 2n]$

$= \frac{n}{2} \times 2 (1 + n)$

$= n (1 + n)$

$= n (n+1)$

રીત II

$S_n = 2 + 4 + 6 \ldots + 2n$

$= 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$

$= \frac{2[n(n+1)]}{2}$

$= n (n+1)$

રીત III

$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$

$= \frac{n}{2} [2 \times 2 + (n-1)2]$

$= \frac{n}{2} [4 + 2n - 2]$

$= \frac{n}{2} [2 + 2n]$

$= \frac{n}{2} \times 2 (1 + n)$

$= n (n+1)$

$\therefore$ પહેલી n સમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો $n (n+1)$ હોય છે.

ઉદા. (3) પહેલી n વિષમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.

ઉકેલ : પહેલી n વિષમ પ્રાકૃતિક સંખ્યા

$1, 3, 5, 7, \ldots, (2n - 1)$.

$a = t_1 = 1$ અને $t_n = (2n - 1)$, $d = 2$

રીત I

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$$
$$= \frac{n}{2}[1 + (2n - 1)]$$
$$= \frac{n}{2}[1 + 2n - 1]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2n$$
$$= n^2$$

રીત II

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$
$$= \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 2]$$
$$= \frac{n}{2}[2 + 2n - 2]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2n$$
$$= n^2$$

રીત III

$$S_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$$
$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 2n)$$
$$- (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n)$$
$$= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{2n(n+1)}{2}$$
$$= (2n^2 + n) - (n^2 + n)$$
$$= n^2$$

$\therefore$ પહેલી n વિષમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો n^2 હોય છે.

ઉદા. (4) 1 થી 150 સુધીની બધી વિષમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : 1 થી 150 સુધીની બધી વિષમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ $1, 3, 5, 7, \ldots, 149$.

આ અંકગણિત શ્રેઢી છે.

અહીં $a = 1$ અને $d = 2$, સૌ પ્રથમ 1 થી 150 સુધીની વિષમ સંખ્યાઓ કેટલી છે ? તે શોધીએ.

તે માટે n ની કિંમત શોધીએ.

$t_n = a + (n - 1)d$

$149 = 1 + (n - 1)2$ $\quad\quad \therefore 149 = 1 + 2n - 2$

$\therefore n = 75$

હવે $1 + 3 + 5 + \ldots + 149$ આ 75 સંખ્યાનો સરવાળો કરીએ.

$a = 1$ અને $d = 2$, $n = 75$

રીત I $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$S_n = \square$

$S_n = \square \times \square$

$S_n = \square$

રીત II $S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$

$S_n = \frac{75}{2}[1 + 149]$

$S_n = \square \times \square$

$S_n = \square$

મહાવરાસંગ્રહ 3.3

1. એક અંકગણિત શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ 6 અને સામાન્ય તફાવત 3 છે. તો S_{27} શોધો.

$a = 6,\ d = 3,\ S_{27} = ?$

$$S_n = \frac{n}{2}[\square + (n-1)d]$$

$$S_{27} = \frac{27}{2}[12 + (27-1)\square]$$

$$= \frac{27}{2} \times \square$$

$$= 27 \times 45$$

$$= \square$$

2. પહેલી 123 સમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.

3. 1 અને 350 દરમિયાન આવતી બધી સમ સંખ્યાઓનો સરવાળો કરો.

4. એક અંકગણિત શ્રેઢીનું 19 મું પદ 52 અને 38 મું પદ 128 છે. તો તેના પ્રથમ 56 પદોનો સરવાળો શોધો.

5. નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો :

કૃતિ : 1 થી 140 દરમિયાન આવતી, 4 વડે વિભાજ્ય હોય તેવી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ કેટલી છે ? તે શોધી તેનો સરવાળો શોધો.

1 થી 140 દરમિયાન આવતી 4 વડે વિભાજ્ય સંખ્યાઓ

↓

4, 8, ... , 136

↓

આ કુલ કેટલી સંખ્યાઓ છે ? $\therefore\ n = \square$

↓

$a = \square,\ d = \square,\ t_n = \square$

↓

$t_n = a + (n-1)d$

↓

$136 = \square + (n-1) \times \square$

→ $n = \square$ → $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_{\square} = \frac{\square}{2}[\qquad\qquad] = \square$

1 થી 140 દરમ્યાન આવતી અને 4 વડે વિભાજ્ય હોય તેવી સંખ્યાઓનો સરવાળો = $\square$

★ **6.** એક અંકગણિત શ્રેઢીના પહેલાં 55 પદોનો સરવાળો 3300 છે, તો તેનું 28 મું પદ શોધો.

7.★ એક અંકગણિત શ્રેઢીના ત્રણ ક્રમિક પદોનો સરવાળો 27 છે. અને તેમનો ગુણાકાર 504 છે. તો તે પદો શોધો. (ત્રણ ક્રમિક પદો $a - d$, a, $a + d$ લો.)

8.★ એક અંકગણિત શ્રેઢીના ચાર ક્રમિક પદોનો સરવાળો 12 છે. તેમજ તે ચાર ક્રમિક પદો પૈકી ત્રીજા અને ચોથા પદનો સરવાળો 14 છે. તો તે ચાર પદ શોધો.
(સૂચન- ચાર ક્રમિક પદ $a - d$, a, $a + d$, $a + 2d$ લો.)

9.★ એક અંકગણિત શ્રેઢીનું નવમું પદ શૂન્ય છે. તો 29 મું પદ એ 19 મા પદ થી બમણું છે તે દર્શાવો.

જાણી લઈએ.

અંકગણિત શ્રેઢીનો ઉપયોગ (Application of A.P.)

ઉદા. (1) મિક્સર તૈયાર કરતી એક કંપનીએ ત્રીજા વર્ષે 600 મિક્સર તૈયાર કર્યા અને સાતમે વર્ષે 700 મિક્સર તૈયાર કર્યા. દર વરસે તૈયાર થતાં મિક્સરની સંખ્યામાં નિશ્ચિત વધારો કરવામાં આવે છે. તો નીચેનાનાં જવાબ શોધો.
(i) પહેલાં વર્ષનું મિક્સરનું ઉત્પાદન (ii) 10 મા વર્ષનું ઉત્પાદન (iii) પહેલાં સાત વર્ષનું કુલ ઉત્પાદન.

ઉકેલ : કંપની દર વર્ષે મિક્સરની સંખ્યામાં નિશ્ચિત વધારો કરે છે.
આમ દરવર્ષે વધતી મિક્સરની સંખ્યા, અંકગણિત શ્રેઢીમાં છે.

(i) n મા વર્ષમાં કંપનીએ t_n મિક્સર તૈયાર કર્યા એમ ધારીએ. આપેલી માહિતી પરથી,

$t_3 = 600$, $t_7 = 700$

$t_n = a+(n-1)d$ .... સૂત્ર

$t_3 = a+(3-1)d$

$= a+2d = 600$ .... (I)

$t_7 = a+(7-1)d$

$= a+6d = 700$ .... (II)

$a+2d = 600 \quad \therefore \; a = 600 - 2d$ આ કિંમત સમીકરણ (II) માં મૂકીએ.

$600 - 2d + 6d = 700$

$4d = 100 \quad \therefore \quad d = 25$

$a+2d = 600 \qquad \therefore \; a + 2 \times 25 = 600$

$a + 50 = 600 \qquad \therefore \; a = 550$

$\therefore$ પહેલાં વર્ષે મિક્સરનું ઉત્પાદન 550 થયું.

(ii) $t_n = a+(n-1)d$

$t_{10} = 550+(10-1) \times 25$

$= 550 + 225 = 775$

$\therefore$ 10-મા વર્ષનું ઉત્પાદન 775 થયું.

(iii) પહેલાં 7 વર્ષનું ઉત્પાદન કાઢવા માટે S_n નું સૂત્ર વાપરીએ.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore S_7 = \frac{7}{2}[1100 + 150] = \frac{7}{2}[1250] = 7 \times 625 = 4375$$

∴ પહેલાં સાત વર્ષનું કુલ ઉત્પાદન 4375 થયું.

ઉદા. (2) ઉધાર લીધેલા 3,25,000 રૂપિયા ચૂકતે કરવા માટે અજય શર્માએ પહેલાં મહિને 30,500 રૂપિયા ભર્યા, ત્યાર પછી તેમને દર મહિને આગલા મહિને ભરેલી રકમ કરતાં 1500 રૂપિયા ઓછા ભરવા પડે છે. તો ઉધાર લીધેલી રકમ પૂર્ણપણે ચૂકવવા માટે તેમને કેટલાં મહિના લાગશે ?

ઉકેલ : ઉધાર લીધેલાં પૈસા ચૂકતે કરવા માટે 'n' મહિના લાગશે એમ ધારીએ 30,500 રૂપિયામાંથી દર મહિને 1500 રૂપિયા આપવાના છે.

∴ 30,500; 30,500 − 1500; 30,500 − 2 × 1500, . . . આ આપવાની રકમોની શ્રેણી અંકગણિત શ્રેઢી છે.

પ્રથમ પદ = a = 30500, d = −1500 ઉધાર લીધેલી રકમ = S_n = 3,25,000

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$3{,}25{,}000 = \frac{n}{2}[2 \times 30500+(n-1) \times(-1500)]$$

$$= \frac{n}{2}[2 \times 30500 - 1500n + 1500]$$

$$3{,}25{,}000 = 30500n - 750n^2 + 750n$$

$$\therefore 750n^2 - 31250n + 325000 = 0$$

$\therefore 3n^2 - 125n + 1300 = 0$ . . . . . (બન્ને બાજુ 250 વડે ભાગતાં)

$$\therefore 3n^2 - 60n - 65n + 1300 = 0$$

$$\therefore 3n(n-20) - 65(n-20) = 0$$

$$\therefore (n - 20)(3n - 65) = 0$$

$\therefore n - 20 = 0$, અથવા $3n - 65 = 0$

$n = 20$ અથવા $n = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$

અહીં n એ અંકગણિત શ્રેઢીના પદનો ક્રમાંક છે તેથી n પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

$\therefore n \neq \frac{65}{3}$ $\therefore n = 20$

(અથવા 20 મહિના પછી S_{20} = 3,25,000 આ પૂરી રકમ ચૂકતે થઈ જવાથી પછીના સમયનો વિચાર કરવાની જરૂર નથી.)

∴ ઉધાર લીધેલી રકમ પૂર્ણપણે ચૂકવવા માટે તેમને 20 મહિના લાગશે.

ઉદા. (3) અન્વર દર મહિને ચોક્કસ રકમની બચત કરે છે. પહેલાં મહિનામાં તે 200 રૂપિયાની બચત કરે છે. બીજા મહિનામાં 250 રૂપિયાની બચત કરે છે. ત્રીજા મહિનામાં 300 રૂપિયાની બચત કરે છે. આ રીતે કુલ 1,000 રૂપિયાની બચત કેટલામાં મહિને થશે ? તે મહિનામાં તેની કુલ બચત કેટલી હશે ?

ઉકેલ : પહેલાં મહિનાની બચત 200 રૂપિયા બીજા મહિનાની બચત 250 રૂપિયા ; . . .

આ પ્રમાણે દર મહિને થતી બચત 200, 250, 300, . . . એ અંકગણિત શ્રેઢી છે.

અહીં $a = 200$, $d = 50$, t_n નું સૂત્ર વાપરીને n શોધીએ. તે પરથી S_n શોધીએ.

$$t_n = a+(n-1)d$$
$$= 200 +(n-1)50$$
$$= 200 + 50n - 50$$
$$\therefore \quad 1000 = 150 + 50n$$
$$150 + 50n = 1000$$
$$50n = 1000 - 150$$
$$50n = 850$$
$$\therefore n = 17$$

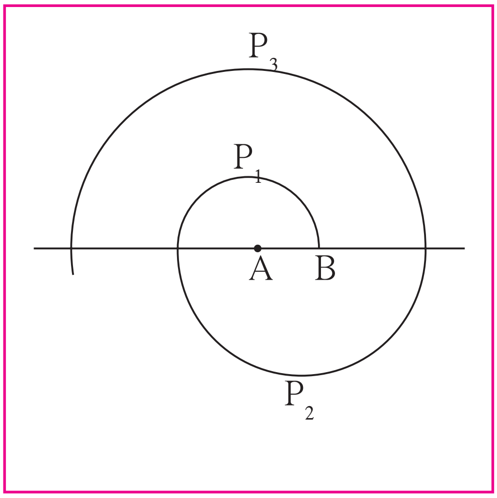
1000 રૂપિયા બચત 17 માં મહિને થશે.

17 મહિનામાં કુલ બચત કેટલી ? તે શોધીએ.

$$S_n = \frac{n}{2} [2a+(n-1)d]$$
$$= \frac{17}{2} [2 \times 200+(17-1) \times 50]$$
$$= \frac{17}{2} [400 + 800]$$
$$= \frac{17}{2} [1200]$$
$$= 17 \times 600$$
$$= 10200$$

17 મહિનામાં કુલ બચત 10,200 રૂપિયા હશે.

ઉદા. (4) આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક રેખા પર કેન્દ્ર A લઈને 0.5 સેમી ત્રિજ્યાનું P_1 એ અર્ધવર્તુળ દોર્યું. તે આ રેખાને B બિંદુમાં છેદે છે. હવે B કેન્દ્ર લઈને 1 સેમી ત્રિજ્યાનું અર્ધવર્તુળ રેખાની નીચેની તરફ P_2 દોર્યું.



ફરી કેન્દ્ર Aઅને 1.5 સેમી ત્રિજ્યાનું અર્ધવર્તુળ P_3 રેખાની ઉપરની બાજુએ દોર્યું. આ રીતે કેન્દ્ર A અને B લઈને અનુક્રમે 0.5 સેંમી, 1 સેમી, 1.5 સેમી, 2 સેમી વગેરે ત્રિજ્યાનાં અર્ધવર્તુળ કાઢતાં એક વલયાકૃતિ તૈયાર થઈ. આ રીતે દોરેલા 13 અર્ધવર્તુળ દ્વારા તૈયાર થયેલાં વક્રાકારની કુલ લંબાઈ શોધો.
($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

ઉકેલ : A, B, A, B, . . . આ પ્રમાણે ક્રમશઃ કેન્દ્ર લઈને દોરેલાં અર્ધપરિઘની લંબાઈ અનુક્રમે $P_1, P_2, P_3, \ldots$ ધારીએ. પહેલાં અર્ધપરિઘની ત્રિજ્યા 0.5 સેમી છે. બીજા અર્ધપરિઘની ત્રિજ્યા 1.0 સેમી છે. આ પ્રમાણે માહિતી આપેલી છે. તે પરથી $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{13}$ શોધીએ.

પહેલાં અર્ધપરિઘની લંબાઈ $= P_1 = \pi r_1 = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

$P_2 = \pi r_2 = \pi \times 1 = \pi$

$P_3 = \pi r_3 = \pi \times 1.5 = \frac{3}{2}\pi$

$P_1, P_2, P_3, \ldots$ આ અર્ધપરિઘ એટલે જ, $\frac{1}{2}\pi, 1\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ આ સંખ્યા અંકગણિત શ્રેઢી છે.

અહીં $a = \frac{1}{2}\pi$, $d = \frac{1}{2}\pi$, આના પરથી S_{13} કાઢીએ.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}\left[2 \times \frac{\pi}{2} + (13-1) \times \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{13}{2}[\pi + 6\pi]$$

$$= \frac{13}{2} \times 7\pi$$

$$= \frac{13}{2} \times 7 \times \frac{22}{7}$$

= 143 સેમી.

∴ આ પ્રમાણે 13 અર્ધવર્તુળોથી તૈયાર થયેલી વલયાકૃતિની લંબાઈ 143 સેમી થશે.

ઉદા. (5) એક ગામમાં 2010 ની સાલમાં 4000 લોકો સાક્ષર હતાં. આ સંખ્યા દર વર્ષે 400 થી વધે તો 2020ની સાલમાં કેટલા લોકો સાક્ષર હશે ?

ઉકેલ :

વર્ષ	2010	2011	2012	...	2020
સાક્ષર લોકોની સંખ્યા	4000	4400	4800	...	☐

$a = 4000, \quad d = 400 \quad n = 11$

$$t_n = a+(n-1)d$$
$$= 4000 + (11-1)400$$
$$= 4000 + 4000$$
$$= 8000$$

2020 સાલમાં 8000 લોકો સાક્ષર હશે.

ઉદા. (6) શ્રીમતી શેખને 2015 ની સાલમાં વાર્ષિક 1,80,000 રૂપિયાના પગારે નોકરી મળી. તથા તેમને દર વર્ષે 10,000 રૂપિયાનો વધારો આપવાનું પણ કબૂલ કર્યું. તો કેટલાંમા વર્ષે તેમનો પગાર 2,50,000 રૂપિયા થશે ?

ઉકેલ :

વર્ષ	પહેલું વર્ષ (2015)	બીજું વર્ષ (2016)	ત્રીજું વર્ષ (2017)	...
પગાર (₹)	[1,80,000]	[1,80,000 + 10,000]		...

$a = 1{,}80{,}000, \quad d = 10{,}000 \quad n = ? \quad t_n = 2{,}50{,}000$ રૂપિયા.

$t_n = a+(n-1)d$

$2{,}50{,}000 = 1{,}80{,}000 + (n-1) \times 10{,}000$

$(n-1) \times 10000 = 70{,}000$

$n-1 = 7$

$n = 8$

$\therefore$ 8 માં વર્ષે તેમનો વાર્ષિક પગાર 2,50,000 રૂપિયા થશે.

મહાવરાસંગ્રહ 3.4

1. સાનિકાએ 1 જાન્યુઆરી, 2016ના દિવસથી નક્કી કર્યુ કે, ₹ 10, બીજા દિવસે ₹ 11, ત્રીજા દિવસે ₹ 12 એ પ્રમાણે બચત કરતાં રહેવું. તો 31 ડીસેમ્બર, 2016 સુધી તેની કુલ બચત કેટલી થઈ હશે ?

2. એક વ્યક્તિએ 8000 રૂપિયા કરજ પેટે લીધાં અને તેના પર 1360 રૂપિયા વ્યાજ આપવાનું કબૂલ કર્યુ. પહેલા હપ્તો આપ્યા પછી દરેક હપ્તો આગલા હપ્તાથી 40 રૂપિયા ઓછો આપીને પૂર્ણ રકમ 12 માસિક હપ્તામાં ચૂકવી દીધી. તો તેણે આપેલો પ્રથમ પહેલો હપ્તો અને છેલ્લો હપ્તો કેટલા રૂપિયા હતો ?

3. સચિને રાષ્ટ્રીય બચત પ્રમાણપત્રમાં પહેલાં વર્ષે 5000 રૂપિયા, બીજા વર્ષે 7000 રૂપિયા, ત્રીજા વર્ષે 9000 રૂપિયા પ્રમાણે રોકાણ કર્યુ. તો 12 વર્ષમાં તેમનું કુલ રોકાણ કેટલું થશે ?

4. એક નાટ્યગૃહના ખુરશીઓની 27 હરોળ છે. પહેલી હરોળમાં 20 ખુરશીઓ છે. બીજી હરોળમાં 22 ખુરશીઓ છે, ત્રીજી હરોળમાં 24 ખુરશીઓ છે. આ પ્રમાણે 15મી હરોળમાં કુલ કેટલી ખુરશીઓ હશે ? તેમજ આખા નાટ્યગૃહમાં કુલ કેટલી ખુરશીઓ હશે ?

5. કારગિલમાં એક અઠવાડિયામાં સોમવાર થી શનિવાર સુધી દરરોજના ઉષ્ણતામાનની નોંધ કરી. આ નોંધ અંકગણિત શ્રેઢીમાં છે એમ જણાયુ. સોમવાર અને શનિવારના ઉષ્ણતામાનનો સરવાળો, મંગળવાર અને શનિ વારના ઉષ્ણતામાનના સરવાળાથી 5° સેલ્સિયસથી વધારે છે. જો બુધવારનું ઉષ્ણતામાન -30° સેલ્સિયસ હોય તો દરેક દિવસનું ઉષ્ણતામાન શોધો.

6. વિશ્વ પર્યાવરણ દિવસ, નિમિત્તે એક ત્રિકોણાકૃતિ ભૂખંડ પર વૃક્ષારોપણનો કાર્યક્રમ આયોજીત કરવામાં આવ્યો. પ્રથમ હરોળમાં એક છોડ, બીજી હરોળમાં બે છોડ, ત્રીજી હરોળમાં ત્રણ છોડ એ પ્રમાણે 25 હરોળમાં છોડ વાવવામાં આવ્યા. તો કુલ કેટલાં છોડ વાવવામાં આવ્યા ?

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 3

1. નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર માટે યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

(1) $-10, -6, -2, 2, \ldots$ આ શ્રેણી ....

(A) અંકગણિત શ્રેઢી છે કારણ કે, $d = -16$ (B) અંકગણિત શ્રેઢી નથી, કારણ કે, $d = 4$

(C) અંકગણિત શ્રેઢી છે કારણ કે, $d = -4$ (D) અંકગણિત શ્રેઢી નથી.

(2) જેનું પ્રથમ પદ -2 અને સામાન્ય તફાવત પણ -2 છે એવી અંકગણિત શ્રેઢીના પ્રથમ ચાર પદો ..... છે.

(A) $-2, 0, 2, 4$ (B) $-2, 4, -8, 16$

(C) $-2, -4, -6, -8$ (D) $-2, -4, -8, -16$

(3) પહેલી 30 પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો સરવાળો કેટલો ?

(A) 464 (B) 465 (C) 462 (D) 461

(4) આપેલી અંકગણિત શ્રેઢી માટે, $t_7 = 4$, $d = -4$ તો $a = \dots$

(A) 6 (B) 7 (C) 20 (D) 28

(5) આપેલી અંકગણિત શ્રેઢી માટે, $a = 3.5$, $d = 0$, તો $t_n = \dots$

(A) 0 (B) 3.5 (C) 103.5 (D) 104.5

(6) એક અંકગણિત શ્રેઢીના પહેલાં બે પદો −3, 4 છે તો 21 મું પદ . . . છે.

(A) −143 (B) 143 (C) 137 (D) 17

(7) જો એક અંકગણિત શ્રેઢી માટે $d = 5$ તો $t_{18} - t_{13} = \dots$

(A) 5 (B) 20 (C) 25 (D) 30

(8) 3 ઘડિયામાં આવતી પહેલી પાંચ સંખ્યાઓનો સરવાળો . . . છે.

(A) 45 (B) 55 (C) 15 (D) 75

(9) 15, 10, 5, . . . આ અંકગણિત શ્રેઢીના પહેલા 10 પદોનો સરવાળો . . . છે.

(A) −75 (B) −125 (C) 75 (D) 125

(10) એક અંકગણિત શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ 1 છે અને n મું પદ 20 છે. જો $S_n = 399$ છે, તો $n = \dots$

(A) 42 (B) 38 (C) 21 (D) 19

2. −11, −8, −5, . . . , 49 આ અંકગણિત શ્રેઢીનું છેલ્લેથી ચોથું પદ શોધો.

3. એક અંકગણિત શ્રેઢીનું 10 મું પદ 46 છે. 5 માં અને 7 મા પદોનો સરવાળો 52 છે. તો તે શ્રેઢી શોધો.

4. જે અંકગણિત શ્રેઢીનું 4 થું પદ −15 અને 9 મું પદ −30 છે. તો શ્રેઢીના પહેલાં 10 પદોનો સરવાળો શોધો.

5. બે અંકગણિત શ્રેઢીઓ 9, 7, 5, . . . અને 24, 21, 18, ... આપી છે. આ બન્ને અંકગણિત શ્રેઢીનું n મું પદ સમાન હોય તો n ની કિંમત શોધો અને n મું પદ શોધો.

6. જો એક અંકગણિત શ્રેઢીના ત્રીજા અને આઠમા પદોનો સરવાળો 7 તેમજ સાતમા અને ચૌદમા પદોનો સરવાળો −3 છે. તો તેનું દસમું પદ શોધો.

7. એક અંકગણિત શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ −5 અને છેલ્લું પદ 45 છે. તે બધા પદોનો સરવાળો 120 હોય તો તે કેટલાં પદો હશે ? અને સામાન્ય તફાવત કેટલો હશે ?

8. 1 થી n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો 36 છે તો n ની કિંમત શોધો.

9. 207 ના ત્રણ એવા ભાગ કરો કે તે અંકગણિત શ્રેઢીમાં હોય અને બે નાના ભાગોનો ગુણાકાર 4623 હોય.

10. એક અંકગણિત શ્રેઢીમાં 37 પદો છે. બરાબર મધ્યમાં હોય તેવા ત્રણ પદોનો સરવાળો 225 છે. અને છેલ્લાં ત્રણ પદોનો સરવાળો 429 છે તો તે શોધો.

11. જે અંકગણિત શ્રેઢીનું પ્રથમ પદ a બીજું પદ b અને અંતિમ પદ c છે. તો તે શ્રેઢીનાં પદોનો સરવાળો, $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ જેટલો હોય છે, તે સાબિત કરો.

12. જો અંકગણિત શ્રેઢીના પહેલાં p પદોનો સરવાળો પહેલાં q પદોના સરવાળા જેટલો હોય તો પહેલા (p + q) પદોનો સરવાળો શૂન્ય હશે તે દર્શાવો. $(p \neq q)$

13. અંકગણિત શ્રેઢીના m મા પદનાં m ગણા એ n મા પદનાં n ગણા બરાબર છે. તો તેનું $(m + n)$ મું પદ શૂન્ય છે તે બતાવો.

14. 1000 રૂપિયાની રકમ 10% ના સાદા વ્યાજે રોકયા, તો દરેક વર્ષને અંતે મળતી વ્યાજની રકમ અંકગણિત શ્રેઢી થશે કે? તે તપાસો. તે અંકગણિત શ્રેઢી હોય તો 20 વર્ષ પછી મળતાં વ્યાજની રકમ કેટલી છે ? જવાબ શોધવા માટે નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.

સાદું વ્યાજ $= \frac{P \times R \times N}{100}$

1 વર્ષ પછી મળતું સાદું વ્યાજ $= \frac{1000 \times 10 \times 1}{100} = \square$

2 વર્ષ પછી મળતું સાદું વ્યાજ $= \frac{1000 \times 10 \times 2}{100} = \square$

1 વર્ષ પછી મળતું સાદું વ્યાજ $= \frac{\square \times \square \times \square}{100} = 300$

આ રીતે 4, 5, 6 વર્ષ પછી મળતું વ્યાજ અનુક્રમે 400, $\square$, $\square$ છે .

આ સંખ્યા $d = \square$, અને $a = \square$

20 વર્ષ પછી મળતું સાદુ વ્યાજ,

$t_n = a + (n-1)d$

$t_{20} = \square + (20-1)\square$

$t_{20} = \square$

20 વર્ષ પછી મળતું કુલ વ્યાજ = $\square$

NK3LHB

4 અર્થ નિયોજન

ચાલો શીખીએ.

- જી.એસ.ટી. પરિચય
- જી.એસ.ટી. ગણન અને ઈનપૂટ ટૅક્સ ક્રેડિટ
- કર બીલ (ટૅક્સ ઈન્વૉઈસ)
- શેઅર્સ, મ્યુચ્યુઅલ ફંડ, SIP

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

શિક્ષિકા : વિદ્યાર્થી મિત્રો, આપણા દેશમાં વ્યાપાર માટે કઈ કર પ્રણાલી ચાલુ છે ?

આયુષ : આપણા દેશમા 'જીએસટી' કર પ્રણાલી ચાલુ છે.

શિક્ષિકા : સરસ ! તેના વિશે તમે શું જાણો છો ?

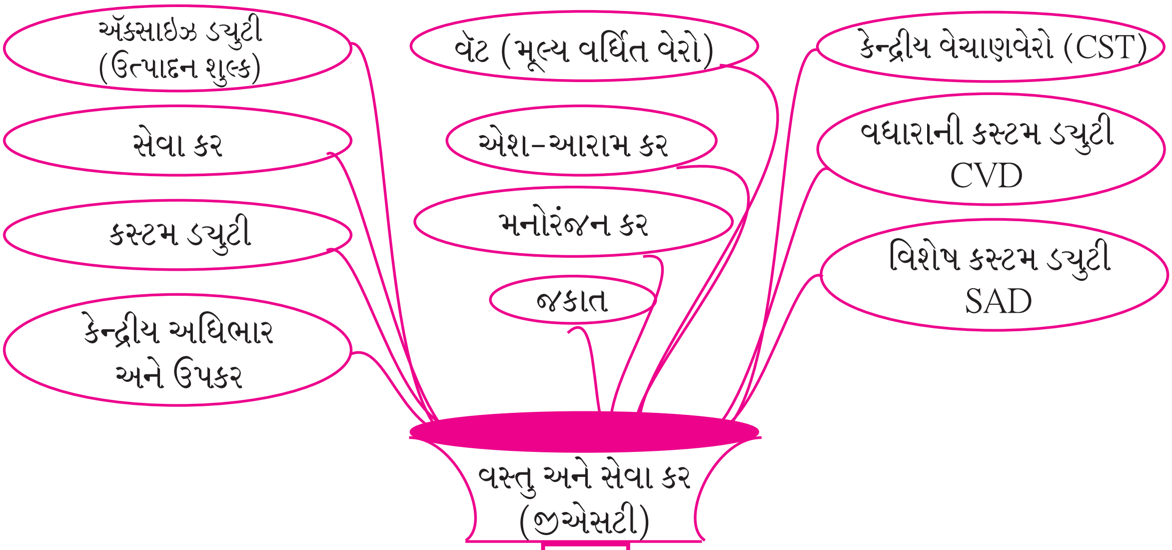
અયાન : GST એટલે **G**oods and **S**ervice **T**ax એટલે કે, 'વસ્તુ અને સેવા કર'

આયશા : આખા દેશમાં એક જ કરપ્રણાલી અમલમાં છે.

શિક્ષિકા : બરાબર. પહેલાં વિવિધ રાજ્યોમાં વિવિધ કર જુદા-જુદા કારણોસર ભરવા પડતાં હતા. પહેલાં ક્યા ક્યા કર હતા, જે હવે જીએસટીમાં અંતર્ભૂત કરવામાં આવ્યા છે ? નીચેનું ચિત્ર જોઈને કહો.

શરીફ : એક્સાઈઝ ડ્યુટી, કસ્ટમ ડ્યુટી, વૅટ, કેન્દ્રીય વેચાણવેરો, સેવા કર, જકાત વગેરે... કર હતા.

શિક્ષિકા : આ બધા કરવેરા નાબૂદ કરી હવે ફક્ત જીએસટી આ એક જ કર વસ્તુ અને સેવાની ખરીદી તેમજ વેચાણ પર લાદવામાં આવે છે. તેથી જ કહે છે કે, 'એક રાષ્ટ્ર, એક કર, એક બજાર'. આ કરપ્રણાલી 1 જુલાઈ 2017થી અમલમાં આવી.



જાણી લઈએ.

કર-બિલ (Tax Invoice)

વસ્તુ ખરીદીનું કર બિલ (નમૂનો)										
SUPPLIER : A to Z SWEET MART 143, Shivaji Rasta, Mumbai : 400001 Maharashtra Mob. No. 92636 92111 email : atoz@gmail.com Invoice No. GST/110							GSTIN :27ABCDE1234H1Z5 Invoice Date: 31-Jul-2017			
S. No.	HSN code	Name of Product	Rate	Quantity	Taxable Amount	CGST		SGST		Total
						Rate	Tax	Rate	Tax	Rs.
1	210690	પેંડા	રૂ.400 પ્ર.કિ.	500 ગ્રામ	200.00	2.5%	5.00	2.5%	5.00	210.00
2	210691	ચોકલેટ	રૂ. 80	1 બાર	80.00	14%	11.20	14%	11.20	102.40
3	2105	આઈસક્રીમ	રૂ.200	1 પૅકેટ (500 ગ્રામ)	200.00	9%	18.00	9%	18.00	236.00
4	1905	બ્રેડ	રૂ. 35	1 પૅકેટ	35.00	0%	0.00	0%	0.00	35.00
5	210690	માખણ	રૂ.500 પ્ર.કિ.	250 ગ્રામ	125.00	6%	7.50	6%	7.50	140.00
						કુલ રૂપિયા	41.70		41.70	723.40

વેદ : આ બિલમાં કેટલાંક નવા શબ્દો દેખાય છે. તેના અર્થ કહોને.

શિક્ષિકા : **CGST** અને **SGST** આ GST ના બે ભાગ છે. **CGST** એટલે (**C**entral **G**oods and **S**ervices **T**ax) **કેન્દ્રિય વસ્તુ અને સેવા કર (માલ),** આ રકમ કેન્દ્ર સરકાર પાસે જમા થાય છે. **SGST** એટલે (**S**tate **G**oods & **S**ervices **T**ax) **રાજ્ય માલ અને સેવા કર,** આ રકમ રાજ્ય સરકાર પાસે જમા થાય છે.

રિયા : બિલમાં જમણી બાજુએ અક્ષરો અને અંકોની હારમાળા દેખાય છે તે શું છે ?

શિક્ષિકા : તે GSTIN એટલે કે (GSTIN - GST Identification Number) વેપારીઓનો ઓળખ ક્રમાંક છે. જે વેપારીનું પાછલાં. નાણાંકીય વર્ષમાં કુલ ટર્નઑવર (એકંદર વકરો) 20 લાખ રૂપિયાથી વધારે હોય તેમણે આ ક્રમાંક લેવો બંધનકારક છે. PAN માં જેમ 10 અંકાક્ષરો હોય છે. તે જ પ્રમાણે GSTIN-માં 15 અંકાક્ષરો હોય છે. આ 15 અંકાક્ષરોમાંના તે વેપારીનો 10 અંકાક્ષરો PAN નંબર દર્શાવે છે.

દા.ત. 27 A B C D E 1 2 3 4 H 1 Z 5 (છેલ્લે અંક અથવા અક્ષર પૈકી એક હોય છે.)

- 27 → રાજ્યનો બે અંકી સંકેતાંક
- A B C D E 1 2 3 4 H → 10 આંકડાનો PAN
- 1 → એક નોંધણી માટે 1 અંક
- Z → બધા માટે સમાન (બાય ડીફૉલ્ટ)
- 5 → ચેક સમ ડિજીટ

'27' એ મહારાષ્ટ્ર રાજ્યનો સંકેતાંક (State Code) છે. 27 પરથી સમજાય છે કે આ વેપારીની નોંધણી મહારાષ્ટ્રમાં થઈ છે.

[ચેક સમ ડિજીટ એટલે GSTની વેબસાઈટ પર જઈ સર્ચમાં GSTIN નાખતાં જ આ નંબર કાયદેસર છે કે નહીં (Valid) તે સમજાય છે.]

જેની : બિલમાં 'HSN કોડ' શબ્દ પણ છે.

શિક્ષિકા : HSN કોડ એટલે તે માલ કે વસ્તુના વર્ગીકરણનો વિશિષ્ટ ક્રમાંક હોય છે. બિલમાં તેનો સમાવેશ કરવો જોઈએ. HSN એટલે **H**armonized **S**ystem of **N**omenclature.

જોસેફ : બિલમાં દુકાનનું નામ, સરનામું, તારીખ, બિલનંબર, મોબાઈલ નંબર, ઈ-મેલ આયડી પણ છે.

શિક્ષિકા : આ બિલમાં જીએસટીની આકારણી કેવી રીતે કરી છે, તે જોઈએ. તે માટે નીચેનાં ચોકઠાઓમાં યોગ્ય જવાબ લખો. જેમકે બિલમાં પેંડાનો ભાવ રૂપિયા 400 પ્રતિ કિલોગ્રામ છે. અર્ધો કિલોગ્રામ પેંડા લીધાં છે. તેથી તેની કિંમત રૂપિયા 200 છે.

- પેંડા પર કેન્દ્રનો કર (CGST) 2.5%ના દરે ☐ રૂપિયા, તેમજ રાજ્યનો કર (SGST) ☐ ના દરે 5 રૂપિયા.
- તે પરથી,પેંડા ઉપર વસ્તુ અને સેવા કર (GST)નો દર 2.5%+2.5%=5% અને કુલ કર 10 રૂપિયા.
- તે જ પ્રમાણે, ચોકલેટ ઉપર જીએસટીનો કુલ દર ☐ % તેથી કુલ કર ☐ રૂપિયા.
- આઈસ્ક્રીમ ઉપર જીએસટીનો કુલ દર ☐ % છે. તેથી આઈસ્ક્રીમની કિંમત ☐ રૂપિયા.
- માખણ ઉપર કેન્દ્ર કરનો દર ☐ % અને રાજ્ય કરનો દર ☐ % બન્ને મળીને જીએસટીનો દર ☐ % છે.

આદિત્ય : બ્રેડ પર જીએસટીનો દર 0% છે. તેમ જ દરેક વસ્તુ પર કેન્દ્ર અને રાજ્યના કરનો દર સરખો છે.

નિનાદ : વસ્તુ પ્રમાણે જીએસટીના દર જુદાં-જુદાં છે. જેમકે 0%, 5%, 12%, 18% અને 28%.

શિક્ષિકા : દરેક વસ્તુ પરના જીએસટીના દર સરકાર દ્વારા નિશ્ચિત કરવામાં આવે છે. હવે સેવા બિલનો પણ એક નમૂનો જોઇએ. આપેલી માહિતી પરથી ખાલી જગ્યા પૂરીને સેવા બિલ પૂર્ણ કરો.

<table>
<tr><th colspan="9">સેવા કર બિલ (નમૂનો)</th></tr>
<tr><td colspan="9">આહાર સોનેરી, ખેડ શિવાપૂર, પૂણે. Invoice No. 58
Mob. No. 7588580000 email - ahar.khed@yahoo.com
GSTIN : 27 AAAAA5555B1ZA Invoice Date : 25-Dec-2017</td></tr>
<tr><td>S A Code (SAC)</td><td>Food items</td><td>Qty</td><td>Rate (in Rs.)</td><td>Taxable amount</td><td colspan="2">CGST</td><td colspan="2">SGST</td></tr>
<tr><td>9963</td><td>Coffee</td><td>1</td><td>20</td><td>20.00</td><td>2.5%</td><td>0.50 ₹</td><td>2.5%</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>9963</td><td>Masala Tea</td><td>1</td><td>10</td><td>10.00</td><td>. . . .</td><td>. . .</td><td>2.5%</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td>9963</td><td>Masala Dosa</td><td>2</td><td>60</td><td>. . . .</td><td>2.5%</td><td>. . .</td><td>. . .</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td colspan="4">Total</td><td>. . .</td><td></td><td>. . .</td><td></td><td>. . .</td></tr>
<tr><td colspan="9">Grand Total = -------- રૂપિયા</td></tr>
</table>

શિક્ષિકા : વસ્તુ અને સેવા બિલ બન્નેનું નિરીક્ષણ કરીને તેમાંના કોડમાં શો તફાવત દેખાય છે, શોધો જોઈએ.

પેટ્રીક : વસ્તુ બિલમાં HSN કોડ છે, જ્યારે સેવા બિલમાં SAC કોડ દેખાય છે.

શિક્ષિકા : SAC એટલે વસ્તુ પ્રમાણે સેવાઓનું વર્ગીકરણનો વિશિષ્ટ ક્રમાંક છે.
તેને SAC – **S**ervice **A**ccounting **C**ode.
નીચેના કોઠામાં કેટલી વસ્તુઓ અને સેવાઓ તેમજ તેના કરના દર નમૂના રૂપે આપ્યા છે.

અ.ક્ર.	પ્રકાર	કરનો દર	વસ્તુ અને સેવા પ્રકાર
I	શૂન્યાધારિત (Nil rated)	0%	**વસ્તુ** – અનાજ સહિત જીવન જરૂરિયાતની વસ્તુઓ, શાકભાજી, ફળ, દૂધ, મીઠું, માટીના વાસણો વગેરે. **સેવા** – ધર્માદાય સંસ્થાના ઉપક્રમો, પાણી પુરવઠો, રસ્તા અને પુલનો ઉપયોગ, શિક્ષણ અને આરોગ્ય સેવાઓ, સાર્વજનિક વાચનાલય, ખેતી-કૃષિ સંબંધી સેવાઓ વગેરે.
II	નિમ્ન દર	5%	**વસ્તુ** – રોજીંદા વપરાશની વસ્તુઓ – જેમકે LPG સિલિન્ડર, ચા, તેલ, મધ, ફ્રોજન શાકભાજી લવિંગ, મરી, મસાલા, મિઠાઈ વગેરે. **સેવા** – જાહેર પરિવહન રેલ્વે, બસ, ટૅક્સી સેવા, વિમાન સેવા (ઈકોનોમી ક્લાસ), હૉટેલમાં ખાદ્ય પદાર્થ અને પીણાં પૂરા પાડવા વગેરે.
III	પ્રમાણ દર (સ્તર I)	12%	**વસ્તુ** – ગ્રાહકોપયોગી વસ્તુઓ : માખણ, ઘી, સુકોમેવો, શાકભાજી અને ફળો-માંથી તૈયાર કરેલાં અથાણા, મુરબ્બા, જૅમ, જેલી, ચટણીઓ, મોબાઈલ વગેરે. **સેવા** – છપાઈના કામને લગતી સેવાઓ, ગેસ્ટ હાઉસ (Non-AC) બાંધકામ વ્યવસાયને લગતી સેવાઓ વગેરે.
IV	પ્રમાણ દર (સ્તર II)	18% (મોટાં પ્રમાણમાં વસ્તુ અને સેવાઓનો સમાવેશ)	**વસ્તુ** – માર્બલ, ગ્રેનાઈટ, પરફ્યુમ્સ, ધાતુની વસ્તુ, સંગણક, પ્રિન્ટર, મોનીટર, CCTV વગેરે. **સેવા** – કુરીઅર સર્વીસેસ, આઉટડોર કેટરીંગ, સર્કસ નાટક, પ્રદર્શન સિનેમા, ચલન વિનિમય સેવા, શેઅર્સ ટ્રેડિંગ માટે ખરીદી-વેંચાણ પરની દલાલી (બ્રોકર)સેવા વગેરે.
V	ઉચ્ચતમ દર	28%	**વસ્તુ** – એશ-આરામની વસ્તુઓ-મોટર સાયકલ પાર્ટસ્, લક્ઝરી કાર, પાન મસાલો, વેક્યુમ ક્લીનર, ડીશ વૉશર, AC યુનિટ, (વૉશિંગ મશીન) તંબાકુ જન્ય ઉત્પાદનો, ઠંડા પીણાં (સોડાયુક્ત) aerated water વગેરે. **સેવા** – પંચતારાંકિત હૉટેલ નિવાસ વ્યવસ્થા, એમ્યુઝમેન્ટ પાર્ક, વૉટર પાર્ક, થીમ પાર્ક, કેસીનો, રેસકોર્સ, IPL જેવી રમતો, વિમાન સેવા (બિઝનેસ ક્લાસ) વગેરે.
સંદર્ભ : www.cbec.gov.in (Central Board of Excise & Customs) ની વેબસાઈટ. તદુપરાંત 0% થી 5% દરમ્યાન કઈ વસ્તુઓ પર GST છે ? તે શોધો.			

