ریاضی حصّہ - II

دسویں جماعت

بھارت کا آئین

حصہ 4 الف

بنیادی فرائض

حصہ 51 الف

بنیادی فرائض - بھارت کے ہر شہری کا یہ فرض ہوگا کہ وہ...

(الف) آئین پر کاربند رہے اور اس کے نصب العین اور اداروں، قومی پرچم اور قومی ترانے کا احترام کرے۔

(ب) ان اعلیٰ نصب العین کو عزیز رکھے اور ان کی تقلید کرے جو آزادی کی تحریک میں قوم کی رہنمائی کرتے رہے ہیں۔

(ج) بھارت کے اقتدارِ اعلیٰ، اتحاد اور سالمیت کو مستحکم بنیادوں پر استوار کر کے ان کا تحفّظ کرے۔

(د) ملک کی حفاظت کرے اور جب ضرورت پڑے قومی خدمت انجام دے۔

(ہ) مذہبی، لسانی اور علاقائی وطبقاتی تفرقات سے قطع نظر بھارت کے عوام الناس کے مابین یک جہتی اور عام بھائی چارے کے جذبے کو فروغ دے نیز ایسی حرکات سے باز رہے جن سے خواتین کے وقار کو ٹھیس پہنچتی ہو۔

(و) ملک کی ملی جلی ثقافت کی قدر کرے اور اُسے برقرار رکھے۔

(ز) قدرتی ماحول کو جس میں جنگلات، جھیلیں، دریا اور جنگلی جانور شامل ہیں محفوظ رکھے اور بہتر بنائے اور جانداروں کے تئیں محبت وشفقت کا جذبہ رکھے۔

(ح) دانشورانہ رویے سے کام لے کر انسان دوستی اور تحقیقی واصلاحی شعور کو فروغ دے۔

(ط) قومی جائداد کا تحفظ کرے اور تشدد سے گریز کرے۔

(ی) تمام انفرادی اور اجتماعی شعبوں کی بہتر کارکردگی کے لیے کوشاں رہے تاکہ قوم متواتر ترقی وکامیابی کی منازل طے کرنے میں سرگرمِ عمل رہے۔

(ک) اگر ماں باپ یا ولی ہے، چھے سال سے چودہ سال تک کی عمر کے اپنے بچے یا وارڈ، جیسی بھی صورت ہو، کے لیے تعلیم کے مواقع فراہم کرے۔

سرکاری فیصلہ نمبر: ابھیاس – ۲۱۱۶ (پر نمبر ۱۶/۴۳) ایس ڈی۔۴ مورخہ ۲۵/اپریل ۲۰۱۶ء کے مطابق قائم کردہ رابطہ کمیٹی کی ۲۹/دسمبر ۲۰۱۷ کو منعقدہ نشست میں اس کتاب کو تعلیمی سال ۱۹-۲۰۱۸ء درسی کتاب کے طور پر منظوری دی گئی۔

ریاضی

حصّہ – II

دسویں جماعت

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ – ۴۱۱۰۰۴

اپنے اسمارٹ فون میں انسٹال کردہ Diksha App کے ذریعے درسی کتاب کے پہلے صفحے پر درج Q.R. code اسکین کرنے سے ڈیجیٹل درسی کتاب اور ہر سبق میں درج Q.R. code کے ذریعے متعلقہ سبق کی درس و تدریس کے لیے مفید سمعی و بصری ذرائع دستیاب ہوں گے۔

پہلا ایڈیشن : ۲۰۱۸ء (2018)
چوتھا اصلاح شدہ ایڈیشن : ۲۰۲۲ء (2022)

© مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی و ابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ - ۴۱۱۰۰۴
اس کتاب کے جملہ حقوق مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی و ابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ کے حق میں محفوظ ہیں۔اس کتاب کا کوئی بھی حصہ ڈائرکٹر، مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی و ابھیاس کرم سنشودھن منڈل کی تحریری اجازت کے بغیر کسی بھی شکل میں شائع نہ کیا جاسکتا۔

ریاضی مضمون کی کمیٹی

- ڈاکٹر منگلا نارلیکر (صدر)
- ڈاکٹر شریمتی جے شری اترے (رکن)
- ڈاکٹر ونا یک گوڈبولے (رکن)
- شریمتی پراجکتی گوکھلے (رکن)
- شری رما کانت سرودے (رکن)
- شری سندیپ پنچ بھائی (رکن)
- شریمتی پوجا جادھو (رکن)
- شریمتی اجولا گوڈبولے (رکن سکریٹری)

ریاضی مضمون کی مجلس عاملہ

- شریمتی جے شری پورندرے
- شری راجندر چودھری
- شری رام ونہیال کر
- شری انا پاپریٹ
- جناب انصار شیخ
- شری شرپاد دیشپانڈے
- شری سریش داتے
- شری اُمیش ریلے
- شری بنسی ہوالے
- شری روہنی شرکے
- شری پرکاش جھینڈے
- شری لکشمن داون کر
- شری شری کانت رتن پارکھی
- شری سنیل شری واستو
- جناب انصاری عبدالحمید عبدالمجید
- شریمتی سورنا دیش پانڈے
- شریمتی تروبین پوپٹ
- شری پرمود ٹھومبرے
- ڈاکٹر سہستر بدھے
- شری وسنت شیوالے
- شری پرتاپ کاشد
- شری ملند بھاکرے
- شری گیانیشور ماشلکر
- شری گنیش کولتے
- شری سندیش سوناونے
- شری سدھیر پاٹل
- شری پرکاش کاپسے
- شری رویندر کھندارے
- شریمتی سواتی دھرمادھیکاری
- شری اروند کمار تیواری
- شری ملّے شام بیتھی
- شریمتی آریا بھڑے

Urdu Translators
Mr. Ansari Abdul Hameed Abdul Majeed
Mr. Ansari Badrudduja Shamsudduha
Mr. Momin Al-Nasir Abdus Samad

Co-ordinator (Urdu)
Khan Naveedul Haque Inamul Haque
Special Officer for Urdu,
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

Co-ordinator (Marathi)
Smt. Ujwala S. Godbole
I/O. Special Officer for Mathematics
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati - Pune

Urdu D.T.P. & Layout
Altaf Ameen (Sadan Graphics)
Malegaon-423203

Cover, Illustrations and Computer Drawings
Shri. Sandip Koli, Artist, Mumbai

Production
Shri Sachin Mehta (C.P.O)
Shri Sanjay Kamble (Production Officer)
Shri Prashant Harne (Asst.Production Officer)

Paper
70, GSM Creamvowe

Print Order
N/PB/2017-18/

Printer

Publisher
Shri Vivek Uttam Gosavi (Controller)
M.S. Bureau of Textbook Production,
Prabhadevi, Mumbai - 25

بھارت کا آئین

تمہید

ہم بھارت کے عوام متانت وسنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بھارت کو
ایک مقتدر سماج وادی غیر مذہبی عوامی جمہوریہ بنائیں
اوراس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں :
انصاف، سماجی ، معاشی اور سیاسی ؛
آزادی خیال، اظہار، عقیدہ ، دین اور عبادت ؛
مساوات بہ اعتبارِ حیثیت اور موقع ،
اور ان سب میں
اُخوّت کو ترقّی دیں جس سے فرد کی عظمت اور قوم کے اتحاد اور
سالمیت کا تیقّن ہو؛
اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھبّیس نومبر ۱۹۴۹ء کو یہ آئین
ذریعۂ ہٰذا اختیار کرتے ہیں،
وضع کرتے ہیں اور اپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔

راشٹر گیت

جَنَ گَنَ مَنَ - اَدِھ نایک جَیَہ ہے
بھارَتَ - بھاگیہ وِدَھاتا۔

پَنجاب، سِندُھ، گُجراتَ، مَراٹھا
دراوِڑَ، اُتکَل، بَنگَ،

وِندھیہ، ہِماچَل، یَمُنا، گنگا،
اُچّھَل جَل دِھ تَرَنگَ،

تَوَ شُبھَ نامے جاگے، تَوَ شُبھ آ شِسَ ماگے،
گاہے تَوَ جَیَہ گاتھا،

جَنَ گَنَ منگل دَایَک جَیَہ ہے،
بھارَتَ - بھاگیہ وِدھاتا۔

جَیَہ ہے، جَیَہ ہے، جَیَہ ہے،
جَیَہ جَیَہ جَیَہ، جَیَہ ہے۔

عہد

بھارت میرا ملک ہے۔ سب بھارتی میرے بھائی اور بہنیں ہیں۔

مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور مَیں اس کے عظیم و گونا گوں وِرثے پر فخر محسوس کرتا ہوں۔ مَیں ہمیشہ اِس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کروں گا۔

میں اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزّت کروں گا اور ہر ایک سے خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا۔

میں اپنے ملک اور اپنے لوگوں کے لیے خود کو وقف کرنے کی قسم کھاتا ہوں۔ اُن کی بہتری اور خوش حالی ہی میں میری خوشی ہے۔

پیش لفظ

عزیز طلبہ!

دسویں جماعت کے نصاب میں آپ کا استقبال ہے۔

ریاضی حصہ I اور ریاضی حصہ II ، کی درسی کتابوں کا آپ اس سال مطالعہ کریں گے۔

ریاضی حصہ II میں علم ہندسہ، علم مثلث، محددی علم ہندسہ اور مساحت جیسے اہم حصے شامل ہیں۔ نویں جماعت تک متعارف کرائے گئے موضوعات کا آپ کو مزید مطالعہ کرنا ہے، کاروبار میں استعمال سے دی ہوئی مثالوں کے ذریعے ان کی وضاحت ہوگی۔ جہاں جہاں نیا حصہ، ضابطے یا اطلاق ہے، وہاں آسان، سہل وضاحت اور تشریح دی ہوئی ہے۔ ہر باب میں نمونے کی مثالیں تشریح کے ساتھ حل کی گئی ہیں، مشق واعادہ کے لیے مثالیں دی ہوئی ہیں اس کے علاوہ ذہین و پُرجوش طلبہ کے لیے بعض فکر انگیز سوالات تارے کے اضافی نشان سے ظاہر کیے گئے ہیں۔ عام طلبہ کو اگر دسویں کے بعد ریاضی کا مطالعہ نہیں کرنا ہو تب بھی انھیں بنیادی ریاضیاتی تصورات سمجھنا چاہیے تاکہ وہ دیگر شعبوں میں کام کے دوران ضرورت کے مطابق ریاضی کا استعمال کر سکیں۔ انھیں اتنا علم اس کتاب کے ذریعے مل جائے گا۔ عنوان 'مزید معلومات کے لیے' عنوان کے تحت دیا ہوا مواد دسویں کے بعد بھی ریاضی کے مطالعے کے خواہش مند طلبہ کو مہارت حاصل کرنے میں فائدہ مند ثابت ہوگا، لہٰذا ایسے طلبہ کو اس کا مطالعہ ضرور کرنا چاہیے۔ پوری کتاب کم از کم ایک مرتبہ ضرور پڑھ کر سمجھنے کی کوشش کریں۔

دسویں کا امتحان اہمیت کا حامل مانا جاتا ہے۔ اس امتحان کا تناؤ لیے بغیر اچھا مطالعہ کر کے من چاہی کامیابی حاصل کرنے کے لیے طلبہ کو نیک خواہشات!