નોંધ :- આ પ્રકરણ લખતી વખતે સરકાર દ્વારા નિશ્ચિત કરાયેલા જીએસટીના દર અહીં આપ્યા છે. તેમાં ફેરફાર થઈ શકે છે. વિદ્યુત, પેટ્રોલ, ડિઝેલ, વગેરેને GSTમાંથી બાકાત રાખવામાં આવ્યાં છે.

કૃતિ I : તમને જરૂરી હોય તેવી 10 વસ્તુઓની યાદી બનાવી તેના પર જીએસટીનો દર કેટલો છે ? તે માટે અહીં આપેલો કોઠો, છાપાં (વર્તમાન પત્રો), ઈન્ટરનેટ, જીએસટી પરના પુસ્તકો, વસ્તુઓના બિલો પરથી શોધો.

વસ્તુ	જીએસટીનો દર	વસ્તુ	જીએસટીનો દર
1. સ્કેચ બુક		6. - - - - --	
2. કંપાસપેટી		7. - - - - - -	
3. - - - - --		8. - - - - - -	
4. - - - - - -		9. - - - - - -	
5. - - - - - -		10. - - - - - -	

કૃતિ II : કૃતિ I પ્રમાણે જ 10 સેવાઓ (જેમ કે, રેલ્વે બુકીંગ, એસ ટી બુકીંગ સેવા વગેરે) મેળવવા માટેના જીએસટીના દર શોધો અથવા સેવા બિલ મેળવો. તે પરથી નીચેનો કોઠો પૂર્ણ કરો.

સેવા	જીએસટીનો દર	સેવા	જીએસટીનો દર
1. રેલ્વે બુકીંગ		6. - - - - --	
2. કુરીયર સર્વીસ		7. - - - - - -	
3. - - - - --		8. - - - - - -	
4. - - - - - -		9. - - - - - -	
5. - - - - - -		10. - - - - - -	

કૃતિ III : નીચેનો કોઠો જુઓ અને વસ્તુ તથા સેવાના કોડ શોધીને લખો.

સેવા	SAC	GST નો દર	વસ્તુ	HSN Code	GST નો દર
રેલ્વે પરિવહન સેવા	996511	--	ડ્યુલક્સ પેન્ટ	3208	28%
વિમાન પરિવહન સેવા (ઇકોનોમી)	996411	--	બૉલબેરીંગ	84821011	28%
ચલન વિનિમય સેવા	997157	--	સ્પીડોમીટર	8714	28%
બ્રોકર સેવા	997152	--	બટાટા	0701	0%
ટૅક્સી સેવા	996423	--	--	--	--
5 સ્ટાર હોટેલ સેવા	--	--	--	--	--
--	--	--	--	--	--

કૃતિ IV : કોઈપણ 5 વસ્તુ અને 5 સેવાના HSN અને SAC કોડનો તક્તો/કોઠો બનાવો તેમાં વસ્તુ અને સેવાના ચિત્રો ચોંટાડો. તેમાં GSTના દર શોધીને લખો.

નોંધ : વસ્તુ અને સેવાના દર અને HSN, SAC પરની કૃતિઓ વગેરે માહિતી માટે આપ્યાં છે. તે ગોખવાની જરૂર નથી.

ઉપક્રમ : તમે વિવિધ પ્રકારના બિલો મેળવો. જેમ કે વસ્તુ બિલ, સેવા આપ્યાનું બિલ વગેરે. તે બિલોના GSTના સંદર્ભમા જુદા જુદા દષ્ટિકોણથી અભ્યાસ કરો અને વર્ગમાં ચર્ચા કરો.

ઊઊઊ ગણેલાં ઉદાહરણો ઊઊઊ

ઉદા. (1) આરતી ગૅસ ઍજન્સીએ 545 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતનો એક LPG સિલિન્ડર ગ્રાહકને વેંચ્યો. GSTનો દર 5% છે તો ગ્રાહકને આપેલા ટૅક્સ ઈન્વૉઈસમાં CGST અને SGST કેટલાં રૂપિયા હશે ? ગ્રાહકે કુલ કેટલાં રૂપિયા આપવા પડશે ? આરતી ગૅસ એજન્સીને કેટલો GST ભરવો પડશે ?

ઉકેલ : GSTનો દર = 5% ∴ CGSTનો દર 2.5%, અને SGSTનો દર = 2.5%.

CGST = $\frac{2.5}{100}$ × 545 = 13.625 = 13.63 રૂપિયા

∴ SGST = CGST = 13.63 રૂપિયા

ગ્રાહકને આપવી પડતી રકમ = કરપાત્ર કિંમત + CGST + SGST

= 545 + 13.63 + 13.63 = 572.26

આરતી ગૅસ ઍજન્સીને CGST = 13.63 રૂપિયા અને તેમજ SGST = 13.63 રૂપિયા ભરવા પડશે. એમ કુલ GST 27.26 રૂપિયા ભરવા પડશે.

ઉદા. (2) કુરીયર સેવા આપતાં એક એજન્ટે નાશિકથી નાગપૂર એક પાર્સલ મોકલવાના ગ્રાહક પાસેથી કુલ 590 રૂપિયા લીધા. તેમાં 500 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમત પર CGST 45 રૂપિયા અને SGST 45 રૂપિયાનો સમાવેશ છે. તો કુરીયર સેવા માટે આકારેલો GSTનો દર શોધો.

ઉકેલ : કુલ GST = CGST + SGST = 45 + 45 = 90 રૂપિયા.

∴ GSTનો દર = $\frac{90}{500}$ × 100 = 18%

કુરીયર સેવા આપતાં એજન્ટે 18% GST લગાડ્યો.

ઉદા. (3) શ્રીકરે 50,000 રૂપિયા છાપેલી કિંમતનો લૅપટૉપ લેવાનું નક્કી કર્યું. ત્યારે દુકાનદારે તેને આ કિંમત પર 10% છૂટ આપી. લૅપટૉપ પર GSTનો દર 18% છે. તો દુકાનદારે વસૂલ કરેલો CGST અને SGST શોધો. શ્રીકરને તે લૅપટૉપ કેટલા રૂપિયામાં મળ્યું ?

ઉકેલ : પહેલાં 'છૂટ' શોધીએ તે આપેલી કિંમતમાંથી બાદ કરીને બાકી રહેલી રકમ પર 18% GST પ્રમાણે ગણતરી કરીએ.

છૂટ = 50,000 રૂપિયા પર 10% = 5,000 રૂપિયા

∴ લૅપટૉપની કરપાત્ર કિંમત = 50,000 − 5,000 = 45,000 રૂપિયા.

∴ GST નો દર 18% તેથી CGSTનો દર = 9%

45,000 રૂપિયા પર 9% CGST = $\frac{9}{100}$ × 45,000 = 4,050 રૂપિયા.

∴ SGST = 4,050 રૂપિયા.

∴ લૅપટૉપની કુલ કિંમત = 45,000 + 4,050 + 4,050 = 53,100 રૂપિયા.

જવાબ : શ્રીકરને તે લૅપટોપ 53,100 રૂપિયામાં મળ્યું.

નોંધ : કરપાત્ર કિંમત (ટૅક્ષેબલ વેલ્યુ) એટલે જે કિંમત પર GST આકારવામાં આવે છે તે કિંમત ઈન્વૉઈસ વેલ્યુ એટલે GST સહિતની કુલ કિંમત. ઉદાહરણોમાં ઉલ્લેખ કર્યો ન હોય તો આપેલી કિંમત કરપાત્ર કિંમત સમજવી. જેટલો કેન્દ્રનો કર (CGST) હોય છે તેટલો જ રાજ્યનો કર (SGST) હોય છે.

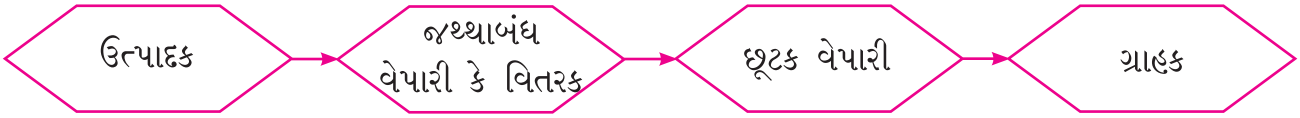
મહાવરાસંગ્રહ 4.1

1. 'પાવન મેડીકલ' દવાઓનો પુરવઠો કરે છે. તેમની દુકાનના કેટલીક દવાઓ પર GSTનો દર 12% છે તો CGST અને SGSTનો દર કેટલો થાય ?
2. એક વસ્તુ પર CGSTનો દર 9% છે તો SGSTનો દર કેટલો ? તે પરથી GSTનો દર કેટલો?
3. 'મેસર્સ રિયલ પેન્ટ'ના માલિકે લસ્ટર પેન્ટના 2 ડબ્બા ગ્રાહકને વેંચ્યા દરેક ડબ્બાની કરપાત્ર કિંમત 2,800 રૂપિયા હતી. GSTનો ગ્રાહક ને દર 28% છે. તો ટૅક્સ બિલમાં CGST અને SGST કેટલા રૂપિયા દર્શાવ્યો હશે ?
4. એક રિસ્ટ વૉચ બેલ્ટની કરપાત્ર કિંમત 586 રૂપિયા છે. GSTનો દર 18% છે તો તે બેલ્ટ ગ્રાહકને કેટલા રૂપિયામાં મળશે ?
5. રમકડાંની એક રીમોટ કન્ટ્રોલ કારની GST સહિતની કુલ કિંમત 1770 રૂપિયા છે. GSTનો દર 18% છે તો કારની કરપાત્ર કિંમત, તેના પરનાં CGST અને SGSTની ગણના કરો.
6. 'ટીપટૉપ ઈલેક્ટ્રોનિક્સ્' વાળાએ એક કંપનીને દોઢ ટનનું અને 51,200 રૂપિયાનું (કર સહિત કિંમત) ઍર કંડિશનર સપ્લાય કર્યુ. એરકંડિશનર પર CGSTનો દર 14% આકાર્યો તો ટૅક્સ ઈન્વૉઈસમાં નીચેની રકમો કેટલી દર્શાવી હશે ? તે શોધો.

   (1) SGSTનો દર (2) એર કંડિશનર પર GSTનો દર (3) એર કંડિશનરની કરપાત્ર કિંમત
   (4) GSTની કુલ રકમ (5) CGSTની રકમ. (6) SGSTની રકમ.
7. પ્રસાદે 'મહારાષ્ટ્ર ઈલેક્ટ્રોનિક્સ્ ગુડસ્' માંથી 40,000 રૂપિયા છાપેલી કિંમતનું વૉશિંગ મશીન વેંચાતુ લીધું. તેના પર દુકાનદારે 5% છૂટ આપી. GST નો દર 28% છે. તો પ્રસાદને તે વૉશિંગ મશીન કેટલા રૂપિયામાં મળ્યું હશે ? બિલ ઉપર CGST અને SGST કેટલા રૂપિયા હશે ? તે શોધો.

જાણી લઈએ.

વેપાર સાંકળની જી.એસ.ટી. (GST in Trading Chain)



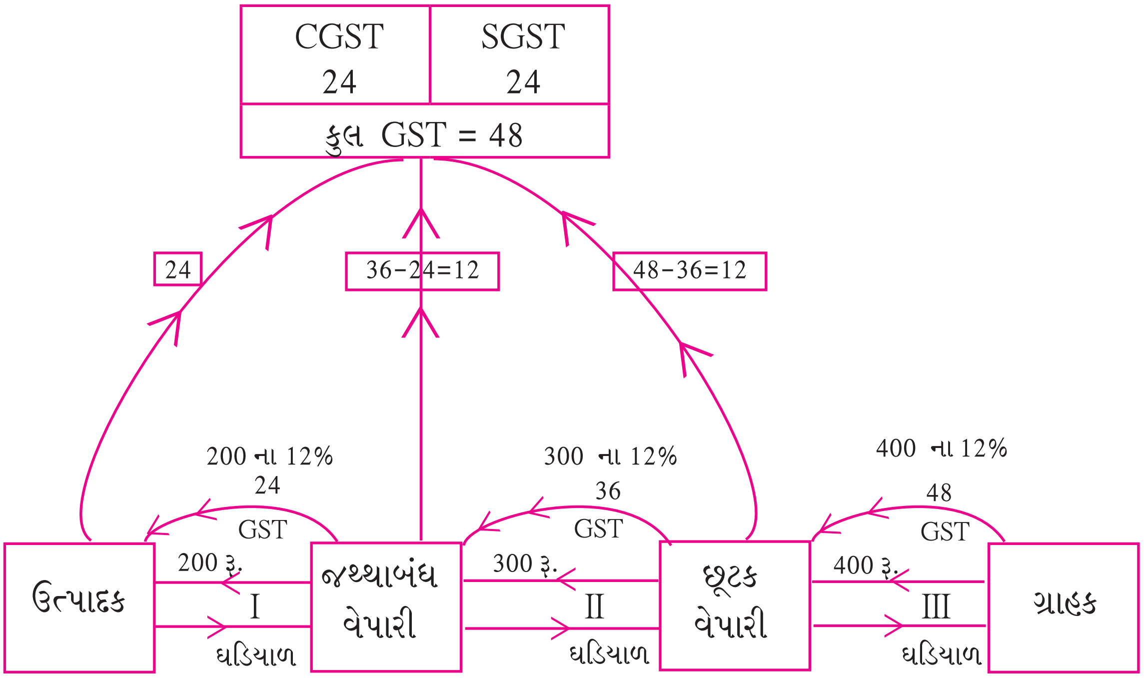
વેપાર સાંકળ (Trading Chain)

વેપાર સાંકળમાં જીએસટી કઈ રીતે આકારવામાં આવે છે તેમજ કેન્દ્ર તથા રાજ્ય સરકાર પાસે કર કેવી રીતે જમા થાય છે ? તે એક ઉદાહરણ દ્વારા જોઈએ.

ઉદા.: ધારોકે, એક ઉત્પાદકે, જથ્થાબંધ વેપારીને એક ઘડિયાળ નફા સહિત 200 રૂપિયામાં વેંચ્યુ. જથ્થાબંધ વેપારીએ, છૂટક વેપારીને 300 રૂપિયામાં અને છૂટક વેપારીએ ગ્રાહકને તે ઘડિયાળ 400 રૂપિયામાં વેંચ્યુ. GST નો દર 12% છે. તો ઉત્પાદક, જથ્થાબંધ વેપારી અને છૂટક વેપારી નીચે પ્રમાણે કરની કપાત (ITC) લઇને બાકીનો ટૅક્સ કેવી રીતે ભરે છે નીચેની પ્રવાહઆકૃતિ પરથી જાણી લો.

સ્પષ્ટીકરણ :

ઉત્પાદકથી ગ્રાહક સુધી ઘડિયાળ પહોંચે ત્યાંસુધી તેમાં ત્રણ વ્યવહાર થાય છે. દરેક વ્યવહારમાં થયેલી કર આકારણી, જમા થયેલો કર રાજ્ય સરકાર અને કેન્દ્ર સરકાર સુધી કેવી રીતે પહોંચે છે તે નીચેની પ્રવાહ આકૃતિમાં દર્શાવ્યું છે. તેની પૂરેપૂરી વિગત કોઠામાં દર્શાવી છે.



ઉપરોક્ત વેપારમાં ત્રણ જુદાં જુદાં આર્થિક વ્યવહાર એકજ રાજ્યમાં થયાં છે. વેપારીઓના કરબિલમાં GSTની આકારણી સમજ ખાતર ટૂંકમાં નીચે પ્રમાણે આપી છે.

કર બિલ I માં GST આકારણી		
ઘડિયાળની કિંમત	=	₹ 200
CGST 6%	=	₹ 12
SGST 6%	=	₹ 12
કુલ કિંમત	=	₹ 224

ઉત્પાદકનું કર-બિલ
(B2B)

કર બિલ II માં GST આકારણી		
ઘડિયાળની કિંમત	=	₹ 300
CGST 6%	=	₹ 18
SGST 6%	=	₹ 18
કુલ કિંમત	=	₹ 336

જથ્થાબંધ વેપારીનું કર-બિલ
(B2B)

કર બિલ III માં GST આકારણી		
ઘડિયાળની કિંમત	=	₹ 400
CGST 6%	=	₹ 24
SGST 6%	=	₹ 24
કુલ કિંમત	=	₹ 448

છૂટક વેપારીનું કર-બિલ
(B2C)

આ ધ્યાનમાં રાખો.

બે GSTIN ધારક વેપારીઓમાં થયેલાં વ્યવહારને Business to Business ટૂંકમાં **B2B** કહે છે. વસ્તુનું ઉત્પાદક થયા પછી તે ગ્રાહક સુધી પહોંચે છે. આ સાંકળમાંની અંતિમ કડીના વ્યવહારને Business to Consumer ટૂંકમાં **B2C** કહે છે.

આ વ્યવસાય સાંકળમાં દરેક વેપારીએ ભરેલાં GSTનું વિવરણ નીચે પ્રમાણે છે.

	CGST		SGST		કુલ GST
• ઉત્પાદકે	₹ 12	+	₹ 12	=	₹ 24 ભર્યાં.
• જથ્થાબંધ વેપારીએ	₹ 6	+	₹ 6	=	₹ 12 ભર્યાં.
• છૂટક વેપારીએ	₹ 6	+	₹ 6	=	₹ 12 ભર્યાં.
કુલ	₹ 24	+	₹ 24	=	₹ 48

નોંધ : તમારા ધ્યાનમાં આવ્યું કે ? દરેક વેપારીએ પોતપોતાના સ્તરે ભેગા કરેલાં કરમાંથી ખરીદી વખતે આપેલો કર બાદ કરીને ઈનપૂટ ટૅક્સ ક્રેડિટ (ચૂકવવા પાત્ર GST) ભર્યો. છેવટે ગ્રાહકને તે ઘડિયાળ 448 રૂપિયામાં મળી. તેમાંના 48 રૂપિયા ઉપર દર્શાવ્યા પ્રમાણે કર રૂપે સરકારને ગયા. એટલે અપ્રત્યક્ષ રીતે આ કર ગ્રાહકે જ ભર્યો. એટલે GST એ અપ્રત્યક્ષ કર (Indirect Tax) છે. તે પૂર્વે જથ્થાબંધ વેપારી અને છૂટક વેપારીએ તેમની ખરીદી વખતે ભરેલો ટૅક્સ તેમને પાછો મળી ગયો.

ખરીદી વખતે આપેલાં કરની કપાત (ITC–ઈનપૂટ ટૅક્સ ક્રેડિટ-નિવેશ કરની જમા રકમ) :

વસ્તુનું ઉત્પાદન થાય અને તે ગ્રાહક સુધી પહોંચે તે દરમ્યાન થયેલાં દરેક વ્યવહારમાં GST આકારવામાં આવે છે. વસ્તુ વેંચતી વખતે વેપારીએ એકત્રિત કરેલો કર એટલે આઉટપુટ ટૅક્સ. તે જ વેપારીએ ખરીદી વખતે (દીધેલો-આપેલો) કર એટલે ઈનપૂટ ટૅક્સ. આ વેપારી ભેગા કરેલા કરમાંથી, પોતે દીધેલા કરની કપાત લે છે તેને ઈનપૂટ ટૅક્સ ક્રેડિટ કહે છે.

∴ ચૂકવવા પાત્ર GST = આઉટપુટ ટૅક્સ –ઈનપૂટ ટૅક્સ ક્રેડિટ (ITC)

ટૂંકમાં જ્યારે સરકારને કર આપવાનો હોય એટલે કે રીટર્ન ભરતી વખતે સાંકળમાંના દરેક વેપારી પોતે ખરીદી વખતે દીધેલો કર, વેંચાણ વખતે લીધેલાં કરમાંથી બાદ કરે છે અને બાકીનો કર ભરે છે.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) શ્રી. રોહિત છૂટક વેપારી છે. તેમણે માલની ખરીદી વખતે 6,500 રૂપિયા જીએસટી આપ્યો અને તે માલનું વેચાણ કરીને 8,000 રૂપિયા જીએસટી ભેગો કર્યો, તો (i) ઈનપૂટ ટૅક્સ અને આઉટપુટ ટૅક્સ કેટલો? (ii) શ્રી. રોહિતને ઈનપૂટ ટૅક્સ ક્રેડિટ કેટલા રૂપિયા મળશે? (iii) તેમનો ચૂકવવા પાત્ર GST શોધો. (iv) તે પરથી ચૂકવવા પાત્ર CGST અને SGST શોધો.

ઉકેલ : શ્રી. રોહિતને ચૂકવવા પાત્ર GST એટલે સરકારને આપવાનો કર

(i) આઉટપુટ ટૅક્સ (વેચાણ વખતે ભેગો કરેલો કર) = 8,000 રૂપિયા

(ii) ઈનપૂટ ટૅક્સ (ખરીદી વખતે આપેલો કર) = 6,500 રૂપિયા

એટલે ઈનપૂટ ટૅક્સ ક્રેડિટ (ITC) = 6,500 રૂપિયા

(iii) ચૂકવવા પાત્ર GST = આઉટપુટ ટૅક્સ – ઈનપૂટ ટૅક્સ ક્રેડિટ (ITC)

= 8,000 – 6,500 = 1,500 રૂપિયા

(iv) $\therefore$ ચૂકવવા પાત્ર CGST = $\frac{1500}{2}$ = 750 રૂપિયા અને તે જ પ્રમાણે SGST = 750 રૂપિયા.

ઉદા. (2) મેસર્સ જય કેમીકલ્સે 8,000 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતનો લિક્વિડ સૉપ ખરીદ કર્યો અને ગ્રાહકને તે 10,000 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતે વેંચ્યો જીએસટીનો દર 18% છે. તો મેસર્સ જય કેમીકલ્સનો ચૂકવવા પાત્ર CGST અને SGST શોધો.

ઉકેલ : ખરીદી વખતે આપેલો (ઈનપૂટ ટૅક્સ) = 8,000 રૂપિયાની ખરીદી પર 18% ના દરે ભરેલો ટૅક્સ

$= \frac{18}{100} \times 8,000$

= 1,440 રૂપિયા

$\therefore$ ITC = 1,440 રૂપિયા

આઉટપુટ ટૅક્સ = વેચાણ વખતે ગ્રાહકપાસેથી ભેગો કરેલો GST

$= \frac{18}{100} \times 10,000$

= 1,800 રૂપિયા

ચૂકવવા પાત્ર GST = આઉટપુટ ટૅક્સ – ITC

= 1800 – 1440 = 360 રૂપિયા

મે. જય કેમિકલ્સનો ચૂકવવા પાત્ર CGST = 180 રૂપિયા અને SGST = 180 રૂપિયા

ઉદા. (3) મે. જય કેમિકલ્સે 8,000 રૂપિયાનો (GST સહિત કિંમત) લિક્વિડ સૉપ ખરીદ કર્યો અને ગ્રાહકને 10,000 રૂપિયામાં (GST સહિત કિંમત) વેંચ્યો. તો જય કેમિકલ્સનો ચૂકવવા પાત્ર CGST અને SGST શોધો. GSTનો દર 18% છે.

ઉકેલ : અહીં વસ્તુની કિંમત GST સહિત આપી છે તે ધ્યાનમાં લો.

વસ્તુ કે માલની કુલ કિંમત = કરપાત્ર કિંમત + GST

એટલે કે લિક્વિડ સોપની 100 રૂપિયા ખરીદ કિંમત હોય તો 118 રૂપિયા વેચાણ કિંમત થાય.

$$\frac{\text{કરસહિત કિંમત}}{\text{કરપાત્ર કિંમત}}$$ આ ગુણોત્તર અચળ છે.

118 રૂપિયા વેચાણ કિંમત થાય જો 100 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમત હોય તો 8000 રૂપિયાની કુલ કિંમત માટે, ધારોકે x રૂપિયા કરપાત્ર કિંમત છે.

$\therefore \frac{x}{8,000} = \frac{100}{118}$

$\therefore x = \frac{8,000}{118} \times 100 = 6,779.66$ રૂપિયા.

$\therefore$ ખરીદી વખતે આપેલો GST = 8,000 − 6,779.66

$\therefore$ ઈનપૂટ ટૅક્સ= 1,220.34 રૂપિયા. $\therefore$ ITC = 1,220.34 રૂપિયા.

તે જ પ્રમાણે 10,000 ની કુલ કિંમત માટે, ધારોકે y રૂપિયા કરપાત્ર કિંમત છે.

$\therefore \frac{y}{10,000} = \frac{100}{118}$

$\therefore y = \frac{10,00,000}{118} = 8,474.58$ રૂપિયા.

$\therefore$ વેચાણ વખતે એકત્રિત કરેલો કર (આઉટપુટ ટૅક્સ) = 10,000.00 − 8,474.58
= 1,525.42 રૂપિયા.

$\therefore$ ચૂકવવા પાત્ર કર = આઉટપુટ ટૅક્સ − ઈનપૂટ ટૅક્સ ક્રેડિટ (ITC) = 1,525.42 − 1,220.34
= 305.08 રૂપિયા.

$\therefore$ ચૂકવવા પાત્ર CGST= ચૂકવવા પાત્ર SGST = 305.08 ÷ 2 = 152.54 રૂપિયા.

જવાબ : મે. જય કેમિકલ્સનો ચૂકવવા પાત્ર CGST અને SGST દરેક 152.54 રૂપિયા છે.

નોંધ : ઉદા.2 અને 3 નો કાળજીપૂર્વક અભ્યાસ કરો. વ્યવહારમાં તમને આવા બન્ને પ્રકારના કર બિલ (Tax Invoice) જોવા મળે છે. એટલે દુકાનદારે વસ્તુની છાપેલી કિંમત કરસહિત છે કે પછી તે કિંમત પર કર આકારશે ? તે ખરીદી કરતાં પહેલાં જાણી લો. પછી ખરીદી કરો.

ICT Tools or Links

નિશ્ચિત તારીખ સુધીમાં કરની ચૂકવણી કરીને તે પછી આપેલી સમયાવધિમાં કર વિવરણપત્ર (GST Returns) દાખલ કરવું જરૂરી છે. આ બધી બાબતો હવે ‘ઓનલાઈન’ (Online) થઈ શકે છે. www.gst.gov.in આ વેબસાઈટ પર બધાં વિવરણ પત્રકો તમે જોઈ શકો છે. (જીએસટી વિવરણ પત્રો તૈયાર કરવા માટે ‘ઑફલાઈન યુટીલિટી’ પણ વાપરી શકાય છે.)

ઉદા. **(4)** એક સાઈકલના ઉત્પાદકે, જથ્થાબંધ વેપારીને એક સાઈકલ 4,000 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતમાં વેંચી. જથ્થાબંધ વેપારીએ તે સાઈકલ 4,800 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમત લઈ દુકાનદારને વેંચી. દુકાનદારે 5,200 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતમાં ગ્રાહકને વેંચી. GST નો દર 12% છે. તો વેચાણના દરેક તબક્કે ચૂકવવા પાત્ર CGST અને SGST શોધવા આપેલી કૃતિ પૂર્ણ કરો.

ઉકેલ : વ્યવસાય સાંકળ :

[ ] —₹ 4,000 (12%)→ [ ] —₹ 4,800 (12%)→ [ ] —₹ 5,200 (12%)→ [ ]

ઉત્પાદકે વેચાણ વખતે એકત્રિત કરેલો કર = 4000 ના 12%= $\boxed{. . . \times \frac{. . .}{. . .}}$ = [ ]

જથ્થાબંધ વેપારીએ વેચાણ વખતે એકત્રિત કરેલો કર = 4,800 ના 12% = [576 રૂપિયા]

∴ જથ્થાબંધ વેપારીનો ચૂકવવા પાત્ર વેરો (કર) = (જથ્થાબંધ વેપારીએ એકત્રિત કરેલો કર) − (તેના દ્વારા લેવામાં આવેલી કપાત)

= [576] − [480]

= [96] રૂપિયા

દુકાનદારે વેચાણ વખતે એકત્રિત કરેલો કર = 5,200 ના 12% = [ ]

∴ દુકાનદારનો ચૂકવવા પાત્ર GST = દુકાનદારે એકત્રિત કરેલો કર − દુકાનદારની દ્વારા લેવામાં આવેલી કપાત

= [ ] − [ ]

= [ ]

વ્યવસાય સાંકળમાં GST ભરેલો ટૅક્સ (કર વેરા)નું વિવરણ :

વ્યક્તિ	ચૂકવવા પાત્ર GST	ચૂકવવા પાત્ર CGST	ચૂકવવા પાત્ર SGST
ઉત્પાદક	480 ₹	240 ₹	[ ] ₹
જથ્થાબંધ વેપારી	96 ₹	[ ] ₹	[ ] ₹
દુકાનદાર	[ ] ₹	[ ] ₹	[ ] ₹
કુલ	[ ] ₹	[ ] ₹	[ ] ₹

વિચાર કરીએ.

- ધારોકે કોઈ વેપારીનો જુલાઈ મહિનાનો એકત્રિત કરેલો કર અને કપાતની રકમ સમાન છે તો તેનો ચૂકવવા પાત્ર કર કેટલો થશે ?
- ધારોકે, કોઈ વેપારીએ એકત્રિત કરેલો જુલાઈ મહિનાનો એકત્રિત કરેલો કર, તેની કપાતની રકમ કરતાં ઓછો છે તો તેની કર ગણતરી કેવી રીતે થશે ?

મહાવરાસંગ્રહ 4.2

(1) 'ચેતના સ્ટોર્સે' 01 જુલાઈ, 2017 થી 31 જુલાઈ, 2017 સુધી કરેલી ખરીદી વખતે 1,00,500 રૂપિયા જીએસટી આપ્યો અને વેચાણ વખતે 1,22,500 રૂપિયા જીએસટી એકત્રિત કર્યો. તો આ સમયગાળા માટે ચેતના સ્ટોર્સનો ચૂકવવા પાત્ર જીએસટી શોધો.

(2) નઝમા જીએસટી કાયદા અંતર્ગત ફર્મના માલિક (પ્રોપ્રાયટર) છે. તેમણે માલની ખરીદી પર 12,500 રૂપિયા જીએસટી આપ્યો હતો અને વેચાણ પર 14,750 રૂપિયા જીએસટી એકત્રિત કર્યો. તો તેમને કેટલા રૂપિયા ઈનપૂટ ટૅક્સ ક્રેડિટ (ITC) મળશે ? તેમજ તેમનો ચૂકવવા પાત્ર GST શોધો.

(3) આમીર એન્ટરપ્રાઈઝે ચૉકલેટ સૉસની બાટલીઓ ખરીદ કરી ત્યારે 3,800 રૂપિયા GST ભર્યો. તે બાટલીઓ અકબરી બ્રધર્સને વેંચતી વખતે 4,100 રૂપિયા જીએસટી લીધો. મયંક ફૂડ કોર્નરે, અકબરી બ્રધર્સ પાસેથી તે બાટલીઓ 4,500 રૂપિયા જીએસટી ભરીને ખરીદ કરી. તો દરેક તબક્કે ચૂકવવા પાત્ર જીએસટી શોધો. પ્રત્યેકને ચૂકવણી કરવા માટે કેન્દ્રને ચૂકવવા યોગ્ય કર (CGST) અને રાજ્યને ચૂકવવા યોગ્ય કર (SGST) શોધો.

(4) ચંદીગઢ એ સંઘરાજ્ય છે. અહીં 'મલિક ગૅસ એજન્સી' એ વ્યાવસાયિક ઉપયોગ માટે કેટલીક ગૅસની ટાંકીઓ 24,500 રૂપિયામાં ખરીદ કરી અને ત્યાંના ગ્રાહકોને 26,500 રૂપિયામાં વેંચી. આ વ્યવહારમાં જીએસટીનો દર 5% છે. તો કર બિલમાં કુલ GST કેટલો હશે ? તે શોધો. તે પરથી કેન્દ્રને ચૂકવવા યોગ્ય કર (CGST) અને સંઘરાજ્યને ચૂકવવા યોગ્ય કર (UTGST)ની રકમ શોધો. (સંઘરાજ્યમાં SGST ને બદલે UTGST હોય છે.)

(5) મે. બ્યુટી પ્રોડક્ટસે્ 6,000 રૂપિયા પર 18%ના દરે જીએસટી આપીને સૌંદર્ય પ્રસાધનોની ખરીદી કરી અને એક જ ગ્રાહકને તે 10,000 રૂપિયામાં વેંચી દીધાં. તો આ વ્યવહારમાં મે.બ્યુટી પ્રોડક્ટસે્ તૈયાર કરેલા ટૅક્સ ઈન્વૉઈસમાં કેન્દ્રને અને રાજ્યને (CGST અને SGST) વસ્તુ અને સેવા કરની રકમ કેટલી દર્શાવી હશે ? તે શોધો.

(6) નીચે આપેલી માહિતી પરથી દુકાનદાર તરફથી ગ્રાહક (B2C) માટેનું ટૅક્સ ઈન્વૉઈસ તૈયાર કરો. બિલ (Tax Invoice) માટે નામ, સરનામું, રાજ્ય તારીખ વગેરે તમારી પસંદ અનુસાર લો.

પુરવઠાદાર : મે.__________ સરનામું __________ રાજ્ય __________ તારીખ __________

ઈન્વૉઈસ ક્રમાંક : __________ GSTIN __________

વસ્તુનું વર્ણન (વિગત) :	મોબાઈલ બૅટરી	: દર ₹ 200, 1 નંગ	GST નો દર 12%	HSN 8507
	હેડફોન	: દર ₹ 750, 1 નંગ	GST નો દર 18%	HSN 8518

(7) નીચે આપેલી માહિતી પરથી એક વેપારી તે બીજા વેપારી (B2B) માટેનો ટૅક્સ ઈન્વૉઈસ તૈયાર કરો. તે માટે નામ, સરનામું, તારીખ વગેરે તમારી પસંદ પ્રમાણે લો.

પુરવઠાદાર - નામ, સરનામું, રાજ્ય, GSTIN, બિલ નંબર, તારીખ.

પ્રાપ્તકર્તા - નામ, સરનામું, રાજ્ય, GSTIN.

વસ્તુનું વર્ણન (વિગત) : (1) પેન્સીલ બૉક્સ 100, HSN 3924, દર 20 રૂપિયા, GST 12%,
(2) જીગ્સૉ પઝલ્સ 50, HSN 9503, દર 100 રૂપિયા, GST 12%.

અધિક માહિતી માટે

સંયુક્ત રચના યોજના (Composition Scheme)

જે વ્યક્તિના વ્યવસાયનો પાછલાં નાણાકીય વર્ષમાં કુલ વકરો (ટર્ન ઑવર) 1.5 કરોડ રૂપિયાથી ઓછો છે તેમના માટે સંયુક્ત રચના યોજના (Composition Scheme) છે. આ યોજના અંતર્ગત કરદાતા શાસન દ્વારા નિશ્ચિત કરેલા દર પ્રમાણે કરની ચૂકવણી કરે છે.

સંયુક્ત રચના યોજના માટે કરનાં દર (GST rates for composition Scheme)

અ.ક્ર.	પુરવઠાદાર	જીએસટીનો દર	(CGST + SGST)
1.	ઉપાહારગૃહો	5%	2.5% + 2.5%
2.	ઉત્પાદક અને વિક્રેતા	1%	0.5% + 0.5%

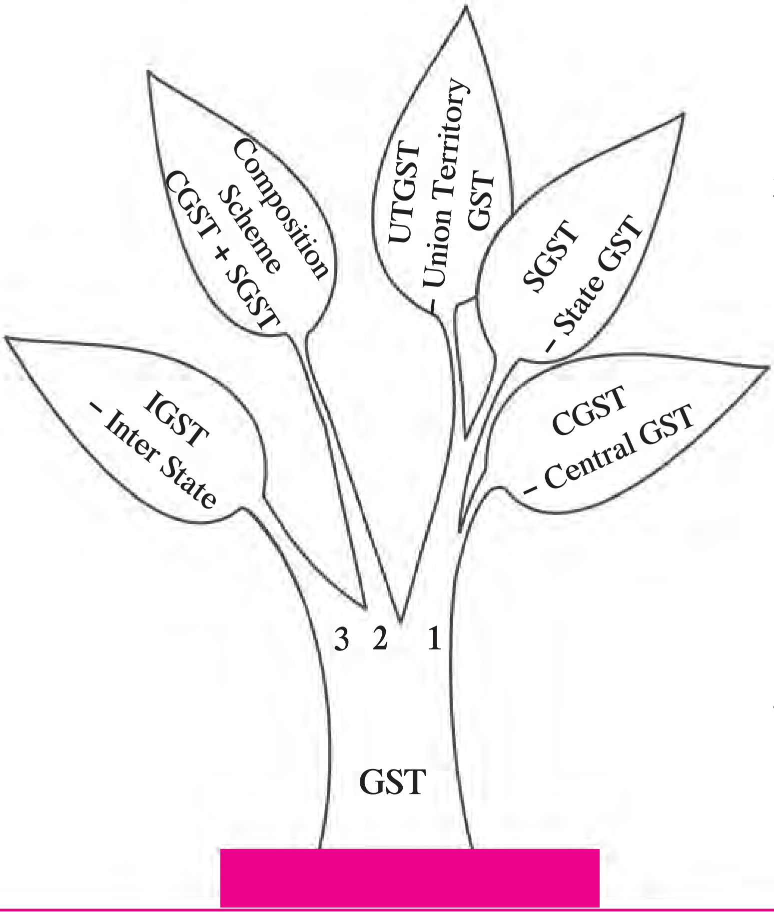
સંયુક્ત રચના યોજના લેનાર વેપારી માટે નિયમો :

- સંયુક્ત રચના યોજના લેનાર વેપારી, કરેલાં વેચાણ પર કરવેરા લઈ શકશે નહિ એટલે આ યોજના લેનાર વેપારી ટૅક્સ ઈન્વૉઈસ આપી શકે નહીં. તેમણે પુરવઠા-બિલ (Bill of supply) આપવાનું રહેશે.
- વેપારીએ દર 3 મહિને કરેલાં વેચાણ પરનો કર ઉપરના કોષ્ટક પ્રમાણે સરકારમાં જમા કરાવવાનો હોય છે.
- આ યોજનામાં વેપારી બીજા રાજ્યમાં વેચાણ કરી શકશે નહીં. પરંતુ બીજા રાજ્યના વેપારી પાસેથી ખરીદી કરી શકશે.
- આ યોજનાના વેપારીને ખરીદી પર નિવેશ કરની કપાત રકમ એટલે ITC (ઈનપૂટ ટૅક્સ ક્રેડિટ)નો લાભ મળશે નહીં.
- આ યોજનાના વેપારીએ પોતાના દુકાનના પાટિયા (Display Board) પર 'સંયુક્ત કરપાત્ર વ્યક્તિ' (Composition taxable person) એમ લખવાનું રહેશે.
- આ યોજનાના વેપારીએ તેમના પુરવઠા બિલમાં (Bill of supply) પણ ઘાટાં અક્ષરે 'સંયુક્ત કરપાત્ર વ્યક્તિ, ટૅક્સ ઉઘરાવવા માટે અપાત્ર' (Composition taxable person not eligible to collect tax on supplies) એમ છપાવવાનું હોય છે.

GST ની વિશેષતાઓ (Features of GST)

- વિવિધ અપ્રત્યક્ષ કર નાબૂદ થયા.
- વસ્તુ અને સેવા વિશેષના વિવાદનો અંત.
- વેપારીઓ માટે રાજ્યનુસાર નોંધણી.
- GSTIN (જીએસટીઆયએન) ધારક વેપારીઓએ કરેલાં વ્યવહારની વ્યસ્થિત નોંધ (Record) રાખી સમયસર GST ભરવો પડે છે.
- વ્યવહારમાં પારદર્શકતા.
- સાદુ સમજવામાં સહેલું કર માળખું.
- કર ઉપર કર ભરવા પડતાં નથી. તેથી વસ્તુ અને સેવાની કિંમતો નિયંત્રણમાં.
- વસ્તુ અને સેવાની આંતરરાષ્ટ્રીય બજાર સાથે તુલના તેથી ગુણવત્તામાં વધારો.
- 'મેક ઈન ઈન્ડિયા' ને ગતિ મળશે.
- કર પ્રણાલિ તંત્રજ્ઞાન આધારિત હોવાથી ત્વરિત નિર્ણયો લેવામાં મદદ.
- વસ્તુ અને સેવા કર એ બેવડું મૉડેલ (Dual model) છે એટલે કે કેન્દ્ર અને રાજ્ય બન્ને દ્વારા વસુલવામાં સમાન અને સમાંતર કર માળખું.

વસ્તુ અને સેવા કર (GST) અંતર્ગત આવતાં કરનાં પ્રકાર



1. **CGST–SGST (UTGST) :**
   એક જ રાજ્યમાં ખરીદ–વેચાણ કરતાં વેપારીઓ માટે.
2. **સંયુક્ત રચના યોજના (Composition Scheme) :**
   જેમનો વાર્ષિક વકરો 20 લાખથી 1.5 કરોડ રૂપિયાની વચ્ચે હોય તેવા વેપારીઓ આ યોજનાનો લાભ લે છે. તેઓને SGST અને CGST અલગ દરથી આપવું પડે છે.
   આ વેપારીઓને SGST અને CGST આપવાનો હોય છે.
3. **IGST :**
   આંતરરાજ્ય (Inter State) વ્યવહાર કરતાં વેપારીઓ માટે.

અધિક માહિતી માટે

એકત્રિત/સંકલિત વસ્તુ અને સેવા કર – IGST (Integrated GST)

જ્યારે વસ્તુનો પુરવઠો કે સેવા પૂરી પાડવાનો વ્યવહાર બે જુદાં જુદાં રાજ્યોના વેપારી વચ્ચે (Inter state) જે લગાડવામાં આવે છે તેને સંકલિત વસ્તુ અને સેવા કર IGST કહે છે, જે પૂર્ણપણે કેન્દ્ર સરકારને આપવાનો હોય છે.

ધારોકે, એક રાજ્યના વેપારીએ બીજા રાજ્યના વેપારી પાસેથી વસ્તુ ખરીદ કરી અને પોતાના રાજ્યમાં વેંચી. તો ખરીદી વખતે ચૂકવવાપાત્ર કરની ગણના ITC માટે ભરેલા IGST ની ક્રેડિટ કેવી રીતે મળશે ? તે જોઈએ.

ઉદાહરણાર્થ : દા.ત. વેપારી M એ (મહારાષ્ટ્રના) 20,000 રૂપિયાના સ્કુટર સ્પેઅર પાર્ટસ્ વેપારી P (પંજાબ) પાસેથી ખરીદ કર્યાં. તે વખતે 28% ના દરે 5600 રૂપિયા 'સંકલિત વસ્તુ અને સેવાકર' (IGST) પેટે વ્યાપારી P ને દીધાં.

M એ આ બધા સ્પેઅર પાર્ટસ્ - અહીંના ગ્રાહકોને 25,000 રૂપિયામાં વેંચ્યા. તે વખતે 28% ના દરે 7,000 રૂપિયા GST એકત્રિત કર્યો.

GST 7,000 રૂપિયા = CGST 3,500 રૂપિયા + SGST 3,500 રૂપિયા ગ્રાહક પાસેથી એકત્રિત કર્યો.

હવે સરકારમાં કર ભરતી વખતે તે 5,600 રૂપિયાની કપાત (ITC) કેવી રીતે લેશે ? તે જોઈએ.

નોંધ : IGST ની ક્રેડિટ લેતી વખતે પ્રથમ IGST માટે, પછી CGST માટે અને છેલ્લે બાકી રહેલી ક્રેડિટ SGST માટે લેવામાં આવે છે. અહીં M એ કરેલાં વેચાણના વ્યવહારમાં IGST નથી એટલે પહેલાં CGST માટે જરૂરી ક્રેડિટ લઇ બાકીની SGST માટે ક્રેડિટ લેવી.

∴ ચૂકવવા પાત્ર CGST = 3,500 – 3,500 = 0 રૂપિયા

એટલે 5,600 રૂપિયામાંથી 3,500 રૂ. ક્રેડિટ લઇ લીધી હવે બાકીના 5,600 – 3,500 = 2,100 રૂપિયાના ક્રેડિટ SGST માટે લઇ શકાશે.

∴ ચૂકવવા પાત્ર SGST = 3,500 – 2,100 = 1,400 રૂપિયા

વેપારી 'M' ને 1,400 રૂપિયા SGST ભરવો પડશે.

ધ્યાનમાં લો કે, વેપારી M ને ખરીદી વખતે દીધેલાં 5,600 રૂપિયાની પૂરેપૂરી ક્રેડિટ (ITC) મળી. (એટલે કે ઈનપૂટ ટૅક્સની પૂર્ણ ક્રેડિટ મળી.)

ITC આ રીતે લેવાય છે.

ખરીદી વખતે દીધેલો કર (ITC) — વેચાણ વખતે એકત્રિત કરેલો કર (Output Liability)

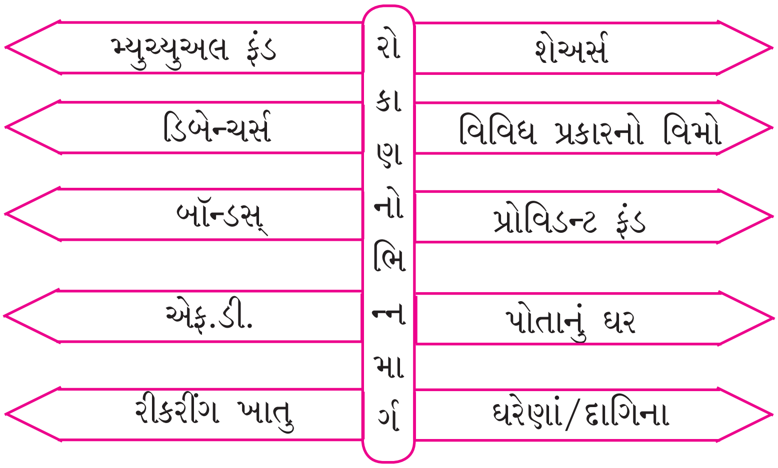
IGST ની ક્રેડિટ લેતી વખતે (₹ 5,600)
- પ્રથમ (₹ 0) → IGST માટે વાપરી શકાય.
- પછી (₹ 3,500) → CGST માટે વાપરી શકાય.
- છેલ્લે (₹ 2,100) → SGST માટે વાપરી શકાય. (તેથી ઉદા.માં ₹ 1,400 SGST ભરવો પડશે.)

યાદ કરીએ.

ગયા વર્ષે આપણે બચત અને રોકાણનું મહત્ત્વ જાણ્યું. તે પ્રમાણે જેટલું શક્ય હોય તેટલું અમલમાં મૂકવાનું પણ તમે શરૂ કર્યું હશે - કારણ હંમેશા નિરોગી રહેવા માટે જેમ શરીરને આરોગ્યની સારી આદતોની જરૂર છે તેમ આર્થિક આરોગ્ય માટે બચત અને રોકાણની આદત પાડવી પડે છે. હાલ રોકાણના પ્રકારોમાં એટલી બધી વિવિધતા છે કે, તેનો અભ્યાસ અને અનુભવ બન્ને હોવા જરૂરી છે.

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

શ્વેતા એક કંપનીમાં નોકરી કરે છે. આ મહિનાથી તેનો પગાર 5% વધ્યો અને પછીના મહિનામાં તેને બોનસ પણ મળવાનું છે. પગારમાં થયેલો આ વધારો તે યોગ્ય ઠેકાણે રોકવાનો વિચાર કરે છે. તેની સખી નેહા એક આર્થિક સલાહકારને ત્યાં નોકરી કરે છે તેથી તે રોકાણ બાબત પોતાની સખીને યોગ્ય સલાહ તે આપી શકે. શ્વેતા પોતાના વધેલા પગારની રકમ ક્યાં અને કેવી રીતે રોકવી, તે નેહાને પૂછે છે. ત્યારે નેહા કહે છે, ‘‘આપણા રોકાણમાં વૈવિધ્ય હોવું ખૂબ જરૂરી છે. જેમ કે જીવનવિમો, આરોગ્ય વિમો, પોતાનું ઘર હોવું, બેંકમાં એફ.ડી., રીકરીંગ ખાતુ હોવું વગેરે બધી બાબતોનો વિચાર કરવો.’’ શ્વેતા કહે છે, ‘‘મારો વિમો તો ઉતરાવેલો છે, બેંકમાં એફ.ડી. પણ છે. તે ઉપરાંત પગારમાંથી પ્રોવિડન્ટ ફંડ કપાત પણ ચાલુ છે. તે સિવાય બીજાં ક્યા માર્ગો છે ?’’ નેહા કહે છે, ‘‘હાલ શેઅર્સ, મ્યુચ્યુઅલ ફંડ (MF), ડિબેન્ચર્સ, બૉન્ડસ વગેરેમાં રોકાણ કરનારાંની સંખ્યા વધી રહી છે. તે સાથે જ SIP કરવા તરફ પણ રોકાણકારોનો ઝૂકાવ વધારે છે. તને તો હવે દર મહિને વધારાની નિશ્ચિત રકમ મળવાની છે. તે રકમની તું SIP એટલે કે Systematic Investment Plan કરી શકે છે.’’



આ પ્રકારના સંવાદ આપણે ઠેકઠેકાણે સાંભળતા હોઇએ છીએ. તેથી આ બાબતની પૂરે પૂરી માહિતી હોવી આપણાં સૌ માટે ‘બહુજન હિતાય, બહુજન સુખાય’ બની શકે છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે શેઅર્સ, મ્યુચ્યુઅલ ફંડસ્ (MF) અને SIP ની માહિતી મેળવીશું.

જાણી લઈએ.

શેઅર્સ (Shares)

વ્યક્તિની પોતાની એકલાની માલિકીની દુકાન હોય તેને કહેવાય પ્રોપ્રાયટરશીપ. બે-ચાર વ્યક્તિઓ ભેગાં મળીને વેપાર કરે તેને કહેવાય પાર્ટનરશીપ. આમાં રોકાણ ઓછું જોઇએ. પરંતુ જો એકાદ કંપની, ઉદ્યોગ કે કારખાનું શરૂ કરવું હોય તો ખૂબ મોટા પ્રમાણમાં મૂડીની જરૂર પડે છે. આ મૂડી સમાજમાંથી ઊભી કરવી પડે છે.

કારખાનું કે કંપની શરૂ કરવા માટે ઇચ્છુક વ્યક્તિઓ સાથે મળીને કંપની સ્થાપે છે. ભારતીય કંપની કાયદો 1956 પ્રમાણે, કંપનીની નોંધણી (Registration) કરવામાં આવે છે. કંપનીની સ્થાપના કરનાર વ્યક્તિઓને કંપનીના **પ્રમોટર્સ (પ્રવર્તકો)** કહે છે. આવી કંપની એટલે જ મર્યાદિત **(પબ્લિક લિમિટેડ)** કંપની.

કંપની શરૂ કરવા માટે જેટલાં પૈસાની જરૂર પડે છે તેને **મૂડી (Capital)** કહે છે. આ મૂડીના નાના નાના સમાન ભાગ કરવામાં આવે છે. આ ભાગ સામાન્ય રીતે ₹ 1, ₹ 2, ₹ 5, ₹ 10 અથવા ₹ 100 વગેરે કિંમતના હોય છે. આ દરેક ભાગને શેઅર કહે છે. આ શેઅર્સ વેંચીને કંપની જરૂરી મૂડી સમાજમાંથી ઊભી કરે છે.

શેઅર (Share) : કંપનીની મૂડીની એક ભાગ એટલે એક શેઅર. શેઅર્સ સર્ટિફિકેટ (share certificate) પર એક શેઅર્સની કિંમત, શેઅર્સની સંખ્યા, અનુક્રમાંક વગેરે છાપેલાં હોય છે.

શેઅર ધારક અથવા ભાગ ધારક-(Share holder) : કંપનીના શેઅર્સ વેંચાતા લેનારી વ્યક્તિ તે કંપનીની ભાગધારક કે શેઅરધારક બને છે. શેઅર ધારક તેની પાસેના શેઅર્સના પ્રમાણમાં તે કંપનીનો માલિક હોય છે.

સ્ટૉક એક્સચેન્જ (Stock Exchange) : જ્યાં શેઅર્સનું ખરીદ-વેચાણ થાય છે, તેને શેઅર બજાર (સ્ટૉક એક્સચેન્જ અથવા સ્ટૉક માર્કેટ અથવા ઇક્વિટી માર્કેટ, કૅપીટલ માર્કેટ અથવા શેઅર માર્કેટ) કહે છે. સમાજમાંથી મૂડી ઊભી કરીને શરૂ કરી હોય એટલે પબ્લિક લિમીટેડ કંપની શેઅર બજારમાં સૂચિબદ્ધ (listed company) કંપની હોવી જરૂરી છે.

દાર્શનિક કિંમત (Face Value - FV) : કંપનીના શેઅર સર્ટિફિકેટ ઉપર છાપેલી એક શેઅરની કિંમતને શેઅરની દાર્શનિક કિંમત (FV) કહે છે.

બજાર ભાવ (Market Value - MV) : જે કિંમતથી શેઅર બજારમાં શેઅર્સનું ખરીદ-વેચાણ થાય છે તેને તે એક શેઅર્સનો બજારભાવ (MV) કહે છે.

કંપનીની સ્થાપના થયા પછી, તેની કામગિરી અપેક્ષા કરતાં સરસ હોય ત્યારે તે શેઅરની બજારમાં માંગણી વધે છે. પરંતુ શેઅર્સની સંખ્યા નિશ્ચિત હોય છે તેથી 'પૂરવઠો' વધારી શકાતો નથી. તેથી શેઅરનો બજારભાવ વધતો જાય છે. એથી ઉલ્ટું જો કંપનીની કામગિરી ઉતરતી હોય તો શેઅરના બજારભાવ પણ ઘટે છે. આ વધ-ઘટ અનુક્રમે ▲, ▼ આ ચિહ્નો દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. આ વધ-ઘટને પરિણામે શેઅર બજારનો નિર્દેશાંક પણ વધતો-ઘટતો રહે છે.

શેઅર બજારમાં શેઅર્સના ભાવ દરેક ક્ષણે બદલાતાં રહે છે.

લાભાંશ (Dividend) : કંપનીને નાણાંકીય વર્ષમાં થયેલાં નફાની વહેંચણી દરેક શેઅર ધારકને શેઅર્સનો સંખ્યાના પ્રમાણમાં કરવામાં આવે છે. શેઅર ધારકોને મળતો નફાનો ભાગ (લાભનો અંશ) એટલે લાભાંશ.

કંપનીની કામગિરી ઉત્તમ હોય તો પરિણામે કંપનીની માલમત્તામાં પણ વધારો થાય છે. તેથી લાભાંશ પણ સારો મળે છે.

શેઅર ધારકોને મળતાં લાભાંશ પર આવકવેરો ભરવો પડતો નથી.

આ ધ્યાનમાં રાખો.

શેઅરનો બજારભાવ ગમે તેટલો વધે કે ઘટે છતાં વર્ષના અંતે મળતો લાભાંશ હંમેશા શેઅરની સંખ્યાના પ્રમાણમાં (દાર્શનિક કિંમત પર) મળે છે.

અધિક માહિતી માટે :

મુંબઈમાં આવેલ **મુંબઈ શેઅર બજાર (BSE–Bombay Stock Exchange)** અને **રાષ્ટ્રીય શેઅર બજાર (NSE–National Stock Exchange)** આ બે ભારતના મુખ્ય શેઅર બજાર છે. મુંબઈ શેઅર બજાર એશિયાનું સૌથી જૂનું અને રાષ્ટ્રીય શેઅર બજાર ભારતનું સૌથી મોટું શેઅર બજાર છે.

શેઅર બજારમાં થતી વધ-ઘટ સમજવા માટે SENSEX અને NIFTY એમ બે મુખ્ય નિર્દેશાંકો (Index) છે. SENSEX = **SENS**itive + ind**EX** આ બે શબ્દોથી બનેલો છે. BSE એ 1-1-1986 થી SENSEX દર્શાવવાનું શરૂ કર્યું. સૌથી વધુ મૂડી ધરાવતી નામાંકિત અને પ્રસ્થાપિત એવી 30 કંપનીઓના બજાર ભાવમાં થતી વધ-ઘટ અનુસાર SENSEX નક્કી થાય છે.

'નિફ્ટી' આ શબ્દ તેના નામ પ્રમાણે બે શબ્દોનો બનેલો છે. NIFTY = NSE + FIFTY. નિફ્ટી એ NSEમાં સર્વોત્તમ કામગિરી કરતી 50 કંપનીઓ પરથી નક્કી થાય છે.

ICT Tools or Links

SEBIની વેબસાઇટની મુલાકાત લો. તે જ પ્રમાણે BSE, NSEની વેબસાઇટ, દૂરદર્શન પરની ચૅનલ્સ અથવા ઈન્ટરનેટ પર શેઅર બજારની માહિતી આપતાં વિડીઓ જુઓ અને શેઅર બજાર સમજો. શેઅર બજારનાં ભાવની વધ-ઘટ દૂરદર્શનની (ટી.વી.ની) કેટલીક ચૅનલ્સ પર સતત ચાલુ હોય છે. તેમાં સામાન્ય રીતે ઉપરની પટ્ટી મુંબઈ શેઅર બજાર - BSE અને નીચેની પટ્ટી રાષ્ટ્રીય શેઅર બજાર - NSEમાં listed કંપનીઓના બજારભાવ દર્શાવે છે. શેઅર્સની બુક વૅલ્યુ (Book Value) એટલે શું ? તેની માહિતી મેળવો.

દાર્શનિક કિંમત અને બજારભાવ (Comparison of FV and MV) :

(1) જો બજારભાવ $>$ દાર્શનિક કિંમત હોય, તો તે શેઅર અધિમૂલ્ય પર છે (share is at premium) એમ કહે છે.

(2) જો બજારભાવ = દાર્શનિક કિંમત હોય, તો તે શેઅર સમમૂલ્ય પર છે (share is at par) એમ કહે છે.

(3) જો બજારભાવ $<$ દાર્શનિક કિંમત હોય, તો તે શેઅર અવમૂલ્ય પર છે (share is at discount) એમ કહે છે.

દા.ત. : (1) ધારોકે, શેઅરની દાર્શનિક કિંમત = 10 રૂપિયા અને બજારભાવ = 15 રૂપિયા હોય તો આ શેઅર 15 − 10 = 5 રૂપિયા અધિમૂલ્ય પર છે એટલે કે 'પ્રીમિયમ' પર છે.

(2) ધારો કે, શેઅરની દાર્શનિક કિંમત = 10 રૂપિયા અને બજારભાવ = 10 રૂપિયા હોય તો આ શેઅર 10 − 10 = 0. એટલે કે સમમૂલ્ય પર, 'ઍટ પાર' છે.

(3) ધારો કે, શેઅરની દાર્શનિક કિંમત = 10 રૂપિયા અને બજારભાવ = 7 રૂપિયા હોય તો આ શેઅર 10 − 7 = 3 રૂપિયા અવમૂલ્ય પર છે. એટલે કે 'ડિસ્કાઉન્ટ' પર છે.

કુલ રોકાણ (Sum invested) : શેઅરની ખરીદી માટે જોઈતી કુલ રકમ એટલે કુલ રોકાણ.

કુલ રોકાણ = શેઅર્સની સંખ્યા × એક શેઅરનો બજારભાવ

ઉદા. 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતવાળો એક શેઅર 120 રૂપિયા બજારભાવે ખરીદ્યો. તો એવા 50 શેઅર્સ માટે કુલ કેટલા રૂપિયા રોકાણ કરવું પડશે ?

ઉકેલ : કુલ રોકાણ = શેઅર્સની સંખ્યા × એક શેઅરનો બજારભાવ

= 50 × 120 = 6000 રૂપિયા

શેઅર્સ પર વળતરનો દર (Rate of Return-RoR) :

આપણે શેઅર્સમાં રોકેલી રકમ સમયાંતરે કેટલું વળતર આપે છે તે સમજવું ખૂબ મહત્ત્વનું છે. તે નીચેના ઉદાહરણ પરથી સમજીએ.

ઉદા. (1) શ્રીયશે 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતવાળા એક શેઅરનો બજારભાવ 120 રૂપિયા હતો. ત્યારે વેંચાતા લીધા. તેના પર કંપનીએ 15% લાભાંશ આપ્યો. તો કરેલા રોકાણ પર મળેલાં વળતરનો દર શોધો.

ઉકેલ : દાર્શનિક કિંમત = 100 રૂપિયા, બજારભાવ = 120 રૂપિયા, લાભાંશ = 15%

પ્રતિ શેઅર વળતરનો દર x% માનીએ. અહીં ધ્યાનમાં લ્યો કે, 120 રૂપિયાના રોકાણ પર 15 રૂપિયા મળ્યા.

$$\therefore \quad \frac{15}{120} = \frac{x}{100}$$

જો,	120 :	15
તો,	100 :	x

$$\therefore \quad x = \frac{15 \times 100}{120} = \frac{25}{2} = 12.5\%$$

જવાબ : શ્રીયશને શેઅર્સ પર વળતરનો દર 12.5%મળ્યો.

ઉદા. (2) દાર્શનિક કિંમત = 100 રૂપિયા, અધિમૂલ્ય = 65 રૂપિયા તો તે શેઅર બજારભાવ શોધો.

ઉકેલ : બજારભાવ = દાર્શનિક કિંમત + અધિમૂલ્ય = 100 + 65 = 165 રૂપિયા

∴ શેઅરનો બજારભાવ 165 રૂપિયા પ્રતિ શેઅર.

ઉદા. (3) નીચેનો કોઠો યોગ્ય સંખ્યા અથવા શબ્દ લખી પૂર્ણ કરો.

ઉદા. ક્ર.	દાર્શનિક કિંમત (FV)	મૂલ્ય પ્રકાર	બજારભાવ (MV)
(i)	10 રૂપિયા	અધિમૂલ્ય 7 રૂપિયા	
(ii)	25 રૂપિયા		16 રૂપિયા
(iii)		સમમૂલ્ય	5 રૂપિયા

ઉકેલ : (i) બજારભાવ 10 + 7 = 17 રૂપિયા, (ii) અવમૂલ્ય 25 − 16 = 9 રૂપિયા,
(iii) દાર્શનિક કિંમત 5 રૂપિયા.

ઉદા. (4) નીલભાઈએ નીચે પ્રમાણે શેઅર્સમાં રોકાણ કર્યું. તો તેમનું કુલ રોકાણ શોધો?

કંપની A : 350 શેઅર્સ, દાર્શનિક કિંમત = 10 રૂપિયા, પ્રતિ શેઅર અધિમૂલ્ય = 7 રૂપિયા

કંપની B : 2,750 શેઅર્સ, દાર્શનિક કિંમત = 5 રૂપિયા, બજારભાવ = 4 રૂપિયા

કંપની C : 50 શેઅર્સ, દાર્શનિક કિંમત = 100 રૂપિયા, બજારભાવ = 150 રૂપિયા

ઉકેલ : **કંપની A :** અધિમૂલ્ય = 7 રૂપિયા એટલે બજારભાવ = દાર્શનિક કિંમત + અધિમૂલ્ય
= 10 + 7 = 17 રૂપિયા

∴ કંપની Aમાં રોકાણ = શેઅર્સની સંખ્યા × બજારભાવ = 350 × 17 = 5,950 રૂપિયા

કંપની B : દાર્શનિક કિંમત = 5 રૂપિયા, બજારભાવ = 4 રૂપિયા

∴ કંપની Bમાં રોકાણ = શેઅર્સની સંખ્યા × બજારભાવ = 2,750 × 4 = 11,000 રૂપિયા

કંપની C : દાર્શનિક કિંમત = 100 રૂપિયા, બજારભાવ = 150 રૂપિયા

∴ કંપની Cમાં રોકાણ = શેઅર્સની સંખ્યા × બજારભાવ = 50 × 150 = 7,500 રૂપિયા

જવાબ : નીલભાઈએ ત્રણ કંપનીમાં કરેલું કુલ રોકાણ = 5,950 + 11,000 + 7,500
= 24,450 રૂપિયા

ઉદા. (5) સ્મિતાએ 12,000 રૂપિયા રોકીને 10 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમત (FV)ના શેઅર્સ 2 રૂપિયા અધિમૂલ્ય પર ખરીદ્યા. તો તેને કેટલાં શેઅર મળ્યા ? તે શોધવાની નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.

ઉકેલ : દાર્શનિક કિંમત = 10 રૂપિયા, અધિમૂલ્ય = 2 રૂપિયા.

∴ બજારભાવ = દાર્શનિક કિંમત + ☐ = ☐ + ☐ = ☐

∴ શેઅર્સની સંખ્યા = $\frac{\text{કુલ રોકાણ}}{\text{બજારભાવ}}$ = $\frac{12000}{☐}$ = ☐ શેઅર્સ

જવાબ : સ્મિતાને ☐ શેઅર્સ મળ્યા.

ઉદા. (6) 10 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના 50 શેઅર્સ 25 રૂપિયા બજારભાવે વેંચાતા લીધાં. તેના પર કંપનીએ 30% લાભાંશ જાહેર કર્યો. તો (1) કુલ રોકાણ (2) મળેલો લાભાંશ (3) રોકાણ પર વળતરનો દર શોધો.

ઉકેલ : શેઅરની દાર્શનિક કિંમત = 10 રૂપિયા, બજારભાવ = 25 રૂપિયા, શેઅર્સની સંખ્યા = 50.

$\therefore$ કુલ રોકાણ $25 \times 50 = 1{,}250$ રૂપિયા

લાભાંશ $= 10 \times \frac{30}{100} = 3$ રૂપિયા પ્રતિ શેઅર

$\therefore$ 50 શેઅર્સ પરનો કુલ લાભાંશ $= 50 \times 3 = 150$ રૂપિયા

$\therefore$ વળતરનો દર $= \dfrac{\text{મળેલો કુલ લાભાંશ}}{\text{કુલ રોકાણ}} \times 100$

$= \frac{150}{1250} \times 100 = 12\%$

જવાબ : (1) કુલ રોકાણ 1,250 રૂપિયા (2) 50 શેઅર્સ પરનો કુલ લાભાંશ 150 રૂપિયા

(3) રોકાણ પર વળતરનો દર 12%.

મહાવરાસંગ્રહ 4.3

1. નીચેના કોઠામાં યોગ્ય સંખ્યા અથવા શબ્દ લખી પૂર્ણ કરો.

ઉદા. ક્ર.	દાર્શનિક કિંમત (FV)	મૂલ્ય પ્રકાર	બજારભાવ (MV)
(1)	100 રૂપિયા	સમમૂલ્ય	. . .
(2)	. . .	અધિમૂલ્ય = 500 રૂપિયા	575 રૂપિયા
(3)	10 રૂપિયા	. . .	5 રૂપિયા

2. બજારભાવ 80 રૂપિયા હતો ત્યારે અમોલે 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના 50 શેઅર્સ વેંચાતા લીધા. તે વર્ષે કંપનીએ 20% વેંચાતા લીધા. તે વર્ષે કંપનીએ 20% લાભાંશ આપ્યો તો રોકાણ પર મળતાં વળતરનો દર શોધો.

3. જોસેફે નીચે પ્રમાણે શેઅર્સમાં રોકાણ કર્યુ તો તેનું કુલ રોકાણ શોધો.

   કંપની A : દાર્શનિક કિંમત 2 રૂપિયા અને અધિમૂલ્ય 18 રૂપિયા હોય તેવા 200 શેઅર્સ.

   કંપની B : બજારભાવ 500 રૂપિયા હોય તેવો 45 શેઅર્સ.

   કંપની C : બજારભાવ 10,540 રૂપિયા હોય તેવો 1 શેઅર.

4. શ્રીમતી દેશપાંડેએ 20,000 રૂપિયાનું રોકાણ કરીને 5 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના શેઅર્સ 20 રૂપિયા અધિમૂલ્ય પર ખરીધ્યા. તો તેમને કેટલા શેઅર્સ મળશે ?

5. શ્રી.શાંતિલાલે 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના 150 શેઅર્સ 120 રૂપિયાના બજારભાવે ખરીદ કર્યા. કંપનીએ 7% લાભાંશ આપ્યો. તો રોકાણ પર વળતરનો દર શોધો.

6. નીચેના પૈકી કયું રોકાણ ફાયદાકારક છે ? બન્ને કંપનીના શેઅર્સની દાર્શનિક કિંમત સમાન છે.

કંપની A : બજારભાવ 80 રૂપિયા લાભાંશ 16% અને કંપની B : બજારભાવ 120 રૂપિયા લાભાંશ 20% છે.

ICT Tools or Links

કોઈપણ પાંચ કંપનીનાં શેઅર્સની દાર્શનિક કિંમત અને બજારભાવ ઈન્ટરનેટ પરથી અથવા અન્ય સ્રોત પરથી શોધો. તેમનો જોડસ્તંભાલેખ દોરી તુલના કરો. (શક્ય હોય તો ▲ અને ▼ એમ બન્ને પ્રકારના શેઅર્સ લેવા.)

જાણી લઈએ.

શેઅર્સના ખરીદ-વેચાણ પર દલાલી અને કર (Brokerage and taxes on share trading)

દલાલી (Brokerage) : શેઅર્સના ખરીદ-વેચાણ અંગત રીતે કરી શકાતું નથી. તે શેઅર બજારના અધિકૃત વ્યક્તિઓ કે સંસ્થા મારફત કરી શકાય છે. તેમને **'શેઅર-દલાલ' (Share Broker)** કહે છે. દલાલ મારફત શેઅર્સનું ખરીદ-વેચાણ કરતી વખતે બજારભાવ પર નક્કી કરેલા દરે દલાલ જે રકમ લે છે તેને **'દલાલી'** કહે છે. એટલે શેઅર્સ ખરીદી કરનાર તથા વેંચનાર બન્ને દલાલી આપે છે.

ઉદા. (1) ધારોકે 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના શેઅરનો બજારભાર 150 રૂપિયા છે. દલાલીનો દર 0.5% છે અને કુલ 100 શેઅર્સ ખરીદતી વખતે કેટલી રકમ આપવી પડશે ? અથવા આવા 100 શેઅર્સ વેંચ્યા પછી કેટલી રકમ મળશે ?

શેઅર ખરીદતી વખતે -

એક શેઅરની ખરીદ કિંમત = બજારભાવ + દલાલી

= 150 રૂપિયા + 150 રૂપિયાના 0.5% = 150 + 0.75

∴ એક શેઅરની ખરીદ કિંમત = 150.75 રૂપિયા

આવા 100 શેઅર માટેનું કુલ રોકાણ 100 × 150.75 = 15,075 રૂપિયા

આમાં 15,000 રૂપિયાના શેઅર્સ + 75 રૂપિયા દલાલી છે.

શેઅર વેંચતી વખતે -

એક શેઅરની વેંચાણ કિંમત = બજારભાવ − દલાલી

= 150 રૂપિયા − 150 રૂપિયાના 0.5% = 150 − 0.75

∴ એક શેઅરની વેંચાણ કિંમત = 149.25 રૂપિયા

∴ 100 શેઅર્સની વેંચાણ કિંમત = 149.25 × 100 = 14,925 રૂપિયા

જવાબ : 100 શેઅર્સ વેંચતા તેને 14,925 રૂપિયા મળશે.

આ ધ્યાનમાં રાખો.

- દલાલી હંમેશા શેઅર્સના બજારભાવ પર આકારવામાં (વસૂલ કરવામાં) આવે છે.
- શેઅરના ખરીદ-વેચાણના વિવરણમાં દલાલી અને કર ગણીને એક શેઅરની કિંમત નક્કી કરવામાં આવે છે.

ઉપક્રમ I : તમારા વિસ્તારમાં શેઅર દલાલ તરીકે સેવા આપતી વ્યક્તિ કે સંસ્થાની માહિતી મેળવો. તેમના દલાલીના દરની માહિતી લો અને તુલના કરો.

ઉપક્રમ II : ડી-મેટ ખાતું (Demat A/c) અને ટ્રેડિંગ ખાતા (Trading A/c)નું વિવરણ પત્ર (સ્ટેટમેન્ટ) મેળવો. તેમાં કઈ કઈ બાબતોનો સમાવેશ હોય છે. તેની માહિતી નેટ પરથી/ દલાલની મુલાકાત લઈને/ વડીલો પાસેથી મેળવો. મિત્રો સાથે ચર્ચા કરો.

અધિક માહિતી માટે : દરેક શેઅર દલાલ સેબી (SEBI - **S**ecurities and **E**xchange **B**oard of **I**ndia) કાયદો 1992 અંતર્ગત નોંધણીકૃત હોય છે તેના પર સેબીનું નિયંત્રણ હોય છે.

શેઅર્સ, બૉન્ડસ્, મ્યુચ્યુઅલ ફંડસ્ વગેરેની નોંધ રાખવા માટે ડી-મેટ ખાતું અને તેમની ખરીદી વિક્રી માટે ટ્રેડિંગ ખાતું (Dematerialized Account, Trading Account) ખોલવું જરૂરી છે. આ ખાતાઓ બેંકમાં કે શેઅર દલાલ પાસે ખોલાવી શકાય છે. આ સુવિધા આપનાર બેંક કે બ્રોકરને DP એટલે Depository Participants કહે છે. આ DPs NSDL અને CDSL બે ડીપોઝીટરીઝ (Depositaries)ના અધીન હોય છે. ડી-મેટ ખાતામાં શેઅર્સ લેવડ-દેવડનો હિસાબ રાખવામાં આવે છે. એ બેંકના ખાતા જેવું હોય છે. જેમ કે ખરીદેલા શેઅર્સ જમા બાજુએ (Credit) નોંધાય છે અને વેંચેલા શેઅર્સ ખર્ચની બાજુએ (Debit) નોંધાય છે. તેનું વિવરણપત્ર (statement) માંગણી કરવાથી મળે છે. તે માટે નિશ્ચિત ફી આપવી પડે છે. આ ખાતામાં શેઅર્સ ઈલેક્ટ્રોનિક રૂપમાં જમા રહે છે. આ બન્ને ખાતાને બેંકના બચત ખાતા સાથે જોડવામાં આવે છે. એટલે શેઅર ખરીદવા માટે જરૂર હોય તેટલાં પૈસા ટ્રેડીંગ ખાતામાં ટ્રાન્સફર કરી શકાય અને શેઅરના વેચાણ પછી મળેલાં પૈસા ટ્રેડીંગ ખાતામાંથી ફરી બચત ખાતામાં લઈ શકાય. શેઅર દલાલ અને બેંક આ બાબત ઈચ્છુક વ્યક્તિને માર્ગદર્શન કરે છે.

જાણી લઈએ.

દલાલી પર વસ્તુ અને સેવા કર (GST on brokerage services)

શેઅર દલાલ તેમનાં ખાતેદાર વતી શેઅર્સનું ખરીદ-વેચાણ કરી આપવાની સેવા પૂરી પાડે છે. દલાલીની સેવા પર જીએસટીનો દર 18% છે. દલાલીની સેવા માટેનો SAC ક્રમાંક શોધો.

નોંધ : વસ્તુ અને સેવા કર (જીએસટી) ઉપરાંત ગ્રાહકોની સુરક્ષિતતા શેઅર્સના ખરીદ-વેચાણ પર બીજા પણ કેટલાંક અલ્પ દરનાં કર છે. જેમ કે સિક્યુરીટિ ટ્રાન્ઝેક્શન ટૅક્સ (STT), SEBI શુલ્ક, સ્ટૅમ્પ ડ્યુટી, વગેરે... તેનો આપણે

અહીં વિચાર કરવાના નથી. આપણે ફક્ત દલાલી પરનાં વસ્તુ-સેવા કર (GST)નો જ વિચાર કરવાનાં છીએ.

ઉદા. (2) ધારોકે, ઉદા. (1) નુસાર એક વ્યક્તિએ 15,075 રૂપિયા શેઅર્સની ખરીદી માટે આપ્યા. જેમાં 75 રૂપિયા દલાલી છે. તો તેમને 75 રૂપિયા પર 18% લેખે કેટલો કર આપવો પડશે ? તે શોધો અને તેનું વિવરણપત્ર તૈયાર કરો.

ઉકેલ : 18% ના દરે 75 રૂપિયા પર GST $= \frac{18}{100} \times 75$

$= 13.50$ રૂપિયા

શેઅર ખરીદી માટેનું વિવરણપત્ર (B એટલે ખરીદી.)

શેઅર્સની સંખ્યા	શેઅર્સનો બજારભાવ	શેઅરની દાર્શનિક કિંમત કુલ રોકાણ	દલાલી 0.5%	દલાલીપર 9% SGST	દલાલી પર 9% CGST	શેઅર્સની કુલ ખરીદ કિંમત
100(B)	150 રૂપિયા	15,000 રૂપિયા	75 રૂપિયા	6.75 રૂપિયા	6.75 રૂપિયા	15,088.50 રૂપિયા

ઉદા. (3) બશીરખાને 40 રૂપિયા બજારભાવનાં 100 શેઅર્સ ખરીદ કર્યા. દલાલીનો દર 0.5% અને દલાલી પર વસ્તુ અને સેવા કરનો દર 18% છે તો તેમને 100 શેઅર્સ માટે કુલ ખર્ચ કેટલો કરવો પડશે ?

ઉકેલ : 100 શેઅર્સની બજારભાવ પ્રમાણે કુલ કિંમત $40 \times 100 = 4{,}000$ રૂપિયા

એક શેઅર પર દલાલી $= \frac{0.5}{100} \times 40 = 0.20$ રૂપિયા

∴ એક શેઅરની ખરીદ કિંમત = બજારભાવ + દલાલી

$= 40 + 0.20 = 40.20$ રૂપિયા

∴ 100 શેઅર્સની ખરીદ કિંમત $= 40.20 \times 100 = 4{,}020$ રૂપિયા

100 શેઅર્સ પર દલાલી $0.20 \times 100 = 20$ રૂપિયા

∴ 20 રૂપિયા પર વસ્તુ-સેવા કર (GST) $= \frac{18}{100} \times 20$

$= 3.60$ રૂપિયા

જવાબ : બશીરખાનને 100 શેઅર્સ ખરીદવા માટે રોકાણ

$= 4{,}020 + 3.60 = 4{,}023.60$ રૂપિયા

ઉદા. (4) પંકજભાઈએ 1,25,295 રૂપિયાનું રોકાણ કરીને 10 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના 125 રૂપિયા બજારભાવે 100 શેઅર વેંચાતા લીધા. આ વ્યવહારમાં 0.2 % દલાલી અને દલાલી પર 18% વસ્તુ-સેવા કર (GST) આપ્યો તો (1) કેટલા શેઅર્સ વેંચાતા લીધાં ? (2) કુલ દલાલી કેટલી આપી ? (3) કુલ વસ્તુ-સેવા કર (GST) કેટલો આપ્યો ?

ઉકેલ : રોકાણ = 1,25,295 રૂપિયા, બજારભાવ = 125 રૂપિયા, દલાલી = 0.2%, જીએસટી = 18%.

એક શેઅર પર દલાલી $= 125 \times \frac{0.2}{100} = 0.25$ રૂપિયા

એક શેઅરની દલાલી પર કર = 0.25 ના 18% = 0.045 રૂપિયા

∴ એક શેઅરની ખરીદ કિંમત = બજારભાવ + દલાલી + કર

= 125 + 0.25 + 0.045 = 125.295 રૂપિયા

∴ શેઅર્સની સંખ્યા = $\frac{125295}{125.295}$ = 1,000

કુલ દલાલી = પ્રતિ શેઅર દલાલી × શેઅર્સની સંખ્યા

∴ = 0.25 × 1,000 = 250 રૂપિયા

કુલ કર = 1000 × 0.045 = 45 રૂપિયા

જવાબ :(1) 1,000 શેઅર્સ લીધાં. (2) દલાલી 250 રૂપિયા આપી. (3) દલાલી પર જીએસટી 45 રૂપિયા આપ્યો.

ઉદા. (5) નલિનીબહેન 10 રૂપિયાની દાર્શનિક કિંમતના શેઅરનો બજારભાવ 60 રૂપિયા હતો ત્યારે 6,024 રૂપિયા રોક્યા. તેના પર 60% લાભાંશ લીધા પછી 50 રૂપિયા બજારભાવે બધાં શેઅર્સ વેંચી નાખ્યા. દરેક વ્યવહારમાં 0.4% દલાલી આપી. તો આ વ્યવહારમાં તેમને નફો થયો કે ખોટ ગઇ ? કેટલી ? તે શોધવા માટે નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.

ઉકેલ : અહીં કરનો દર આપ્યો નથી તેથી શેઅર્સની ખરેદી-વિક્રી વખતે કરનો વિચાર કર્યો નથી.

10 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતનો શેઅર 60 રૂપિયામાં ખરીદ કર્યો.

પ્રતિ શેઅર દલાલી = $\frac{0.4}{100} \times 60$ = [ ] રૂપિયા

∴ એક શેઅરની કિંમત = 60 + 0.24 = [ ] રૂપિયા

∴ 6,024 રૂપિયામાં $\frac{6024}{60.24}$ = 100 શેઅર્સ ખરીદ્યા.

10 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના શેઅર્સ 50 રૂપિયાના બજારભાવે વેંચી દીધા.

∴ પ્રતિ શેઅર દલાલી = $\frac{0.4}{100} \times 50$ = 0.20 રૂપિયા

∴ એક શેઅરની વેચાણ કિંમત = 50 − 0.20 = [ ] રૂપિયા

∴ 100 શેઅરની વેચાણ કિંમત = 100 × 49.80 = [ ] રૂપિયા

લાભાંશ 60% મળ્યો.

∴ 1 શેઅર પર લાભાંશ = $\frac{60}{100} \times 10$ = 6 રૂપિયા

∴ 100 શેઅર્સ પર કુલ લાભાંશ = 6 × 100 = [ ] રૂપિયા

∴ નલિનીબહેનની શેઅર્સ-વેચાણ તથા લાભાંશની કુલ આવક = [ ] + [ ] = 5,580 રૂપિયા

પરંતુ નલિનીબહેને કરેલું રોકાણ = 6,024 રૂપિયા હતું.

∴ નલિનીબહેનને થયેલી ખોટ = [ ] − [ ] = [ ] રૂપિયા

જવાબ : નલિનીબહેનને ખરીદ વેચાણના વ્યવહારમાં કુલ 444 રૂપિયા ખોટ ગઈ.