پونہ۔
تاریخ : ۱۸؍مارچ ۲۰۱۸ء، گُڈی پاڑوا
بھارتیہ سَور : ۲۷؍پھالگُن ۱۹۳۹

ڈاکٹر سنیل مگر
ڈائرکٹر
مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی
وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ

دسویں جماعت ریاضی حصہ II نصابِ تعلیم سے ذیل کی صلاحیتیں طلبہ میں فروغ پائیں گی۔

زمرہ	اکائی	متوقع صلاحیتیں
1. علم ہندسہ	1.1 متشابہ مثلث 1.2 دائرہ	● متشابہ مثلثوں کے خواص، متماثل مثلثوں کے خواص اور فیثا غورث کے مسئلہ کا استعمال کر کے مثالیں حل کرنا۔ ● متشابہ مثلثوں کی تشکیل کرنا۔ ● دائرے کے وتر اور مماس کے خواص کا استعمال کرنا۔ ● دائرے کے مماس کی تشکیل کرنا۔
2. محددی علم ہندسہ	2.1 محددی علم ہندسہ	● دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا۔ ● تقسیم کرنے والے نقطہ کے محددین معلوم کرنا۔ ● خط کی ڈھلان معلوم کرنا۔
3. مساحت	3.1 سطح کا رقبہ اور حجم	● دائرہ کے قوس کی لمبائی معلوم کرنا۔ ● دائرہ کے تراشے اور قطعہ دائرہ کا رقبہ معلوم کرنا۔ ● دیے ہوئے سہ ابعادی اجسام کی سطحوں کا رقبہ اور حجم معلوم کرنا۔
4. علم مثلث	4.1 علمِ مثلث	● علم مثلث کی متماثلہ مساوات استعمال کر کے مثالیں حل کرنا۔ ● درخت کی اونچائی معلوم کرنا، ندی کے پاٹ کی چوڑائی معلوم کرنا، ایسی نوعیت کے مسائل کے لیے علم مثلث کا استعمال کرنا۔

اساتذہ کے لیے ہدایات

پہلے کتاب کا اچھی طرح سے مطالعہ کر کے اسے سمجھ لیں۔ مختلف موضوعات کی وضاحت، تشریح اور ضابطوں کی تصدیق کرنے جیسی اہم باتوں کے لیے عملی کاموں کی مدد لیں۔

تجربات کے ذریعے قدر پیمائی کریں۔ جس کے لیے عملی کام کا استعمال کریں۔ آزادانہ طور پر غور کرنے پر طلبہ کی حوصلہ افزائی کریں۔ مختلف طریقوں سے لیکن منطقی طریقے سے مثالیں حل کرنے والے طلبہ کی ہمت افزائی کریں اور انھیں شاباشی دیں۔

علم ہندسہ کے مسئلوں کے بیانات ذہن میں رکھ کر اُن کا اطلاق کر کے مثالیں حل کرنے کی مہارت کو فروغ دینے کے لیے کتابوں میں دیے ہوئے عملی کام کے علاوہ مزید عملی کام دیے جاسکتے ہیں۔

تجربات کی فہرست کا نمونہ

1. دفتی کا ایک مثلثی ٹکڑا کاٹ لیجیے۔ میز پر ایک موم بتی یا چھوٹا چراغ جلائیے۔ دیوار اور چراغ یا موم بتی کے درمیان مثلثی ٹکڑا رکھیے۔ اس کے سایے کا مشاہدہ کیجیے۔ کیا سایہ اور اصل مثلث متشابہ ہیں۔ اسے طے کیجیے۔ (اصل مثلث اور اس کا سایہ ایک دوسرے کے متشابہ ہونے کے لیے کیا احتیاط برتیں گے؟)
2. ایک جیسی پیمائش کے دو قائمۃ زاویہ مثلث کاٹ لیجیے۔ مثلث کے راسوں کو اور دو اضلاع کو A، B، C نام دیجیے۔ ان میں سے ایک قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر پر عمود کھینچیے۔ عمود کے پایہ کو 'D' نام دیجیے۔ عمود پر سے کاٹ کر دو چھوٹے مثلث بنائیے۔ تینوں قائمۃ الزاویہ مثلث کس ایک سے ایک مطابقت سے ایک دوسرے کے متشابہ ہوتے ہیں اُسے لکھیے۔
3. ایک دائرہ بنائیے۔ اس کا اندرونی حصہ، بیرونی حصہ اور دائرے پر ہر ایک میں ایک، اس طرح تین نقاط لیجیے۔ ان تمام نقاط میں سے ہر ایک نقطے سے دائرے پر کتنے مماس کھینچے جاسکتے ہیں؟ اس کی جدول بنائیے۔ جدول میں کچی اشکال بنا کر دکھائیے۔
4. 'دو نقاط سے بے شمار دائرے کھینچے جاسکتے ہیں' اسے دکھانے کے لیے دیے ہوئے نقاط سے کم سے کم 5 مختلف دائرے کھینچیے۔
5. دائرے میں کیل ٹھونکے ہوئے جیو بورڈ لیجیے۔ ربر بینڈ کا استعمال کر کے ذیل میں سے کسی بھی ایک مسئلے کے لیے جیو بورڈ پر شکل بنائیے۔
   (1) قوسی زاویے (2) مماس - قاطع - زاویے کا مسئلہ (3) مخالف قطعہ دائرے میں زاویے کا مسئلہ
6. ایک دائرے اور ایک زاویے کا نمونہ (ماڈل) لے کر مختلف حالتوں میں قطعہ دائرہ بنائیے۔ یہ تمام اشکال اپنی بیاض میں بنائیے۔
7. ایک زاویے کے چار مساوی حصے کیجیے۔ کمپاس (پرکار) اور پٹی (اسکیل) کا استعمال کیجیے۔
8. ایک بیکر لیجیے اس کی اونچائی اور پیندے کا نصف قطر ناپیے۔ اس میں کتنا پانی سمائے گا، اسے ضابطے کی مدد سے معلوم کیجیے۔
9. مخروطی شکل کا کاغذی پیالہ لیجیے۔ اس کے پیندے اور اوپری دائرے کا نصف قطر ناپیے۔ پیالے کی اونچائی (بلندی) ناپیے۔ اس پیالے میں کتنا پانی سمائے گا۔ ضابطے کی مدد سے معلوم کیجیے۔ اسے پانی سے مکمل بھر کر پانی کی جسامت معلوم کیجیے۔ پانی کی سمائی (حجم) اور ضابطے سے معلوم کردہ حجم کے درمیان موازنہ کر کے تصدیق کیجیے۔
10. موٹی دفتی کے دو متشابہ مثلث کاٹ لیجیے ان کے رقبوں کی نسبت (i) کیا اُن کے احاطے کے مربع کے تناسب میں ہے؟ یا (ii) اُن کے وسطانیوں کے مربعوں کے تناسب میں ہے؟ خود اپنے طور پر ناپ کر طے کیجیے۔

فہرست

ابواب		صفحات
.1	متشابہت	01 سے 29
.2	فیثاغورث کا مسئلہ	30 سے 46
.3	دائرہ	47 سے 90
.4	ہندسی عمل	91 سے 99
.5	محددی علم ہندسہ	100 سے 123
.6	علم مثلث	124 سے 139
.7	مساحت	140 سے 163
●	جوابات کی فہرست	164 سے 168

1 Similarity متشابہت

آ یئے سیکھیں

- دو مثلثوں کے رقبوں کی نسبت
- متناسبت کا بنیادی مسئلہ
- متناسبت کے بنیادی مسئلے کا عکس
- مثلث کے زاویے کے ناصف کی خصوصیت
- تین متوازی خطوط کے ذریعے خط تقاطع پر بننے والے حائل قطعات کی نسبت
- مثلثوں کی متشابہت کی آزمائشیں (کسوٹیاں)
- متشابہ مثلثوں کے رقبوں کی خصوصیت

آ یئے ذرا یاد کریں

ہم نسبت اور تناسب کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ دو اعداد a اور b کی نسبت $\frac{m}{n}$ ہے۔ اس بیان کو اعداد 'a اور b' کی m : n کی نسبت میں لکھتے ہیں۔

اس تصور کے لیے ہم عموماً مثبت حقیقی اعداد پر غور کرتے ہیں، یہ ہمیں معلوم ہے کہ قطعہ خط کی لمبائی اور کسی بھی شکل کا رقبہ مثبت حقیقی عدد ہوتا ہے۔ ہمیں مثلث کے رقبے کا ضابطہ معلوم ہے۔

$$\text{مثلث کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{ارتفاع}$$

آ یئے سمجھ لیں

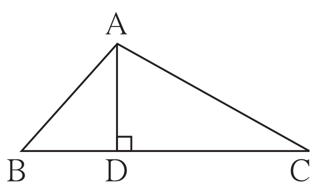
دو مثلثوں کے رقبوں کی نسبت (Ratio of areas of two triangles)

کوئی بھی دو مثلثوں کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔

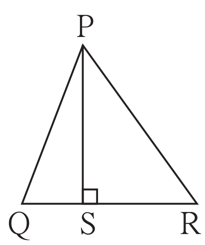
مثال : $\triangle ABC$ کا قاعدہ BC ہے اور ارتفاع AD ہے۔

$\triangle PQR$ کا قاعدہ QR ہے اور ارتفاع PS ہے۔

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AD}{\frac{1}{2} \times QR \times PS}$$



شکل 1.1



شکل 1.2

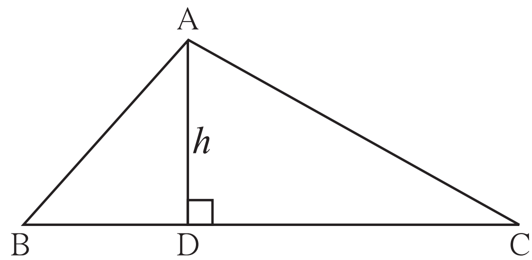
$$\therefore \quad \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times AD}{QR \times PS}$$

اس بناء پر دو مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے قاعدے اور نظیری ارتفاعوں کے حاصل ضرب کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔

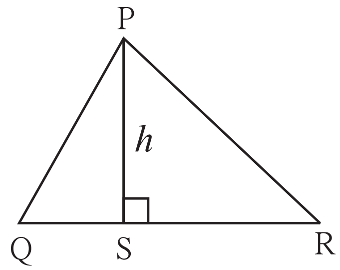
اگر ایک مثلث کا قاعدہ b_1 اور ارتفاع h_1 ہو اور دوسرے مثلث کا قاعدہ b_2 اور ارتفاع h_2 ہو تو ان کے رقبوں کی نسبت = $\dfrac{b_1 \times h_1}{b_2 \times h_2}$

یہاں دو مثلثوں کے رقبوں کے تعلق سے کچھ شرائط رکھ کر دیکھتے ہیں۔

شرط 1 : دونوں مثلثوں کے ارتفاع مساوی ہوں تب



شکل 1.3



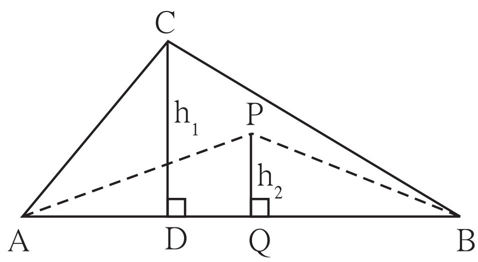
شکل 1.4

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times h}{QR \times h} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{b_1}{b_2}$$

خصوصیت : مساوی ارتفاع والے مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے نظیری قاعدوں کے تناسب میں ہوتے ہیں۔

شرط 2 : دونوں مثلثوں کے قاعدے مساوی ہوں تب



شکل 1.5

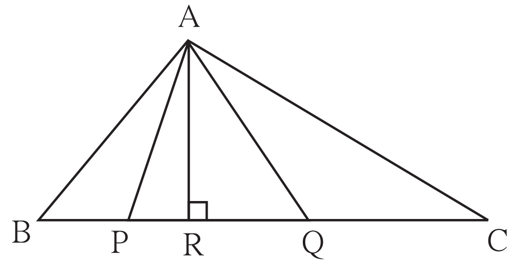
$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{AB \times h_1}{AB \times h_2}$$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{h_1}{h_2}$$

خصوصیت : مساوی لمبائی کے قاعدے کے دو مثلثوں کے رقبے ان کے نظیری ارتفاعوں کے تناسب میں ہوتے ہیں۔

عملی کام : درج ذیل خانوں کو مناسب طور سے پر کیجیے۔

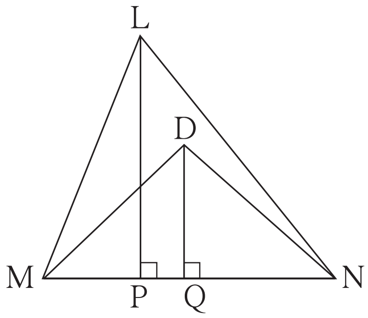
(i)



شکل 1.6

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APQ)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$

(ii)



شکل 1.7

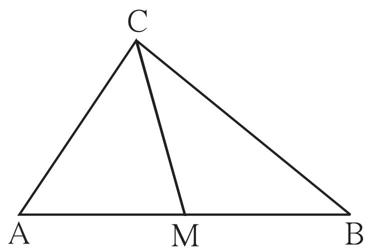
$$\frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta DMN)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$

(iii) نقطہ M قطعہ AB کا وسطی نقطہ ہے۔

$\triangle ABC$ کا وسطانیہ، قطعہ CM ہے۔

$$\therefore \frac{A(\Delta AMC)}{A(\Delta BMC)} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \square$$

وجہ لکھیے۔



شکل 1.8

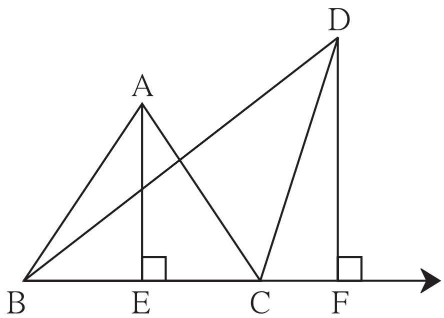
حل کردہ مثالیں

مثال (1) : متصلہ شکل میں

قطعہ BC ⊥ قطعہ AE، خط BC ⊥ قطعہ DF

AE = 4، DF = 6 تو

$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)}$ معلوم کیجیے۔



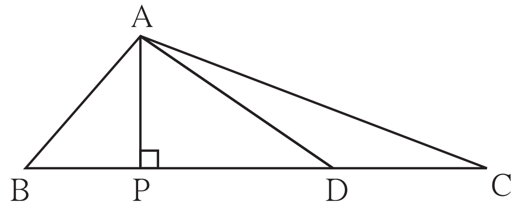
شکل 1.9

حل : (مساوی قاعدوں والے مثلثوں کے رقبے اُن کے نظیری ارتفاع کے تناسب میں ہوتے ہیں) ...

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)} = \frac{AE}{DF}$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال (2) : $\triangle ABC$ کے ضلع BC پر نقطہ D اس طرح ہے کہ DC = 6، BC = 15 تو A ($\triangle$ABD) : A ($\triangle$ABC) اور A ($\triangle$ABD) : A ($\triangle$ADC) معلوم کیجیے۔



شکل 1.10

حل : $\triangle$ABD، $\triangle$ADC، $\triangle$ABC تینوں مثلثوں کا مشترک راس A ہے اور ان کے قاعدے ایک ہی خط میں واقع ہیں۔ یعنی تینوں مثلثوں کے ارتفاع مساوی ہیں۔

DC = 6 ، BC = 15

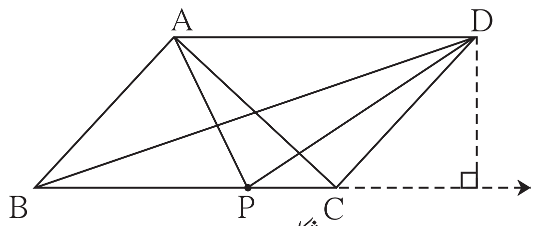
$\therefore$ BD = BC − DC = 15 − 6 = 9

$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{BD}{BC}$$ ... (مساوی ارتفاع کے مثلثوں کے رقبے ان کے نظیری قاعدوں کے تناسب میں ہوتے ہیں)

$$= \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)} = \frac{BD}{DC}$$ ... (مساوی ارتفاع کے مثلثوں کے رقبے ان کے نظیری قاعدوں کے تناسب میں ہوتے ہیں)

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$



شکل 1.11

مثال (3) : $\square$ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے P، ضلع BC پر کوئی ایک نقطہ ہے تو مساوی رقبے کے مثلثوں کی دو جوڑیاں معلوم کیجیے۔

حل : $\square$ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

$\therefore$ AD ∥ BC اور AB ∥ DC

$\triangle$ABC اور $\triangle$BDC پر غور کیجیے۔

یہ دونوں مثلث دو متوازی خطوط کے درمیان بنائے گئے ہیں۔

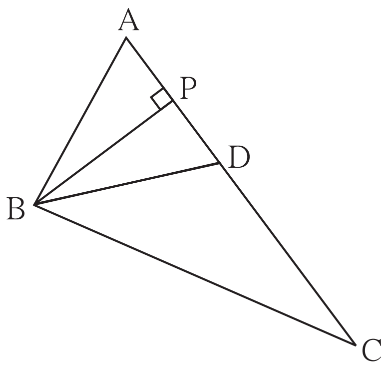
اس لیے متوازی خطوط کا درمیانی فاصلہ دونوں مثلثوں کے ارتفاع کو ظاہر کرے گا۔ اب $\triangle$ABC اور $\triangle$BDC کا قاعدہ BC مساوی ہے اور ارتفاع بھی مساوی ہے۔

$$\therefore A(\triangle ABC) = A(\triangle BDC)$$

$\triangle$ABC اور $\triangle$ABD میں AB، مساوی قاعدہ ہے

اور اونچائی بھی مساوی ہے۔

$$\therefore A(\triangle ABC) = A(\triangle ABD)$$



شکل 1.12

مثال (4) : متصلہ شکل میں $\triangle ABC$ کے ضلع AC پر نقطہ D اس طرح ہے کہ $AC = 16$، $DC = 9$، $BP \perp AC$ تو ذیل کی نسبتیں معلوم کیجیے۔

i) $\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$ ii) $\dfrac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)}$

iii) $\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)}$

حل : $\triangle ABC$ کے ضلع AC پر نقاط P اور D ہیں یعنی $\triangle ABD$، $\triangle BDC$، $\triangle ABC$، $\triangle APB$ ان تمام مثلثوں کا مشترک راس B ہے اور اضلاع AD، DC، AC، AP ایک ہی خط میں واقع ہیں۔ اس لیے ان تمام مثلثوں کے ارتفاع مساوی ہیں۔ لہٰذا ان مثلثوں کے رقبے ان کے نظیری قاعدوں کے تناسب میں ہوں گے۔

$$AC = 16, \; DC = 9$$

$$\therefore \; AD = 16 - 9 = 7$$

$$\therefore \; \frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{AD}{AC} = \frac{7}{16}$$ ... (مساوی ارتفاع کے مثلث)

$$\frac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)} = \frac{DC}{AC} = \frac{9}{16}$$ ... (مساوی ارتفاع کے مثلث)

$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)} = \frac{AD}{DC} = \frac{7}{9}$$ ... (مساوی ارتفاع کے مثلث)

اسے ذہن نشین کرلیں

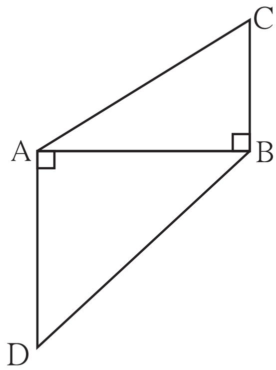
- دو مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے قاعدے اور نظیری ارتفاع کے حاصل ضرب کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔
- مساوی ارتفاع کے مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے نظیری قاعدوں کے تناسب میں ہوتی ہے۔
- مساوی قاعدوں کے مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے نظیری ارتفاعوں کے تناسب میں ہوتی ہے۔

مشقی سیٹ 1.1

.1 ایک مثلث کا قاعدہ 9 اور ارتفاع 5 ہے۔ دوسرے مثلث کا قاعدہ 10 اور ارتفاع 6 ہے۔ تو ان مثلثوں کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔

2. دی ہوئی شکل 1.13 میں BC ⊥ AB، DA ⊥ AB،

BC = 4، AD = 8 ہوتو $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADB)}$ معلوم کیجیے۔