કૃતિ : ઉદા. 5 માં ખરીદ વેચાણના વ્યવહારમાં જો દલાલી પર 18% GST આપ્યો હોત તો તેમને કેટલી ખોટ ગઈ હોત ? તે શોધો. તમારો જવાબ 451.92 રૂપિયા આવે છે કે ? તે તપાસો.

જાણી લઈએ.

મ્યુચ્યુઅલ ફંડ (Mutual Fund – MF)

શેઅર્સનો અભ્યાસ કરતી વખતે આપણે જોયું કે, કંપની સ્થાપન કરવા ઈચ્છતી વ્યક્તિઓ સાથે આવે છે સમાજનો સહભાગ લઈને સારી એવી મૂડી એકઠી કરે છે. કંપનીની કામગિરી સારી હોય તો તેના શેઅર ધારકોને ફાયદો થાય છે. તેમને લાભાંશ પણ સારો મળે છે. શેઅર્સનો બજારભાવ વધે છે એટલે તેનો પણ લાભ થાય છે. કંપનીની મૂડી વધે છે. આ બધા કારણોથી દેશની પ્રગતિને ગતિ મળે છે. ટૂંકમાં સમાજશાસ્ત્રનો સિદ્ધાંત છે 'Together we can progress', પરંતુ દરેક નાણાની બે બાજુઓ હોય છે. શેઅર્સમાં ફાયદો થવાને બદલે ક્યારેક નુકસાન પણ થઇ શકે છે. આ નુકસાન ઓછું કરી શકાય કે ? રોકાણકારોનું જોખમ વહેંચી શકાય કે ? હા, તે માટે આજકાલ ઘણાં લોકો મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં રોકાણ કરે છે.

મ્યુચ્યુઅલ ફંડ એટલે અનેક રોકાણકારોના પૈસા એકત્રિત કરીને ઊભી કરેલી રકમ. આ રકમ એક જ પ્રકારના શેઅર્સમાં ન રોકતાં રોકાણના જુદાં જુદાં પ્રકારોમાં રોકવામાં આવે છે. એટલે જોખમ ઓછું થાય છે અને મળતો લાભાંશ રોકાણકારોમાં વહેંચાય જાય છે. મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં રોકાણ કેવી રીતે કરવું ? તેમાં વળતર કેટલું મળે છે ? કેટલા સમયગાળા માટે રોકાણ કરવું. હિતાવહ છે ? તેના વિવિધ પ્રકાર ક્યા ? આવા અનેકવિધ પ્રશ્નોનાં જવાબ આર્થિક સલાહકાર (Financial Consultant કે Planner) આપી શકે છે.

Investments in Mutual Funds are subject to Market risks. Read all scheme related documents carefully. આ વાક્ય તમે સાંભળ્યું હશે અથવા વાંચ્યું હશે. તેનો અર્થ બરાબર સમજી લો. ક્યારેક મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાંના રોકાણ પર નફાને બદલે ખોટ થઈ શકે છે. અને તે રોકાણકારે ભોગવવી પડે છે.

મ્યુચ્યુઅલ ફંડ એટલે તજ્જ્ઞ વ્યાવસાયિક લોકોએ નિર્માણ કરેલી ફંડ યોજના. આ તજ્જ્ઞોને AMC એટલે 'ઍસેટ મેનેજમેન્ટ કંપની' કહે છે. તેઓ બજારનો અંદાજ લઈને ઈચ્છુક વ્યક્તિઓના પૈસા જુદી જુદી યોજનામાં, જેમ કે ઈક્વિટી ફંડ (શેઅર્સ), ડેબ્ટ ફંડ (ડિબેન્ચર્સ, બૉન્ડસ્ વગેરે) અથવા બન્નેનો મળીને 'બેલેન્સ્ડ ફંડ'માં રોકાણકારોની ઈચ્છા મુજબ રોકે છે.

આપણે જેમ શેઅર બજારમાં રોકાણ કરીએ ત્યારે 'શેઅર્સ' મળે છે તેમ મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં રોકાણ કરીએ તો '**યૂનિટસ્**' મળે છે.

પ્રતિ યૂનિટનો જે બજારભાવ હોય તેને યૂનિટનું 'ચોખ્ખું માલમત્તા મૂલ્ય' **(Net asset value – NAV)** કહે છે.

એક યૂનિટનું ચોખ્ખું મૂલ્ય × યૂનિટની સંખ્યા = મ્યુચ્યુઅલ ફંડ યોજનાનું કુલ રોકાણ મૂલ્ય.

નોંધ : શેઅર્સના ભાવ પ્રમાણે મ્યુચ્યુઅલ ફંડના યૂનિટસ્‌નું ચોખ્ખું મૂલ્ય (NAV) પણ સતત બદલાતી રહે છે. જરૂર પડે ત્યારે લીધેલાં યૂનિટસ્ ફરી વેંચી (Redeem) શકાય છે.

રાષ્ટ્રીકૃત બૅંક હોય કે ભારતીય પોસ્ટ સેવા, તેમાં કરેલું રોકાણ વધુ સુરક્ષિત હોય છે. માત્ર તેમાંથી મળતું વળતર મોંઘવારીનો સામનો કરવા માટે અપૂરતું હોય છે. આપણે હંમેશા એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ કે, યોગ્ય રીતે રોકેલો પૈસો પણ પૈસાનું નિર્માણ કરી શકે છે. તે માટે જરૂરી છે પૈસાનું યોગ્ય નિયોજન એટલે જ કે અર્થ નિયોજન. (Financial Planning)

સારાસાર વિચાર કરીને રોકાણ બાબતમાં યોગ્ય સમયે યોગ્ય નિર્ણય લેવો મહત્ત્વનો છે. તેનો સતત, નિયમિત અભ્યાસ કરવાની ટેવ હોવી જોઈએ.

નિયમિત આવર્તી રોકાણ યોજના (SIP –Systematic Investment Plan)

ધારોકે, આપણા માટે મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં એક સાથે મોટી રકમનું રોકાણ કરવું શક્ય ન હોય તો આપણે નાના નાના હપ્તામાં રોકાણ કરી શકીએ છીએ. દા.ત. દર મહિને 500 રૂપિયા પ્રમાણે પણ મ્યુચ્યુઅલ ફંડમાં રોકાણ કરી શકીએ છીએ. આમ નિયમિત રીતે માસિક અથવા ત્રિમાસિક રોકાણ કરી શકાય છે. આ યોજનાથી 'બચત' કરવાની આદત પડે છે અને ભવિષ્યનાં આર્થિક ધ્યેય (લક્ષ્ય) ગાંઠી શકાય છે. આ યોજનામાં રોકાણ દીર્ઘ મુદત માટે કરવું ફાયદાકારક થાય છે. તેનું કારણ શેઅર બજારમાં થતી વધ-ઘટનું પરિણામ આ યોજનાના રોકાણ પર ઓછું થાય છે. ઓછામાં ઓછા 3 થી 5 વર્ષ માટે અને શક્ય હોય તો 10 થી 15 વર્ષ માટે રોકાણ કરવું ઉત્તમ.

મ્યુચ્યુઅલ ફંડના ફાયદા

- અનુભવી તજ્જ્ઞ ફંડ મેનેજરો.
- રોકાણમાં વૈવિધ્ય (diversifications of funds)
- પારદર્શકતા - રોકાણ પૂરેપૂરું સુરક્ષિત
- તરલતા (liquidity) - જોઈએ ત્યારે વેંચી શકાય.
- મર્યાદિત જોખમ
- અલ્પ અને દીર્ઘ મુદતના ફાયદા મળે છે.
- કેટલાંક ફંડ જેમકે ELSS(Equity Linked Saving Scheme)માંનું રોકાણ આવકવેરા કલમ 80C હેઠળ બાદ લઈ શકાય છે.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) મ્યુચ્યુઅલ ફંડ યોજનાનું બજાર મૂલ્ય 200 કરોડ રૂપિયા હોય અને કંપનીએ તેના 8 કરોડ યૂનિટસ્ કર્યાં હોય તો એક યૂનિટની NAV (ચોખ્ખું મૂલ્ય) કાઢો.

ઉકેલ : એક યૂનિટની NAV (ચોખ્ખું મૂલ્ય) = 200 કરોડ રૂપિયા / 8 કરોડ યૂનિટસ્
= 25 રૂપિયા પ્રતિ યૂનિટ

ઉદા. (2) ઉદા. (1)માંની મ્યુચ્યુઅલ ફંડ યોજનામાં તમે ₹ 10,000 રોકો તો તમને કેટલા યૂનિટસ્ મળશે ?

ઉકેલ : યૂનિટસ્‌ની સંખ્યા = કરેલું રોકાણ / એક યૂનિટની કિંમત
= 10,000/25 = 400 યૂનિટસ્ મળશે.

મહાવરાસંગ્રહ 4.4

1. એક શેઅરનો બજારભાવ 200 રૂપિયા હતો ત્યારે ખરેદી વખતે 0.3% દલાલી આપી તો શેઅરની ખરીદ કિંમત કેટલી થઈ ?
2. એક શેઅરનો બજારભાવ 1000 રૂપિયા હતો ત્યારે તે વેંચ્યો. તેના પર 0.1% દલાલી આપી તો વેચાણ પછી શેઅર દીઠ કેટલી રકમ મળશે ?
3. નીચેના શેઅર ખરીદ-વેચાણના વિવરણ પત્રમાં ખાલી જગ્યા પૂરો. (B – ખરીદ્યા (Buy), S – વેંચ્યા (Sold))

શેઅર્સની સંખ્યા	શેઅર્સનો બજારભાવ	શેઅર્સની કુલ કિંમત	દલાલીનો દર 0.2%	દલાલી પર CGST 9%	દલાલી પર SGST 9%	શેઅર્સની કુલ કિંમત
100 B	45 રૂપિયા					
75 S	200 રૂપિયા					

4. શ્રીમતી દેસાઇએ 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના શેઅર્સ, બજારભાવ 50 રૂપિયા હતો ત્યારે વેંચ્યા, ત્યારે તેમને કુલ 4988.20 રૂપિયા મળ્યા. દલાલીનો દર 0.2% અને દલાલી પર જીએસટીનો દર 18% છે. તો તેમણે કેટલાં શેઅર્સ વેંચ્યા તે શોધો.
5. મિસ્ટર ડિસોઝાએ 50 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના 200 શેઅર્સ, 100 રૂપિયા અધિમૂલ્ય આપીને ખરીદ કર્યા. તેના પર કંપનીએ 50% લાભાંશ આપ્યો. લાભાંશ મળ્યા પછી તેમાંના 100 શેઅર્સ 10 રૂપિયા અવમૂલ્યથી વેંચી દીધા. બાકીના શેઅર્સ 75 રૂપિયા આધિમૂલ્યથી વેંચી નાખ્યા. દરેક વ્યવહારમાં 20 રૂપિયા દલાલી આપી. તો તેમને આ વ્યવહારમાં નફો થયો કે ખોટ ગઇ ? કેટલા રૂપિયા?

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 4 A

1. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબનો યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

(1) જીવનાવશ્યક ચીજવસ્તુઓ પર વસ્તુ અને સેવા કર (GST)નો દર . . . છે.

(A) 5% (B) 12% (C) 0% (D) 18%

(2) એક જ રાજ્યમાં થતાં વેપારમાં કેન્દ્ર સરકાર તરફથી લાદવામાં આવતો કર . . . છે.

(A) IGST (B) CGST (C) SGST (D) UTGST

(3) આપણા દેશમાં . . . તારીખથી વસ્તુ અને સેવા કર (GST) પ્રણાલિ અમલમાં આવી.

(A) 31 માર્ચ, 2017 (B) 1 એપ્રિલ, 2017

(C) 1 જાન્યુઆરી, 2017 (D) 1 જુલાઈ, 2017

(4) સ્ટીલના વાસણો પર વસ્તુ અને સેવા કર (GST)નો દર 18% છે તો તેના પર રાજ્ય વસ્તુ અને સેવા કર (SGST)નો દર . . . આકારવામાં આવે છે.

(A) 18% (B) 9% (C) 36% (D) 0.9%

(5) GSTINમાં કુલ . . . અંકાક્ષરો હોય છે.

(A) 15 (B) 10 (C) 16 (D) 9

(6) જ્યારે એક નોંધણીકૃત વેપારી, બીજા નોંધણીકૃત વેપારીને માલ કે વસ્તુ વેંચે ત્યારે GST અંતર્ગત . . . વ્યવહાર કહે છે.

(A) BB (B) B2B (C) BC (D) B2C

2. એક વેપારી 25,000 રૂપિયાની કિંમતના શોપીસ ઉપર 10% છૂટ આપીને બાકીની રકમ પર 28% GST લગાડે છે. તો કુલ બિલ કેટલા રૂપિયાનું થશે ? તેમાં CGST અને SGST શીર્ષક હેઠળ કેટલી રકમ દર્શાવી હશે ?

3. એક તૈયાર કપડાંના દુકાનદારે 1,000 રૂપિયાની કિંમતના ડ્રેસ ઉપર 5% છૂટ આપીને બાકીની રકમ પર 5% GST લગાડીને વેંચ્યો તો ખરીદ કરનાર (ગ્રાહક)ને તે ડ્રેસ કેટલાં રૂપિયામાં મળશે ?

4. સૂરત, ગુજરાતના એક વેપારીએ 2.5 લાખ રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતનું સુતરાઉ કાપડ રાજકોટ, ગુજરાતના એક વેપારીને 5% ના દરે કેટલા રૂપિયા વસ્તુ અને સેવા કર (GST) આપવો પડશે ?

5. શ્રીમતી મલ્હોત્રાએ 85,000 રૂપિયાની કરપાત્ર કિંમતના સોલર ઉર્જા યંત્ર વેંચાતા લીધા અને 90,000 રૂપિયામાં વેંચ્યા. વસ્તુ અને સેવા કરનો દર 5% છે. તો આ વ્યવહારમાં તેમને કેટલા રૂપિયા કપાત (ITC) મળશે ? કેટલાં રૂપિયા કર ભરવો પડશે ?

6. Z-સિક્યુરીટી સર્વિસેસ પૂરી પાડતી કંપનીએ 64,500 રૂપિયાની સેવા પૂરી પાડી. વસ્તુ અને સેવા કર (GST)નો દર 18% છે. આ સિક્યુરીટી સર્વિસ પૂરી પાડવા માટે કંપનીએ લૉન્ડ્રી સર્વિસેસ અને યુનિફોર્મસ્ વગેરે બાબતો પર 1,550 રૂપિયા વસ્તુ અને સેવા કર (GST) આપ્યો હતો. તો આ કંપનીની ઈનપૂટ ટૅક્સ ક્રેડિટ (ITC) કેટલી ? તે પરથી ચૂકવવા પાત્ર કર જીએસટી અને કર એસજીએસટી શોધો.

7. એક વેપારીએ પોલીસ નિયંત્રણ કક્ષ માટે 84,000 રૂપિયા વસ્તુ અને સેવા કર (GST) સહિત કિંમતના વૉકીટૉકી યંત્રોનો પુરવઠો કર્યો. વસ્તુ અને સેવા કર (GST)નો દર 12% છે. તો કર બિલમાં કેન્દ્રીય જીએસટી અને રાજ્ય જીએસટી શોધો. વૉકીટૉકી યંત્રની કરપાત્ર કિંમત શોધો.

★ 8. એક જથ્થાબંધ વેપારીએ 1,50,000 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતનાં વિદ્યુત સાધનો ખરીદ કર્યા. આ બધા સાધનો છૂટક વેપારીને 1,80,000 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતે વેંચ્યા. છૂટક વેપારીએ તે સાધનો ગ્રાહકને 2,20,000 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતે વેંચ્યા. તો 18% GST ના દરેક વ્યવહારના ટૅક્સ ઈન્વૉઈસમાં કેન્દ્ર અને રાજ્યના કરની ગણના કરો. તે જ પ્રમાણે દરેક વેપારીનો ચૂકવવા પાત્ર કેન્દ્રીય જીએસટી અને રાજ્ય જીએસટી શોધો.

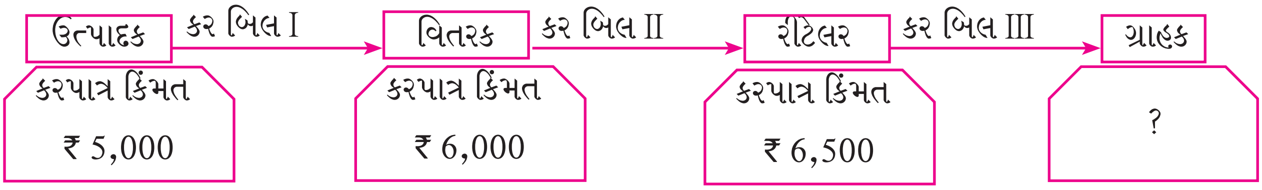
★ 9. અણ્ણા પાટીલે (ઠાણે, મહારાષ્ટ્ર) 14,000 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતનું એક વૅક્યુમ ક્લીનર વસઈ (મુંબઈ)ના એક વેપારીને 28% GST ના દરે વેંચ્યું. વસઈના વેપારીએ તે જ દરે ગ્રાહકને તે વૅક્યુમ ક્લીનર 16,800 રૂપિયા કરપાત્ર કિંમતે વેંચ્યું તો નીચેની બાબતો શોધો.

(1) અણ્ણા પાટીલે આપેલાં કર બિલમાં (ટૅક્સ ઈન્વૉઈસ) કેન્દ્ર અને રાજ્યનો કર કેટલા રૂપિયા દર્શાવ્યો હશે ?

(2) વસઈના વેપારીએ ગ્રાહકને કેન્દ્ર અને રાજ્યનો જીએસટી કેટલા રૂપિયા આકાર્યો હશે ?

(3) વસઈનો વેપારી સરકારને કર ભરણું કરતી વખતે ચૂકવવા પાત્ર કેન્દ્રનો કર અને રાજ્યનો કર કેટલો થશે ?

10.★ નીચે એક વસ્તુના વિતરણની વ્યવસાય સાંકળ આપી છે. તેમાં ટૅક્સ ઈન્વોઈસ A, B, Cમાં વસ્તુ અને સેવા કર (GST)ની આકારણની દર્શાવો. જીએસટીનો દર 12% છે.



(1) ઉત્પાદક, વિતરક અને વેપારી (રીટેલર)ને સરકારની તિજોરીમાં કેટલો કર ક્યા શીર્ષક હેઠળ ભરશે તે દર્શાવતું વિવરણ પત્રક તૈયાર કરો.

(2) અંતતઃ ગ્રાહકને આ વસ્તુ કેટલા રૂપિયામાં મળશે ?

(3) આ સાંકળમાં B2B અને B2C બિલો ક્યા ? તે લખો.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 4 B

1. નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર માટે યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

(1) દાર્શનિક કિંમત 100 રૂપિયા હોય તેવા શેઅરનો બજારભાવ 75 રૂપિયા છે. તો નીચેના પૈકી કયું વાક્ય યોગ્ય છે ?

(A) આ શેઅર 175 રૂપિયા અધિમૂલ્ય પર છે. (B) આ શેઅર 25 રૂપિયા અવમૂલ્ય પર છે.

(C) આ શેઅર 25 રૂપિયા અધિમૂલ્ય પર છે. (D) આ શેઅર 75 રૂપિયા અવમૂલ્ય પર છે.

(2) 50% લાભાંશ ઘોષિત કરનાર કંપનીના 10 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતવાળા એક શેઅર પર દલાલી કેટલી મળશે ?

(A) 50 રૂપિયા (B) 5 રૂપિયા (C) 500 રૂપિયા (D) 100 રૂપિયા

(3) એક મ્યુચ્યુઅલ ફંડના એક યૂનિટની ચોખ્ખું મૂલ્ય 10.65 રૂપિયા હોય તો 500 યૂનિટસ્‌ની ખરીદી માટે લાગતી રકમે કેટલા રૂપિયા હશે ?

(A) 5,325 (B) 5,235 (C) 5,32,500 (D) 53,250

(4) દલાલી પર વસ્તુ અને સેવા વેંચાણ કરનો દર . . . છે.

(A) 5% (B) 12% (C) 18% (D) 28%

(5) શેઅર્સ ખરીદતી વખતે એક શેઅરની કિંમત શોધવા માટે બજારભાવ (MV), દલાલી અને GST . . .

(A) નો સરવાળો કરવો પડે (B) ની બાદબાકી કરવી પડે છે.

(C) નો ગુણાકાર કરવો પડે. (D) નો ભાગાકાર કરવો પડે છે.

2. 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના શેઅર 30 રૂપિયા અધિમૂલ્ય પર ખરીદ કર્યા. દલાલીનો દર 0.3% છે. તો એક શેઅરની ખરીદ કિંમત શોધો.

3. પ્રશાંતે 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમત FVનાં 50 શેઅર 180 રૂપિયા બજારભાવે ખરીદી લીધાં. તેના પર કંપનીએ 40% લાભાંશ આપ્યો. તો પ્રશાંતના રોકાણમાં વળતરનો દર GST શોધો.

4. જો 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના 300 શેઅર્સ 30 રૂપિયા અવમૂલ્ય પર વેંચતાં કેટલા રૂપિયા મળશે ?

5. 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતવાળા, શેઅર્સમાં 120 રૂપિયા બજારભાવે 60,000 રૂપિયા રોક્યા તો કેટલાં શેઅર્સ મળશે ?

6. શ્રીમતી મીતા અગ્રવાલે 100 રૂપિયા બજારભાવનાં 10,200 રૂપિયાના શેઅર્સ ખરીદ કર્યા તેમાંથી 60 શેઅર્સ 125 રૂપિયાના બજારભાવે વેંચી નાખ્યા અને બાકીના શેઅર્સ 90 રૂપિયાના બજારભાવે વેંચી નાખ્યા. દરેક વ્યવહારમાં દલાલીનો દર 0.1% છે. તો આ વ્યવહારમાં તેમને ફાયદો થયો કે ખોટ ગઇ ? કેટલા રૂપિયા?

7. શેઅર બજારમાં 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના બે કંપનીના શેઅર્સ નીચે પ્રમાણે બજારભાવ અને લાભાંશના દરે છે. તો ક્યા શેઅરમાંનું રોકાણ ફાયદાકારક થશે ? સકારણ લખો.
   (1) કંપની A – 132 રૂપિયા 12%   (2) કંપની B – 144 રૂપિયા 16%

8.★ આદિત્ય સંઘવીએ 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના શેઅર્સનો બજારભાવ 50 રૂપિયા હતો ત્યારે 50,118 રૂપિયા રોકીને ખરીદ કર્યા. આ વ્યવહારમાં 0.2% દલાલી અને દલાલી પર 18%ના દરે GST આપ્યો. તો 50,118 રૂપિયામાં કેટલા શેઅર્સ મળશે?

9.★ શ્રી બાટલીવાલાએ એક દિવસમાં કુલ 30,350 રૂપિયાની કિંમતના શેઅર્સ વેંચ્યા અને 69,650 રૂપિયાની કિંમતના શેઅર્સ ખરીદ્યાં. તે દિવસના કુલ ખરીદ વેચાણ પર 0.1%ના દરે દલાલી અને દલાલી પર 18% વસ્તુ અને સેવા કર આપ્યો. તો આ વ્યવહારમાં દલાલી અને વસ્તુ સેવા અને વેંચાણ કર પરનો કુલ ખર્ચ શોધો.

10.★ શ્રીમતી અરૂણા ઠક્કરે 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના એક કંપનીના 100 શેઅર્સ 1,200 રૂપિયાના બજારભાવે વેંચાતા લીધાં. 0.3% દલાલી અને દલાલી પર 18% GST આપ્યો, તો
   (1) શેઅર્સ માટે કુલ કેટલા રૂપિયા રોકાણ કર્યુ ?   (2) આ રોકાણ પર દલાલી કેટલી આપી?
   (3) દલાલી પર આપેલો GST શોધો ?
   (4) 100 શેઅર્સ માટે કુલ કેટલા રૂપિયા ખર્ચ થશે ?

11.★ શ્રીમતી અનઘા દોશીએ 100 રૂપિયા દાર્શનિક કિંમતના 660 રૂપિયાના બજારભાવે તેના પર 22 શેઅર્સ લીધાં. તો કુલ રોકાણ કેટલા રૂપિયા કર્યુ ? તેના પર 20% લાભાંશ લીધા પછી, 650 રૂપિયાના બજારભાવે તે બધા શેઅર્સ વેંચી દીધા. દરેક વ્યવહારમાં 0.1% દલાલી આપી. તો આ વ્યવહારમાં નફો થયો કે ખોટ ? કેટલા રૂપિયા? (તમારો જવાબ નજીકના પૂર્ણાંકમાં લખો.)

NKCHIV

5 સંભાવના

ચાલો શીખીએ.

- સંભાવના : પરિચય
- યાદચ્છિક પ્રયોગ અને નિષ્પત્તિ
- નમૂના અવકાશ અને ઘટના
- ઘટનાની સંભાવના

ચાલો, ચર્ચા કરીએ.

શિક્ષક : વિદ્યાર્થી મિત્રો ! આપણા વર્ગમાં જેટલાં વિદ્યાર્થી અને વિદ્યાર્થીનીઓ છે. તેટલી ચિઠ્ઠીઓ આ ખોખામાં મૂકી છે. દરેકે એક ચિઠ્ઠી ઉપાડવાની છે. ચિઠ્ઠીઓ પર જુદી જુદી વનસ્પતિના નામ લખ્યાં છે. કોઈપણ બે ચિઠ્ઠીપર એક જ વનસ્પતિનું નામ લખ્યું નથી. 'તુલસી' આ વનસ્પતિના નામવાળી ચિઠ્ઠી કોને મળે છે ? તે જોઈએ. બધાં રૉલ નંબર પ્રમાણે લાઈનમાં ઊભાં રહો. છેલ્લી ચિઠ્ઠી ઉપાડે ત્યાં સુધી કોઈએ ચિઠ્ઠી ખોલીને જોવાની નથી.

અરૂણા : સર, લાઈનમાં હું સૌથી પહેલી છું. પણ હું સૌથી પહેલાં ચિઠ્ઠી ઉપાડીશ નહીં. કારણ આટલી બધી ચિઠ્ઠીઓમાંથી તે ચિઠ્ઠી મને જ મળે એની શક્યતા ખૂબ ઓછી છે.

ઝરીના : સર, લાઈનમાં હું તો સૌથી છેલ્લી છું એટલે હું ચિઠ્ઠી ઉપાડીશ નહીં. કારણકે 'તુલસી' નામવાળી ચિઠ્ઠી કદાચ મારાં પહેલાં જ કોઈએ ઉપાડી લીધી હોય.

ટૂંકમાં પહેલાં અને છેલ્લાં બન્ને વિદ્યાર્થીઓને લાગે છે કે, તેમને 'તુલસી' નામની ચિઠ્ઠી મળવાની શક્યતા સાવ ઓછી છે. ઉપરના સંવાદ શક્યતા ઓછી કે વધારે હોવાનો વિચાર પણ કરવામાં આવે છે.

શક્યતા દર્શાવવા સંબંધી આપણી રાજીંદી વાતચીતમાં આપણે નીચેનાં કેટલાક શબ્દો વાપરીએ છીએ.

- સંભવતઃ
- મોટે ભાગે/કદાચ
- અશક્ય
- નિશ્ચિત
- અંદાજે
- 50 – 50

ભવિષ્યની શક્યતા વિશે નીચેનાં વિધાનો વાંચો.

- કદાચ આજે વરસાદ આવશે.
- મોંઘવારી વધવાની સંભાવના ખૂબ છે.
- ભારતને આગામી ક્રિકેટ સ્પર્ધામાં સામાન્ય રીતે હરાવવો અશક્ય છે.
- નિશ્ચિત મને પ્રથમશ્રેણી (First Class) મળશે.
- બાળકોને સમયસર પૉલિઓ ડૉઝ આપીએ તો પોલિઓ થવાનો સંભવ રહેતો નથી.

બાજુના ચિત્રમાં ક્રિકેટનાં ખેલાડીઓ નાણા ફેંક-કરે છે.

તેમાં કઈ કઈ શક્યતાઓ છે ?

☐ અથવા ☐

એટલે કે નાણા ફેંકમાં ☐ શક્યતાઓ છે.

કૃતિ 1 : એક સિક્કો લઇ વર્ગમાંના દરેક જણે એકવાર ઉછાળી જુઓ. તમને શું જણાયું ?

(શિક્ષક પાટિયા પર નીચે પ્રમાણે કોઠો તૈયાર કરે છે અને સંખ્યા ભરે છે.)

શક્યતા	છાપો (H)	કાટો (T)
વિદ્યાર્થી સંખ્યા	. . .	. . .

કૃતિ 2 : હવે, દરેક જણ તે સિક્કો બે વાર ઉછાળીને જુએ. કઈ કઈ શક્યતા મળે છે ?

શક્યતા	H H	HT	TH	TT
વિદ્યાર્થી સંખ્યા				

કૃતિ 3 : તમારી પાસેનો એક પાસો ફક્ત એકવાર જ ફેંકો, તેના ઉપરના પૃષ્ઠભાગ પર કઈ કઈ શક્યતા મળે છે? આ વિચાર કરો.

આ દરેક શક્યતા એટલે પાસા ફેંકના એક-એક સંભાવ્ય નિષ્પત્તિ (ફલિત) (Outcome) છે.

જાણી લઈએ.

યાદચ્છિક પ્રયોગ (Random Experiment)

જે પ્રયોગમાં સંભાવ્ય પરિણામ પહેલેથી ખબર હોય પરંતુ તે પૈકી કયું પરિણામ મળશે તે ચોક્કસ કહી શકાય નહીં. બધાં સંભાવ્ય પરિણામ મળવાની શક્યતા સમાન હોય તેવા પ્રયોગને ‘યાદચ્છિક પ્રયોગ’ કહે છે.

દા.ત. નાણા ફેંક (સિક્કા ઉછાળવા), પાસા ફેંક, 1 થી 50 સંખ્યા લખેલાં કાર્ડમાંથી 1 કાર્ડ લેવું, રમત માટે વપરાતી યોગ્ય રીતે પીસેલી પત્તાની કેટમાંથી એક પત્તું ખેંચવું. વગેરે.

નિષ્પત્તિ (Outcome)

યાદચ્છિક પ્રયોગના પરિણામે 'નિષ્પત્તિ' કહે છે.

ઉદા., (1) એક વખત સિક્કો ઉછાળવો આ યાદચ્છિક પ્રયોગમાં બે નિષ્પત્તિ હોય છે.
છાપો (H) અથવા કાટો (T)

(2) એક પાસો ફેંકવો આ યાદચ્છિક પ્રયોગમાં તેના 6 પૃષ્ઠભાગ પરનાં ટપકાંની સંખ્યા પરથી 6 નિષ્પત્તિ સંભવે છે.
1 અથવા 2 અથવા 3 અથવા 4 અથવા 5 અથવા 6

(3) 1 થી 50 અંક લખેલાં કાર્ડના સમૂહમાંથી એક કાર્ડ કાઢવું આ પ્રયોગમાં 50 નિષ્પત્તિ (Outcomes) છે.

(4) રમતનાં પત્તા યોગ્ય રીતે પીસેલાં હોય ત્યારે તેમાંથી એક પત્તું ખેંચવું આ યાદચ્છિક પ્રયોગમાં 52 પત્તાં હોય છે, તે નીચે પ્રમાણે દર્શાવ્યાં છે.

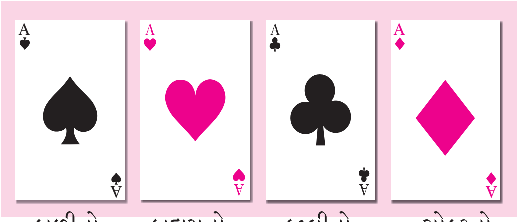
કુલ પત્તાં 52

26 લાલ પત્તાં | 26 કાળા પત્તાં

13 પત્તાં બદામ | 13 પત્તાં ચોકટ | 13 પત્તાં ફુલ્લી | 13 પત્તાં કાળી

પત્તાંની કેટમાં બદામ, ચોકટ, ફુલ્લી, કાળી એમ ચાર સમૂહો છે. દરેક સમૂહમાં રાજા, રાણી, ગુલામ, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 અને એક્કો એમ કુલ 13 પત્તાં હોય છે.

રાજા, રાણી, ગુલામને ચિત્રયુક્ત પત્તાં કહે છે. પત્તાંની દરેક કેટમાં રાજાના ચિત્રવાળાં ચાર, રાણીના ચિત્રવાળા ચાર અને ગુલામનાં ચિત્રવાળાં ચાર એમ કુલ 12 ચિત્રયુક્ત પત્તાં હોય છે.



કાળીનો એક્કો | બદામનો એક્કો | ફુલ્લીનો એક્કો | ચોકટનો એક્કો

સમસંભાવી નિષ્પત્તિ (Equally likely outcomes)

જો આપણે એક પાસો ફેંકીએ, તો પાસાંના ઉપરના પૃષ્ઠભાગ પર સમસંભાવી 1, 2, 3, 4, 5, 6 પૈકી એક સંખ્યા મળવાની શક્યતા સમાન હોય છે. એટલે કે આ બધા સમસંભાવી નિષ્પત્તિ છે. પરંતુ જો પાસા પર કોઇ એક અંક વારંવાર ઉપરના પૃષ્ઠભાગ પર મળતો હોય તો તે પાસો અસમતોલ (biased) કહેવાય છે. આ બાબતે મળતાં નિષ્પત્તિ સમસંભાવી હોતાં નથી.

આ પછીના યાદચ્છિક પ્રયોગોમાં વાપરેલી બાબતો (સિક્કા, પાસા વગેરે) સમતોલ (fair અથવા unbiased) છે એમ ધારીશું.

યાદચ્છિક પ્રયોગમાં મળતાં નિષ્પત્તિ પૈકી કોઈપણ નિષ્પત્તિ બીજાં કરતાં પ્રાધાન્ય ક્રમે ન મળે અથવા બધાં નિષ્પત્તિ મળવાની શક્યતા સમાન હોય તેને સમસંભાવી નિષ્પત્તિ કહે છે. દા.ત. સિક્કો એકવાર ઉછાળતાં 'છાપો' કે 'કાટો' મળવાની નિષ્પત્તિ 'સમસંભાવી' હોય છે. તે જ પ્રમાણે 1 થી 6 અંક વિવિધ પૃષ્ઠો પર હોય તેવો પાસો ફેંકીએ તો તેમાંનો કોઇપણ એક અંક ઉપરના પૃષ્ઠભાગ પર મળવાની શક્યતા સમસંભાવી હોય છે.

મહાવરાસંગ્રહ 5.1

1. નીચેની દરેક બાબતમાં કેટલી શક્યતાઓ છે ?

(1) વનિતાને મહારાષ્ટ્રના જોવાલાયક સ્થળોની માહિતી છે. તેમાંથી કોઈપણ એક ઠેકાણે મે મહિનાની રજાઓમાં તે જવાની છે.

અજંઠા, મહાબળેશ્વર, લોણાર સરોવર, તાડોબા અભયારણ્ય, આંબોલી, રાયગડ, માથેરાન, આનંદવન.

(2) એક અઠવાડિયામાંથી એક વાર યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવાનો છે.

(3) પત્તાંની કેટમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે ખેંચવાનું છે.

(4) દરેક કાર્ડ પર એક સંખ્યા પ્રમાણે 10 થી 20 સુધીની સંખ્યાઓ લખેલી છે.

તેમાંથી એક કાર્ડ યાદચ્છિક રીતે કાઢવાનું છે.

વિચાર કરીએ.

નીચેના પ્રયોગોમાંથી કયા પ્રયોગમાં અપેક્ષિત નિષ્પત્તિ મળવાની શક્યતા વધારે છે ?

(1) એક પાસો ફેંકીની 1 મળે છે.

(2) એક સિક્કો ઉછાળીને છાપ મળે છે.

જાણી લઈએ.

નમૂના અવકાશ (Sample Space)

યાદચ્છિક પ્રયોગમાં શક્ય હોય તેટલાં નિષ્પત્તિના સમૂહને ગણને નમૂના અવકાશ કહે છે.

નમૂના અવકાશ 'S' અથવા 'Ω' (આ ગ્રીક અક્ષરનો ઉચ્ચાર 'ઓમેગા' છે.) આ ચિહ્ન વડે ગણના રૂપમાં દર્શાવવામાં આવે છે. નમૂના અવકાશમાંના દરેક ઘટકને 'નમૂના ઘટક' કહે છે. નમૂના અવકાશ 'S' માંના કુલ ઘટકોની સંખ્યા n(S) એમ લખાય છે. જો n(S) સાન્ત હોય તો તેને સાન્ત નમૂના અવકાશ કહે છે. સાન્ત નમૂના અવકાશના કેટલાંક ઉદાહરણો આગળ કોઠામાં આપ્યાં છે.

અ. ક્ર.	યાદચ્છિક પ્રયોગ	નમૂના અવકાશ	નમૂના ઘટકોની સંખ્યા
1	એક નાણા ફેંક	S = {H, T}	n(S) = 2
2	બે નાણા ફેંક	S = { HH, HT, TH, TT}	n(S) = ☐
3	ત્રણ નાણા ફેંક	S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}	n(S) = 8
4	એક પાસો ફેંકવો	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}	n(S) = ☐
5	બે પાસા ફેંકવા	S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}	n(S) = 36
6	1 થી 25 સંખ્યા લખેલાં કાર્ડના ગણમાંથી એક કાર્ડ કાઢવું.	S = {1, 2, 3, 4, ..., 25}	n(S) = ☐
7	યોગ્ય રીતે પીસેલા 52 પત્તાંની કૅટમાંથી એક પત્તું કાઢવું.	ફુલ્લીનો : એક્કો, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ગુલામ, રાણી, રાજા કાળીનો : એક્કો, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ગુલામ, રાણી, રાજા બદામનો : એક્કો, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ગુલામ, રાણી, રાજા ચોકટનો : એક્કો, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ગુલામ, રાણી, રાજા	n(S) = 52

આ ધ્યાનમાં રાખો.

(i) એક સિક્કો બે વાર ઉછાળવો અથવા બે સિક્કા એક સમયે ઉછાળવા આ બન્ને યાદચ્છિક પ્રયોગના નમૂના અવકાશ સમાન હોય છે. તે જ બાબત ત્રણ સિક્કા માટે પણ સત્ય છે.

(ii) એક પાસો બે વાર ફેંકવો અથવા બે પાસા એક જ વખતે ફેંકવા આ બન્ને માટેનો નમૂના અવકાશ સમાન હોય છે.

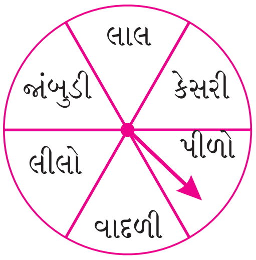
મહાવરાસંગ્રહ 5.2

1. નીચેના દરેક પ્રયોગ માટે નમૂના અવકાશ 'S' અને તેમાંના નમૂના ઘટકોની સંખ્યા n(S) લખો.

(1) એક પાસો અને એક સિક્કો એક જ સમયે ફેંકવા.

(2) 2, 3, 5 આ અંકોથી અંકોની પુનરાવૃત્તિ ન કરતાં બે અંકી સંખ્યા તૈયાર કરવી.

2. છ રંગોની ચકરડી (ચકતી) પરનું બાણ ફેરવતાં તે ક્યા રંગ પર સ્થિર થાય છે તે જોવું



MARCH - 2019

M	T	W	T	F	S	S
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

3. વર્ષ 2019ના માર્ચ મહિનામાં 5ના ગુણકમાં આવતી તારીખોના વાર મેળવવા (બાજુમાં આપેલા કેલેન્ડરનું પાનું જુઓ.)

4. બે છોકરાઓ (B_1, B_2) અને બે છોકરીઓ (G_1, G_2) પૈકી બે જણની રસ્તા સુરક્ષા સમિતિ બનાવવાની છે. તો તે માટેનો નમૂના અવકાશ લખવા માટેની નીચેની કૃતિ પૂર્ણ કરો.

(1) બે છોકરાઓની સમિતિ = ☐ (2) બે છોકરીઓની સમિતિ = ☐

(3) એક છોકરો અને એક છોકરી મળીને તૈયાર થતી સમિતિ = B_1, G_1 ☐ ☐ ☐

∴ નમૂના અવકાશ = {..., ..., ..., ..., ..., ...}

જાણી લઈએ.

ઘટના (Event)

આપેલી વિશેષ શરત પૂર્ણ કરતાં નિષ્પત્તિને, અપેક્ષિત નિષ્પત્તિ (favourable outcome) કહે છે.

નમૂના અવકાશ આપ્યો હોય ત્યારે અપેક્ષિત નિષ્પત્તિના ગણને 'ઘટના' કહે છે. 'ઘટના' એ નમૂના અવકાશનો ઉપગણ (પેટાગણ) હોય છે.

આ ઘટના અંગ્રેજી લિપિના કેપિટલ અક્ષરો વડે જેમકે A, B, C, D વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

ઉદા. બે નાણાફેંકના પ્રયોગમાં ધારોકે ઘટના A એ ઓછામાં ઓછો એક કાટો (T) મળવાની છે.

અહીં અપેક્ષિત નિષ્પત્તિ નીચે પ્રમાણે છે,

A = {TT, TH, HT}

ઘટના A માંના ઘટકોની સંખ્યા n(A) વડે દર્શાવાય છે. અહીં n(A) = 3 છે.

અધિક માહિતી માટે ઘટનાના પ્રકાર

(i) નિશ્ચિત ઘટના (Certain event) (iv) પૂરક ઘટના (Complement of an event)

(ii) અશક્ય ઘટના (Impossible event) (v) પરસ્પર નિવારક ઘટના (Mutually exclusive event)

(iii) એક ઘટકી ઘટના /એકાકી ઘટના(Simple event) (vi) સર્વ સમાવેશી ઘટના (Exhaustive event)

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં નમૂના અવકાશ 'S' લખો. તેમાંના નમૂના ઘટકોની સંખ્યા n(S) લખો. આ પ્રયોગના સંદર્ભે નીચેના ઘટના ગણના રૂપમાં લખો અને તેમાંના નમૂના ઘટકોની સંખ્યા લખો.

(i) ઘટના A માટેની શરત - ઓછામાં ઓછો એક છાપો મળે.

(ii) ઘટના B માટેની શરત - એક જ છાપો મળે.

(iii) ઘટના C માટેની શરત - વધુમાં વધુ એક કાટો મળે.

(iv) ઘટના D માટેની શરત - એક પણ છાપો ન મળે.

ઉકેલ : બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળતાં,

S = {HH, HT, TH, TT} $\therefore$ n(S) = 4

(i) ઘટના A માટેની શરત - ઓછામાં ઓછો એક છાપો મળે તે છે.

A = {HH, HT, TH} $\therefore$ n(A) = 3

(ii) ઘટના B માટેની શરત - એક જ છાપો મળવાની છે.

B = { HT, TH} $\therefore$ n(B) = 2

(iii) ઘટના C માટેની શરત - વધુમાં વધુ એક કાટો મળે તે છે.

C = {HH, HT, TH} $\therefore$ n(C) = 3

(iv) ઘટના D માટેની શરત - એક પણ છાપોના મળવાની છે.

D = {TT} $\therefore$ n(D) = 1

ઉદા. (2) એક થેલીમાં 50 કાર્ડ છે. દરેક કાર્ડ પર 1 થી 50 પૈકી એક સંખ્યા લખેલી છે. તેમાંથી કોઇપણ એક કાર્ડ યાદચ્છિક રીતે કાઢીએ તો તેનો નમૂના અવકાશ 'S' લખો.

ઘટના A, B અને તેમાંના ઘટકોની સંખ્યા લખો.

(i) ઘટના A માટેની શરત, કાર્ડ પરની સંખ્યા 6 વડે વિભાજ્ય છે.

(ii) ઘટના B માટેની શરત છે કે, કાર્ડ પરની સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય.

ઉકેલ : નમૂના અવકાશ, S = {1, 2, 3, . . ., 49, 50} $\therefore$ n(S) = 50

(i) ઘટના A માટેની શરત છે કે, કાર્ડ પરની સંખ્યા 6 વડે વિભાજ્ય છે.

A = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48} $\therefore$ n(A) = 8

(ii) ઘટના B માટેની શરત છે કે, કાર્ડ પરની સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય.

B = {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49} $\therefore$ n(B) = 7

ઉદા. **(3)** 3 છોકરાં અને 2 છોકરીઓમાંથી બે જણની સ્વચ્છતા સમિતિ નીચેની શરતો પ્રમાણે બનાવવાની છે. તો નમૂના અવકાશ 'S' અને નમૂના ઘટકોની સંખ્યા લખો. તેમજ નીચેની ઘટના ગણ રૂપમાં લખી અને નમૂના ઘટકોની સંખ્યા લખો.

(i) ઘટના A માટેની શરત - સમિતિમાં ઓછામાં ઓછી એક છોકરી હોવી જોઈએ.

(ii) ઘટના B માટેની શરત - સમિતિમાં એક છોકરો અને એક છોકરી હોવી જોઈએ.

(iii) ઘટના C માટેની શરત - સમિતિમાં ફક્ત છોકરાઓ હોવા જોઈએ.

(iv) ઘટના D માટેની શરત - સમિતિમાં વધુમાં વધુ એક છોકરી હોવી જોઈએ.

ઉકેલ : ધારોકે, B_1, B_2, B_3 આ ત્રણ છોકરાઓ અને G_1, G_2 આ બે છોકરીઓ છે.

છોકરાં-છોકરીઓમાંથી બે જણની સ્વચ્છતા સમિતિ બનાવવાની છે.

$S = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$ $\therefore$ $n(S) = 10$

(i) ઘટના A માટેની શરત છે કે, સમિતિમાં ઓછામાં ઓછી એક છોકરી હોવી જોઈએ.

$A = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$ $\therefore$ $n(A) = 7$

(ii) ઘટના B માટેની શરત છે કે, સમિતિમાં એક છોકરો અને એક છોકરી હોવી જોઈએ.

$B = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$ $\therefore$ $n(B) = 6$

(iii) ઘટના C માટેની શરત છે કે, સમિતિમાં ફક્ત છોકરાઓ હોવા જોઈએ.

$C = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3\}$ $\therefore$ $n(C) = 3$

(iv) ઘટના D માટેની શરત છે કે, સમિતિમાં વધુમાં વધુ એક છોકરી હોવી જોઈએ.

$D = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$ $\therefore$ $n(D) = 9$

ઉદા. **(4)** બે પાસા ફેંકવાથી મળતો નમૂના અવકાશ 'S' અને નમૂના અવકાશમાંના ઘટકોની સંખ્યા n(S) લખો. નીચેની શરતો પૂર્ણ કરતી ઘટના ગણ સ્વરૂપે લખો અને તેમાંના નમૂના ઘટકોની સંખ્યા લખો.

(i) ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર મળતાં અંકોનો સરવાળો મૂળ સંખ્યા હોય.

(ii) ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પરના અંકોનો સરવાળો 5 ના ગુણાંક હોય.

(iii) ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પરનાં અંકોનો સરવાળો 25 હોય.

(iv) પહેલા પાસા પર મળતો અંક, બીજા પાસા પર મળતાં અંક કરતાં ઓછો હોય.

ઉકેલ : નમૂના અવકાશ,

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$$
$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$$
$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$$
$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$$
$$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$$
$$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \quad \therefore\ n(S) = 36$$

(i) ધારોકે, ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર મળતાં અંકોનો સરવાળો મૂળ સંખ્યા હોય તે ઘટના E ની શરત છે.

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4),$$
$$(4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\} \quad \therefore\ n(E) = 15$$

(ii) ધારોકે, ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર મળતાં અંકોનો સરવાળો 5 ના ગુણાંક હોય તે ઘટના F ની શરત છે.

$$F = \{ (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4) \} \quad \therefore\ n(F) = 7$$

(iii) ધારોકે, ઘટના G માટેની શરત છે કે, ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પરનાં અંકોનો સરવાળો 25 હોય.

$$G = \{\ \} = \phi \quad \therefore\ n(G) = 0$$

(iv) ધારોકે, ઘટના H માટેની શરત એ છે કે, પહેલાં પાસા પરનો અંક બીજા પાસા પરનાં અંક કરતાં નાનો હોય.

$$H = \{(1, 2)\ (1, 3)\ (1, 4)\ (1, 5)\ (1, 6)\ (2, 3)\ (2, 4)\ (2, 5)\ (2, 6)$$
$$(3, 4)\ (3, 5)\ (3, 6)\ (4, 5)\ (4, 6)\ (5, 6)\} \quad \therefore\ n(H) = 15$$

મહાવરાસંગ્રહ 5.3

1. નીચેના દરેક યાદચ્છિક પ્રયોગમાટે નમૂના અવકાશ 'S' અને તેમાંના નમૂના ઘટકોની સંખ્યા n(S) લખો. તેમજ તેમાંની ઘટના A, B, C ગણ સ્વરૂપે લખો અને અને n(A), n(B) અને n(C) લખો.

(1) એક પાસો ફેંકતા,

ઘટના A માટેની શરત - ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર સમસંખ્યા મળે.

ઘટના B માટેની શરત - ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર વિષમસંખ્યા મળે.

ઘટના C માટેની શરત - ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર મૂળસંખ્યા મળે.

(2) બે પાસા એક સાથે ફેંકતા,

ઘટના A માટેની શરત - ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પરના અંકોનો સરવાળો 6 ના ગુણાંક હોય.

ઘટના B માટેની શરત - ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પરના અંકોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછા 10 હોય.

ઘટના C માટેની શરત - બન્ને પાસા પરના અંક સમાન હોય.

(3) ત્રણ સિક્કા એક સાથે ઉછાળતાં,

ઘટના A માટેની શરત, ઓછામાં ઓછા બે છાપા મળે.

ઘટના B માટેની શરત, એક પણ છાપો ન મળે.

ઘટના C માટેની શરત, બીજાં સિક્કા પર છાપો મળે.

(4) અંકોની પુનરાવૃત્તિ ન કરતાં 0, 1, 2, 3, 4, 5 અંકોથી તૈયાર થતી બે અંકી સંખ્યા તૈયાર કરી છે.

ઘટના A માટેની શરત, તૈયાર થતી સંખ્યા સમ સંખ્યા હોય.

ઘટના B માટેની શરત, તૈયાર થતી સંખ્યા 3 વડે વિભાજ્ય હોય.

ઘટના C માટેની શરત, તૈયાર થતી સંખ્યા 50 થી મોટી હોય.

(5) ત્રણ પુરૂષો અને બે સ્ત્રીઓમાંથી બે જણની 'પર્યાવરણ સમિતિ' બનાવવાની છે.

ઘટના A માટેની શરત, સમિતિમાં ઓછામાં ઓછી એક સ્ત્રી હોય.

ઘટના B માટેની શરત, સમિતિમાં એક પુરૂષ અને એક સ્ત્રી હોય.

ઘટના C માટેની શરત, સમિતિમાં એક સ્ત્રી ન હોય.

(6) એક સિક્કો અને એક પાસો એક જ સમયે ફેંકતાં,

ઘટના A માટેની શરત, છાપો અને વિષમ સંખ્યા મળે.

ઘટના B માટેની શરત, H અથવા T અને સમ સંખ્યા મળે.

ઘટના C માટેની શરત, પાસા પરની સંખ્યા 7 કરતાં મોટી અને સિક્કા પર કાટો મળે.

જાણી લઈએ.

ઘટનાની સંભાવના (Probability of an event)

એક સહેલો પ્રયોગ ધ્યાનમાં લઈએ. એક થેલીમાં સમાન આકારના ચાર દડાં છે. તેમાંના ત્રણ સફેદ દડાં અને ચોથો દડો કાળો છે. તેમાંથી એક દડો આંખો બંધ કરીને કાઢવાનો છે.

અહીં કાઢેલો દડો સફેદ હોવાની શક્યતા વધારે છે, એ સહેલાઈથી સમજાય છે.

ગણિતની ભાષામાં અપેક્ષિત ઘટનાની શક્યતા દર્શાવતી સંખ્યાને 'સંભાવના' કહે છે. તે નીચેનું સૂત્ર વાપરીને સંખ્યારૂપે કે શતમાનમાં દર્શાવાય છે.

એકાદ યાદચ્છિક પ્રયોગમાં નમૂના અવકાશ S અને A તે પ્રયોગસંબંધી અપેક્ષિત ઘટના હોય તો તે ઘટનાની સંભાવના 'P(A)' એમ દર્શાવાય છે અને નીચેના સૂત્રથી શોધવામાં આવે છે.

$$P(A) = \frac{\text{ઘટના 'A' માંના નમૂના ઘટકોની સંખ્યા}}{\text{નમૂના અવકાશ S માંના કુલ ઘટકોની સંખ્યા}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

ઉપરના પ્રયોગમાં 'કાઢેલો દડો સફેદ હોવો' તે ઘટના A હોય તો n(A) = 3, કારણ ત્રણ દડાં સફેદ છે. અને કુલ દડાં ચાર છે. n(S) = 4

∴ કાઢેલો દડો સફેદ હોય, તેની સંભાવના $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

તે જ પ્રમાણે, 'કાઢેલો દડો કાળો હોવાની' ઘટના B હોય તો n(B) = 1 ∴ $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. **(1)** એક સિક્કો ઉછાળતાં, નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) છાપો મળવો. (ii) કાટો મળવો.

ઉકેલ : ધારોકે, નમૂના અવકાશ 'S' છે.

S = {H, T} ∴ n(S) = 2

(i) ધારોકે, ઘટના A માટેની શરત, છાપો મળવાની છે.

A = {H} ∴ n(A) = 1

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

(ii) ધારોકે, ઘટના B માટેની શરત, કાટો મળવાની છે.

B = {T} ∴ n(B) = 1

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

ઉદા. **(2)** એક પાસો ફેંકતા નીચેની શરત પૂર્ણ કરતી ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર મૂળ સંખ્યા મળે. (ii) ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર સમ સંખ્યા મળે.

ઉકેલ : ધારોકે, 'S' નમૂના અવકાશ છે.

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ∴ n(S) = 6

(i) ઘટના A : ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર મૂળ સંખ્યા હોય.

A = {2, 3, 5} ∴ n(A) = 3

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) ઘટના B : ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર સમસંખ્યા મળે.

$B = \{2, 4, 6\}$ $\therefore$ $n(B) = 3$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ઉદા. **(3)** યોગ્ય રીતે પીસેલા 52 પત્તાંની કૅટમાંથી એક પત્તું કાઢવામાં આવે તો નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) તે પત્તું લાલ હોય. (ii) તે પત્તું ચિત્રયુક્ત હોય.

ઉકેલ : ધારોકે, નમૂના અવકાશ 'S' છે. $\therefore n(S) = 52$

(i) ઘટના A : કાઢેલું પત્તું લાલ હોય.

કુલ લાલ પત્તાં = 13 ચોકટના પત્તાં + 13 બદામના પત્તાં

$\therefore n(A) = 26$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) ઘટના B : કાઢેલું પત્તું ચિત્રયુક્ત હોય.

પત્તાની કૅટમાં રાજા, રાણી અને ગુલામ આ ચિત્રયુક્ત પત્તાં છે તેવા કુલ 12 ચિત્રયુક્ત પત્તાં હોય છે.

$\therefore n(B) = 12$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

ઉદા. **(4)** એક ખોખામાં 5 સ્ટ્રોબેરી, 6 કૉફી અને 2 પેપરમિન્ટની ચોકલેટસ છે. તેમાંથી એક ચોકલેટ કાઢતાં -

(i) કાઢેલી ચોકલેટ કૉફીની હોય અને

(ii) કાઢેલી ચોકલેટ પેપરમિન્ટ હોવાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારોકે, નમૂના અવકાશ 'S' છે. $\therefore n(S) = 5 + 6 + 2 = 13$

ઘટના A : કાઢેલી ચોકલેટ કૉફીની હોય.

$n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{6}{13}$$

ઘટના B : કાઢેલી ચોકલેટ પેપરમિન્ટ હોય.

$n(B) = 2$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{2}{13}$$

આ ધ્યાનમાં રાખો.

- સંભાવના કહેતી કે લખતી વખતે અપૂર્ણાંક અથવા શતમાનનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.
- કોઈપણ ઘટનાની સંભાવના 0 થી 1 અથવા 0% થી 100% હોય છે.

ધારોકે ઘટના E હોય, તો $0 \leq P(E) \leq 1$ અથવા $0\ \% \leq P(E) \leq 100\ \%$

ઉદા. $\frac{1}{4}$ આ સંભાવના 25% એમ લખાય છે.

- પાઠની શરૂઆતમાં વર્ગમાંના વિદ્યાર્થી-વિદ્યાર્થીનીઓએ વનસ્પતિના નામની ચિઠ્ઠી ઉપાડવાના પ્રયોગમાં 'તુલસી' નામની ચિઠ્ઠી વિદ્યાર્થીને મળે તેની સંભાવનાનો વિચાર કર્યો હતો. એક જ ચિઠ્ઠી પર 'તુલસી' લખેલું છે. જો 40 વિદ્યાર્થીઓ, દરેક જણ એક ચિઠ્ઠી ઉપાડે તો દરેકને 'તુલસી' લખેલી ચિઠ્ઠી મળવાની સંભાવના $\frac{1}{40}$ છે. પહેલાં, વચ્ચે કે છેલ્લે ચિઠ્ઠી ઉપાડનારને તે ચિઠ્ઠી મળવાની સંભાવના સરખી જ છે.

મહાવરાસંગ્રહ 5.4

1. બે સિક્કા ઉછાળતાં, નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(1) ઓછામાં ઓછો એક છાપો મળે. (2) એકપણ છાપો ન મળે.

2. બે પાસા એક જ સમયે ફેંકતા નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(1) ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પરનાં અંકોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો 10 હોય.

(2) ઉપલાં પૃઠભાગ પરનાં અંકોનો સરવાળો 33 હોય.

(3) પહેલાં પાસા પરનો અંક, બીજા પાસા પરનાં અંકથી મોટો હોય.

3. એક પેટીમાં 15 ટિકિટો છે. દરેક પર 1 થી 15 પૈકી એક સંખ્યા લખેલી છે. તે પેટીમાંથી એક ટિકિટ યાદચ્છિક રીતે કાઢતાં, ટિકિટ પરની સંખ્યા

(1) સમ સંખ્યા હોવી (2) સંખ્યા 5 ના ગુણાંકમાં હોય; આ ઘટનાની સંભાવના શોધો.

4. અંકો 2, 3, 5, 7, 9 માંથી અંકોની પુનરાવૃત્તિ ન કરતાં બે અંકી સંખ્યાઓ તૈયાર કરતાં નીચેની ઘટનાની સંભાવના કાઢો.

(1) તે સંખ્યા વિષમ હોય (2) તે સંખ્યા 5 ના ગુણાંકમાં હોય.

5. યોગ્ય રીતે પીસેલા 52 પત્તાની કૅટમાંથી એક પત્તું ખેંચતા નીચેની ઘટનાની સંભાવના કેટલી ?

(1) એક્કો મળવો (2) કાળીનું પત્તું મળવું.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 5

1. નીચેના દરેક પ્રશ્ન માટે યોગ્ય પર્યાય પસંદ કરો.

(1) નીચેના પર્યાયોમાંથી ક્યો પર્યાય 'સંભાવના' દર્શાવતો નથી ?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) 1.5 (C) 15 % D) 0.7

(2) એક પાસો ફેંકતા, ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર 3 કરતાં ઓછી સંખ્યા મળવાની સંભાવના .... છે.

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ D) 0

(3) 1 થી 100 માંથી પસંદ કરેલી સંખ્યા, મૂળ સંખ્યા હોવાની સંભાવના .... છે.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{6}{25}$ (C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{13}{50}$

(4) દરેક કાર્ડ પર એક સંખ્યા એ પ્રમાણે 1 થી 40 સુધીની સંખ્યાઓ લખેલાં 40 કાર્ડ એક થેલીમાં છે તેમાંથી એક કાર્ડ ઉપાડતાં તે કાર્ડપરની સંખ્યા 5 ના ગુણાંક હોવાની શક્યતા છે.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{1}{3}$

(5) જો $n(A) = 2$, $P(A) = \frac{1}{5}$, તો $n(S) = ?$

(A) 10 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{3}$

2. બાસ્કેટબૉલના રમતવીરો જૉન, વાસીમ અને આકાશ એક નિશ્ચિત જગ્યાએથી બાસ્કેટમાં બૉલ નાખવાની પ્રેક્ટીસ (મહાવરો) કરતાં હતાં. બાસ્કેટમાં બૉલ પડવાની જૉનની સંભાવના $\frac{4}{5}$, વાસિમની 0.83 અને આકાશની 58% છે તો કોની સંભાવના સૌથી વધારે છે ?

3. એક હૉકી સંઘમાં 6 બચાવ કરનાર, 4 આક્રમક અને એક ગોલ-રક્ષક ખેલાડીઓ છે. યાદચ્છિક રીતે તેમાંથી એક ખેલાડીને કૅપ્ટન (સંઘનાયક) તરીકે પસંદ કરવાનો છે. તો નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(1) ગોલરક્ષક જ કૅપ્ટન બને.

(2) બચાવ કરનારો ખેલાડી કૅપ્ટન બને.

4. જોસેફ એક ટોપીમાં દરેક કાર્ડ પર અંગ્રેજી વર્ણમાળાનો એક અક્ષર એ પ્રમાણે બધાં અક્ષરોનાં કુલ 26 કાર્ડ મૂક્યાં છે. તેમાંથી એક કાર્ડ યાદચ્છિક રીતે કાઢવાનું છે તો કાઢેલું કાર્ડ 'સ્વર' અક્ષર હોવાની સંભાવના શોધો.

5. ફુગ્ગાવાળો 2 લાલ, 3 બ્લ્યુ અને 4 લીલાં રંગના ફુગ્ગામાંથી એક ફુગ્ગો પ્રણાલિને યાદચ્છિક રીતે આપવાનો છે તો નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(1) આપેલો ફુગ્ગો લાલ હોવો.

(2) આપેલો ફુગ્ગો વાદળી હોવો.

(3) આપેલો ફુગ્ગો લીલો હોવો.

6. એક ખોખામાં 5 લાલ પેન, 8 વાદળી પેન અને 3 લીલી પેન છે. યાદચ્છિક પધ્ધતિથી ઋતુજાને 1 પેન કાઢવાની છે તો કાઢેલી પેન વાદળી હોવાની સંભાવના શોધો.

7. એક પાસાના 6 પૃષ્ઠો નીચે પ્રમાણે છે.

A　B　C　D　E　A

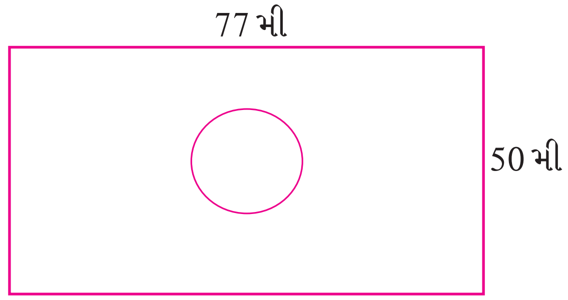
આ પાસો એક વખત ફેંકતા નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(1) ઉપરના પૃષ્ઠભાગ પર ‘A’ મળે.　　(2) ઉપરના પૃષ્ઠભાગ પર ‘D’ મળે.

8. એક ખોખામાં 30 ટિકિટો છે. દરેક ટિકિટ પર 1 થી 30 પૈકી એક સંખ્યા લખેલી છે. તેમાંથી કોઇપણ એક ટિકિટ યાદચ્છિક રીતે કાઢતાં નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(1) ટિકિટ પરની સંખ્યા વિષમ હોવી.　　(2) ટિકિટ પરની સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોવી.

9. એક બાગની લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે 77 મીટર અને 50 મીટર છે. બાગમાં 14 મીટર વ્યાસનું એક તળાવ છે. બાગની નજીક એક મકાનની ગૅલેરીમાં સૂકવેલો ટૉવેલ પવનથી ઉડીને બાગમાં પડે છે તો તે બાગમાં આવેલાં તળાવમાં પડવાની સંભાવના શોધો.



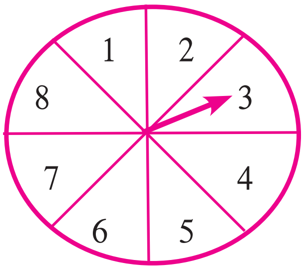
10. તકની એક રમતમાં (Game of chance) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 આ પૈકી એક અંક પર બાણ સ્થિર થાય છે. અને તે સમસંભાવી નિષ્પત્તિ છે. તો નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(1) બાણ, 8 અંક પર સ્થિર થાય.

(2) બાણ, વિષમ અંક પર સ્થિર થાય.

(3) બાણ, 2 કરતાં મોટી સંખ્યા પર સ્થિર થાય.

(4) બાણ વડે દર્શાવેલી સંખ્યા 9 કરતાં નાની હોય.



11. દરેક કાર્ડ પર એક પ્રમાણે 0 થી 5 આ પૂર્ણાંક સંખ્યા લખેલાં 6 કાર્ડ ખોખામાં મૂક્યાં છે. તો નીચેની સંખ્યાની સંભાવના શોધો.

(1) કાઢેલાં કાર્ડ પરની સંખ્યા પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય.

(2) કાઢેલાં કાર્ડ પરની સંખ્યા 1 થી નાનો હોય.

(3) કાઢેલાં કાર્ડ પરની સંખ્યા પૂર્ણ સંખ્યા હોય.

(4) કાઢેલાં કાર્ડ પરની સંખ્યા 5 થી મોટો હોય.

12. એક બૅગમાં 3 લાલ, 3 સફેદ અને 3 લાલ દડાં છે. બૅગમાંથી 1 દડો યાદચ્છિક પધ્ધતિથી કાઢતાં નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(1) કાઢેલો દડો લાલ હોય. (2) કાઢેલો દડો લાલ ન હોય.

(3) કાઢેલો દડો લાલ કે સફેદ હોય.

13. દરેક કાર્ડ પર એક એ પ્રમાણે mathematics આ શબ્દનાં અક્ષરો લખેલાં છે. તે કાર્ડ ઉંઘા મૂક્યા છે તેમાંથી એક કાર્ડ ઉપાડતાં તેના પર 'm' અક્ષર હોવાની સંભાવના શોધો.

14. એક શાળામાંના 200 વિદ્યાર્થીઓ પૈકી 135 વિદ્યાર્થીઓને કબડ્ડીની રમત ગમે છે. અન્યોને આ રમત ગમતી નથી. બધામાંથી એક વિદ્યાર્થી પસંદ કરીએ તો તેને કબડ્ડીની રમત ગમતી ન હોવાની સંભાવના શોધો.

★15. 0, 1, 2, 3, 4 પૈકી અંક લઈને દ્વિ-અંકી સંખ્યા તૈયાર કરવાની છે. અંકોની પુનરાવૃત્તિ પણ ચાલશે તો નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(1) તે સંખ્યા મૂળ સંખ્યા હોય. (2) તે સંખ્યા 4 ના ગુણાંકમાં

(3) તે સંખ્યા 11 ના ગુણાંકમાં હોય.

★16. એક પાસાપર 0, 1, 2, 3, 4, 5, એમ અંકો છે. આ પાસો બે વાર ફેંકતા, તેના ઉપલાં પૃષ્ઠભાગ પર મળેલાં અંકોનો ગુણાકાર શૂન્ય હોવાની સંભાવના શોધો.

17. નીચેની કૃતિ કરો -

કૃતિ I : તમારા વર્ગોની કુલ સંખ્યા n(S) = ☐

વર્ગોમાં ચશ્મા વાપરતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા n(A) = ☐

બધા વિદ્યાર્થીઓમાંથી ચશ્મા પહેરનાર એક વિદ્યાર્થીને યાદચ્છિક પધ્ધતિથી પસંદ કરવાની સંભાવના P(A) = ☐

બધા વિદ્યાર્થીઓમાંથી ચશ્મા ન પહેરનાર એક વિદ્યાર્થીને યાદચ્છિક પધ્ધતિથી પસંદ કરવાની સંભાવના P(B) = ☐

કૃતિ II : નમૂના અવકાશ સ્વતઃ લઈ નીચેના ચોકઠા ભરો.

નમૂના અવકાશ → S = { } → n(S) = ☐

ઘટના A માટેની શરત 'સમ સંખ્યા મળે' છે. → A = { } → n(A) = ☐

$P(A) = \frac{\square}{\square} = \square$

ooo

6 આંકડાશાસ્ત્ર

ચાલો શીખીએ.

- કેન્દ્રીય પ્રવૃત્તિના પરિમાણો - વર્ગીકૃત વિતરણ કોઠા પરથી મધ્ય, મધ્યક, બહુલક
- આંકડાકીય માહિતીની આલેખ દ્વારા રજૂઆત - સ્તંભાલેખ, આવૃત્તિ બહુકોણ, વૃત્તાકૃતિ.

માનવ જીવનમાં આંકડાશાસ્ત્ર અનેક શાખાઓ માટે ઉપયોગી છે. જેમકે ખેતી, અર્થશાસ્ત્ર, વાણિજ્ય, ઔષધશાસ્ત્ર, વનસ્પતિશાસ્ત્ર, જૈવિકતંત્રજ્ઞાન, ભૌતિકશાસ્ત્ર, રસાયણશાસ્ત્ર, શિક્ષણશાસ્ત્ર, સમાજશાસ્ત્ર, વ્યવસ્થાપન વગેરે. એકાદ પ્રયોગ પછી મળતી નિષ્પત્તિની અનેક શક્યતાઓ હોય છે. જ્યારે તેમની શક્યતા તપાસવાની હોય, ત્યારે મોટાં પ્રમાણમાં પ્રયોગ કરીને, બધી બાબતોની વ્યવસ્થિત નોંધ કરવામાં આવે છે. આ નોંધનો ઉપયોગ કરીને વિવિધ નિષ્પત્તિઓની સંભાવના તપાસવામાં આવે છે. તે માટે આંકડાશાસ્ત્રમાં કે સંખ્યા શાસ્ત્રમાં નિયમ તૈયાર કરેલાં છે.

ફ્રાન્સિસ ગાલ્ટન (1822-1911) આ બ્રિટિશ વૈજ્ઞાનિકે સંખ્યાશાસ્ત્રમાં મૂળભૂત કામ કર્યું છે. તેઓ પ્રશ્નાવલિ તૈયાર કરીને અનેક લોકોમાં વહેંચતા અને તે ભરી આપવાની વિનંતી કરતા. આ રીતે ઘણાં બધાં લોકોની માહિતી ભેગી કરીને તેમની પૂર્વભૂમિકા, આર્થિક સ્થિતિ, ગમો-અણગમો, આરોગ્ય વગેરેની મોટાં પ્રમાણમાં નોંધ રાખતા હતાં. જુદી જુદી વ્યક્તિઓના આંગળાની છાપ જુદી-જુદી હોય છે. તેની માહિતી હતી. ગાલ્ટને અનેક લોકોનાં આંગળાની છાપ તપાસીને તેના વર્ગીકરણની પધ્ધતિ વિકસાવી. સંખ્યાશાસ્ત્રનો ઉપયોગ કરીને બે વ્યક્તિઓના આંગળાની છાપ સરખી હોવાની શક્યતા લગભગ શૂન્ય હોય છે તે બતાવ્યું. તેથી આંગળાની છાપ ઉપરથી વ્યક્તિને ઓળખવાનું શક્ય બન્યું. ગુનેગારોને શોધવા માટે આ પધ્ધતિ ન્યાયાલયમાં પણ માન્ય થઈ. પ્રાણીઓ અને માનવોના અનુવંશશાસ્ત્રમાં તેમણે ખૂબ કામ કર્યું છે.

ફ્રાન્સિસ ગાલ્ટન

યાદ કરીએ.

સર્વેક્ષણમાંથી મળેલી સંખ્યાકીય સામગ્રીમાં સામાન્યપણે એક ગુણધર્મ મળી આવે છે. તે એટલે બધાં પ્રાપ્તાંક એક વિશેષ પ્રાપ્તાંકની આસપાસ કે તેની ફરતે કેન્દ્રિત થવાની પ્રવૃત્તિ. આ વિશેષ પ્રાપ્તાંક તે સમૂહની પ્રાતિનિધિક સંખ્યા હોય છે. આ સંખ્યાને કેન્દ્રિય પ્રવૃત્તિનું પરિમાણ કહે છે.

અવર્ગીકૃત કોઠા માટે આપણે ‘મધ્ય’ (Mean), ‘મધ્યક’ (Median) અને ‘બહુલક’ (Mode)નો અભ્યાસ પહેલાં કરેલો છે.

પ્રાત્યક્ષિક 1 : તમારા વર્ગના બધા છોકરાઓની ઊંચાઈ સેંમીમાં નોંધો. તમને જણાશે કે, અનેક છોકરાઓની ઊંચાઈ એકાદ વિશેષ સંખ્યાની ફરતે કે આસપાસ કેન્દ્રિત થયેલી છે.

પ્રાત્યક્ષિક 2 : પીપળાનાં ઝાડ નીચે પડેલાં પાંદડાં ભેગાં કરો અને દરેક વિદ્યાર્થીને એકેક પાંદડું આપો. દરેકે પોતાને મળેલાં પાંદડાની લંબાઈ દાંડીથી ટોચ સુધી માપીને નોંધવી. બધા નિરીક્ષણો (પ્રાપ્તાંક) નોંધ્યા પછી ધ્યાનમાં આવશે કે, એક વિશેષ સંખ્યાની આસપાસ બધાં નિરીક્ષણો કેન્દ્રિત થયેલાં જણાય છે.

હવે આપણે સંખ્યાકીય સામગ્રીના કેન્દ્રિય પ્રવૃત્તિના પરિમાણોનો ‘મધ્ય’ (Mean), ‘મધ્યક’ (Median) અને ‘બહુલક’ (Mode) નો વધુ અભ્યાસ કરવાના છીએ. તે માટેની પરિભાષા અને ચિહ્નોની માહિતી જાણી લઈએ.

$$\text{સંખ્યાકીય (આંકડાકીય) સામગ્રીનો મધ્ય} = \frac{\text{બધા પ્રાપ્તાંકોનો સરવાળો}}{\text{કુલ પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$ (જ્યાં x_i એ i મો પ્રાપ્તાંક છે.)

મધ્ય $\overline{X}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. તે આપેલી સામગ્રીની સરાસરી છે.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

જાણી લઈએ.

વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠા પરથી મધ્ય (Mean from grouped frequency distribution)

જ્યારે પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા ઘણી બધી હોય ત્યારે ઉપરના સૂત્રમાં બધી સંખ્યાઓ લખીને તેનો સરવાળો કરવાનું કામ મહેનત ભર્યું અને અઘરૂં બને છે. તો તે માટે આપણે અન્ય કેટલી પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

ક્યારેક મોટાં પ્રમાણમાં કરેલાં પ્રયોગની સામગ્રી વર્ગીકૃત કોઠામાં આપેલી હોય છે. આ કોઠા પરથી આંકડાકીય કરેલી માહિતીમાંની સંખ્યાઓનો મધ્ય ચોક્કસ કે નિશ્ચિત કાઢી શકાતો નથી, તેથી તેની આસપાસની સંખ્યા કાઢીને અથવા અંદાજે મધ્ય કાઢવાની કેટલીક રીતોનો અભ્યાસ કરીએ.

સાદી પદ્ધતિ (Direct Method)

હવે આપણે વર્ગીકૃત સંખ્યાકીય માહિતીનો મધ્ય કાઢવાની રીતનો ઉદાહરણ પરથી અભ્યાસ કરીએ.

ઉદા. : નીચેના કોઠામાં એક કામ પૂર્ણ કરવા માટે કામદારોને લાગતાં સમયનો આવૃત્તિ કોઠો આપ્યો છે. તે પરથી કામ પૂર્ણ કરવા માટે એક કામદારને લાગતાં સમયનો મધ્ય શોધો.

દરેકને કામ કરવા માટે લાગતો સમય (કલાક)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
કામદારોની સંખ્યા	10	15	12	8	5

ઉકેલ :

(1) કોઠામાં બતાવ્યા પ્રમાણે ઊભા સ્તંભ લીધા.

(2) પહેલાં સ્તંભમાં વર્ગો લખ્યા.

(3) બીજા સ્તંભમાં વર્ગમધ્ય x_i લખ્યાં.

(4) ત્રીજા સ્તંભમાં તે વર્ગમાં આવતાં કામદારોની સંખ્યા (f_i) લખી.

(5) ચોથા સ્તંભમાં દરેક વર્ગ સામે ($x_i \times f_i$) આ ગુણાકાર લખ્યો.

(6) પછી $\sum_{i=1}^{N} x_i f_i$ સરવાળો લખ્યો.

(7) સૂત્ર વાપરીને મધ્ય શોધ્યો.

વર્ગ (સમય કલાક)	વર્ગમધ્ય x_i	આવૃત્તિ (કામદારોની સંખ્યા) f_i	વર્ગમધ્ય × આવૃત્તિ $x_i f_i$
15-19	17	10	170
20-24	22	15	330
25-29	27	12	324
30-34	32	8	256
35-39	37	5	185
કુલ		$\sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 1265$

મધ્ય = $\overline{X} = \dfrac{\sum x_i f_i}{N} = \dfrac{1265}{50} = 25.3 \quad \because \sum f_i = N$

જવાબ : એક કામદારને કામ પૂર્ણ કરવા લાગતાં સમયનો મધ્ય = 25.3 કલાક (અંદાજે)

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. **(1)** નીચેના કોઠામાં 50 વિદ્યાર્થીઓને કસોટી પરીક્ષામાં મળેલાં ગુણની ટકાવારી આપી છે. તે પરથી ગુણની ટકાવારીનો મધ્ય શોધો.

ગુણની ટકાવારી	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
વિદ્યાર્થી સંખ્યા	3	7	15	20	5

ઉકેલ : પગથિયાનુસાર નીચેનો કોઠો તૈયાર કર્યો.

વર્ગ (ગુણની ટકાવારી)	વર્ગમધ્ય x_i	આવૃત્તિ (વિદ્યાર્થી સંખ્યા) f_i	વર્ગમધ્ય × આવૃત્તિ $x_i f_i$
0-20	10	3	30
20-40	30	7	210
40-60	50	15	750
60-80	70	20	1400
80-100	90	5	450
કુલ		$N = \sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 2840$

$\overline{X} = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$

$= \dfrac{2840}{50}$

$= 56.8$

$\therefore$ ગુણની ટકાવારીનો મધ્ય= 56.8

ઉદા. (2) ગયા વરસે મહારાષ્ટ્રના વિવિધ 30 ગામોનું ઉનાળાના એક દિવસનું મહત્તમ તાપમાન °C માં નીચેના કોઠામાં આપ્યું છે. તે પરથી મહત્તમ તાપમાનનો મધ્ય શોધો.

મહત્તમ તાપમાન	24-28	28-32	32-36	36-40	40-44
ગામોની સંખ્યા	4	5	7	8	6

ઉકેલ :

વર્ગ (તાપમાન °C)	વર્ગમધ્ય x_i	આવૃત્તિ (ગામોની સંખ્યા) f_i	વર્ગમધ્ય × આવૃત્તિ $x_i f_i$
24-28	26	4	104
28-32	30	5	150
32-36	34	7	238
36-40	38	8	304
40-44	42	6	252
કુલ		$N = \sum f_i = 30$	$\sum x_i f_i = 1048$

મધ્ય = $\overline{X} = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{1048}{30} = 34.9\ ^\circ C$

ધારેલ/ગૃહિત મધ્યની પધ્ધતિ (Assumed Mean Method)

ઉપર ઉકેલ આપેલા ઉદાહરણમાં તમારા ધ્યાનમાં આવ્યું કે, કેટલીકવાર $x_i f_i$ ગુણાકાર ખૂબ મોટી સંખ્યા આવે છે તેથી સાદી રીતે મધ્ય શોધવાનું અઘરૂં બને છે. તે માટે આપણે બીજી પધ્ધતિ 'ધારેલ/ગૃહિત મધ્ય પધ્ધતિ' જાણી લઈએ. આ પધ્ધતિમાં નાની સંખ્યાના સરવાળા, ભાગાકાર કરવાનું સહેલું બને છે.

ઉદાહરણાર્થે, 40, 42, 43, 45, 47, 48 આ પ્રાપ્તાંકો છે. તેનો મધ્ય શોધવાનો છે.

આ ઉદાહરણામાંની સંખ્યાઓનું નિરીક્ષણ કરતાં ધ્યાનમાં આવે છે કે, સામગ્રીનો મધ્ય 40 થી વધારે આવશે એટલે 40 મધ્ય ધારીએ. આ 'ધારેલ મધ્ય' છે. હવે 40-40 = 0, 42 - 40 = 2, 43-40 = 3, 45-40 = 5, 47 - 40 = 7, 48 - 40 = 8 આ ફરક જુઓ આને 'વિચલન' કહે છે. તેનો મધ્ય શોધીએ. તેમાં ધારેલ મધ્ય 40 ઉમેરતાં સામગ્રીનો મધ્ય મળશે.

એટલે કે મધ્ય = ધારેલ મધ્ય + ધારેલ મધ્યથી વિચલનોનો મધ્ય

$$\overline{X} = 40 + \left(\frac{0+2+3+5+7+8}{6}\right) = 40 + \frac{25}{6} = 40 + 4\frac{1}{6} = 44\frac{1}{6}$$

ધારેલ મધ્ય માટે A, ધારેલમધ્યથી વિચલન માટે d અને વિચલનના મધ્ય માટે $\overline{d}$ આ ચિહ્નો લેતાં,

$\overline{X} = A + \overline{d}$ આ સૂત્ર મળે છે.

આ જ ઉદાહરણ ધારેલ મધ્ય 43 લઈને કરી જોઈએ. દરેક પ્રાપ્તાંકમાંથી 43 બાદ કરીને મળતી બાદબાકીઓ એટલે જ ધારેલ મધ્યથી થયેલાં વિચલનો મેળવીએ.

40 − 43 = −3, 42 − 43 = −1, 43 − 43 = 0, 45 − 43 = 2, 47 − 43 = 4, 48 − 43 = 5

ધારેલ મધ્યથી થતાં વિચલનોનો સરવાળો = −3 −1 + 0 + 2 + 4 + 5 = 7

હવે $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 43 + \left(\frac{7}{6}\right)$ (કુલ 6 વિચલનો છે.)

$= 43 + 1\frac{1}{6}$

$= 44\frac{1}{6}$

આપણાં ધ્યાનમાં આવે છે કે, આમ ધારેલ મધ્યની રીત વાપરવાથી ઉદાહરણમાંની ગણતરી સહેલી બને છે. તેમજ પ્રાપ્તાંકમાંથી અથવા સગવડનુસાર કોઈપણ અન્ય સંખ્યા ‘ધારેલ મધ્ય’ તરીકે લઇએ તો પણ મધ્ય બદલાતો નથી.

હવે આપણે આપેલાં આવૃત્તિ કોઠા માટે આ પધ્ધતિ કેવી રીતે વાપરવી તે એક ઉદાહરણ દ્વારા શીખીએ.

ઉદા. : 100 શાકભાજી વિક્રેતાના રોજના વેચાણનો આવૃત્તિ કોઠો નીચે આપ્યો છે. ધારેલ મધ્યની રીતે તેમના રોજિંદા વેચાણનો મધ્ય શોધો.

રોજિંદુ વેચાણ રૂપિયા	1000−1500	1500−2000	2000−2500	2500−3000
વિક્રેતાની સંખ્યા	15	20	35	30

ઉકેલ : ધારેલ મધ્ય A = 2250 લઈએ. $d_i = x_i - A$ આ વિચલન છે.