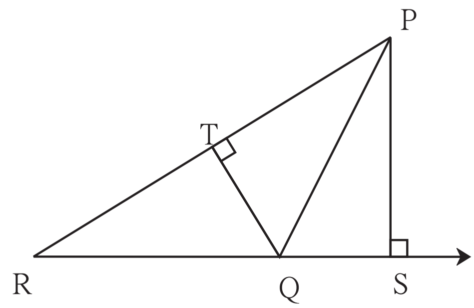


شکل 1.13

3. متصلہ شکل میں قطعہ RQ ⊥ قطعہ PS،

قطعہ PR ⊥ قطعہ QT اگر PS = 6، QR = 6،

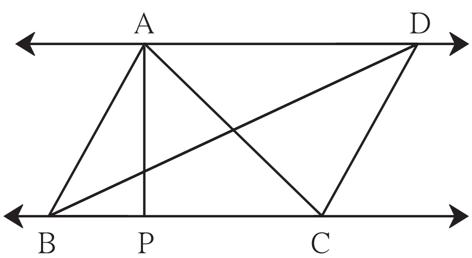
PR = 12 ہوتو QT معلوم کیجیے۔



شکل 1.14

4. متصلہ شکل میں AP ⊥ BC، AD ∥ BC ہوتو

A (△ABC) : A (△BCD) معلوم کیجیے۔



شکل 1.15

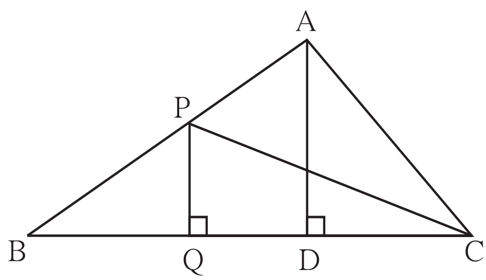
5. متصلہ شکل میں،

PQ ⊥ BC، AD ⊥ BC

تو درج ذیل نسبتیں لکھیے۔

i) $\frac{A(\Delta PQB)}{A(\Delta PBC)}$ ii) $\frac{A(\Delta PBC)}{A(\Delta ABC)}$

iii) $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADC)}$ iv) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta PQC)}$

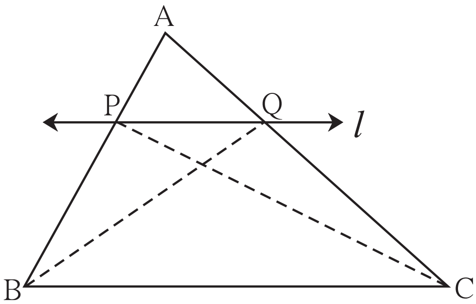


شکل 1.16

آیئے سمجھ لیں

متناسبت کا بنیادی مسئلہ (Basic Proportionality Theorem)

مسئلہ : اگر ایک خط کسی مثلث کے ایک ضلع کے متوازی ہو اور باقی دو اضلاع کو دو متفرق نقاط پر قطع کرے تب وہ خط ان اضلاع کو تناسب میں تقسیم کرتا ہے۔



شکل 1.17

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ میں قطعہ BC || خط l اور خط l ضلع AB کو P پر اور ضلع AC کو Q پر قطع کرتا ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

عمل : قطعہ PC اور قطعہ BQ کھینچیے۔

ثبوت : $\triangle APQ$ اور $\triangle PQB$ مساوی ارتفاع کے مثلث ہیں۔

$\therefore \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \frac{AP}{PB}$ ... (رقبے قاعدوں کے تناسب میں) ... (I)

اسی طرح , $\frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)} = \frac{AQ}{QC}$ ... (رقبے قاعدوں کے تناسب میں) ... (II)

$\triangle PQB$ اور $\triangle PQC$ کا PQ مساوی قاعدہ ہے اور قطعہ BC || قطعہ PQ

یعنی $\triangle PQB$ اور $\triangle PQC$ کے ارتفاع مساوی ہیں۔

$\therefore A(\triangle PQB) = A(\triangle PQC)$ ... (III)

$\therefore \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)}$ ... [(I)، (II) اور (III) سے]

$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ ... [(I) اور (II) سے]

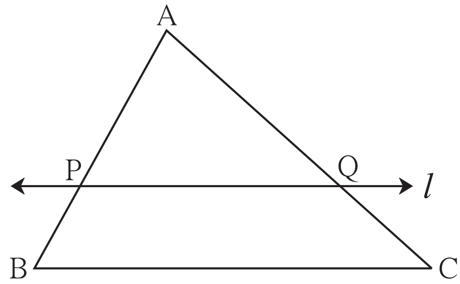
متناسبت کے بنیادی مسئلے کا عکس (Converse of B.P.T)

مسئلہ : ایک خط اگر مثلث کے کسی بھی دو ضلعوں کو دو متفرق نقاط پر قطع کرتے ہوئے یکساں نسبت میں تقسیم کرتا ہے تو وہ خط مثلث کے تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

شکل 1.18 میں l خط، $\triangle ABC$ کے ضلع AB اور ضلع AC کو بالترتیب نقاط P اور Q پر قطع کرتا ہے اور

$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ ہو تو قطعہ BC || خط l

اس مسئلے کا ثبوت بالواسطہ طریقے سے دیا جا سکتا ہے۔



شکل 1.18

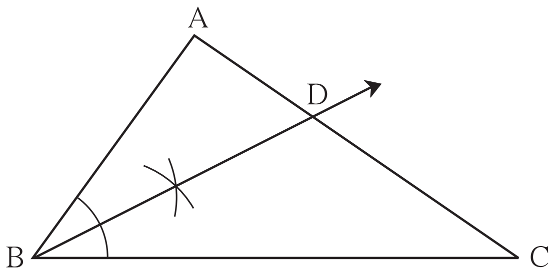
عملی کام :

- △ABC کوئی ایک مثلث بنائیے۔
- مثلث کے ∠B کی تنصیف کیجیے اور اس کا ناصف ضلع AC کو جس نقطے پر قطع کرتا ہے اسے D نام دیجیے۔
- اضلاع کی لمبائیاں ناپ کر لکھیے۔

BC = ☐ سم ، AB = ☐ سم

DC = ☐ سم ، AD = ☐ سم

- $\frac{AB}{BC}$ اور $\frac{AD}{DC}$ نسبتیں لکھیے۔
- دونوں نسبتیں تقریباً مساوی ہیں۔ یہ نتیجہ اخذ کیجیے۔
- اسی مثلث کے کسی دوسرے زاویے کی تنصیف کیجیے اور مندرجہ بالا طریقے پر نسبتیں معلوم کیجیے۔ یہ نسبتیں بھی مساوی ہوتی ہیں اس نتیجہ کو اخذ کیجیے۔



شکل 1.19

آیئے سمجھ لیں

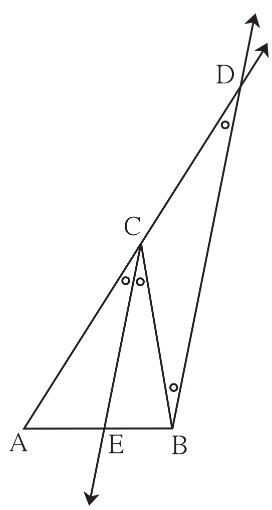
مثلث کے زاویے کے ناصف کا مسئلہ (Theorum of angle Bisector of a triangle)

مسئلہ : مثلث کے زاویے کا ناصف اُس زاویے کے مقابل کے ضلع کو باقی دو اضلاع کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

دیا ہوا ہے : △ABC میں ∠C کا ناصف قطعہ AB کو نقطہ E پر قطع کرتا ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$

عمل : نقطہ B سے گزرنے والی شعاع CE کے متوازی ایک خط کھینچیے جو AC کو بڑھانے پر نقطہ D پر قطع کرتا ہے۔



شکل 1.20

ثبوت : BD شعاع ∥ CE شعاع اور خط AD خطِ تقاطع ہے۔

(I) ... (نظیری زاویے) ... $\therefore\ \angle ACE = \angle CDB$

اسی طرح BC کو خط تقاطع لیا جائے تو

(II) ... (متبادلہ زاویے) ... $\angle ECB \cong \angle CBD$

(III) ... (دیا ہوا ہے) ... لیکن, $\angle ACE \cong \angle ECB$

[بیانات (I)، (II) اور (III) سے] ... $\therefore\ \angle CBD \cong \angle CDB$

$\triangle CBD$ میں،

(متماثل زاویوں کے مقابل کے اضلاع) ... ضلع CB ≅ ضلع CD

(IV) ... $\therefore\ CB = CD$

اب $\triangle ABD$ میں،

(عمل کے ذریعے) ... قطعہ EC ∥ ضلع BD

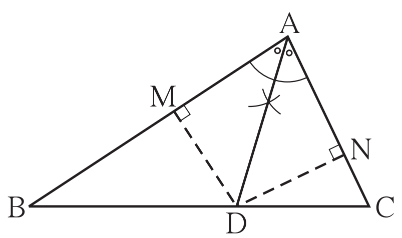
(V) ... (متناسبت کا بنیادی مسئلہ) ... $\therefore\ \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CD}$

[بیانات (IV) اور (V) سے] ... $\therefore\ \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB}$

مزید معلومات کے لیے :

مندرجہ بالا مسئلے کے ثبوت کو دوسرے طریقے سے آپ خود لکھیے۔

اس کے لیے شکل 1.21 میں دکھائے ہوئے طریقے سے $\triangle ABC$ بنائیے۔ DM ⊥ AB اور DN ⊥ AC کھینچیے۔

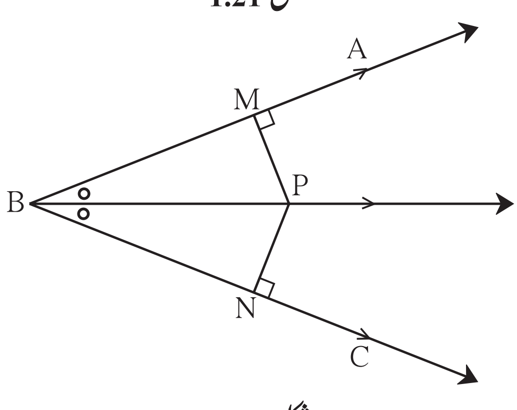


شکل 1.21

(I) مساوی ارتفاع کے مثلثوں کے رقبے ان کے نظیری قاعدوں کے تناسب میں ہوتے ہیں۔

(II) زاویے کے ناصف پر واقع ہر نقطہ زاویہ کی ساقین سے ہم فاصلہ ہوتا ہے۔

ان خصوصیات کا استعمال کیجیے۔



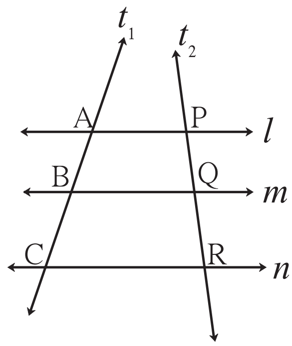
شکل 1.22

مثلث کے زاویے کے ناصف کی خصوصیت کا عکس (Converse of angle bisector of a triangle) :