વર્ગ રોજિંદું વેચાણ (રૂપિયા)	વર્ગમધ્ય x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2250$	આવૃત્તિ (વિક્રેતાની સંખ્યા) f_i	આવૃત્તિ × વિચલન $f_i d_i$
1000−1500	1250	−1000	15	−15000
1500−2000	1750	−500	20	−10000
2000−2500	2250 → A	0	35	0
2500−3000	2750	500	30	15000
કુલ			$N = \sum f_i = 100$	$\sum f_i d_i = -10000$

નીચેના પગથિયા વાપરીને કોઠો તૈયાર કર્યો.

(1) ધારેલ મધ્ય A = 2250 લીધો. (સામાન્ય રીતે કોઠામાં સૌથી વધુ આવૃત્તિ ધરાવતા વર્ગનો વર્ગમધ્ય, ધારેલ મધ્ય તરીકે લેવાય છે.)

(2) પહેલાં સ્તંભમાં વેચાણના વર્ગ લખ્યા.

(3) બીજા સ્તંભમાં વર્ગ-મધ્ય લખ્યા.

(4) ત્રીજા સ્તંભમાં $d_i = x_i - A = x_i - 2250$ ની કિંમતો લખી.

(5) ચોથા સ્તંભમાં દરેક વર્ગના વિક્રેતાઓની સંખ્યા લખી અને તેનો સરવાળો $\sum f_i$ લખ્યો.

(6) પાંચમા સ્તંભમાં $(f_i \times d_i)$ આ ગુણાકાર કરીને તેનો સરવાળો $\sum f_i d_i$ લખ્યો.

સૂત્ર વાપરીને $\overline{d}$ અને $\overline{X}$ શોધ્યો.

$$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = -\frac{10000}{100} = -100 \qquad \therefore \text{ મધ્ય } \overline{X} = A + \overline{d} = 2250 - 100 = 2150$$

જવાબ : રોજીંદા વેચાણનો મધ્ય = 2150 રૂપિયા છે.

કૃતિ :- આ ઉદાહરણ સાદી રીતે (Direct Method) ઉકેલો.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) નીચેના કોઠામાં એક વ્યાવસાયિકને ત્યાં કામ કરતાં 50 કામદારોમાં દૈનિક પગારનું આવૃત્તિ વિતરણ આપ્યું છે. તે પરથી કામગારોના દૈનિક પગારનો મધ્ય ધારેલ મધ્ય પદ્ધતિ શોધો.

કામગારોનો દૈનિક પગાર (રૂપિયા)	200-240	240-280	280-320	320-360	360-400
કામગારોની સંખ્યા (આવૃત્તિ)	5	10	15	12	8

ઉકેલ : ધારેલ મધ્ય A = 300 લઈએ.

વર્ગ (પગાર રૂપિયા)	વર્ગમધ્ય x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 300$	આવૃત્તિ (કામગારની સંખ્યા) f_i	આવૃત્તિ × વિચલન $f_i d_i$
200-240	220	-80	5	-400
240-280	260	-40	10	-400
280-320	300 → A	0	15	0
320-360	340	40	12	480
360-400	380	80	8	640
કુલ			$\sum f_i = 50$	$\sum f_i d_i = 320$

$$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = \frac{320}{50} = 6.4$$

મધ્ય, $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 300 + 6.4$

$= 306.40$

જવાબ : કામગારોના દૈનિક પગારનો મધ્ય = 306.40 રૂપિયા છે.

મધ્ય પ્રમાણ વિચલન પધ્ધતિ (Step deviation method)

આપણે મધ્ય શોધવાની સાદી રીતે અને ધારેલ મધ્યની રીતનો અભ્યાસ કર્યો. અધિક સુલભતા માટે મધ્ય શોધવાની હજી એક રીત ઉદાહરણની મદદથી જાણીએ.

- પ્રથમ ધારેલ મધ્ય A બાદ કરીને d_i નો સ્તંભ તૈયાર કરીએ.
- બધા d_i નો ગુસાઅ g સહજતાથી મળે તો $u_i = \frac{d_i}{g}$ નો સ્તંભ તૈયાર કરીએ.
- બધી u_i સંખ્યાનો મધ્ય $\overline{u}$ શોધીએ.
- $\overline{X} = A + \overline{u}\, g$ સૂત્ર વાપરી મધ્ય શોધીએ.

ઉદાહરણ : 100 કુટુંબોએ આરોગ્ય વિમા માટે રોકેલી વાર્ષિક રકમનો આવૃત્તિ કોઠો આપ્યો છે. મધ્ય પ્રમાણ વિચલન પધ્ધતિથી કુટુંબનાં વાર્ષિક રોકાણનો મધ્ય શોધો.

કુટુંબે રોકેલી વિમાની રકમ (રૂપિયા)	800-1200	1200-1600	1600-2000	2000-2400	2400-2800	2800-3200
કુટુંબની સંખ્યા	3	15	20	25	30	7

ઉકેલ : A = 2200 લઈએ, બધા d_i જોઈએ $g = 400$ લઈએ.

વર્ગ (વિમાની રકમ રૂપિયા)	વર્ગમધ્ય x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2200$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	આવૃત્તિ (કુટુંબોની સંખ્યા) f_i	$f_i u_i$
800-1200	1000	-1200	-3	3	-9
1200-1600	1400	-800	-2	15	-30
1600-2000	1800	-400	-1	20	-20
2000-2400	2200 → A	0	0	25	0
2400-2800	2600	400	1	30	30
2800-3200	3000	800	2	7	14
કુલ				$\sum f_i = 100$	$\sum f_i u_i = -15$

ઉપરનો કોઠો આ પગથિયા વાપરીને તૈયાર કર્યો છે.

(1) કોઠાના પહેલાં સ્તંભમાં વિમામાં રોકાણના વર્ગો લખ્યા.

(2) બીજા સ્તંભમાં વર્ગમધ્ય x_i લખ્યો.

(3) ત્રીજા સ્તંભમાં $d_i = x_i - A$ ની કિંમતો લખી.

(4) આ સ્તંભની બધી સંખ્યાઓ 400ના ગુણાંક છે તેથી g = 400 લીધાં ચોથા સ્તંભમાં $u_i = \frac{d_i}{g} = \frac{d_i}{400}$ ની કિંમતો લખી.

(5) પાંચમા સ્તંભમાં દરેક વર્ગની આવૃત્તિ (કુટુંબોની સંખ્યા) લખી.

(6) છઠ્ઠા સ્તંભમાં $f_i \times u_i$ આ ગુણાકાર દરેક વર્ગમાટે લખ્યો.

u_i નો મધ્ય નીચેના સૂત્ર વડે શોધ્યો.

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{-15}{100} = -0.15$$

$$\overline{X} = A + \overline{u}\, g$$

$= 2200 + (-0.15)(400)$

$= 2200 + (-60.00)$

$= 2200 - 60 = 2140$

∴ કુટુંબોના વાર્ષિક રોકાણનો મધ્ય 2140 રૂપિયા છે.

કૃતિ : સાદી રીતે, ધારેલ મધ્યની રીતે ઉપરનું ઉદાહરણ ઉકેલો. કોઇપણ રીતે શોધેલો મધ્ય સમાન હોય છે. તે અનુભવો.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) શાળાનાં 50 વિદ્યાર્થીઓએ પૂરગ્રસ્તોમાટે જમા કરેલાં ફંડનો આવૃત્તિ કોઠો નીચે પ્રમાણે છે તે પરથી જમા કરેલાં ફંડનો મધ્ય શોધો.

ફંડ (રૂપિયા)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
વિદ્યાર્થી સંખ્યા	2	4	24	18	1	1

નજીકના બે વર્ગોમાં પ્રાપ્તાંક ઓછાં છે. તેથી તેમનો મળીને એક વર્ગ કરવો સુલભ બને છે. આ ઉદાહરણમાં 0 - 500 અને 500 - 1000 નો એક વર્ગ અને 2000 - 2500 અને 2500 - 3000 નો મળીને એક વર્ગ કર્યો.

ફંડની રકમ (રૂપિયા)	0-1000	1000-1500	1500-2000	2000-3000
વિદ્યાર્થી સંખ્યા	6	24	18	2

ઉકેલ : A = 1250 લઈએ બધા d_i નું નિરીક્ષણ કરીને g = 250 લેતાં,

વર્ગ (ફંડ રૂપિયા)	વર્ગમધ્ય x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 1250$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	આવૃત્તિ f_i	$f_i u_i$
0-1000	500	-750	-3	6	-18
1000-1500	1250 ⟶ A	0	0	24	0
1500 - 2000	1750	500	2	18	36
2000-3000	2500	1250	5	2	10
કુલ				$\sum f_i = 50$	$\sum f_i u_i = 28$

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{28}{50} = 0.56,$$

$$\overline{u}\,g = 0.56 \times 250 = 140$$

$$\overline{X} = A + g\overline{u} = 1250 + 140 = 1390$$

∴ જમા કરેલાં ફંડનો મધ્ય 1390 રૂપિયા છે.

કૃતિ –

1. આ ઉદાહરણ સાદી રીતે ઉકેલો.
2. આ ઉદાહરણમાં શોધેલો મધ્ય, ધારેલ મધ્યની રીતે કાઢેલાં મધ્ય સાથે ચકાસી જુઓ.
3. A = 1750 લઈને ઉપરની પધ્ધતિથી ઉદાહરણ ઉકેલો.

મહાવરાસંગ્રહ 6.1

1. ધોરણ 10ના 50 વિદ્યાર્થીઓએ રોજના અભ્યાસ માટે વ્યતીત કરેલો સમય અને વિદ્યાર્થી સંખ્યાનો આવૃત્તિ કોઠો આપ્યો છે. તે પરથી વિદ્યાર્થીઓએ અભ્યાસ માટે આપેલ સમયનો મધ્ય સાદી પધ્ધતિથી શોધો.

સમય (કલાક)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10
વિદ્યાર્થીની સંખ્યા	7	18	12	10	3

2. એક ધોરીમાર્ગ પર આવેલાં ટોલનાકા પર સવારે 6 થી સાંજે 6 સુધીમાં આવતાં વાહનો પાસેથી જમા થતો કર અને વાહનોની સંખ્યાનો આવૃત્તિ કોઠો આપ્યો છે. તેના પરથી જમા થતાં કરનો મધ્ય 'ધારેલ મધ્યની' પદ્ધતિથી શોધો.

જમા કર (રૂપિયા)	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
વાહન સંખ્યા	80	110	120	70	40

3. એક દિવસમાં દૂધ વિક્રી કેન્દ્ર પરથી 50 ગ્રાહકોને વિતરિત કરેલા દૂધનો (લિટરમાં) આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો આપ્યો છે. તેના પરથી વિતરિત કરેલાં દૂધનો મધ્ય સાદી પધ્ધતિથી શોધો.

દૂધ વિતરણ (લિટર)	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
ગ્રાહકની સંખ્યા	17	13	10	7	3

4. કેટલાંક ખેડૂતોની સંતરાના બાગની આવકનો આવૃત્તિ કોઠો નીચે આપ્યો છે. તે પરથી તેમની આવકનો મધ્ય 'ધારેલ મધ્ય' પધ્ધતિથી શોધો.

આવક (હજાર રૂપિયા)	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
ખેડૂતોની સંખ્યા	20	25	15	10	10

5. એક કંપનીના 120 કર્મચારીઓએ દુષ્કાળગ્રસ્તો માટે જમા કરેલ ફંડફાળાની રકમનો આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો આપ્યો છે. તે પરથી કર્મચારીઓએ જમા કરેલ ફંડ ફાળાનો મધ્ય 'મધ્ય પ્રમાણ વિચલન' પધ્ધતિથી શોધો.

જમા રકમ (રૂપિયા)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500
કર્મચારીની સંખ્યા	35	28	32	15	10

6. એક કારખાનામાં 150 કામગારોનો સાપ્તાહિક પગારનો આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો નીચે આપ્યો છે. તે પરથી તેમનાં સાપ્તાહિક પગારનો મધ્ય 'મધ્ય પ્રમાણ વિચલન' પધ્ધતિથી શોધો.

સાપ્તાહિક પગાર (રૂપિયા)	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
કામગારોની સંખ્યા	25	45	50	30

યાદ કરીએ.

વિજ્ઞાન પ્રદર્શનમાં ભાગ લેવા માટે એક શાળાના બે વિદ્યાર્થી અને બે વિદ્યાર્થીનીઓ બે દિવસ માટે બીજા શહેરમાં ગયા. તેમને પોતાનું સાંજનું ભોજન ક્યાં કરવું, તે નક્કી કરવાનું હતું. કામની જગ્યાથી એક કિલોમીટરના વિસ્તારમાં ભોજન આપતી દસ હોટેલ્સ હતી. ત્યાંનો ભોજન દર રૂપિયામાં, ચઢતા ક્રમમાં નીચે પ્રમાણે હતો.

40, 45, 60, 65, 70, 80, 90, 100 અને 500

બધી હોટેલનાં જમવાનો સરાસરી દર $\frac{1130}{10}$ = 113 રૂપિયા હતો.

વિદ્યાર્થીઓએ કઈ હોટેલમાં જમવાનું નક્કી કર્યું હશે ? 500 રૂપિયા દરનું ભોજન છોડીને બાકીની હોટેલનો દર 113 રૂપિયાથી ઓછો હતો. વિદ્યાર્થીઓએ મધ્યમ દરની હોટેલ પસંદ કરવાનું નક્કી કર્યું. પહેલાં દિવસે 70 રૂપિયા દરનું અને બીજા દિવસે 80 રૂપિયા દરનું ભોજન કર્યું.

ક્યારેક સરાસરીને બદલે પ્રાપ્તાંકોનો મધ્યક વાપરવો પડે છે. તેનું આ ઉદાહરણ છે.

પાછલાં ધોરણમાં તમે અવર્ગીકૃત સામગ્રી માટે 'મધ્યક' ની સંકલ્પનાનો અભ્યાસ કર્યો છે.

- આપેલી સામગ્રીમાંની સંખ્યા ચઢતા કે ઉતરતા ક્રમમાં ગોઠવી મધ્યમાં આવતી સંખ્યાને સામગ્રીનો મધ્યક કહે છે.
- મધ્યક આપેલી સામગ્રીના બે સમાન ભાગમાં વિભાજન કરે છે. એટલે કે આપેલી સામગ્રીમાં મધ્યકની ઉપર અને નીચે બન્ને બાજુએ સમાન પ્રાપ્તાંકો હોય છે.
- આપેલાં પ્રાપ્તાંક $k_1 \le k_2 \le k_3 \ldots\ldots \le k_n$ એમ લખાય છે.
- સામગ્રીમાં પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા વિષમ હોય તો $\frac{n+1}{2}$ મો પ્રાપ્તાંક મધ્યક હોય છે. કારણ કે $k_{\frac{n+1}{2}}$ ના પહેલાં $\frac{n-1}{2}$ પ્રાપ્તાંકો અને તેના પછી પણ $\frac{n-1}{2}$ પ્રાપ્તાંકો હોય છે. n = 2m + 1 લઈને ચકાસો.
- સામગ્રીમાં પ્રાપ્તાંકો nની સંખ્યા સમ હોય તો મધ્યમા આવતી બે સંખ્યાની સરાસરી જેટલો મધ્યક હોય છે. કારણ કે $k_{\frac{n}{2}}$ ના પહેલાં અને $k_{\frac{n+2}{2}}$ ના પછી બન્ને તરફ $\frac{n-2}{2}$ પ્રાપ્તાંકો હોય છે. n = 2m લઈને ચકાસો.
- એટલે કે $\frac{n}{2}$ મી સંખ્યા અને $\frac{n+2}{2}$ મી સંખ્યાની સરાસરીથી આવતી સંખ્યા એ તે સામગ્રીનો મધ્યક હોય છે.

ઉદા. **(1)** 32, 33, 38, 40, 43, 48, 50 આ પ્રાપ્તાંકોની ગોઠવણીમાં 4થી સંખ્યા મધ્યમાં છે. સામગ્રીનો મધ્યક = 40 છે.

ઉદા. **(2)** 61, 62, 65, 66, 68, 70, 74, 75 અહીં પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા 8, સમસંખ્યા છે. માટે ચોથી અને પાંચમી સંખ્યા મધ્યમાં છે તે 66 અને 68 છે.

તેથી સામગ્રીનો મધ્યક = $\frac{66+68}{2}$ = 67 છે.

જાણી લઈએ.

વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠા પરથી મધ્યક (Median from grouped frequency distribution)

પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા ઘણી બધી હોય ત્યારે તેની ક્રમસર માંડણી કરવી સુલભ નથી. તેથી આપણે વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણનો અંદાજે મધ્યક કાઢવાની રીત ઉદાહરણની મદદથી સમજીએ.

ઉદા. 6, 8, 10.4, 11, 15.5, 12, 18 આ પ્રાપ્તાંકોનો વર્ગીકૃત કોઠો નીચે આપ્યો છે.

વર્ગ	તાળાની નિશાનીઓ	આવૃત્તિ
6–10	II	2
11–15	II	2
16–20	I	1

વર્ગ	તાળાની નિશાનીઓ	આવૃત્તિ
5.5–10.5	III	3
10.5–15.5	II	2
15.5–20.5	II	2

પહેલાં કોઠામાં 10.4 અને 15.5 આ પ્રાપ્તાંક સમાવી શકાયા નથી. કારણ આ સંખ્યાઓ 6–10, 11–15, 16–20 પૈકી કોઈપણ વર્ગમાં સમાવી શકાય નહિ.

આવા સમયે વર્ગો સળંગ કરી લેવા તે આપણે જાણીએ છીએ.

આ કોઠામાં નીચલી વર્ગ મર્યાદા 0.5થી ઓછી અને ઉપલી વર્ગ મર્યાદા 0.5થી વધારતાં, બીજો વિતરણ કોઠો તૈયાર થશે. તેમાં 15.5 ને 15.5 - 20.5 ના વર્ગમાં સમાવી શકાશે.

વર્ગોને સળંગ કરવાની પદ્ધતિ બદલતાં આવૃત્તિ બદલાય છે તે કોઠા પરથી ધ્યાનમાં આવે છે.

આ ધ્યાનમાં રાખો.

ઉપરના કોઠામાં 6–10 વર્ગનું વર્ગમધ્ય $= \frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8$;

તેમજ 5.5–10.5 આ વર્ગનું વર્ગમધ્ય $= \frac{5.5+10.5}{2} = \frac{16}{2} = 8$.

એટલે વર્ગની રચના જુદી રીતે કરવા છતાં વર્ગમધ્ય બદલાતું નથી.

નમૂના ઉદાહરણ

ધોરણ 10ની પૂરોગામી પરીક્ષામાં પ્રાપ્ત કરેલાં 100 વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો આવૃત્તિ કોઠો નીચે આપ્યો છે. તો વિદ્યાર્થીના ગુણનો મધ્યક શોધો.

પરીક્ષાના ગુણ	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
વિદ્યાર્થી સંખ્યા	4	20	30	40	6

ઉકેલ : N = 100

$\frac{N}{2}$ = 50 તેથી 50 માટે 50મી સંખ્યા અંદાજે મધ્યક થશે. તે માટે 50મી સંખ્યા ક્યા વર્ગમાં આવશે, તે આપણે શોધવું પડશે. 'ઉપલી વર્ગમર્યાદાથી ઓછી' પ્રકારની સંચિત આવૃત્તિ કોઠા પરથી શોધી શકાશે. તે માટે આપણે આપેલાં કોઠા પરથી નીચે પ્રમાણે સંચિત આવૃત્તિ 'ના કરતાં ઓછી' નો કોઠો તૈયાર કરીએ.

વર્ગ (વિદ્યાર્થીના ગુણ)	વિદ્યાર્થી સંખ્યા f_i	સંચિત આવૃત્તિ (ના કરતાં ઓછી) cf
0–20	4	4
20–40	20	24
40–60	30	54
60–80	40	94
80–100	6	100

આ કોઠા પરથી,

- $\frac{N}{2}$ = 50 આ ક્રમાંકનો પ્રાપ્તાંક 40–60 ના વર્ગમાં છે. જે વર્ગમાં મધ્યક આવે છે. તે વર્ગને **'મધ્યક વર્ગ'** કહે છે. અહીં 40 – 60 એ મધ્યક વર્ગ છે.
- 40–60 વર્ગની નીચલી મર્યાદા 40 છે અને આવૃત્તિ 30 છે.
- પહેલા 50 પ્રાપ્તાંક પૈકી પહેલાં 24 પ્રાપ્તાંકો એ 40થી ઓછાં છે. બાકીના 50 – 24 = 26 પ્રાપ્તાંકો 40 થી 60 (40 – 60) ના વર્ગમાં છે. તેમાંથી 50-માં પ્રાપ્તાંકનો અંદાજ નીચે પ્રમાણે કરાય છે.
- આ વર્ગમાં કુલ 30 પૈકી 26 પ્રાપ્તાંકો 50 મા પ્રાપ્તાંક સુધી છે. વર્ગાન્તર 20 છે એટલે 50-મો પ્રાપ્તાંક 40 થી $\frac{26}{30} \times 20$ જેટલો મોટો છે એમ માનવામાં આવે છે.

  તે અંદાજે $40 + \frac{26}{30} \times 20 = 40 + \frac{52}{3} = 57\frac{1}{3}$ છે.

  $\therefore$ મધ્યક $= 57\frac{1}{3}$

- સૂત્ર રૂપે તે આપણે નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ.

$$\text{મધ્યક} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

આ સૂત્રમાં L = મધ્યક વર્ગની નીચલી સીમા, N = કુલ આવૃત્તિ

h = મધ્યક વર્ગનું વર્ગાન્તર, f = મધ્યક વર્ગની આવૃત્તિ

cf = મધ્યક વર્ગના પહેલાના વર્ગની સંચિત આવૃત્તિ.

ઉપરના ઉદાહરણમાં $\frac{N}{2} = 50$, $cf = 24$, $h = 20$, $f = 30$, $L = 40$,

$$\text{મધ્યક} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h \quad \ldots\ldots \text{(સૂત્ર)}$$

$$= 40 + \left(\frac{50 - 24}{30}\right) \times 20$$

$$= 40 + \frac{26 \times 20}{30}$$

$$= 40 + 17\frac{1}{3}$$

$$= 57\frac{1}{3}$$

આ ધ્યાનમાં રાખો.

- મધ્યક શોધવા માટે આપેલા વર્ગો સળંગ ન હોય તો સળંગ કરી લેવા પડે છે.
- પ્રાપ્તાંકોની સંખ્યા ખૂબ વધારે હોય ત્યારે દરેક પ્રાપ્તાંકને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવવાનું મુશ્કેલ બને છે. તેથી સામગ્રીને વર્ગીકૃત કરવામાં આવે છે. આ રીતે વર્ગીકૃત સામગ્રીનો મધ્યક સચોટપણે કાઢી શકાતો નથી. પરંતુ અંદાજે કાઢવા માટે નીચેનું સૂત્ર વપરાય છે.

$$\text{મધ્યક} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. **(1)** જાહેર પરિવહન સેવાની 60 બસેસ એક દિવસમાં જેટલું અંતર કાપે છે તેનો આવૃત્તિ કોઠો નીચે આપ્યો છે. તો બસોએ એક દિવસમાં કાપેલાં અંતરનો મધ્યક શોધો.

દરરોજ કાપેલું અંતર (કિમી)	200-209	210-219	220-229	230-239	240-249
બસની સંખ્યા	4	14	26	10	6

ઉકેલ : (1) કોઠામાં આપેલાં વર્ગો સળંગ નથી.

અહીં એક વર્ગની ઉપલી મર્યાદા અને પછીના વર્ગની નીચલી મર્યાદા વચ્ચે 1 નો ફરક છે.

$\therefore$ 1 ÷ 2 = 0.5 આ કિંમત દરેક વર્ગની નીચલી મર્યાદામાંથી બાદ કરીએ અને ઉપલી મર્યાદામાં ઉમેરી વર્ગસીમા નક્કી કરીએ. તે પ્રમાણે વર્ગો સળંગ કરીને કોઠો ફરી લખીએ.

(2) પછી તેમાં 'કરતાં ઓછી' સંચિત આવૃત્તિનો સ્તંભ તૈયાર કરીએ.

આપેલાં વર્ગ	સળંગ કરેલાં વર્ગ	આવૃત્તિ f_i	સંચિત આવૃત્તિ કરતાં ઓછી
200-209	199.5-209.5	4	4
210-219	209.5-219.5	14	18 $\rightarrow$ cf
220-229	219.5-229.5	26 $\rightarrow$ f	44
230-239	229.5-239.5	10	54
240-249	239.5-249.5	6	60

અહીં કુલ આવૃત્તિ = Σf_i = N = 60 $\therefore$ $\frac{N}{2}$ = 30.

$\therefore$ અંદાજે 30-મો પ્રાપ્તાંક મધ્યક છે.

પહેલાં 18 પ્રાપ્તાંકો 219.5થી ઓછાં અને બાકીના, 30 − 18 = 12 પ્રાપ્તાંકો 219.5 − 229.5 આ વર્ગમાં છે. માટે આ મધ્યક વર્ગ છે.

219.5-229.5 આ વર્ગની સંચિત આવૃત્તિ 44 છે.

સૂત્રમાં,

L = મધ્યક વર્ગની નીચલી મર્યાદા = 219.5, h = મધ્યક વર્ગનું વર્ગાન્તર = 10

cf = મધ્યક વર્ગના પહેલાનાં વર્ગની સંચિત આવૃત્તિ = 18,

f = મધ્યક વર્ગની આવૃત્તિ = 26

મધ્યક = $L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$

$\therefore$ મધ્યક $= 219.5+\left(\dfrac{30-18}{26}\right)\times 10$

$= 219.5 + \left(\dfrac{12\times 10}{26}\right)$

$= 219.50 + 4.62$

$= 224.12$

બસોએ દરરોજ કાપેલાં અંતરનો મધ્યક = 224.12 કિમી

ઉદા.(2) નીચેના કોઠામાં એક દિવસમાં વસ્તુસંગ્રહાલયની મુલાકાતે આવનારા વ્યક્તિઓની ઉંમર આપી છે. તે પરથી તેમને ઉંમરનો મધ્યક શોધો.

ઉમર (વર્ષ)	વ્યક્તિની સંખ્યા
10 થી ઓછી	3
20 થી ઓછી	10
30 થી ઓછી	22
40 થી ઓછી	40
50 થી ઓછી	54
60 થી ઓછી	71

ઉકેલ : અહીં 'કરતાં ઓછી' સંચિત આવૃત્તિ વિતરણ આપેલું છે. પ્રથમ આ બધા વર્ગોની ખરી વર્ગ મર્યાદા મેળવવી પડશે. આપણને ખબર છે કે, '-કરતાં ઓછી' સંચિત આવૃત્તિ વર્ગની ઉપલી મર્યાદા સાથે સંબંધિત છે. પહેલા વર્ગની ઉપલી મર્યાદા 10 છે. કોઈપણ વ્યક્તિની ઉંમર ધન સંખ્યા હોય એટલે પહેલો વર્ગ 0-10 હશે. બીજા વર્ગની ઉપલી મર્યાદા 20 છે. તેથી બીજો વર્ગ 10-20 થશે આમ વર્ગાન્તર 10 લઇને ક્રમસર વર્ગો તૈયાર કર્યા. આ પ્રમાણે છેલ્લો વર્ગ 50-60 થશે. આ રીતે આપણે નીચે પ્રમાણે વર્ગો લખીશું.

ઉમર (વર્ષ)	વર્ગ	આવૃત્તિ વ્યક્તિની સંખ્યા	સંચિત આવૃત્તિ - કરતાં ઓછી
10 થી ઓછી	0-10	3	3
20 થી ઓછી	10-20	10 - 3 = 7	10
30 થી ઓછી	20-30	22 - 10 = 12	22 $\rightarrow cf$
40 થી ઓછી	30-40	40 - 22 = 18 $\rightarrow f$	40
50 થી ઓછી	40-50	54 - 40 = 14	54
60 થી ઓછી	50-60	71 - 54 = 17	71

અહીં N = 71 $\therefore$ $\frac{N}{2}$ = 35.5 અને h = 10

35.5 આ સંખ્યા 30-40 ના વર્ગમાં છે. તેથી આ મધ્યક વર્ગ છે. તેની પહેલાના વર્ગની આવૃત્તિ 22 છે, એટલે cf = 22, L = 30, f = 18.

$$\text{મધ્યક} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 30 + (35.5-22)\frac{10}{18}$$

$$= 30 + (13.5)\frac{10}{18}$$

$$= 30 + 7.5$$

$$= 37.5$$

$\therefore$ મુલાકાતે આવનાર વ્યક્તિનો ઉંમરનો મધ્યક = 37.5 વર્ષ

મહાવરાસંગ્રહ 6.2

1. નીચેના કોઠામાં એક સૉફ્ટવેઅર કંપનીના દરરોજના કામના કલાક અને તેટલો સમય કામ કરતાં કર્મચારીઓની સંખ્યા આપી છે. તેના પરથી કંપનીના કર્મચારીઓના દરરોજના કામના કલાકનો મધ્યક શોધો.

દરરોજના કામના કલાક	8-10	10-12	12-14	14-16
કર્મચારીઓની સંખ્યા	150	500	300	50

2. એક આંબાવાડીમાં આંબાના ઝાડ અને તેના પરથી ઉતરતાં આંબાની સંખ્યાનો આવૃતિ કોઠો નીચે આપ્યો છે. તે પરથી સામગ્રીનો મધ્યક શોધો.

આંબાની સંખ્યા	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300
ઝાડની સંખ્યા	33	30	90	80	17

3. મુંબઈ-પુણે દ્રુતગતિમાર્ગ (એક્સપ્રેસ વે) પરનાં પરિવહન નિયંત્રણ કરતાં પોલીસોએ કરેલાં સર્વેક્ષણમાં નીચેના નિરીક્ષણો નોંધાયા. તે પરથી મધ્યક શોધો.

વાહનની ગતિ (કિમી/કલાક)	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89
વાહનની સંખ્યા	10	34	55	85	10	6

4. વિવિધ કારખાનામાં ઉત્પાદિત થતાં વિદ્યુત દિવાઓની સંખ્યા નીચેના કોઠામાં આપેલી છે. તે પરથી વિદ્યુત દિવાના ઉત્પાદનનો મધ્યક શોધો.

વિદ્યુત દિવાની સંખ્યા (હજાર)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
કારખાનાની સંખ્યા	12	35	20	15	8	7	8

જાણી લઈએ.

વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠા પરથી બહુલક (Mode from grouped frequency distribution)

આપેલાં પ્રાપ્તાંકોમાં વધારેમાં વધારે વખત આવતાં પ્રાપ્તાંકને તે સમૂહને બહુલક કહે છે તે આપણે જાણીએ છીએ.

દા.ત., એકાદી ટૂ વ્હીલરનું ઉત્પાદન કરતી કંપની વિવિધ રંગોમાં ટૂ વ્હીલર તૈયાર કરે છે. કયા રંગની ગાડીઓ સર્વાધિક પસંદગી પામે છે તે જાણવા માટે કંપનીને રંગોનો 'બહુલક' માહિત હોવો જરૂરી છે. તે જ પ્રમાણે વિવિધ ઉત્પાદનોવાળી કંપનીના ક્યા ઉત્પાદનની માંગણી સૌથી વધારે છે તે કંપનીએ જાણી લેવું જરૂરી છે. આ માટે ઉત્પાદનનો બહુલક શોધવો જોઈએ.

આપણે અવર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઠા પરથી બહુલક કેવી રીતે શોધવો તે જોયું છે.

હવે આપણે વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ પરથી અંદાજે બહુલક કેવી રીતે શોધવો તેનો અભ્યાસ કરીશું. તે માટે નીચેનું સૂત્ર વપરાય છે.

$$\text{બહુલક} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

ઉપરના સૂત્રમાં, L = બહુલકીય વર્ગની નીચલી મર્યાદા

f_1 = બહુલકીય વર્ગની આવૃત્તિ

f_0 = બહુલકીય વર્ગની પહેલાના વર્ગની આવૃત્તિ

f_2 = બહુલકીય વર્ગની પછીના વર્ગની આવૃત્તિ

h = બહુલકીય વર્ગનું વર્ગાન્તર

આ સૂત્ર વાપરીને અંદાજે બહુલક કેવી રીતે શોધાય છે તેનો અભ્યાસ નીચેના ઉદાહરણો દ્વારા કરીએ.

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા.(1) નીચેના આવૃત્તિ વિતરણ કોઠામાં રમતના મેદાન પર રમવા આવતાં છોકરાંઓની સંખ્યા અને તેમનું વયજૂથ આપેલાં છે. તે પરથી રમતના મેદાન પર રમતાં છોકરાઓની ઉંમરનો બહુલક શોધો.

છોકરાઓનું વયજૂથ (વર્ષ)	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
છોકરાઓની સંખ્યા	43	$58 \rightarrow f_0$	$70 \rightarrow f_1$	$42 \rightarrow f_2$	27

ઉકેલ : ઉપરના કોઠા પરથી ધ્યાનમાં આવે છે કે 10-12 વર્ષના વયજૂથમાં છોકરાઓની સંખ્યા સૌથી વધારે છે, એટલે 10-12 બહુલકીય વર્ગ છે.

અહીં $f_1 = 70$, અને 10-12 આ બહુલકીય વર્ગ છે.

$\therefore$ આપેલા ઉદોહરણમાં,

L = બહુલકીય વર્ગની નીચલી મર્યાદા = 10

h = બહુલકીય વર્ગનું વર્ગાન્તર = 2

f_1 = બહુલકીય વર્ગનું આવૃત્તિ = 70

f_0 = બહુલકીય વર્ગની પહેલાના વર્ગની આવૃત્તિ = 58

f_2 = બહુલકીય વર્ગની પછીના વર્ગની આવૃત્તિ = 42

બહુલક = $L + \left[\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$= 10 + \left[\dfrac{70-58}{2(70)-58-42}\right] \times 2$

$= 10 + \left[\dfrac{12}{140-100}\right] \times 2$

$= 10 + \left[\dfrac{12}{40}\right] \times 2$

$= 10 + \dfrac{24}{40}$

$= 10 + 0.6$

$= 10.6$

$\therefore$ રમતના મેદાન પર આવતાં છોકરાઓનો બહુલક = 10.6 વર્ષ.

ઉદા. **(2)** નીચેના આવૃત્તિ વિતરણ કોઠામાં એક પેટ્રોલ પંપ ઉપર પેટ્રોલ ભરાવતાં વાહનોની સંખ્યા અને વાહનમાં ભરાવેલાં પેટ્રોલની માહિતી આપી છે. તે પરથી વાહનમાં ભરેલાં પેટ્રોલના કદનો બહુલક શોધો.

ભરાવેલું પેટ્રોલ (લિટર)	1-3	4-6	7-9	10-12	13-15
વાહનોની સંખ્યા	33	40	27	18	12

ઉકેલ : અહીં આપેલાં વર્ગો સળંગ નથી. તે આપણે સળંગ કરીએ અને આવૃત્તિ કોઠો તૈયાર કરીએ.

વર્ગ	સળંગ વર્ગ	આવૃત્તિ
1-3	0.5-3.5	$33 \rightarrow f_0$
4-6	3.5-6.5	$40 \rightarrow f_1$
7-9	6.5-9.5	$27 \rightarrow f_2$
10-12	9.5-12.5	18
13-15	12.5-15.5	12

અહીં f_1 = બહુલકીય વર્ગની આવૃત્તિ = 40, બહુલકીય વર્ગ 3.5-6.5

$$\text{બહુલક} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

$$\text{બહુલક} = 3.5 + \left[\frac{40-33}{2(40)-33-27}\right] \times h$$

$$= 3.5 + \left[\frac{7}{80-60}\right] \times 3$$

$$= 3.5 + \frac{21}{20}$$

$$= 3.5 + 1.05$$

$$= 4.55$$

$\therefore$ વાહનમાં ભરાવેલા પેટ્રોલનાં કદનો બહુલક = 4.55 લિટર

મહાવરાસંગ્રહ 6.3

1. એક દૂધ સંકલન કેન્દ્ર પર ખેડૂતો પાસેથી સંકલિત કરેલું ગાયનું દૂધ અને લૅક્ટોમીટરથી માપેલું સ્નિગ્ધાંશ(ફૅટ)નું પ્રમાણ આપ્યું છે. તેના પરથી દૂધમાંના સ્નિગ્ધાંશના પ્રમાણનો બહુલક શોધો.

દૂધમાં સ્નિગ્ધાંશ (%)	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
સંકલિત દૂધ (લિટર)	30	70	80	60	20

2. કેટલાંક કુટુંબોનો માસિક વીજ-વપરાશ નીચેના વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઠામાં આપ્યો છે. તે પરથી વીજ વપરાશનો બહુલક શોધો.

વીજ વપરાશ (યુનિટ)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
કુટુંબોની સંખ્યા	13	50	70	100	80	17

3. ચહાની 100 હૉટેલને પુરૂં પાડેલું દૂધ અને હૉટેલની સંખ્યાનો વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઠો આપ્યો છે તે પરથી પુરાં પાડેલા દૂધનો બહુલક શોધો.

દૂધ (લિટર)	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
હૉટેલની સંખ્યા	7	5	15	20	35	18

4. નીચેના આવૃત્તિ કોઠામાં 200 દર્દીઓની ઉંમર અને એક અઠવાડિયામાં ઉપચાર લેનારાની સંખ્યા આપી છે. તે પરથી દર્દીઓની ઉંમરનો બહુલક શોધો.

વય (વર્ષ)	5 કરતા ઓછા	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29
દર્દી સંખ્યા	38	32	50	36	24	20

કૃતિ :-

- તમારા વર્ગના 20 વિદ્યાર્થીઓના વજનનો મધ્ય શોધો.
- તમારા વર્ગમાં છોકરાઓના શર્ટના માપનો બહુલક શોધો.
- વર્ગમાંના દરેક વિદ્યાર્થી એક મિનીટમાં પોતાની નાડીના ધબકારા ગણશે અને નોંધશે. તેનો કોઠો બનાવી નાડીના ધબકારાનો બહુલક શોધો.
- વર્ગના દરેક વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ નોંધો. તેનું વર્ગીકરણ કરી, ઊંચાઈનો મધ્યક શોધો.

આ ધ્યાનમાં રાખો.

આપણે કેન્દ્રીય પ્રવૃત્તિના પરિમાણો જેવા કે મધ્ય, મધ્યક, બહુલકનો અભ્યાસ કર્યો. કેન્દ્રિય પ્રવૃત્તિનું કયુ પરિમાણ પસંદ કરવા પાછળનો હેતૂ સ્પષ્ટ રીતે સમજવો જરૂરી છે.

ધારોકે એક શાળાના ધોરણ 10 ના 5 વર્ગો પૈકી કયા વર્ગે અંતર્ગત પરીક્ષામાં સરસ કામગિરી કરી છે, તે નક્કી કરવા માટે તે 5 વર્ગોની અંતર્ગત પરીક્ષાના ગુણોનો 'મધ્ય' શોધવો પડશે.

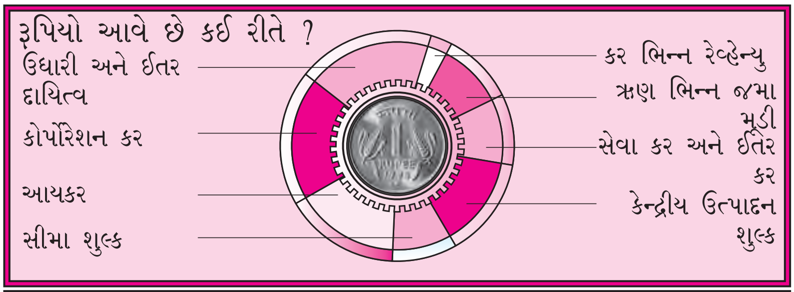
એકાદ વર્ગના વિદ્યાર્થીઓના પરીક્ષામાં મેળવેલાં ગુણ પરથી બે સમૂહમાં વિભાજન કરવું હોય તો વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો 'મધ્યક' શોધવો પડશે.

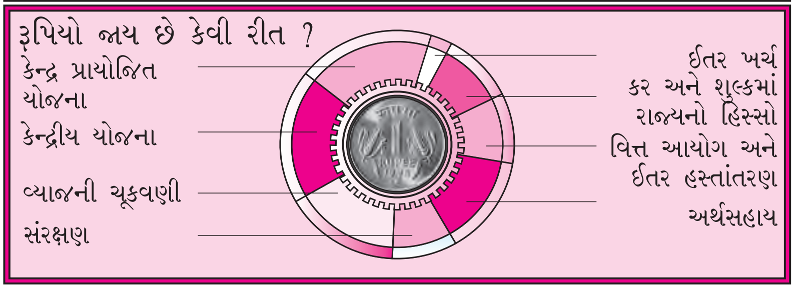
ચોક તૈયાર કરતાં બચત ગટે કયા રંગના ચોકની માંગણી સૌથી વધારે છે તે શોધવા કેન્દ્રિય પ્રવૃત્તિનું 'બહુલક' પરિમાણ પસંદ કરવું જોઇએ.

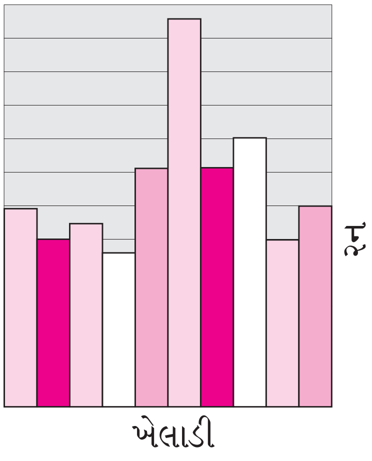
સંખ્યાકીય સામગ્રીનું ચિત્રરૂપ નિરૂપણ/રજૂઆત (Pictorial representation of statistical data)

સંખ્યાકીય માહિતીનો મધ્ય, મધ્યક, બહુલક પરથી અથવા માહિતીનું વિશ્લેષણ કરીને તેનો ઉપયોગ વિશેષ નિષ્પત્તિ કાઢવા માટે થાય છે.