$\triangle ABC$ کے ضلع BC پر اگر نقطہ D اس طرح ہو کہ $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ تو $\angle BAC$ کی ناصف شعاع AD ہے۔

عملی کام : تین متوازی خطوط کے ذریعے اُن کے خط تقاطع پر بننے والے حائل قطعات کی خصوصیت

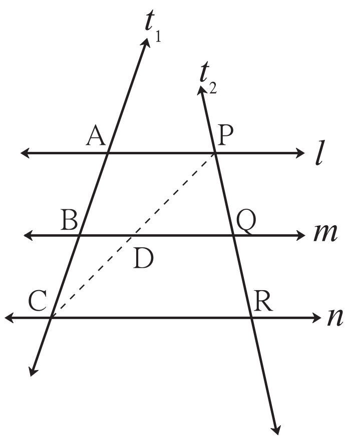
(Property of three parallel lines and their transversals)



شکل 1.23

- تین متوازی خطوط کھینچیے۔
- انھیں l، m، n نام دیجیے۔
- t_1 اور t_2 دو خطوط تقاطع کھینچیے۔
- خط تقاطع t_1 پر بننے والے حائل قطعات AB اور BC ہیں۔
- خط تقاطع t_2 پر بننے والے حائل قطعات PQ اور QR ہیں۔
- $\frac{AB}{BC}$ اور $\frac{PQ}{QR}$ نسبتیں معلوم کیجیے جو تقریباً مساوی ہیں اس کا نتیجہ اخذ کیجیے۔

مسئلہ : تین متوازی خطوط کے ذریعے ایک خط تقاطع پر بننے والے حائل قطعات کی نسبت، ان ہی متوازی خطوط کے ذریعے کسی دوسرے خط تقاطع پر بننے والے نظیری حائل قطعات کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔



شکل 1.24

دیا ہوا ہے : خط l || خط m || خط n

t_1 اور t_2 خطوط تقاطع ہیں۔

خط تقاطع t_1 ان متوازی خطوط کو بالترتیب A، B، C پر اور خط تقاطع t_2 ان متوازی خطوط کو بالترتیب P، Q، R پر قطع کرتے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

ثبوت : قطعہ PC کھینچیے۔ جو خط m کو D پر قطع کرتا ہے۔

$\triangle ACP$ میں، BD || AP

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC}$ ... (تناسبت کی بنیادی مسئلہ) ... (I)

$\triangle CPR$ میں، DQ || CR

$\therefore \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$ ... (تناسبت کا بنیادی مسئلہ) ... (II)

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$ ... [(I) اور (II) سے]

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

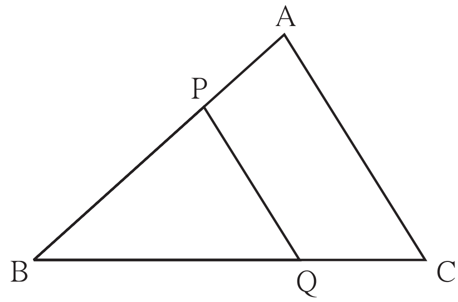
اسے ذہن نشین کرلیں

(1) **متناسبت کا بنیادی مسئلہ :**

$\triangle ABC$ میں اگر $B-P-A$ ؛ $B-Q-C$ اور

قطعہ $PQ \parallel$ قطعہ AC ہو تو

$$\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$$



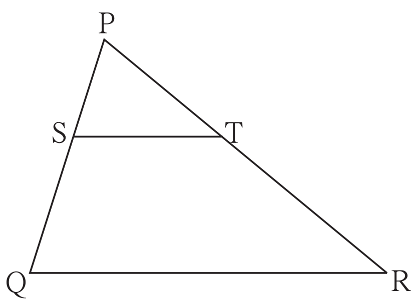
شکل 1.25

(2) **متناسبت کے بنیادی مسئلہ کا عکس :**

$\triangle PQR$ میں اگر $P-S-Q$ ؛ $P-T-R$ اور

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$$

تو قطعہ $QR \parallel$ قطعہ ST

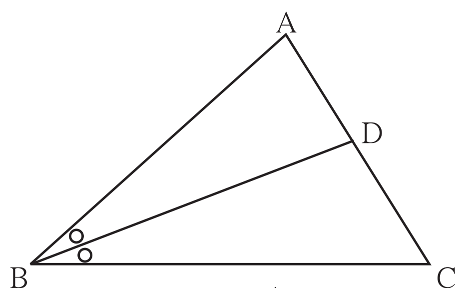


شکل 1.26

(3) **مثلث کے زاویے کے ناصف کا مسئلہ :**

$\triangle ABC$ کے $\angle ABC$ کا BD ناصف ہے اور اگر

$A-D-C$ ہو تو $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$



شکل 1.27

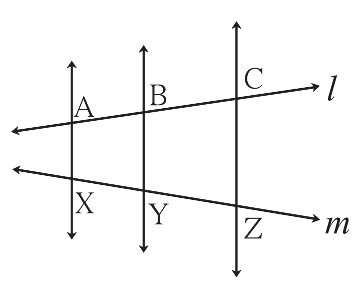
(4) **تین متوازی خطوط اور ان کے خطوطِ تقاطع کی خصوصیت :**

اگر خط $CZ \parallel$ خط $BY \parallel$ خط AX

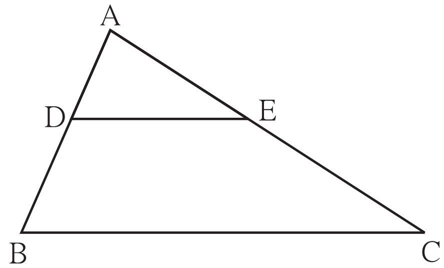
اور خط l اور خط m خطوط تقاطع انھیں بالترتیب A، B، C

اور X، Y، Z پر قطع کرتے ہوں تو

$$\frac{AB}{BC} = \frac{XY}{YZ}$$



شکل 1.28



شکل 1.29

مثال (1) : (شکل 1.29)، $\triangle ABC$ میں $DE \parallel BC$

اگر $DB = 5.4$ سم، $AD = 1.8$ سم، $EC = 7.2$ سم

تو AE معلوم کیجیے۔

حل : $\triangle ABC$ میں، $DE \parallel BC$

$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ... (متناسبت کا بنیادی مسئلہ)

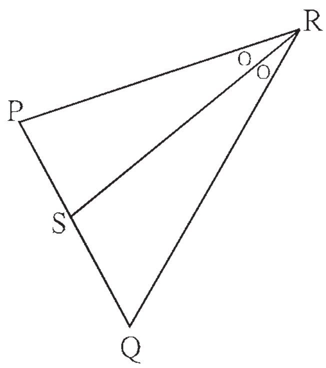
$\therefore \frac{1.8}{5.4} = \frac{AE}{7.2}$

$AE \times 5.4 = 1.8 \times 7.2$

$\therefore AE = \frac{1.8 \times 7.2}{5.4} = 2.4$

$\therefore AE = 2.4$ سم

مثال (2) : $\triangle PQR$ میں $\angle R$ کا ناصف قطعہ RS ہے (شکل 1.30)۔ اگر $PR = 15$، $RQ = 20$، $PS = 12$ تو SQ معلوم کیجیے۔



شکل 1.30

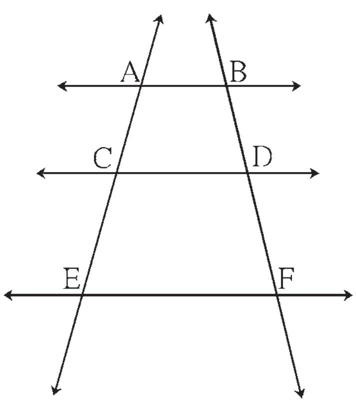
حل : $\triangle PQR$ میں $\angle R$ کا ناصف قطعہ RS ہے۔

$\frac{PR}{RQ} = \frac{PS}{SQ}$ ... (مثلث کے زاویے کے ناصف کی خصوصیت)

$\frac{15}{20} = \frac{12}{SQ}$

$SQ = \frac{12 \times 20}{15} = 16$

$\therefore SQ = 16$



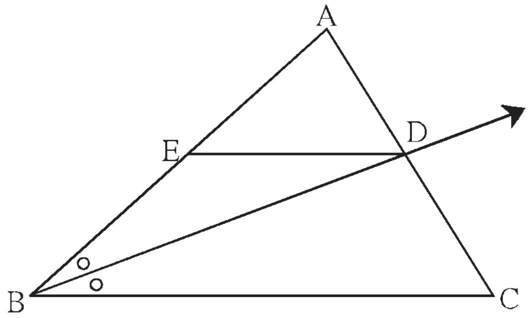
شکل 1.31

عملی کام : دی ہوئی شکل 1.31 میں، $AB \parallel CD \parallel EF$ اگر $AC = 5.4$، $CE = 9$، $BD = 7.5$ تو خالی چوکون مناسب طور پر مکمل کر کے DF معلوم کیجیے۔

حل : $AB \parallel CD \parallel EF$

$\frac{AC}{\square} = \frac{\square}{DF}$ ... (   )

$\frac{5.4}{9} = \frac{\square}{DF}$, $\therefore DF = \square$



شکل 1.32

عملی کام : △ABC میں، ∠ABC کی ناصف شعاع BD ہے۔

A – D – C، BC ضلع ∥ DE قطعہ، A – E – B تو

ثابت کیجیے کہ $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EB}$

ثبوت : △ABC میں، ∠B کی ناصف شعاع BD ہے۔

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ ... (مثلث کے زاویے کے ناصف کی مسئلہ) ... (I)

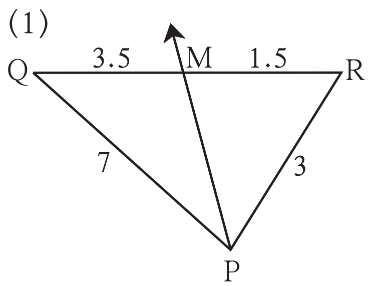
△ABC میں، DE ∥ BC

$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ ... (........................) ... (II)

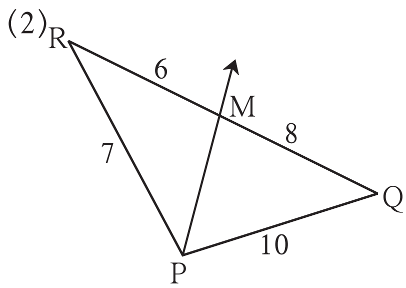
$\frac{AB}{\square} = \frac{\square}{EB}$ ... [(I) اور (II) سے]

مشقی سیٹ 1.2

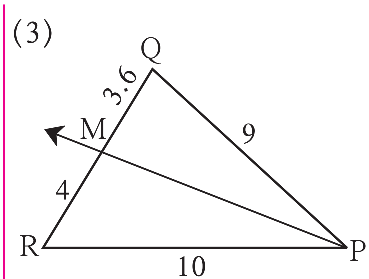
1. ذیل میں کچھ مثلث اور قطعات کی لمبائیاں دی ہوئی ہیں۔ان کی مدد سے بتایئے کہ کس شکل میں ∠QPR کی ناصف شعاع PM ہے۔



شکل 1.33

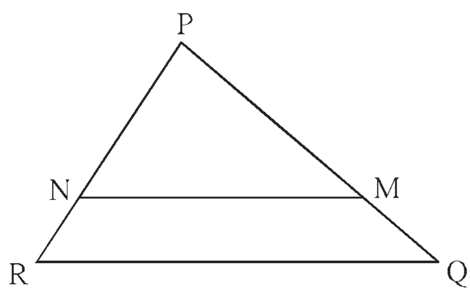


شکل 1.34



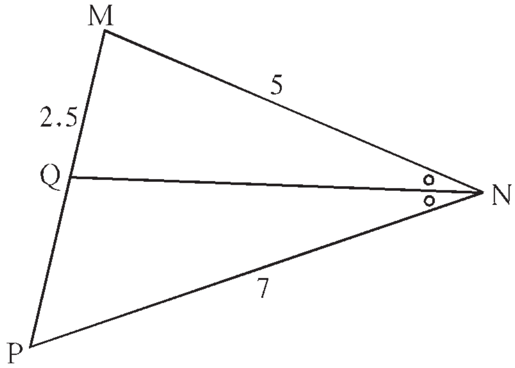
شکل 1.35

2. △PQR میں PM = 15، PQ = 25، PR = 20، NR = 8 تو خط NM، ضلع RQ کے متوازی ہے یا نہیں؟ اپنے جواب کی وجہ بھی لکھیے۔



شکل 1.36

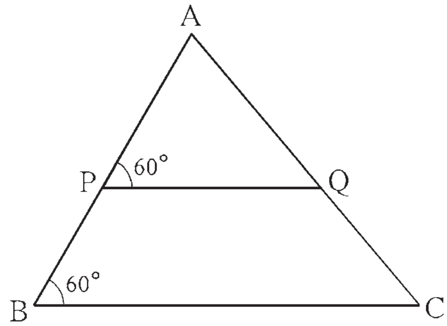
3. $\triangle MNP$ کے $\angle N$ کا ناصف NQ ہے۔
اگر MN = 5، PN = 7، MQ = 2.5
ہوتو QP معلوم کیجیے۔



شکل 1.37

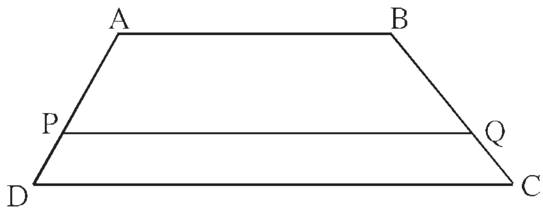
4. شکل 1.38 میں کچھ زاویوں کی پیمائشیں دی ہوئی ہیں۔
اس پر سے دکھائیے کہ

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$



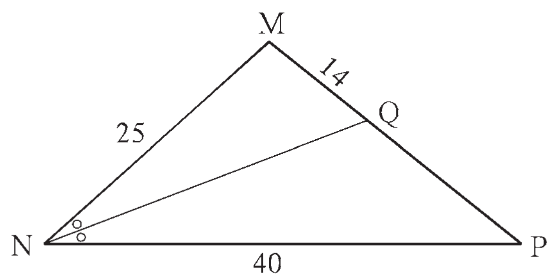
شکل 1.38

5. ذوزنقہ ABCD میں،
ضلع AB || ضلع PQ || ضلع DC
اگر AP = 15، PD = 12، QC = 14 تو BQ
معلوم کیجیے۔



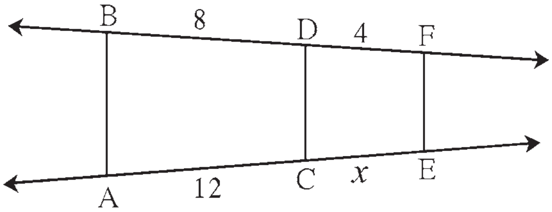
شکل 1.39

6. شکل میں دی ہوئی معلومات کی مدد سے QP معلوم کیجیے۔



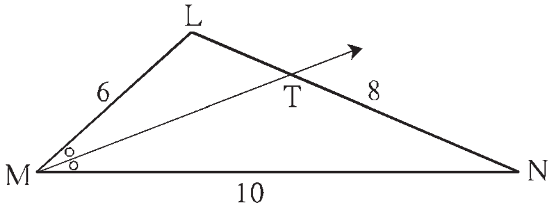
شکل 1.40

7. متصلہ شکل میں اگر
AB || CD || FE
تو x کی قیمت معلوم کیجیے اور AE معلوم کیجیے۔



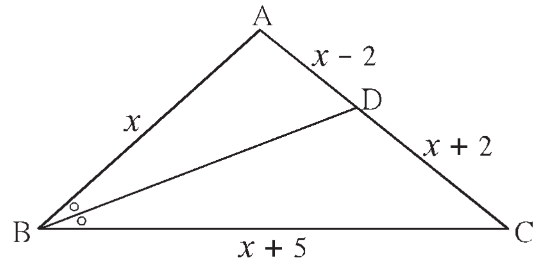
شکل 1.41

8. $\triangle LMN$ میں، $\angle LMN$ کی ناصف شعاع MT ہے۔
اگر $LM = 6$، $MN = 10$، $TN = 8$ ہوتو LT معلوم کیجیے۔



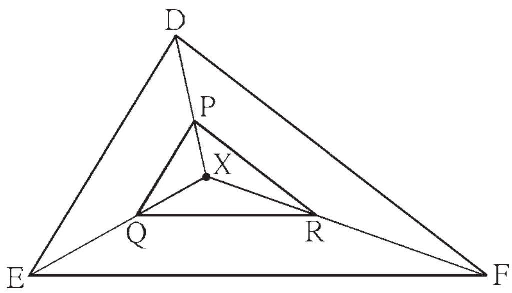
شکل 1.42

9. $\triangle ABC$ میں، $\angle ABC$ کا ناصف قطعہ BD ہے۔
اگر $AB = x$، $BC = x + 5$، $AD = x - 2$
$DC = x + 2$ ہوتو x کی قیمت معلوم کیجیے۔



شکل 1.43

10. شکل 1.44 میں مثلث کے اندرون میں کوئی ایک نقطہ X ہے۔
نقطہ X کو مثلث کے راسوں سے ملایا گیا ہے۔اسی طرح،
قطعہ DE $\parallel$ قطعہ PQ، قطعہ EF $\parallel$ قطعہ QR
تو قطعہ DF $\parallel$ قطعہ PR، ثابت کرنے کے لیے درج ذیل خانہ پر کیجیے۔



شکل 1.44

ثبوت : $\triangle XDE$ میں،

$PQ \parallel DE$ ... [ ]

$\therefore \dfrac{XP}{[\ ]} = \dfrac{[\ ]}{QE}$ ... (تناسبت کا بنیادی مسئلہ) ... (I)

$\triangle XEF$ میں،

$QR \parallel EF$ ... [ ]

$\therefore \dfrac{[\ ]}{[\ ]} = \dfrac{[\ ]}{[\ ]}$ ... [ ] ... (II)

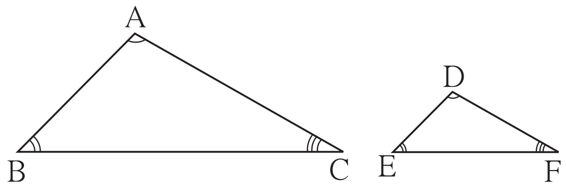
$\therefore \dfrac{[\ ]}{[\ ]} = \dfrac{[\ ]}{[\ ]}$ ... [بیانات (I) اور (II) سے]

$\therefore$ قطعہ DF $\parallel$ قطعہ PR ... (تناسبت کے بنیادی مسئلے کا عکس)

11*. $\triangle ABC$ میں $AB = AC$، $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف ضلع AC اور ضلع AB کو بالترتیب نقاط D اور E پر قطع کرتے ہیں تو ثابت کیجیے کہ قطعہ ED $\parallel$ قطعہ BC

آئیے ذرا یاد کریں

متشابہ مثلث (Similar triangles)



شکل 1.45

$\triangle ABC$ اور $\triangle DEF$ میں اگر $\angle A \cong \angle D$،

$\angle B \cong \angle E$، $\angle C \cong \angle F$ اور

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ ہوتو

$\triangle ABC$ اور $\triangle DEF$ متشابہ مثلث ہیں۔

اور اگر $\triangle ABC$ اور $\triangle DEF$ متشابہ ہوں تو اسے علامت ' ~ ' کا استعمال کر کے $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ لکھتے ہیں۔

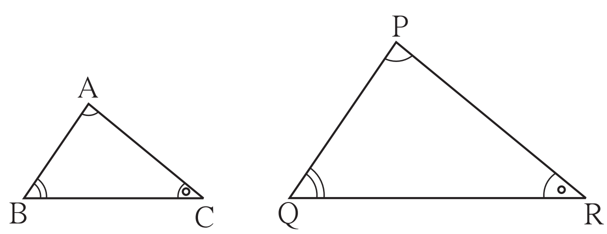
آئیے سمجھ لیں

مثلثوں کی متشابہت کی آزمائشیں (Tests for similarity of triangles)

دو مثلثوں کو متشابہ ہونے کے لیے ان کے تینوں نظیری اضلاع کا تناسب میں ہونا اور تینوں نظیری زاویوں کا متماثل ہونا ضروری ہے۔ لیکن ان چھ شرائط میں سے کوئی تین شرائط بھی پوری ہوں تو باقی شرائط خود بخود پوری ہو جاتی ہیں، یعنی دو مثلثوں کو متشابہ ہونے کے لیے کوئی تین ہی مخصوص شرائط پوری ہونا کافی ہیں۔ اُن تینوں شرائط کی جانچ کریں تو وہ دونوں مثلث متشابہ ہیں یا نہیں معلوم کر سکتے ہیں۔ ایسی کافی شرائط کے سیٹ کو متشابہت کی آزمائشیں کہتے ہیں۔ یعنی دو مثلثوں کو متشابہ دکھانے کے لیے یہ مخصوص شرائط کافی ہوتی ہیں۔

مثلثوں کی متشابہت کے لیے زا-زا-زا آزمائش (AAA Test for similarity of triangles) :

دو مثلثوں کے راسوں کے درمیان دی ہوئی ایک سے ایک کی مطابقت کے لحاظ سے بننے والے تینوں نظیری زاویے متماثل ہوں تو وہ مثلث متشابہ ہوتے ہیں۔