સંખ્યાકીય માહિતી સંક્ષિપ્ત રૂપમાં રજૂ કરવા માટેની એક પધ્ધતિ એટલે કોઠાના રૂપમાં સામગ્રી માંડવી તે આપણે જાણીએ છીએ. પરંતુ આ કોઠાના રૂપમાં હોવાથી કેટલીક બાબતો તુરંત ધ્યાનમાં આવતી નથી. સામાન્ય માણસને સમજાય, અને સર્વસામાન્ય લોકોનું ધ્યાન સામગ્રીમાંની મહત્ત્વની બાબતો તરફ કેન્દ્રીત કરવા માટે તેની રજૂઆત જુદી રીતે કરી શકાય કે, તેનો વિચાર કરીએ. દા.ત. અર્થસંકલ્પની મહત્ત્વની બાબતો, રમત ગમતની માહિતી વગેરે.

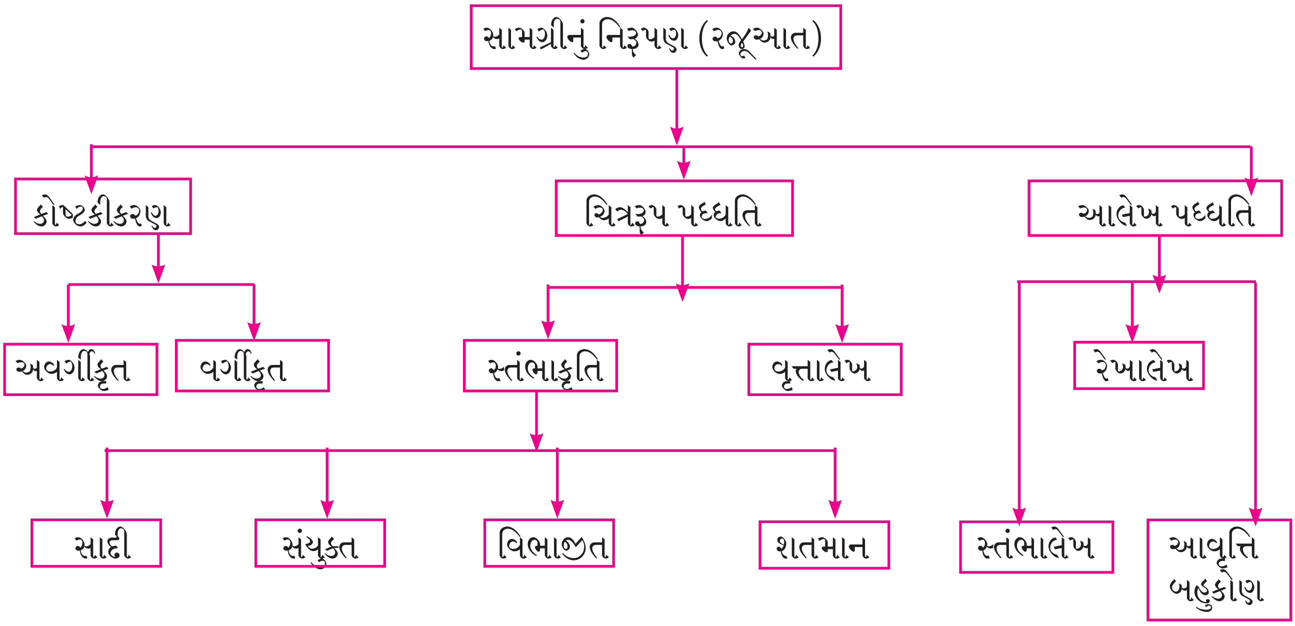






સામગ્રીનું નિરૂપણ (Presentation of Data)

ચિત્રરૂપ અને આલેખરૂપ નિરૂપણ એ સામગ્રીનો અર્થબોધ થવા માટેનો હજી એક લક્ષવેધી પ્રકાર છે. સામગ્રીનાં નિરૂપણના વિવિધ પદ્ધતિ દર્શાવતી શાખાકૃતિ (tree chart) નીચે દર્શાવ્યો છે.



પાછલાં ધોરણમાં આપણે આ પૈકી કેટલીક પદ્ધતિઓનો અને આલેખોનો અભ્યાસ કર્યો છે. હવે આપણે સ્તંભાલેખ (Histogram) આવૃત્તિ બહુકોણ અને વૃત્તાલેખની મદદથી સામગ્રીનું નિરૂપણ કેવી રીતે કરવું તે જોઈએ.

ફ્લૉરેન્સ નાઈટિંગેલ (1820-1910) આ મહાન સ્ત્રીને સર્વોત્તમ ધ્યેયનિષ્ઠ પરિચારિકા તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. સિમિયન યુદ્ધમાં જખમી સૈનિકોની સેવા સુશ્રુષા કરી અનેકનાં પ્રાણ બચાવ્યા. આંકડાશાસ્ત્રમાં પણ ફ્લૉરેન્સ નાઈટિંગેલે પાયાભૂત કામ કર્યું છે. અનેક સૈનિકોની અવસ્થા, તેમના પર કરેલાં ઉપચાર અને તેનો ઉપયોગ આ બધી બાબતોની વ્યવસ્થિત નોંધ કરીને મહત્ત્વના નિષ્કર્ષ કાઢ્યા. સૈનિકોના મૃત્યુમાં તેમના જખમ કરતાં ટાઈફૉઈડ, કૉલેરા વગેરે રોગો વધારે કારણીભૂત બન્યા. તેનાં કારણો અસ્વચ્છ પરિસર, પીવાનું અસ્વચ્છ પાણી, દર્દીઓના રહેઠાણની સંકડાશ વગેરે હતાં. આ બાબતોની કારણમિમાંસા તુરંત ધ્યાનમાં આવે તે માટે ફ્લૉરેન્સ નાઈટિંગેલે પાયચાર્ટ જેવા આલેખ તૈયાર કર્યા. યોગ્ય ઉપચાર અને સ્વચ્છતાના નિયમો પાળીને સૈનિકોનો મૃત્યુદર ઘટાડી બતાવ્યો. શહેરનું આરોગ્ય સચવાય તે માટે મલનિસ્સારણ કરતા ડ્રેનેજ અને દરેકને પીવાનું શુદ્ધ પાણી આવશ્યક છે. આ તેમનું નિરીક્ષણ નગરપાલિકાને પણ વાજબી લાગ્યું. અનેક નિરીક્ષણોની ઉત્તમ નોંધ, આંકડાશાસ્ત્રને આધારે વિશ્વાસપાત્ર નિષ્કર્ષ કાઢવામાં મદદ કરે છે તે એમના કામ પરથી દેખાઈ આવ્યું.

જાણી લઈએ.

સ્તંભાલેખ : Histogram સ્તંભાલેખ દોરવાની રીત આપણે એક ઉદાહરણ દ્વારા સમજી લઈએ.

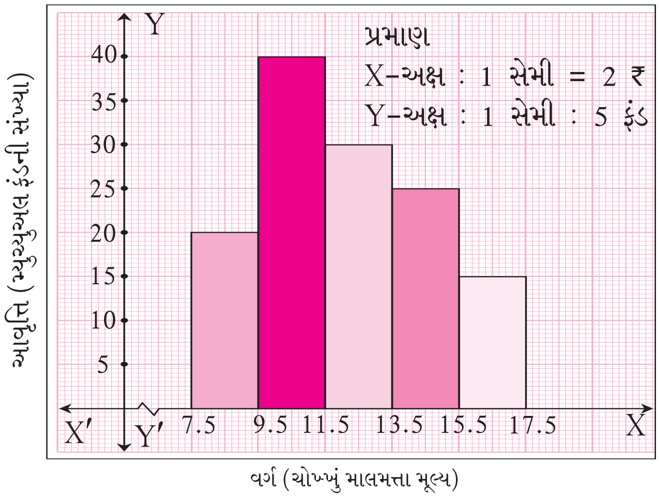
ઉદા. : નીચેના કોઠામાં વિવિધ કંપનીના મ્યુચ્યુઅલ ફંડના એક યુનિટનું 'ચોખ્ખું માલમત્તા મૂલ્ય' (Net asset value) આપી છે.

તેના પરથી સ્તંભાલેખ દોરો.

ચોખ્ખું માલમત્તા મૂલ્ય (રૂપિયા) (NAV)	8-9	10-11	12-13	14-15	16-17
મ્યુચ્યુઅલ ફંડની સંખ્યા	20	40	30	25	15

ઉકેલ : ઉપરના કોઠામાં આપેલાં વર્ગો સળંગનથી તે સૌ પ્રથમ સળંગ કરી લઈએ.

સળંગ વર્ગ (રૂપિયા)	7.5-9.5	9.5-11.5	11.5-13.5	13.5-15.5	15.5-17.5
આવૃત્તિ	20	40	30	25	15



આકૃતિ 6.1

સ્તંભાલેખ દોરવાની કૃતિ

1. સૌ પ્રથમ વર્ગ સળંગ ન હોય તો સળંગ કરી લેવા. આવા વર્ગોને વર્ધિત વર્ગ (extended class intervals) કહે છે.
2. આ વર્ગો X- અક્ષપર યોગ્ય પ્રમાણ લઈ દર્શાવો.
3. Y- અક્ષપર યોગ્ય પ્રમાણ લઈ આવૃત્તિ દર્શાવો.
4. X- અક્ષપર દરેક વર્ધિત વર્ગ પાયા તરીકે લઈ તેના પર સ્તંભ દોરો. સ્તંભની ઊંચાઈ સંગત આવૃત્તિ જેટલી લો.

ધ્યાનમાં રાખો.

X-અક્ષપર આરંભબિંદુ અને પ્રથમ વર્ગની વચ્ચે ‘—/\/—’ આવી નિશાની છે. (આ નિશાનીને અક્ષસંકોચ, krink mark, કહે છે.) આનો અર્થ આરંભબિંદુથી પહેલાં વર્ગ સુધી કોઈપણ નિરીક્ષણો નથી. તેથી X- અક્ષની ગડી વાળી હોય તેવી આ નિશાની છે. જરૂર હોય તો Y- અક્ષ પર પણ આવી નિશાની વાપરી શકાય છે. તેના લીધે યોગ્ય આકારનો આલેખ કાઢી શકાય છે.

મહાવરાસંગ્રહ 6.4

1. આપેલી માહિતી સ્તંભાલેખ દ્વારા દર્શાવો.

વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ (સેમી)	135-140	140-145	145-150	150-155
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	4	12	16	8

2. નીચેના કોઠામાં દર એકરદીઠ થતું જુવારનું ઉત્પાદન આપ્યું છે તે સ્તંભાલેખ દ્વારા દર્શાવો.

એકરે ઉત્પાદન (ક્વિન્ટલ)	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11
ખેડૂતોની સંખ્યા	30	50	55	40	20

3. નીચેનાં કોઠામાં 210 કુટુંબનું વાર્ષિક રોકાણ દર્શાવ્યું છે. તે સ્તંભાલેખ દ્વારા દર્શાવો.

રોકાણ (હજાર રૂપિયા)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
કુટુંબોની સંખ્યા	30	50	60	55	15

4. નીચેના કોઠામાં વિદ્યાર્થીઓએ પરીક્ષાની તૈયારી માટે આપેલો સમય દર્શાવ્યો છે. તેના પરથી સ્તંભાલેખ દોરો.

સમય (મિનિટ)	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160
વિદ્યાર્થી સંખ્યા	14	20	24	22	16

જાણી લઈએ.

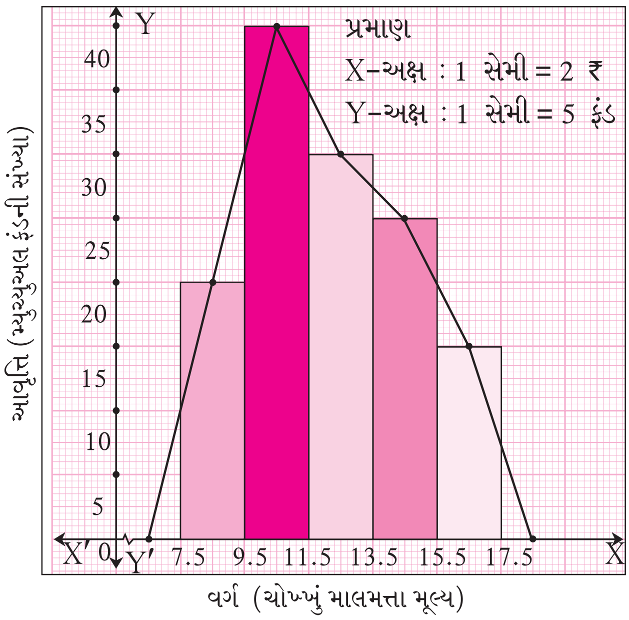
આવૃત્તિ બહુકોણ (Frequency polygon)

આવૃત્તિ કોઠામાંની માહિતી વિવિધ પ્રકારે દર્શાવી શકાય છે. આપણે સ્તંભાલેખનો અભ્યાસ કર્યો છે. બીજો પ્રકાર ‘આવૃત્તિ બહુકોણ’ છે.

આવૃત્તિ બહુકોણ દોરવાની બે પધ્ધતિનો અભ્યાસ કરીશું.

(1) સ્તંભાલેખની મદદથી (2) સ્તંભાલેખ ન વાપરતાં.

(1) સ્તંભાલેખની મદદથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરવાની રીતે સમજવા માટે આકૃતિ 6.1 માં દર્શાવેલા સ્તંભાલેખનો જ ઉપયોગ કરીશું.



આકૃતિ 6.2

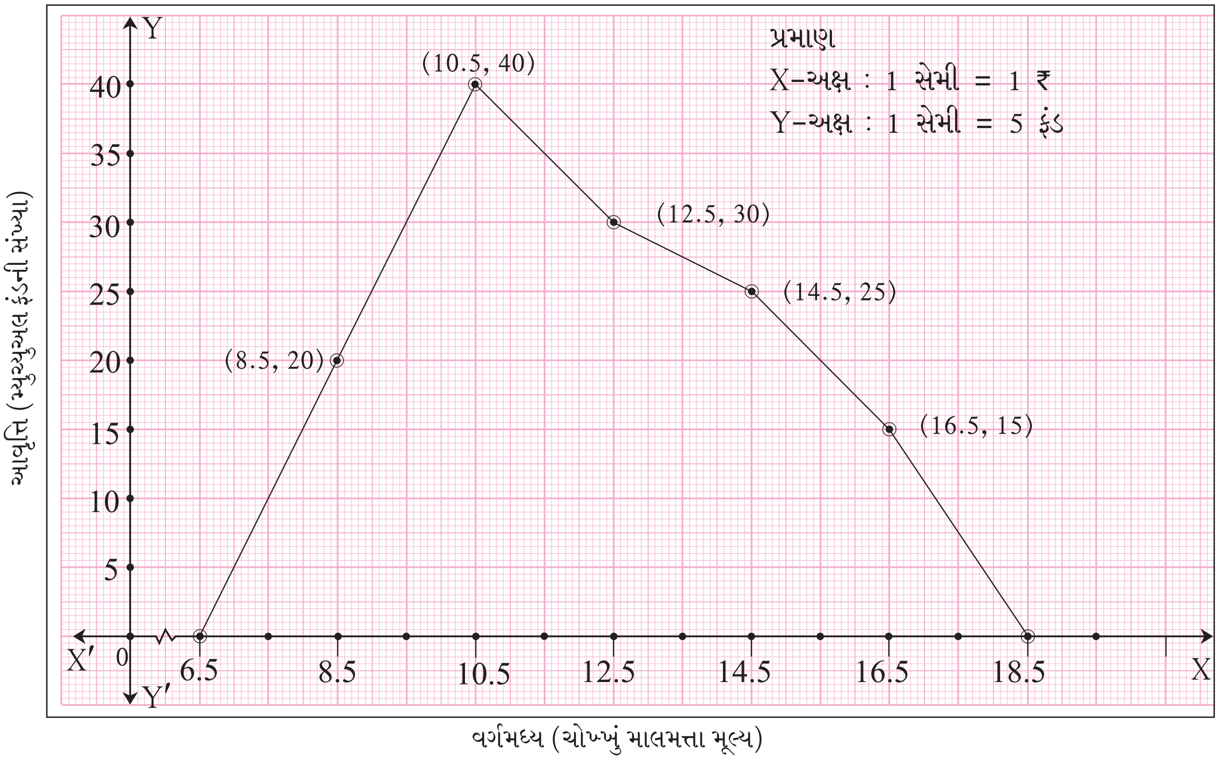
1. સ્તંભાલેખના દરેક સ્તંભની ઉપરની બાજુનું મધ્યબિંદુ દર્શાવો.
2. પહેલાં સ્તંભના આગળ શૂન્ય ઊંચાઇનો સ્તંભ છે તેમ ધારીને તેનું મધ્યબિંદુ દર્શાવો. તે જ પ્રમાણે છેલ્લા સ્તંભ પછી પણ શૂન્ય ઊંચાઈનાં સ્તંભ છે એમ ધારીને મધ્યબિંદુ પર નિશાની કરો. આ બિંદુઓ X− અક્ષપર આવશે.
3. બધાં બિંદુઓ ક્રમસર સીધી રેખાથી જોડો.

તૈયાર થયેલી બંધ આકૃતિ એટલે આવૃત્તિ બહુકોણ.

(2) સ્તંભાલેખ દોર્યા વગર, આવૃત્તિ બહુકોણ દોરવા માટે બિંદુના નિર્દેશકો કેવી રીતે નક્કી કરાય તે નીચેના કોઠા પરથી સમજી લો.

વર્ગ	સળંગ વર્ગ	વર્ગમધ્ય	આવૃત્તિ	બિંદુના નિર્દેશકો
6 − 7	5.5 − 7.5	6.5	0	(6.5, 0)
8 − 9	7.5 − 9.5	8.5	20	(8.5, 20)
10 − 11	9.5 − 11.5	10.5	40	(10.5, 40)
12 −13	11.5 − 13.5	12.5	30	(12.5, 30)
14 − 15	13.5 − 15.5	14.5	25	(14.5, 25)
16 − 17	15.5 − 17.5	16.5	15	(16.5, 15)
18 − 19	17.5 − 19.5	18.5	0	(18.5, 0)

ઉપરના કોઠામાં પાંચમાં સ્તંભના નિર્દેશકો સાથે સંગત બિંદુઓ આલેખ પત્ર પર સ્થાપન કરો. તે ક્રમસર જોડો એટલે આવૃત્તિ બહુકોણ મળે છે. આ બહુકોણ આકૃતિ 6.3 માં બતાવ્યો છે. તેનું નિરિક્ષણ કરો.



આકૃતિ 6.3

ગણેલાં ઉદાહરણો

ઉદા. (1) બાજુની આકૃતિમાં દોરેલા આવૃત્તિ બહુકોણનું નિરીક્ષણ કરી પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

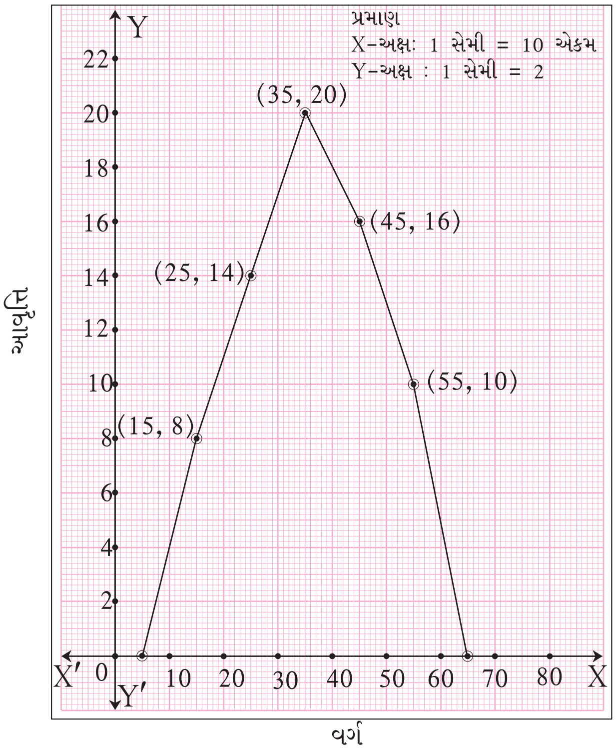
(1) 50–60 ના વર્ગની આવૃત્તિ લખો.

(2) જે વર્ગની આવૃત્તિ 14 છે તે વર્ગ લખો.

(3) વર્ગમધ્ય 55 હોય તે વર્ગ લખો.

(4) સૌથી વધુ આવૃત્તિ ધરાવતો વર્ગ લખો.

(5) આવૃત્તિ શૂન્ય હોય તેવા વર્ગ લખો.



આકૃતિ 6.4

ઉકેલ :

(1) વર્ગમધ્ય X- અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. x- નિર્દેશક 55 હોય તેવા બિંદુના, 50-60 ના વર્ગનો વર્ગ મધ્ય 55 છે. y-નિર્દેશક 10 દર્શાવે છે, તેથી 50-60 વર્ગની આવૃત્તિ 10 છે.

(2) આવૃત્તિ Y- અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. y-નિર્દેશક 14 હોય તેવા બિંદુના x-નિર્દેશક 25 છે. Y-અક્ષ પર 14 ની આવૃત્તિની નિશાની જુઓ. 25 આ 20-30 વર્ગના વર્ગમધ્ય છે. તેથી આવૃત્તિ 14 હોય તે વર્ગ 20-30 છે.

(3) વર્ગમધ્ય 55 હોય તેનો વર્ગ 50-60 છે.

(4) આવૃત્તિ Y-અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. બહુકોણ પર y-નિર્દેશકોની સૌથી વધારે કિંમત 20 છે. તેને સંગત x-નિર્દેશક 35 છે. વર્ગમધ્ય 35 હોય તે વર્ગ 30-40 છે. તેથી 30-40 આ વર્ગની આવૃત્તિ સૌથી વધારે છે.

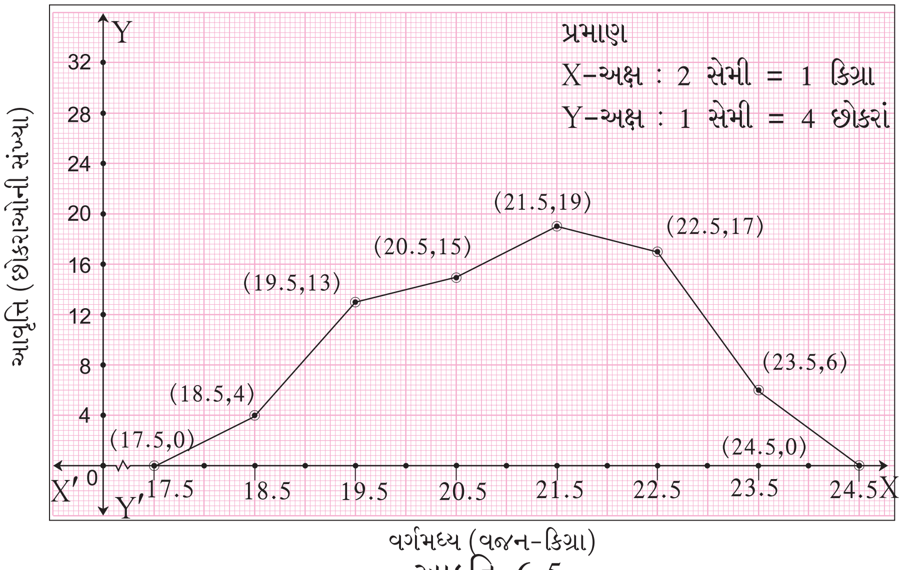
(5) શૂન્ય આવૃત્તિ ધરાવતાં વર્ગો 0-10 અને 60-70 હોય છે.

ઉદા. (2) નીચેના કોઠામાં છોકરાઓનાં વજન અને સંખ્યા આપેલાં છે. તો સામગ્રી પરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

છોકરાઓનું વજન (કિગ્રા)	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
છોકરાઓની સંખ્યા	4	13	15	19	17	6

નીચેના કોઠામાં છોકરાઓનાં વજન અને સંખ્યા આપેલાં છે. તો સામગ્રી પરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

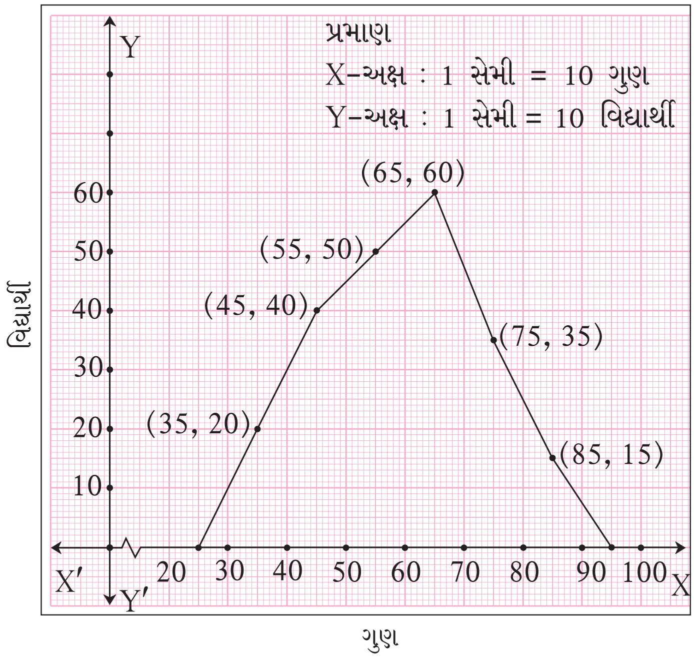
વર્ગ	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
વર્ગમધ્ય	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5
આવૃત્તિ	4	13	15	19	17	6
બિંદુના નિર્દેશકો	(18.5, 4)	(19.5,13)	(20.5,15)	(21.5,19)	(22.5,17)	(23.5,6)



આકૃતિ 6.5

મહાવરાસંગ્રહ 6.5

1. નીચે આપેલાં આવૃત્તિ બહુકોણનું નિરીક્ષણ કરી પ્રશ્નોના જવાબ લખો.



આકૃતિ 6.6

(1) સૌથી વધુ ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ ક્યા વર્ગમાં છે ?

(2) આવૃત્તિ 'શૂન્ય' હોય તેવા વર્ગો લખો.

(3) 50 વિદ્યાર્થી સંખ્યા હોય તે વર્ગનો મધ્ય કેટલો ?

(4) વર્ગમધ્ય 85 હોય તેવા વર્ગની નીચલી અને ઉપલી વર્ગમર્યાદા લખો.

(5) 80-90 ગુણ મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં છે ?

2. નીચેના કોઠામાં આપેલી માહિતી પરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

વીજળીનું બિલ (રૂપિયા)	0-200	200-400	400-600	600-800	800-1000
કુટુંબો	240	300	450	350	160

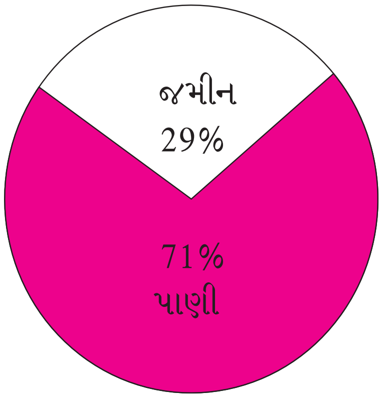
3. એક પરીક્ષાના પરિણામની ટકાવારીના વર્ગો અને તેમાંની વિદ્યાર્થી સંખ્યા નીચેના કોઠામાં આપી છે. તેના પરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

પરિણામ (ટકા)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
વિદ્યાર્થી સંખ્યા	7	33	45	65	47	18	5

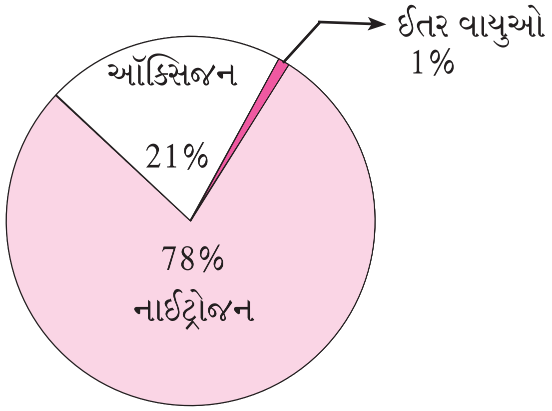
યાદ કરીએ.

વૃત્તાકૃતિ (Pie diagram)

પાછલાં ધોરણમાં આપણે ભૂગોળ, વિજ્ઞાન વિષયોમાં નીચેના આલેખ જોયા છે. આવા આલેખને વૃત્તાલેખ કહે છે.



પૃથ્વી પર જમીન અને પાણીનું પ્રમાણ



હવામાંના વિવિધ ઘટકોનું પ્રમાણ

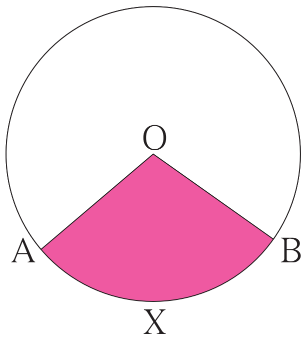
આકૃતિ 6.7

વૃત્તાકૃતિમાં સંખ્યાકીય સામગ્રી આખા વૃત્તમાં એટલે કે વર્તુળમાં દર્શાવવામાં આવે છે. સામગ્રીમાંના જુદાં-જુદાં ઘટકો પ્રમાણબદ્ધ વૃત્તાંશથી દર્શાવાય છે.

આકૃતિ 6.8 માં વર્તુળનું કેન્દ્ર O છે. આપેલા વર્તુળમાં OA અને OB ત્રિજ્યા છે.

$\angle AOB$ આ કેન્દ્રીયકોણ છે.

O-AXB આ છાયાંકિત ભાગ એટલે વૃત્તાંશ (sector of a circle) છે.



આકૃતિ 6.8

જાણી લઈએ.

વૃત્તાલેખનું વાચન/વૃત્તાકૃતિ (Reading of Pie diagram)

વૃત્તાલેખ પર નજર નાખતાં કેવી રીતે માહિતી મળે છે, તે નીચેના ઉદાહરણ પરથી સમજીએ.

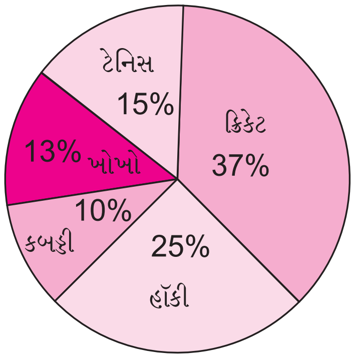
ધોરણ 10 ના 120 છોકરાઓને 'તમને ગમતી રમત કઈ ? આ પ્રશ્ન પૂછ્યો. તેની માહિતી વૃત્તાકૃતિમાં દર્શાવી છે.

કઈ રમત સૌથી વધુ ગમે છે ?

કેટલા ટકા છોકરાંઓને ખો-ખો ગમે છે ?

કબડ્ડી ગમતી હોય તેવા છોકરાઓનો કેટલાં ટકા ?

આના જેવા જવાબો એક દષ્ટિક્ષેપમાં વૃત્તાલેખ પરથી મળી જાય છે.

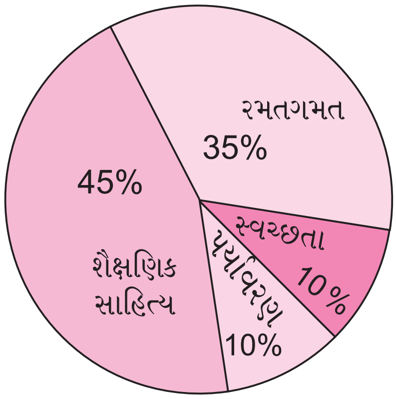


આકૃતિ 6.9

એક વૃત્તાલેખ જુઓ.

બાજુની આકૃતિમાં વૃત્તાલેખ એક શાળાના વાર્ષિક અર્થનિયોજનની વૃત્તાકૃતિ છે. આ વૃત્તાકૃતિ પરથી આપણને સમજાય છે કે,

- 45% રકમ શૈક્ષણિક સાહિત્ય માટે મૂકી રાખવામાં આવી છે.
- 35% રકમ રમતગમતના સાહિત્ય માટે દર્શાવેલ છે.
- 10% રકમ સ્વચ્છતાના સાહિત્ય માટે રાખી છે.
- 10% રકમ પર્યાવરણના રક્ષણ માટે રાખી છે.



આકૃતિ 6.10

આ પ્રકારની માહિતી વૃત્તાકૃતિ દ્વારા એક જ દષ્ટિક્ષેપમાં મળી જાય છે.

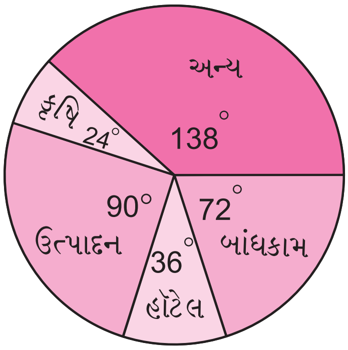
હવે આપણે વૃત્તાકૃતિની અધિક માહિતી લઈએ.

અનેક વખતે વિવિધ પ્રકારની માહિતી વૃત્તાકૃતિ દ્વારા દર્શાવેલી આપણે વર્તમાનપત્રોમાં જોઈએ છીએ. જેમકે અંદાજપત્રક, ઑલિમ્પિક સ્પર્ધામાં વિવિધ દેશોની કામગિરી, દેશોનો પૈસા આવે છે, કેવી રીતે ? અને જાય છે કેવી રીતે ? વગેરે.

તે માટે આપણે માહિતી કેવી રીતે શોધવી તે ઉદાહરણ પરથી સમજીને તેનો અભ્યાસ કરીશું.

નમૂના ઉદાહરણ :

એક સર્વેક્ષણમાં કાર્યકુશળ વ્યક્તિઓનું વર્ગીકરણ નીચેની વૃત્તાકૃતિમાં દર્શાવ્યું છે. તેમાંના ઉત્પાદન ક્ષેત્રમાં કાર્યરત વ્યક્તિની સંખ્યા 4500 હોય તો નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો.



આકૃતિ 6.11

(i) બધા ક્ષેત્ર મળીને કુલ કાર્યકુશળ વ્યક્તિની સંખ્યા કેટલી છે ?

(ii) બાંધકામ ક્ષેત્રે કાર્યકુશળ વ્યક્તિની સંખ્યા કેટલી છે ?

(iii) કૃષિ ક્ષેત્રમાં કાર્યકુશળ વ્યક્તિ કેટલી ?

(iv) ઉત્પાદન અને બાંધકામ ક્ષેત્રમાં કાર્યકુશળ વ્યક્તિની સંખ્યા વચ્ચેનો તફાવત કેટલો છે ?

ઉકેલ : (i) ધારોકે, બધાં ક્ષેત્ર મળીને કુલ કાર્યકુશળ વ્યક્તિની સંખ્યા x છે.

$\therefore$ x વ્યક્તિઓ માટેનો કેન્દ્રિયકોણ = $360°$

ઉત્પાદન ક્ષેત્રે કાર્યકુશળ વ્યક્તિમાટેનો કેન્દ્રિયકોણ = $\dfrac{\text{ઉત્પાદન ક્ષેત્રમાંની વ્યક્તિ}}{\text{કુલ વ્યક્તિઓ}} \times 360$

$$90 = \frac{4500}{x} \times 360$$

$$\therefore x = 18000$$

$\therefore$ બધા ક્ષેત્ર મળીને કાર્યકુશળ વ્યક્તિઓ = 18000.

(ii) બાંધકામ ક્ષેત્રનો કેન્દ્રિયકોણ $72°$ દર્શાવ્યો છે.

$$72 = \frac{\text{બાંધકામ ક્ષેત્રની વ્યક્તિ}}{18000} \times 360$$

$\therefore$ બાંધકામ ક્ષેત્રની વ્યક્તિ સંખ્યા $= \dfrac{72 \times 18000}{360}$

$= 3600$

(iii) કૃષિ ક્ષેત્ર માટેનો કેન્દ્રિયકોણ = $24°$ છે.

$$24 = \frac{\text{કૃષિક્ષેત્રની વ્યક્તિ}}{\text{કુલ કાર્યકુશળ વ્યક્તિઓ}} \times 360$$

$$24 = \frac{\text{કૃષિક્ષેત્રની વ્યક્તિ}}{18000} \times 360$$

$\therefore$ કૃષિક્ષેત્રની વ્યક્તિ સંખ્યા $= \dfrac{24 \times 18000}{360}$

$= 1200$

(iv) ઉત્પાદન અને બાંધકામ ક્ષેત્રના કેન્દ્રિયકોણ વચ્ચેનો તફાવત = $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

$$\therefore \text{ કેન્દ્રિયકોણમાંનો તફાવત } = \frac{\text{બે ક્ષેત્રની વ્યક્તિઓની સંખ્યાઓનો તફાવત}}{\text{કુલ કાર્યકુશળ વ્યક્તિઓ}} \times 360$$

$$18 = \frac{\text{બે ક્ષેત્રની વ્યક્તિઓની સંખ્યાઓનો તફાવત}}{18000} \times 360$$

$$\text{ઉત્પાદન અને બાંધકામ ક્ષેત્રના કેન્દ્રિયકોણ વચ્ચેનો તફાવત} = \frac{18 \times 18000}{360}$$

$$= 900$$

આ ધ્યાનમાં રાખો.

- સામગ્રીમાં આપેલાં દરેક ઘટક તેને સંબંધિત વૃત્તાંશ વડે દર્શાવ્યા છે.
- વૃત્તાંશનાં કેન્દ્રિય કોણનું માપ તે ઘટકોની નોંધની સંખ્યાના પ્રમાણમાં હોય છે.
- કેન્દ્રિયકોણનું માપ $(\theta) = \dfrac{\text{સંબંધિત ઘટકોની સંખ્યા}}{\text{ઘટકોની કુલ સંખ્યા}} \times 360$
- યોગ્ય ત્રિજ્યાનું વર્તુળ દોરીને, જેટલાં ઘટકો હોય તેટલાં કેન્દ્રિયકોણના માપ પ્રમાણે વર્તુળનું તેના વૃત્તાંશમાં વિભાજન કરેલું હોય છે.

જાણી લઈએ.

વૃત્તાકૃતિ દોરવી (To draw Pie diagram)

તૈયાર વૃત્તાકૃતિ આપી હોય તો તેમાંની માહિતીનું વાચન કેવી રીતે કરવું તે આપણે જોયું. હવે વૃત્તાકૃતિ કેવી રીતે દોરવી તે જોઈએ.

1. વૃત્તાકૃતિ દોરતી વખતે પૂર્ણ વર્તુળની વિભાગણી પ્રમાણસર વૃત્તાંશમાં કરવી.
2. દરેક ઘટક સંબંધીત વૃત્તાંશનાં કેન્દ્રિયકોણનું માપ નીચેના સૂત્ર પ્રમાણે કાઢવું.

$$\text{વૃત્તાંશના કેન્દ્રિયકોણનું માપ } \theta = \frac{\text{તે ઘટકની સંખ્યા}}{\text{બધા ઘટકોની કુલ સંખ્યા}} \times 360$$

યોગ્ય ત્રિજ્યાનું વર્તુળ દોરીને, સામગ્રીમાં જેટલાં ઘટકો હોય તેટલાં વૃત્તાંશમાં વર્તુળનું વિભાજન કરવું.

વૃત્તાકૃતિની રચના નીચેના ઉદાહરણની મદદથી સમજી લઈએ.

✿✿✿ ગણેલાં ઉદાહરણો ✿✿✿

ઉદા. (1) એક ટૂ વ્હીલરની દુકાનમાં ટૂ વ્હીલરના રંગની પસંદગી નીચે પ્રમાણે હતી. આ માહિતી વૃત્તાકૃતિથી દર્શાવવા માટે દરેક ઘટક દર્શાવતાં વૃત્તાંશનાં કેન્દ્રિયકોણનું માપ નક્કી કરો.

ઉકેલ : કુલ 36 ટૂ વ્હીલરની માગણી છે.
તેમાં 10 ટૂ વ્હીલર સફેદ રંગની છે.

∴ સફેદ રંગની ટૂ-વ્હીલર માટેના વૃત્તાંશના કેન્દ્રિયકોણનું માપ $= \frac{\text{સફેદ ટૂ વ્હીલરની સંખ્યા}}{\text{ટૂ વ્હીલરની કુલ સંખ્યા}} \times 360$

$= \frac{10}{36} \times 360 = 100$

આ રીતે દરેક રંગ સાથે સંગત વૃત્તાંશના કેન્દ્રિયકોણનું માપ શોધીને કોઠામાં દર્શાવ્યું છે.

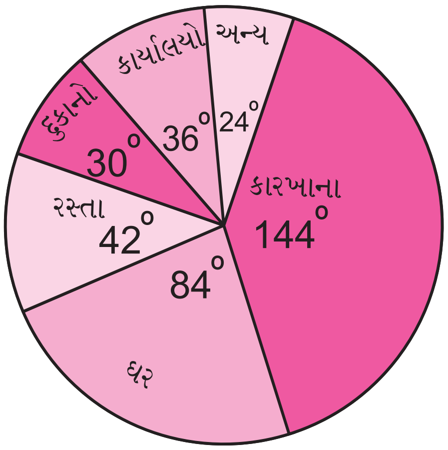
રંગ	ટૂ-વ્હીલરની માગણી	વૃત્તાંશનો કેન્દ્રિયકોણ
સફેદ	10	$\frac{10}{36} \times 360^\circ = 100^\circ$
કાળો	9	$\frac{9}{36} \times 360^\circ = 90^\circ$
વાદળી	6	60°
રાખોડી	7	70°
લાલ	4	40°
કુલ	36	360°

ઉદા. (2) એક ગામમાં વિવિધ સ્થાન માટે થતો દરરોજનો વીજ પુરવઠો નીચેનાં કોઠામાં દર્શાવ્યો છે. આ માહિતી દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ દોરો.