شکل 1.46

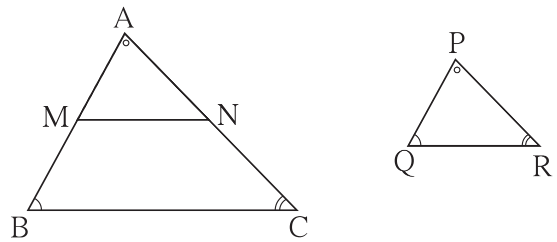
$\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ میں $ABC \leftrightarrow PQR$ کی

مطابقت سے اگر $\angle A \cong \angle P$، $\angle B \cong \angle Q$،

$\angle C \cong \angle R$ تو $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

مزید معلومات کے لیے :

زا-زا-زا آزمائش کا ثبوت :



شکل **1.47**

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ میں،

$\angle A \cong \angle P$ ، $\angle B \cong \angle Q$ ، $\angle C \cong \angle R$

ثابت کرنا ہے : $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

ثبوت : فرض کریں $\triangle ABC$ ، $\triangle PQR$ سے بڑا ہے۔

AB پر ایک نقطہ M اور AC پر نقطہ N اس طرح لیجیے کہ $AM = PQ$ اور $AN = PR$

اس بنیاد پر $\triangle AMN \cong \angle PQR$ دکھایئے۔

اس کی مدد سے $MN \parallel BC$ دکھایا جا سکتا ہے

اب تناسبت کے بنیادی مسئلے کے رُو سے

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$$ یعنی ، ... (عمل عکس سے)

$$\frac{MB + AM}{AM} = \frac{NC + AN}{AN}$$ ... (عمل ترکیب سے)

$$\therefore \quad \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$ ، اسی طرح $$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \quad , \quad \therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$$

مثلثوں کی متشابہت کے لیے زا-زا آزمائش (AA Test for similarity of triangles) :

راسوں کے درمیان ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو نظیری زاویوں کے متماثل ہوں تو پہلے مثلث کا باقی ماندہ تیسرا زاویہ دوسرے مثلث کے باقی ماندہ تیسرے زاویے کے متماثل ہوتا ہے۔

یہ ہمیں معلوم ہے کہ ایک مثلث کے دو زاویے، دوسرے مثلث کے دو نظیری زاویوں کے متماثل ہوں تو بھی یہ شرط دونوں مثلثوں کو متشابہ ہونے کے لیے کافی ہے۔ اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے متماثل ہوں تو دونوں مثلث متشابہ ہوتے ہیں۔

اس خصوصیت کو متشابہت کی زا-زا آزمائش کہتے ہیں۔

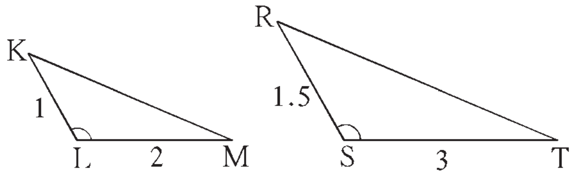
مثلثوں کی متشابہت کے لیے ضل۔زا۔ضل آزمائش (SAS Test for Smilarity of triangles) :

دو مثلثوں کے راسوں کے درمیان کوئی ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے اگر ان کے نظیری اضلاع کی دو جوڑیاں ایک ہی تناسب میں ہوں اور ان اضلاع کو شامل کرنے والے زاویے متماثل ہوں تو دونوں مثلث متشابہ ہوتے ہیں۔

مثال : $\triangle KLM$ اور $\triangle RST$ میں

$$\frac{KL}{RS} = \frac{LM}{ST} \text{ ، } \angle KLM \cong \angle RST$$

$$\therefore \; \triangle KLM \sim \triangle RST$$



شکل 1.48

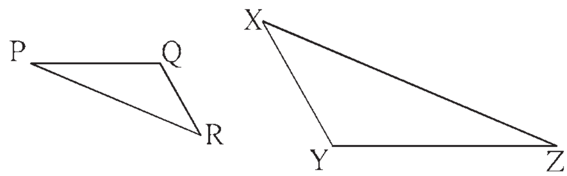
مثلثوں کی متشابہت کے لیے ضل۔ضل۔ضل آزمائش (SSS Test for similarity of Triangles) :

دو مثلثوں کے راسوں میں دی ہوئی کوئی ایک سے ایک مطابقت کے لحاظ سے اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع دوسرے مثلث کے تینوں نظیری اضلاع کے تناسب میں ہوں تو دونوں مثلث متشابہ ہوتے ہیں۔ مثلثوں کی متشابہت کی اس آزمائش کو ضل۔ضل۔ضل آزمائش کہتے ہیں۔

مثال : $\triangle PQR$ اور $\triangle XYZ$ میں،

اگر $\frac{PQ}{YZ} = \frac{QR}{XY} = \frac{PR}{XZ}$ تو

$$\triangle PQR \sim \triangle XYZ$$



شکل 1.49

متشابہ مثلثوں کی خصوصیات (Propeties of similar traingles) :

(1) $\triangle ABC \sim \triangle ABC$ ... (انعکاسی خاصیت Reflexivity)

(2) اگر $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ تب $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ ... (تشاکلی خاصیت Symmetry)

(3) اگر $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ اور $\triangle DEF \sim \triangle GHI$ ہو تب $\triangle ABC \sim \triangle GHI$ ... (عبوری خاصیت Transitivity)

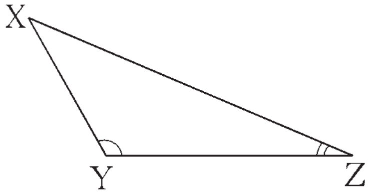
حل کردہ مثالیں

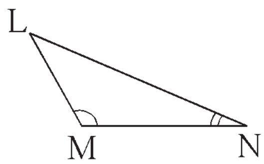
مثال (1) : $\triangle XYZ$ میں $\angle Y = 100°$ ، $\angle Z = 30°$ ،

$\triangle LMN$ میں $\angle M = 100°$ ، $\angle N = 30°$

تو کیا $\triangle XYZ$ اور $\triangle LMN$ متشابہ ہیں؟

اگر ہوں تو کس آزمائش کے لحاظ سے؟





شکل 1.50

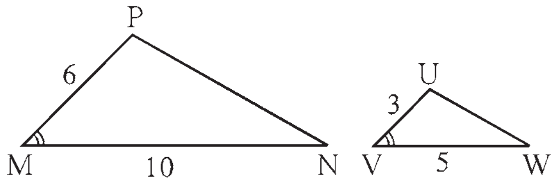
حل : $\triangle XYZ$ اور $\triangle LMN$ میں،

$$\angle Y = 100^\circ \;,\; \angle M = 100^\circ \;,\; \therefore \; \angle Y \cong \angle M$$

$$\angle Z = 30^\circ \;,\; \angle N = 30^\circ \;,\; \therefore \; \angle Z \cong \angle N$$

$\therefore \; \triangle XYZ \sim \triangle LMN$ ... (زا۔زا آزمائش سے)

مثال (2) : شکل 1.51 میں دی ہوئی معلومات کی مدد سے بتایئے کیا دیے ہوئے مثلث متشابہ ہیں؟ اگر ہوں تو کس آزمائش کی رو سے؟



شکل 1.51

حل : $\triangle PMN$ اور $\triangle UVW$ میں،

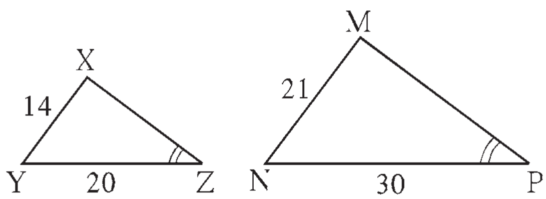
$$\frac{PM}{UV} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}, \; \frac{MN}{VW} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \; \frac{PM}{UV} = \frac{MN}{VW}$$

اور $\angle M \cong \angle V$ ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore \triangle PMN \sim \triangle UVW$ ... (متشابہت کی ضلع۔زاویہ۔ضلع آزمائش)

مثال (3) : شکل 1.52 میں دی ہوئی معلومات کی رو سے کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ دونوں مثلث متشابہ ہیں؟ اگر کہہ سکتے ہیں تو کس آزمائش کی رو سے؟



شکل 1.52

حل : $\triangle XYZ$ اور $\triangle MNP$ میں،

$$\frac{XY}{MN} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3},$$

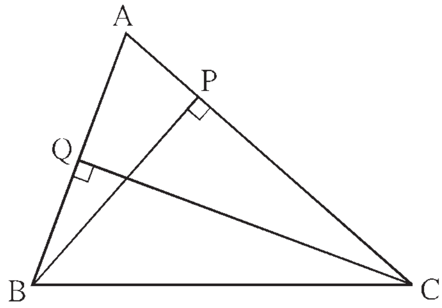
$$\frac{YZ}{NP} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \; \frac{XY}{MN} = \frac{YZ}{NP}$$

$\angle Z \cong \angle P$ دیا ہوا ہے لیکن $\angle Z$ اور $\angle P$، تناسب والے اضلاع کو شامل کرنے والے زاویے نہیں ہیں۔

$\therefore$ $\triangle XYZ$ اور $\triangle MNP$ متشابہ ہیں ہم ایسا نہیں کہہ سکتے۔

مثال (4) : متصلہ شکل میں $BP \perp AC$، $CQ \perp AB$، $A-P-C$، $A-Q-B$ تو دکھائیے کہ $\triangle APB$ اور $\triangle AQC$ متشابہ ہیں۔



شکل 1.53

حل : $\triangle APB$ اور $\triangle AQC$ میں،

$\angle APB = \square^\circ$ ... (I)

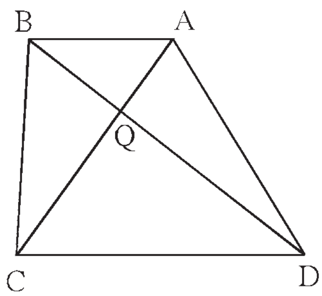
$\angle AQC = \square^\circ$ ... (II)

$\therefore\ \angle APB \cong \angle AQC$ ... [(I) اور (II) سے]

$\angle PAB \cong \angle QAC$ ... ($\square$)

$\therefore\ \triangle APB \sim \triangle AQC$ ... (زا۔زا آزمائش)

مثال (5) : اگر ذو اربعۃ الاضلاع ABCD کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ Q پر قطع کرتے ہیں اور $2QA = QC$ اور $2QB = QD$ تو دکھائیے کہ $DC = 2AB$



شکل 1.54

دیا ہوا ہے : $2QA = QC$

$2QB = QD$

ثابت کرنا ہے : $CD = 2AB$

ثبوت : $2QA = QC\ ,\ \therefore \dfrac{QA}{QC} = \dfrac{1}{2}$ ... (I)