સ્થાન	કારખાના	ઘર	રસ્તા	દુકાનો	કાર્યાલયો	અન્ય
વીજપુરવઠો (હજાર એકમમાં)	24	14	7	5	6	4

ઉકેલ : કુલ વીજ પુરવઠો 60 હજાર એકમ છે. તે પરથી કેન્દ્રિયકોણના માપ શોધીને કોઠામાં દશાવીએ. અને વૃત્તાકૃતિ દોરીએ.

વીજ પુરવઠો	યુનિટ	કેન્દ્રિયકોણનું માપ
કારખાના	24	$\frac{24}{60} \times 360 = 144^\circ$
ઘર	14	$\frac{14}{60} \times 360 = 84^\circ$
રસ્તા	7	$\frac{7}{60} \times 360 = 42^\circ$
દુકાનો	5	$\frac{5}{60} \times 360 = 30^\circ$
કાર્યાલયો	6	$\frac{6}{60} \times 360 = 36^\circ$
અન્ય	4	$\frac{4}{60} \times 360 = 24^\circ$
કુલ	60	360°



આકૃતિ 6.12

વૃત્તાકૃતિ દોરવાના પગથિયા :

(1) સૌ પ્રથમ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક વર્તુળ દોરીને તેમાં એક ત્રિજ્યા દોરી. પછી કોઠામાં દર્શાવેલાં કેન્દ્રિયકોણના માપ પ્રમાણે એક પછી એક વૃત્તાંશ (144°,84°, 42°, 30°, 36°, અને 24°) એ પ્રમાણે ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં દોર્યા. (વૃત્તાંશને એક જ દિશામાં એક પછી એક એમ ન દોરતા તેમનો ક્રમ બદલવામાં આવે તો પણ ચાલે.)

(2) દરેક વૃત્તાંશમાં સંબંધિત ઘટક અને કેન્દ્રિયકોણ નોંધ્યા.

કૃતિ :

એક કુટુંબનો વિવિધ બાબતો પર થતો માસિક ખર્ચ આપ્યો છે તે પરથી કેન્દ્રિયકોણનું માપ લઈને વૃત્તાકૃતિ દોરો.

વિવિધ બાબતો	ખર્ચની ટકાવારી	કેન્દ્રિયકોણનું માપ
ખોરાક	40	$\frac{40}{100} \times 360 = \square$
કપડા	20	$\square \times \square = \square$
ઘરભાડું	15	$\square \times \square = \square$
શિક્ષણ	20	$\square \times \square = \square$
અન્ય ખર્ચ	05	$\square \times \square = \square$
કુલ	100	360°

મહાવરાસંગ્રહ 6.6

1. એક રક્તદાન શિબિરમાં વિવિધ વયજૂથની 200 વ્યક્તિઓએ રક્તદાન કર્યું. તે દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ દોરો.

વયજૂથ (વર્ષમાં)	20-25	25-30	30-35	35-40
વ્યક્તિની સંખ્યા	80	60	35	25

2. એક વિદ્યાર્થીએ જુદા-જુદા વિષયમાં 100 માંથી મેળવેલાં ગુણ નીચેના કોઠામાં આપ્યાં છે. આ માહિતી વૃત્તાકૃતિ દ્વારા દર્શાવો.

વિષય	અંગ્રેજી	ગુજરાતી	વિજ્ઞાન	ગણિત	સમાજશાસ્ત્ર	હિન્દી
ગુણ	50	70	80	90	60	50

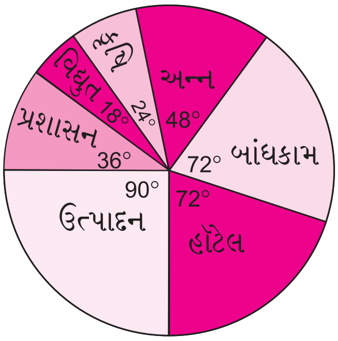
3. વૃક્ષારોપણ કાર્યક્રમ અંતર્ગત જુદા જુદા વર્ગના વિદ્યાર્થીઓએ વાવેલાં ઝાડની સંખ્યા નીચેના કોઠામાં આપી છે. આ માહિતી દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ દોરો.

ધોરણ	5 મું	6 મું	7 મું	8 મું	9 મું	10 મું
ઝાડની સંખ્યા	40	50	75	50	70	75

4. એક ફળ વિક્રેતા પાસે આવેલાં વિવિધ ફળોની માગણીની ટકાવારી કોઠામાં આપી છે. આ માહિતીની વૃત્તાકૃતિ દોરો.

ફળ	આંબા	મોસંબી	સફરજન	ચીકુ	સંતરા
માગણીના ટકાવારી	30	15	25	20	10

5. એક ગામમાં વિવિધ વ્યાવસાયિકોનું પ્રમાણ દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ 6.13 માં આપી છે. તે પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો.



આકૃતિ 6.13

(1) વ્યાવસાયિકોની કુલ સંખ્યા 10,000 હોય તો બાંધકામ ક્ષેત્રે કેટલા વ્યાવસાયિક છે ?

(2) પ્રશાસન ક્ષેત્રે કેટલા વ્યાવસાયિક કાર્યરત છે ?

(3) ઉત્પાદન ક્ષેત્રે કેટલા ટકા વ્યાવસાયિક છે ?

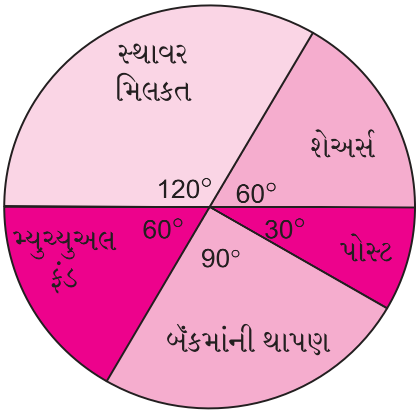
6. એક કુટુંબના વાર્ષિક રોકાણની વૃત્તાકૃતિ બાજુમાં આપેલી છે. તેના પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

(1) શેઅરમાં કરેલું રોકાણ 2000 રૂપિયા હોય તો કુલ રોકાણ કેટલું ?

(2) બેંકમાં મૂકેલી થાપણની રકમ કેટલી ?

(3) મ્યુચ્યુઅલ ફંડ કરતાં સ્થાવર મિલકતમાં કેટલી રકમ વધારે રોકી છે ?

(4) પોસ્ટમાં કરેલું રોકાણ કેટલું ?



આકૃતિ 6.14

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 6

1. બહુપર્યાયી પ્રશ્નોના ઉત્તર આપેલાં પર્યાયોમાંથી શોધીને લખો.

(1) વિવિધ રક્તગટની વ્યક્તિઓનું રક્તગટાનુસાર કરેલું વર્ગીકરણ વૃત્તાકૃતિમાં દર્શાવવું છે. O– રક્તગટ હોય તેવી વ્યક્તિઓ 40% હોય તો O– રક્તગટ માટેની વ્યક્તિઓના વૃત્તાંશનો કેન્દ્રિયકોણ કેટલો હશે.

(A) 114°   (B) 140°   (C) 104°   (D) 144°

(2) મકાન બાંધકામ માટે થતાં વિવિધ ખર્ચ વૃત્તાકૃતિમાં દર્શાવ્યા છે. તેમાં સિમેન્ટનો ખર્ચ 75° ના કેન્દ્રિયકોણથી દર્શાવ્યો છે. જો સિમેન્ટનો ખર્ચ 45,000 રૂપિયા હોય તો, મકાનના બાંધકામનો કુલ ખર્ચ કેટલો હશે ?

(A) 2,16,000 (B) 3,60,000 (C) 4,50,000 (D) 7,50,000

(3) વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઠામાં સંચિત આવૃત્તિનો ઉપયોગ . . . . . શોધવા માટે થાય છે.

(A) મધ્ય (B) મધ્યક (C) બહુલક (D) આ બધાં માટે

(4) વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઠામાં સામગ્રીનો મધ્ય શોધવાના સૂત્ર $\overline{X} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times g$ માં $u_i = \ldots$

(A) $\frac{x_i + A}{g}$ (B) $(x_i - A)$ (C) $\frac{x_i - A}{g}$ (D) $\frac{A - x_i}{g}$

(5)

પ્રતિલિટર કાપેલું અંતર (કિમી)	12-14	14-16	16-18	18-20
કારની સંખ્યા	11	12	20	7

ઉપરની સામગ્રી માટે કાર વડે પ્રતિલિટર કપાયેલાં અંતરનો મધ્યક . . . . . વર્ગમાં છે.

(A) 12-14 (B) 14-16 (C) 16-18 (D) 18-20

(6)

દરેક વિદ્યાર્થીએ વાવેલાં ઝાડ	1-3	4-6	7-9	10-12
વિદ્યાર્થીની સંખ્યા	7	8	6	4

ઉપરના આવૃત્તિ કોઠામાં સામગ્રી માટે આવૃત્તિ બહુકોણ દોરવાનો છે. તો 4-6 આ વર્ગના વિદ્યાર્થીઓ દર્શાવવા માટેનાં બિંદુના નિર્દેશકો . . . છે.

(A) (4, 8) (B) (3, 5) (C) (5, 8) (D) (8, 4)

2. દ્રાક્ષની મોસમમાં ખેડૂતોની આવકનો વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો નીચે આપ્યો છે. તે પરથી તેમની આવકનો મધ્ય શોધો.

આવક (હજાર રૂપિયા)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ખેડૂતોની સંખ્યા	10	11	15	16	18	14

3. નીચે વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઠામાં એક બૅંકે ખેડૂતોને ખેત તળાવ માટે આપેલું કરજ નીચે પ્રમાણે છે. તો બૅંકે આપેલી રકમનો મધ્ય શોધો.

કરજ (હજાર રૂપિયા)	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
ખેત તળાવની સંખ્યા	13	20	24	36	7

4. એક કારખાનામાં 120 કામદારોના સાપ્તાહિક પગારનો વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો નીચે આપ્યો છે. તે પરથી કામદારોના સાપ્તાહિક પગારનો મધ્ય શોધો.

સાપ્તાહિક પગાર (રૂપિયા)	0-2000	2000-4000	4000-6000	6000-8000
કામદારોની સંખ્યા	15	35	50	20

5. નીચેના આવૃત્તિ કોઠામાં 50 પૂરગ્રસ્ત કુટુંબોને કરેલી મદદની રકમ આપી છે તે પરથી મદદની રકમનો મધ્ય શોધો.

મદદની રકમ (હજાર રૂપિયા)	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
કુટુંબોની સંખ્યા	7	13	20	6	4

6. નીચેના આવૃત્તિ કોઠામાં સાર્વજનિક બસ સેવાની 250 બસોએ એક દિવસમાં કાપેલું અંતર આપ્યું છે. તે પરથી એક દિવસમાં કાપેલાં અંતરનો મધ્યક શોધો.

અંતર (કિમી)	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
બસની સંખ્યા	40	60	80	50	20

7. એક જનરલ સ્ટોર્સમાં વિવિધ વસ્તુની કિંમત અને તે વસ્તુની માગણીનો વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઠો આપ્યો છે. તે પરથી કિંમતનો મધ્યક શોધો.

કિંમત (રૂપિયા)	20 કરતા ઓછા	20-40	40-60	60-80	80-100
વસ્તુની સંખ્યા	140	100	80	60	20

8. નીચેના વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઠામાં એક મીઠાઈની દુકાનમાં જુદા-જુદા વજનની મીઠાઇની માગણી આપી છે. તે પરથી વજનની માગણીનો બહુલક શોધો.

મીઠાઈનું વજન (ગ્રામ)	0-250	250-500	500-750	750-1000	1000-1250
ગ્રાહક સંખ્યા	10	60	25	20	15

9. નીચેના આવૃત્તિ વિતરણ માટે સ્તંભાલેખ દોરો.

વીજ વપરાશ (યુનિટ)	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170
કુટુંબોની સંખ્યા	150	400	460	540	600	350

10. એક હાથસાળ કારખાનામાં મજૂરોને એક સાડી તૈયાર કરવા માટે લાગતાં અને મજૂરોની સંખ્યાના દિવસોનો વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઠો નીચે આપ્યો છે. આ સામગ્રી પરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

દિવસ	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
મજૂરોની સંખ્યા	5	16	30	40	35	14

11. એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને વિજ્ઞાન પ્રયોગ કરવા માટે લાગતાં સમયનો વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ કોઠો નીચે આપ્યો છે. આ માહિતી પરથી સ્તંભાલેખ દોરો અને તે પરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

પ્રયોગ માટે લાગતો સમય (મિનિટ)	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32
વિદ્યાર્થી સંખ્યા	8	16	22	18	14	12

12. નીચેના વર્ગીકૃત આવૃત્તિ કોઠા માટે આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

રક્તદાતાની ઉંમર (વર્ષ)	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
રક્તાદાતાની સંખ્યા	38	46	35	24	15	12

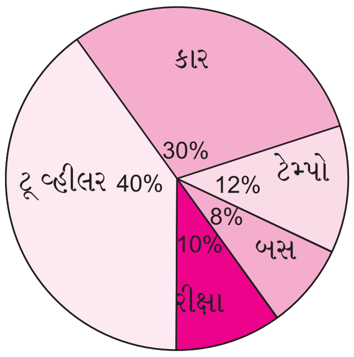
13. નીચેના કોઠામાં 150 ગામમાં થયેલાં વરસાદની વાર્ષિક નોંધ આપી છે તે પરથી આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

સરાસરી વરસાદ (સેમી)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
ગામની સંખ્યા	14	12	36	48	40

14. બાજુમાં સવારે 8 થી 10 દરમિયાન શહેરના એક સિગ્નલવાળા ચોકમાંથી પસાર થતાં વિવિધ વાહનોની શતમાન (સેંકડે) વૃત્તાકૃતિ આપી છે. તો

(1) દરેક પ્રકારના વાહનો માટેના કેન્દ્રિયકોણના માપ શોધો.

(2) ટૂ વ્હીલરની સંખ્યા 1200 હોય તો વાહનોની કુલ સંખ્યા કેટલી ?



આકૃતિ 6.15

15. નીચેના કોઠામાં ધ્વનિ-પ્રદુષણ નિર્માણ કરતાં ઘટકો આપ્યા છે. તે દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ દોરો.

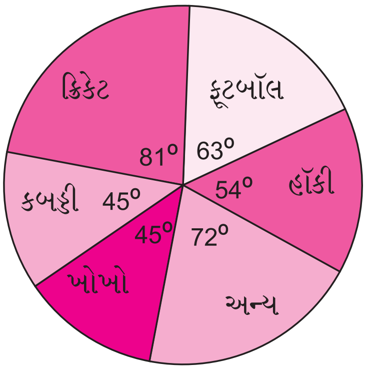
બાંધકામ	વાહન વ્યવહાર	વિમાન ઉડાણ	ઔદ્યોગિક	રેલ્વેગાડીઓ
10%	50%	9%	20%	11%

16. શાળાના વિદ્યાર્થીઓની વિવિધ રમત-ગમતની પસંદગી જાણવા માટે કરેલાં સર્વેક્ષણ પરથી મળેલી માહિતી વૃત્તાકૃતિ દ્વારા દર્શાવી છે કુલ વિદ્યાર્થીઓ 1000 હોય તો,

(1) ક્રિકેટ પસંદ કરતાં વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં ?

(2) ફૂટબૉલની રમત કેટલાં વિદ્યાર્થીઓને ગમે છે ?

(3) અન્ય રમતને પસંદ કરતાં વિદ્યાર્થીઓ કેટલાં ?



આકૃતિ 6.16

17. એક ગામનાં આરોગ્ય કેન્દ્રમાં 180 સ્ત્રીઓની તપાસણી થઈ. તેમાંથી 50 સ્ત્રીઓમાં હિમોગ્લોબીન ઓછું છે. 10 સ્ત્રીઓને મોતીયાનો ત્રાસ હતો. 25 સ્ત્રીઓને શ્વસન વિકાર હતો અને બાકીની સ્ત્રીઓ નિરોગી હતી. આ માહિતી દર્શાવતી વૃત્તાકૃતિ દોરો.

18. વનીકરણ પ્રકલ્પમાં એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓએ પર્યાવરણ દિન નિમિત્તે 120 ઝાડ વાવ્યા. તેની માહિતી દર્શાવતો કોઠો નીચે આપ્યો છે. આ માહિતીની વૃત્તાકૃતિ દોરો.

ઝાડના નામ	કરંજો	બેહડાં	અર્જુન	બકુલ	કડવો લીમડો
ઝાડની સંખ્યા	20	28	24	22	26

NKV9H6

ઉત્તરસૂચિ

1. બે ચલવાળાં રેખિક સમીકરણો

મહાવરાસંગ્રહ 1.1

2. (1) (2, 4) (2) (3, 1) (3) (6,1) (4) (5, 2)
(5) (−1, 1) (6) (1, 3) (7) (3, 2) (8) (7, 3)

મહાવરાસંગ્રહ 1.2

1. (1)

x	3	**−2**	0
y	**0**	5	3
(x, y)	(3, 0)	**(−2, 5)**	(0, 3)

(2)

x	**4**	−1	0
y	0	**−5**	−4
(x, y)	**(4, 0)**	**(−1,−5)**	(0,−4)

2. (1) (5, 1) (2) (4, 1) (3) (3, −3) (4) (−1, −5) (5) (1, 2.5) (6) (8, 4)

મહાવરાસંગ્રહ 1.3

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \boxed{5} - \boxed{2} \times 4 = \boxed{15} - 8 = \boxed{7}$

2. (1) −18 (2) 21 (3) $-\frac{4}{3}$

3. (1) (2, −1) (2) (−2, 4) (3) (3, −2) (4) (2, 6) (5) (6, 5) (6) $\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{4}\right)$

મહાવરાસંગ્રહ 1.4

1. (1) $\left(\frac{1}{9}, 1\right)$ (2) (3, 2) (3) $\left(\frac{5}{2}, -2\right)$ (4) (1, 1)

મહાવરાસંગ્રહ 1.5

1. તે સંખ્યા 5 અને 2 **2.** $x = 12, y = 8$ ક્ષેત્રફળ = 640 ચોરસ એકમ, પરિમિતિ = 112 એકમ

3. પુત્રની ઉંમર 15 વર્ષ, પિતાની ઉંમર 40 વર્ષ. **4.** $\frac{7}{18}$

5. A = 30 કિગ્રા, B = 55 કિગ્રા 6. 150 કિમી.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 1

1. (1) B (2) A (3) D (4) C (5) A

2.

x	−5	$\frac{3}{2}$
y	$-\frac{13}{6}$	0
(x, y)	$\left(-5, -\frac{13}{6}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

3. (1) (3, 2) (2) (−2, −1) (3) (0, 5) (4) (2, 4) (5) (3, 1)

4. (1) 22 (2) −1 (3) 13

5. (1) $(-\frac{2}{3}, 2)$ (2) (1, 4) (3) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ (4) $(\frac{7}{11}, \frac{116}{33})$ (5) (2, 6)

6. (1) (6, −4) (2) $(-\frac{1}{4}, -1)$ (3) (1, 2) (4) (1, 1) (5) (2, 1)

7. (2) ચાનો દર ₹ 300 પ્રતિ કિ.ગ્રા.
સાકરનો દર ₹ 40 પ્રતિ કિ.ગ્રા.
(3) ₹ 100ની નોટોની સંખ્યા 20
₹ 50ની નોટોની સંખ્યા 10
(4) મનીષાની આજની ઉંમર 23 વર્ષ
સવિતાની આજની ઉંમર 8 વર્ષ
(5) કુશળ કામદારની મજૂરી 450 રૂપિયા
અકુશળ કામદારની મજૂરી 270 રૂપિયા
(6) હમીદની ઝડપ 50 કિમી/કલાક
જોસેફનો વેગ 40 કિમી/કલાક.

2. વર્ગસમીકરણો

મહાવરાસંગ્રહ 2.1

1. $m^2 + 5m + 3 = 0$, $y^2 - 3 = 0$ (આ પ્રકારના અન્ય જવાબ)
2. (1), (2), (4), (5) આ વર્ગસમીકરણો છે. (3), (6) નથી.
3. (1) $y^2 + 2y - 10 = 0$, $a = 1, b = 2, c = -10$
(2) $x^2 - 4x - 2 = 0$, $a = 1, b = -4, c = -2$
(3) $x^2 + 4x + 3 = 0$, $a = 1, b = 4, c = 3$
(4) $m^2 + 0m + 9 = 0$, $a = 1, b = 0, c = 9$
(5) $6p^2 + 3p + 5 = 0$, $a = 6, b = 3, c = 5$
(6) $x^2 + 0x - 22 = 0$, $a = 1, b = 0, c = -22$
4. (1) 1 મૂળ છે, −1 નથી. (2) $\frac{5}{2}$ મૂળ છે, 2 નથી.
5. k = 3
6. k = −7

મહાવરાસંગ્રહ 2.2

1. (1) 9, 6 (2) −5, 4 (3) $-13, -\frac{1}{2}$ (4) $5, -\frac{3}{5}$
(5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (6) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$ (7) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$ (8) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
(9) 25, −1 (10) $-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}$ (11) 0, 3 (12) $-\sqrt{11}, \sqrt{11}$

મહાવરાસંગ્રહ 2.3

1. (1) 4, −5 (2) $(\sqrt{6}-1), (-\sqrt{6}-1)$ (3) $\frac{\sqrt{13}+5}{2}, \frac{-\sqrt{13}+5}{2}$

(4) $\frac{\sqrt{2}+2}{3}, \frac{-\sqrt{2}+2}{3}$ (5) $-2, -\frac{5}{2}$ (6) $\frac{2+\sqrt{39}}{5}, \frac{2-\sqrt{39}}{5}$

મહાવરાસંગ્રહ 2.4

1. (1) 1, −7, 5 (2) 2, −5, 5 (3) 1, −7, 0

2. (1) −1, −5 (2) $\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ (3) $\frac{-1+\sqrt{22}}{3}, \frac{-1-\sqrt{22}}{3}$

(4) $\frac{2+\sqrt{14}}{5}, \frac{2-\sqrt{14}}{5}$ (5) $\frac{-1+\sqrt{73}}{6}, \frac{-1-\sqrt{73}}{6}$ (6) $-1, -\frac{8}{5}$

3. $-\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

મહાવરાસંગ્રહ2.5

1. (1) 5 હોય ત્યારે મૂળ ભિન્ન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે, −5 હોય ત્યારે મૂળ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી.

(2) $x^2 + 7x + 5 = 0$ (3) $\alpha + \beta = 2, \alpha \times \beta = -\frac{3}{2}$

2. (1) 53 (2) −55 (3) 0

3. (1) વાસ્તવિક અને સમાન છે. (2) વાસ્તવિક અને અસમાન છે. (3) વાસ્તવિક સંખ્યા નથી.

4. (1) $x^2 - 4x = 0$ (2) $x^2 + 7x - 30 = 0$

(3) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ (4) $x^2 - 4x - 1 = 0$

5. k = 3 **6.** (1) 18 (2) 50

7. (1) k = 12 અથવા k = −12 (2) k = 6

મહાવરાસંગ્રહ 2.6

1. 9 વર્ષે 2. 10 અને 12 3. ઊભી હરોળમાં 10 અને આડી હરોળમાં 15.
4. કિશોરની આજની ઉંમર 10 વર્ષ, વિવેકની આજની ઉંમર 15 વર્ષ.
5. 10 ગુણ 6. વાસણની સંખ્યા 6, દરેક વાસણનું નિર્મિતિ મૂલ્ય 100 રૂપિયા.
7. 6 કિમી/કલાક 8. નિશૂનો 6 દિવસ, પિંટૂને 12 દિવસ.
9. ભાજક = 9, ભાગફળ = 51 10. AB = 7 સેમી, CD = 15 સેમી, AD = BC = 5 સેમી.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 2

1. (1) B (2) A (3) C (4) B (5) B (6) D (7) C (8) C

2. (1) અને (3) વર્ગસમીકરણો છે. (2) નથી.

3. (1) −15 (2) 1 (3) 21

4. k = 3 5. (1) x^2 − 100 = 0 (2) x^2 − 2x − 44 = 0 (3) x^2 − 7x = 0

6. (1) વાસ્તવિક સંખ્યા નથી. (2) વાસ્તવિક અને અસમાન છે. (3) વાસ્તવિક અને સમાન છે.

7. (1) $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{21}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{5}$ (3) 1, −4

(4) $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ (5) મૂળ વાસ્તવિક સંખ્યા નથી. (6) (2 + $\sqrt{7}$), (2 − $\sqrt{7}$)

8. m = 14 9. $x^2 - 5x + 6 = 0$ 10. $x^2 - 4pqx - (p^2 - q^2)^2 = 0$

11. સાગર પાસે 100 રૂપિયા અને મુકુંદ પાસે 150 રૂપિયા.

12. 12 અને $\sqrt{24}$ અથવા 12 અને $-\sqrt{24}$ 13. વિદ્યાર્થીની સંખ્યા 60

14. પહોળાઈ 45 મી., લંબાઈ 100 મી., ખેતતળાવની બાજુની લંબાઈ 15 મી.

15. મોટા નળ માટે 3 કલાક અને નાના નળ માટે 6 કલાક.

3. અંકગણિત શ્રેઢી

મહાવરાસંગ્રહ 3.1

1. (1) છે, d = 2 (2) છે, $d = \frac{1}{2}$ (3) છે, d = 4 (4) નથી.
(5) છે, d = −4 (6) છે, d = 0 (7) છે, $d = \sqrt{2}$ (8) છે, d = 5

2. (1) 10, 15, 20, 25, . . . (2) −3, −3, −3, −3, . . . (3) −7, −6.5, −6, −5.5, . .
(4) −1.25, 1.75, 4.75, 7.75, . . .(5) 6, 3, 0, −3 . . . (6) −19, −23, −27, −31

3. (1) a = 5, d = −4 (2) a = 0.6, d = 0.3 (3) a = 127, d = 8 (4) $a = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{2}$

મહાવરાસંગ્રહ 3.2

1. (1) d = 7 (2) d = 3 (3) a = −3, d = −5 (4) a = 70, d = −10

2. છે. 121 3. 104 4. 115 5. −121 6. 180

7. 55 8. 55 9. 60 10. 1

મહાવરાસંગ્રહ 3.3

1. 1215 2. 15252 3. 30450 5. 5040

5. 2380 6. 60 7. 4, 9, 14 અથવા 14, 9, 4 8. −3, 1, 5, 9

મહાવરાસંગ્રહ 3.4

1. 70455 રૂપિયા 2. પહેલા હપ્તો 1000 રૂપિયા, અંતિમ હપ્તો 560 રૂપિયા 3. 1,92,000 રૂપિયા

4. 48, 1242 5. −20°, −25°, −30°, −35°, −40°, −45° 6. 325

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 3

1. (1) B (2) C (3) B (4) D (5) B (6) C (7) C (8) A (9) A (10) B

2. 40 3. 1, 6, 11, . . . 4. −195 5. 16, −21 6. −1 7. 6, 10

8. 8 9. 67, 69, 71 10. 3, 7, 11, ... 147. 14. 2000 રૂપિયા

4. અર્થનિયોજન

મહાવરાસંગ્રહ 4.1

1. CGST 6%, SGST 6% 2. SGST 9%, GST 18%
3. CGST ₹ 784 અને SGST ₹ 784 પડશે.
4. તે બૅલ્ટ ગ્રાહકને 691.48 રૂપિયામાં મળશે.
5. રમકડાની કારની કરપાત્ર કિંમત ₹ 1500 તેના પર CGST ₹ 135 SGST ₹ 135
6. (1) SGST નો દર = 14% (2) AC પર GST નો દર = 28%
   (3) AC ની કરપાત્ર કિંમત = 40,000 રૂપિયા (4) GST ની કુલ કિંમત = 11,200 રૂપિયા
   (5) CGST = 5600 રૂપિયા (6) SGST = 5600 રૂપિયા
7. પ્રસાદને તે વૉશિંગ મશીન 48,640 રૂપિયામાં મળશે અને બિલમાં CGST = 5,320 રૂપિયા અને SGST = 5,320 રૂપિયા દર્શાવાય છે.

મહાવરાસંગ્રહ 4.2

1. ચેતના સ્ટોર્સનો ચૂકવવા પાત્ર જીએસટી 22,000 રૂપિયા
2. નઝમાને ₹ 12,500 ની ઈનપૂટ ટૅક્સ ક્રેડિટ મળશે. ∴ તેમનો ચૂકવવા પાત્ર GST ₹ 2,250.
3. અમીર એન્ટર પ્રાઈઝનો ચૂકવવા પાત્ર GST= ₹ 300 તેમાં CGST = ₹ 150 અને SGST = ₹ 150
   અકબરી બ્રધર્સનો ચૂકવવા પાત્ર GST 400 રૂ. તેમાં CGST 200 રૂ. અને SGST 200 રૂ.
4. ચૂકવવા પાત્ર GST ₹ 100, CGST ₹ 50 UTGST ₹ 50. 5. CGST = SGST = ₹ 900

મહાવરાસંગ્રહ 4.3

1. (1) બજારભાવ 100 રૂપિયા (2) દાર્શનિક કિંમત 75 રૂપિયા (3) અવમૂલ્ય 5 રૂપિયા
2. 25% 3. 37,040 રૂપિયા 4. 800 શેઅર્સ
5. વળતરનો દર = 5.83% 6. કંપની A માંનું રોકાણ ફાયદાકારક છે.

મહાવરાસંગ્રહ 4.4

1. 200.60 રૂપિયા 2. 999 રૂપિયા
3.

શેઅર્સની સંખ્યા	શેઅર્સનો બજારભાવ	શેઅર્સની કુલ કિંમત	દલાલીનો દર 0.2%	દલાલી પર CGST 9%	દલાલી પર SGST 9%	શેઅર્સની કુલ કિંમત
100 B	₹ 45	₹ 4500	₹ 9	₹ 0.81	₹ 0.81	₹ 4510.62
75 S	₹ 200	₹ 15000	₹ 30	₹ 2.70	₹ 2.70	₹ 14964.60

4. 100 શેઅર્સ વેંચ્યા. 5. ખોટ 8560 રૂપિયા.

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 4A

1. (1) C (2) B (3) D (4) B (5) A (6) B
2. કુલ બિલ 28,800 રૂપિયા, સીજીએસટી 3150 રૂપિયા, એસજીએસટી 3150 રૂપિયા.

3. ₹ 997.50   4. ₹ 12,500   5. ₹ 4250 ITC ચૂકવવા પાત્ર કર ₹ 250

6. ITC (ઈનપૂટ ટૅક્સ ક્રેડિટ) ₹ 1550, સીજીએસટી ₹ 5030, એસજીએસટી ₹ 5030.

7. વૉકીટૉકી સંચની કિંમત ₹ 75,000, સીજીએસટી ₹ 4500, એસજીએસટી ₹ 4500.

8.(1) જથ્થાબંધ વેપારીના ટૅક્સ ઈન્વૉઈસમાં સીજીએસટી 16200 રૂપિયા, એસજીએસટી 16200 રૂપિયા

છૂટક વેપારીના ટૅક્સ ઈન્વૉઈસમાં સીજીએસટી 19,800 રૂપિયા, એસજીએસટી 19,800 રૂપિયા

(2) જથ્થાબંધ વેપારીને ચૂકવવા પાત્ર સીજીએસટી (CGST) 2700 અને (SGST) 2700,

છૂટક વેપારીને ચૂકવવા પાત્ર સીજીએસટી (CGST) 3600 અને (SGST) 3600

9. (1) અણણા પાટીલે આપેલા ટૅક્સ ઈન્વૉઈસમાં સીજીએસટી ₹ 1960, એસજીએસટી ₹ 1960

(2) વસઈના વેપારીએ ગ્રાહકને આકારેલો સીજીએસટી ₹ 2352 અને એસજીએસટી ₹ 2352

(3) વસઈના વેપારીનો ચૂકવવા પાત્ર સીજીએસટી ₹ 392 અને ચૂકવવા પાત્ર એસજીએસટી ₹ 392

10.

(1)

વ્યક્તિ	ચૂકવવા પાત્ર સીજીએસટી	ચૂકવવા પાત્ર એસજીએસટી	ચૂકવવા પાત્ર જીએસટી
ઉત્પાદક	300	300	600
વિતરક	360−300 =60	60	120
છૂટક વેપારી	390−360 = 30	30	60
કુલ કર	₹ 390	₹ 390	₹ 780

(2) અંતમાં ગ્રાહકને તે વસ્તુ 7280 રૂ. માં મળ્યો.

(3) ઉત્પાદકથી વિતરક B2B, વિતરકથી છૂટક વેપારી B2B, છૂટક વેપારીથી ગ્રાહક B2C

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 4B

1. (1) B (2) B (3) A (4) C (5) A

2. ₹ 130.39   3. 22.2%   4. 21,000 રૂપિયા મળશે.

5. 500 શેઅર્સ મળશે.   6. નફો 1058.52 રૂપિયા   7. કંપની B કારણ કે વળતર વધુ.

8. 1000 શેઅર્સ મળશે.   9. 118 રૂપિયા

10. (1) 1,20,000 રૂપિયા(2) 360 રૂપિયા (3) 64.80 રૂપિયા (4) 120424.80 રૂપિયા.

11. 1% નફો

5. સંભાવના

મહાવરાસંગ્રહ 5.1

1. (1) 8 (2) 7 (3) 52 (4) 11

મહાવરાસંગ્રહ 5.2

1. (1) S = {1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T}   n(S) = 12

(2) S = {23, 25, 32, 35, 52, 53} n(S) = 6

2. S = {લાલ, કેસરી, જાંબુડી, લીલો, પીળો, વાદળી} n(S) = 6

3. S = {મંગલવાર, રવિવાર, શુક્રવાર, બુધવાર, સોમવાર, શનિવાર} n(S) = 6

4. (1) B_1B_2 (2) G_1G_2 (3) B_1G_1 B_2G_1 B_1G_2 B_2G_2

(4) $S = \{B_1B_2, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, G_1G_2,\}$

મહાવરાસંગ્રહ 5.3

1. (1) S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} n(S) = 6

A = {2, 4, 6} n(A) = 3, B = {1, 3, 5} n(B) = 3, C = {2, 3, 5} n(C) = 3

(2) S = {(1,1), . . ., (1, 6), (2,1), . . ., (2, 6), (3, 1), . . .,(3, 6),
(4, 1), . . .,(4,6),(5, 1), . . .,(5, 6),(6, 1), . . .,(6, 6)} n(S) = 36

A = {(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1) (6, 6)} n(A) = 6

B = {(4, 6) (5, 5) (5, 6) (6, 4) (6, 5) (6, 6)} n(B) = 6

C = {(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 5) (6, 6)} n(C) = 6

(3) S = {HHH, HHT, HTT, HTH, THT, TTH, THH, TTT} n(S) = 8

A = {HHH, HHT, HTH, THH} n(A) = 4

B = {TTT} n(B) = 1

C = {HHH, HHT, THT} n(C) = 4

(4) S = {10, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 34, 35, 40, 41, 42, 43, 45, 50, 51, 52, 53, 54} n(S) = 25

A = {10, 12, 14, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 42, 50, 52, 54} n(A) = 13

B = {12, 15, 21, 24, 30, 42, 45, 51, 54} n(B) = 9

C = {51, 52, 53, 54} n(C) = 4

(5) $S = \{M_1M_2, M_1M_3, M_1F_1, M_1F_2, M_2M_3, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2\}$
n(S) = 10

$A = \{M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2\}$ n(A) = 7

$B = \{M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2\}$ n(B) = 6

$C = \{M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3\}$ n(C) = 3

(6) S = {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6} n(S) = 12

A = {H1, H3, H5} n(A) = 3

B = {H2, H4, H6, T2, T4, T6} n(B) = 6

C = { } n(C) = 0

મહાવરાસંગ્રહ 5.4

1. (1) $\frac{3}{4}$, (2) $\frac{1}{4}$ 2. (1) $\frac{1}{6}$ (2) 0 (3) $\frac{5}{12}$

3. (1) $\frac{7}{15}$ (2) $\frac{1}{5}$ 4. (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{1}{5}$ 5. (1) $\frac{1}{13}$ (2) $\frac{1}{4}$

સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 5

1. (1) B (2) B (3) C (4) A (5) A 2. વાસિમ 3. (1) $\frac{1}{11}$ (2) $\frac{6}{11}$

4. $\frac{5}{26}$ 5. (1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{4}{9}$ 6. $\frac{1}{2}$ 7. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$

8. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{6}$ 9. $\frac{1}{25}$ 10. (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) 1

11. (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) 1 (4) 0 12. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ 13. $\frac{2}{11}$

14. $\frac{13}{40}$ 15. (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{1}{5}$ 16. $\frac{11}{36}$

6. આંકડાશાસ્ત્ર

મહાવરાસંગ્રહ 6.1

(1) 4.36 કલાક (2) 521.43 રૂપિયા (3) 2.82 લિટર (4) 35310 રૂપિયા.
(5) 985 રૂપિયા અથવા 987.5 રૂપિયા (6) 3070 રૂપિયા અથવા 3066.67 રૂપિયા.

મહાવરાસંગ્રહ 6.2

(1) 11.4 કલાક (2) 184.4 એટલે અંદાજે 184 આંબા (3) 74.558 $\approx$ 75 વાહન (4) 52,750 દિવાઓ

મહાવરાસંગ્રહ 6.3

1. 4.33 % 2. 72 યુનિટ 3. 9.94 લિટર 4. 12.31 વર્ષે

મહાવરાસંગ્રહ 6.5

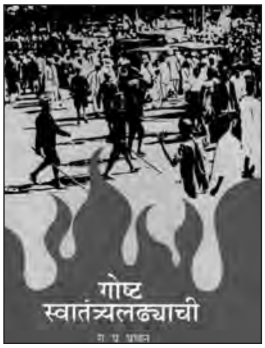
1. (1) 60-70 (2) 20-30 અને 90-100 (3) 55 (4) 80 અને 90 (5) 15

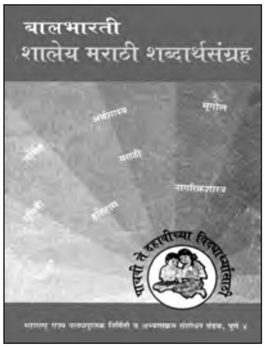
મહાવરાસંગ્રહ 6.6

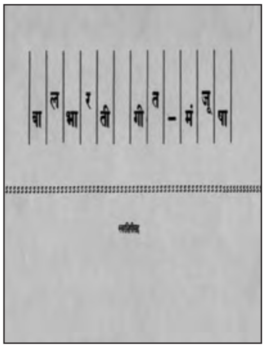
5. (1) 2000 (2) 1000 (3) 25%
6. (1) 12000 રૂપિયા (2) 3000 રૂપિયા (3) 2000 રૂપિયા (4) 1000 રૂપિયા

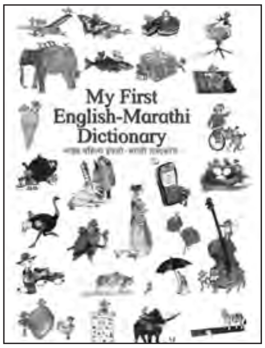
સંકીર્ણ પ્રશ્નસંગ્રહ 6

1. (1) D (2) A (3) B (4) C (5) C (6) C
2. 52,500 રૂપિયા 3. 65,400 રૂપિયા 4. 4250 રૂપિયા
5. 72,400 રૂપિયા 6. 223.13 કિમી 7. 32 રૂપિયા 8. 397.06 ગ્રામ
14. (1) કાર - 108°, ટેમ્પો - 43°, બસ - 29°, રીક્ષા - 36°, ટૂ વ્હીલર - 144°
(2) વાહનોની કુલ સંખ્યા - 3000
16. (1) ક્રિકેટ પસંદ કરતાં- 225, (2) ફૂટબૉલની પસંદ કરતાં - 175 (3) અન્ય રમતને પસંદ કરતાં - 200.









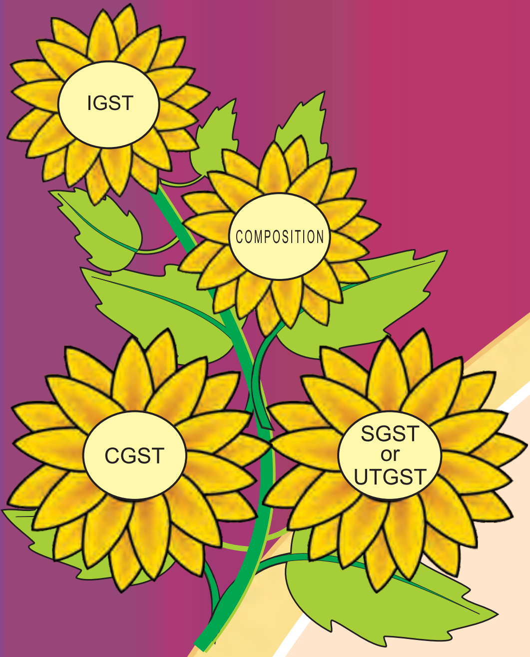
- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.

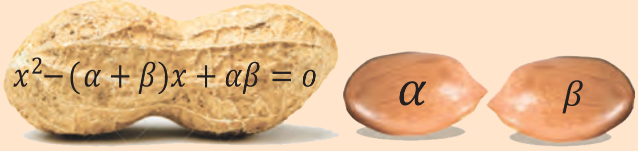
पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५





મહારાષ્ટ્ર રાજ્ય પાઠ્યપુસ્તક નિર્મિતિ
અને અભ્યાસક્રમ સંશોધન મંડળ,
પુણે - 411 004.

गुजराती गणित इ.१० वी भाग–१ ₹ 80.00