$2QB = QD\ ,\ \therefore \dfrac{QB}{QD} = \dfrac{1}{2}$ ... (II)

$\therefore \dfrac{QA}{QC} = \dfrac{QB}{QD}$ ... [(I) اور (II) سے]

$\triangle AQB$ اور $\triangle CQD$ میں،

$\dfrac{QA}{QC} = \dfrac{QB}{QD}$ ... (ثابت کیا گیا ہے)

$\angle AQB \cong \angle DQC$ ... (متقابلہ زاویے)

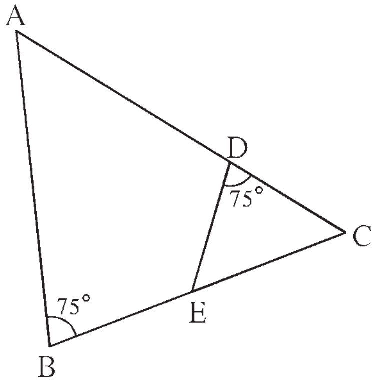
$\therefore \triangle AQB \sim \triangle CQD$ ... (متشابہت کی ضلع۔زا۔ضلع آزمائش)

$\therefore \dfrac{AQ}{CQ} = \dfrac{QB}{QD} = \dfrac{AB}{CD}$ ... (نظیری اضلاع تناسب میں ہیں)

لیکن، $\dfrac{AQ}{CQ} = \dfrac{1}{2}\ ,\ \therefore \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{1}{2}$ [(I) سے]

$\therefore\ 2AB = CD$

مشقی سیٹ 1.3



شکل 1.55

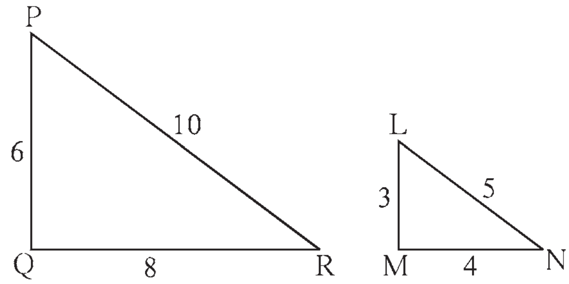
1. شکل 1.55 میں $\angle ABC = 75°$، $\angle EDC = 75°$ تو دونوں

مثلث کس آزمائش کی رُو سے متشابہ ہیں؟

ان کی متشابہت کی ایک سے ایک کی مطابقت لکھیے۔

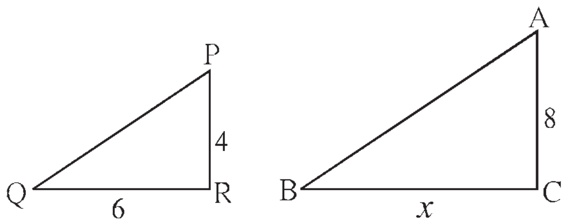
2. شکل 1.56 میں دیے ہوئے مثلث کیا متشابہ ہیں؟

اگر ہیں تو کس آزمائش کی رُو سے؟



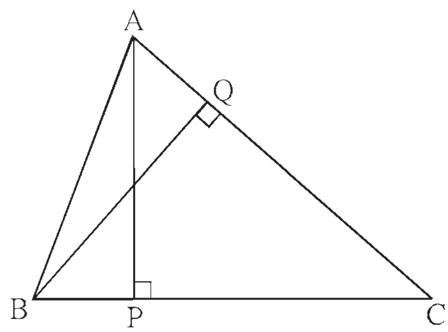
شکل 1.56

3. شکل 1.57 میں دکھائے ہوئے کے مطابق 8 میٹر اور 4 میٹر اونچائی کے دو ستون ہموار زمین پر کھڑے ہیں۔ سورج کی روشنی کے ذریعے چھوٹے ستون کے سائے کی لمبائی 6 میٹر ہے تو اسی وقت بڑے ستون کے سائے کی لمبائی کیا ہوگی؟



شکل 1.57

4. $\triangle ABC$ میں، $AP \perp BC$، $BQ \perp AC$، $B - P - C$، $A - Q - C$ ہو تو دکھائیے کہ $\triangle CPA \sim \triangle CQB$ اگر $AP = 7$، $BQ = 8$، $BC = 12$ تو AC معلوم کیجیے۔



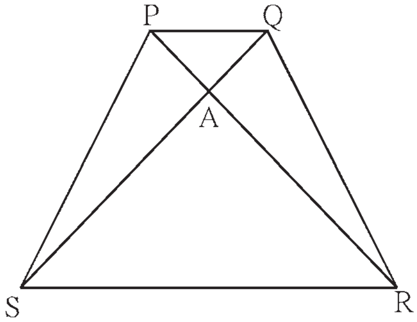
شکل 1.58

5. شکل 1.59 میں ذوزنقہ PQRS میں،

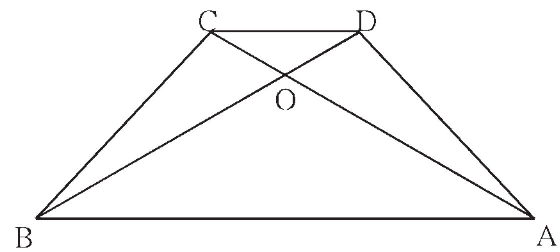
ضلع SR || ضلع PQ، AR = 5 AP

$AS = 5AQ$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

$SR = 5PQ$



شکل **1.59**



شکل **1.60**

6. ذوزنقہ ABCD میں (شکل 1.60) ضلع DC || ضلع AB،

وتر AC اور وتر BD ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

AB = 20، DC = 6، OB = 15 تو

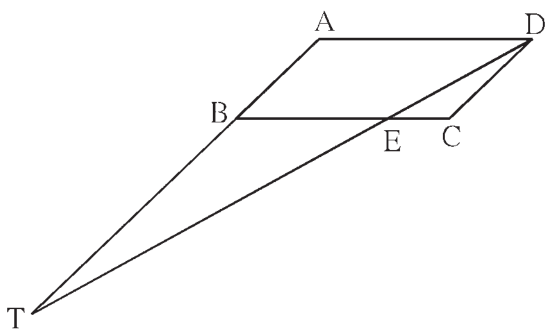
OD معلوم کیجیے۔

7. ABCD□ ایک متوازی الاضلاع ہے۔

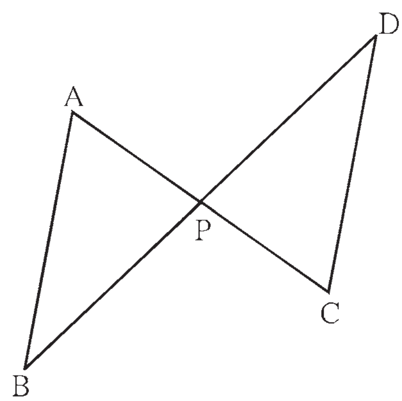
ضلع BC پر ایک نقطہ E ہے۔ خط DE، شعاع AB

کو نقطہ T پر قطع کرتا ہے۔

تو دکھایئے کہ $DE \times BE = CE \times TE$



شکل **1.61**



شکل **1.62**

8. شکل 1.62 میں قطعہ AC اور قطعہ BD ایک

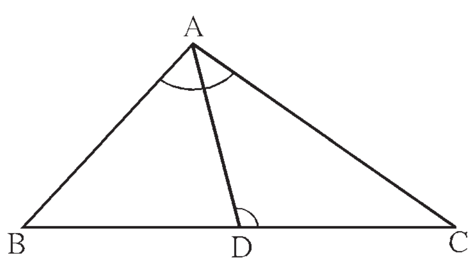
دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہیں اور

$\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$ تو ثابت کیجیے کہ $\triangle ABP \sim \triangle CDP$

9. شکل 1.63 میں $\triangle ABC$ میں ضلع BC پر نقطہ D

اس طرح ہے کہ $\angle BAC \cong \angle ADC$

تو ثابت کیجیے کہ $CA^2 = CB \times CD$

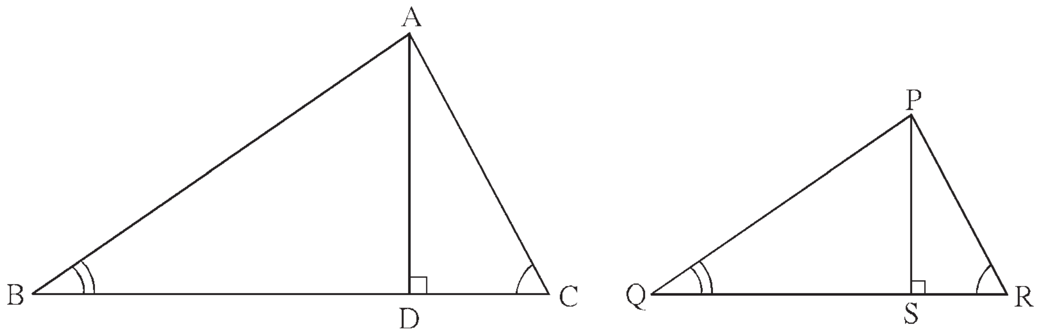


شکل **1.63**

آیئے سمجھ لیں

متشابہ مثلثوں کے رقبوں کا مسئلہ (Theorem of areas of similar triangles) :

مسئلہ : اگر دو مثلث متشابہ ہوں تو ان کے رقبوں کی نسبت، ان کے نظیری ضلعوں کے مربعوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔



شکل 1.64

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC \sim \triangle PQR$، $AD \perp BC$، $PS \perp QR$

ثابت کرنا ہے : $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$

ثبوت : $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times AD}{QR \times PS} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AD}{PS}$ ... (I)

$\triangle ABD$ اور $\triangle PQS$ میں،

$\angle B \cong \angle Q$ ... (دیا ہوا ہے)

$\angle ADB = \angle PSQ = 90°$ ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle PQS$ ... (زا-زا آزمائش)

$\therefore \frac{AD}{PS} = \frac{AB}{PQ}$ ... (II)

لیکن، $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ ... (III)

بیانات (II)، (III) کی رو سے،

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} \times \frac{BC}{QR} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

مثال (1) : $\triangle ABC \sim \triangle PQR$، $A(\triangle ABC) = 16$، $A(\triangle PQR) = 25$ تو نسبت $\frac{AB}{PQ}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ ... (متشابہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے نظیری ضلعوں کے مربعوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے)

$\therefore \frac{16}{25} = \frac{AB^2}{PQ^2}$, $\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{4}{5}$ ... (جذرالمربع لینے پر)

مثال (2) : دو متشابہ مثلثوں کے نظیری ضلعوں کی نسبت 5 : 2 ہے۔ چھوٹے مثلث کا رقبہ 64 مربع سم ہے تو بڑے مثلث کا رقبہ کتنا ہے؟

حل : فرض کریں $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

فرض کریں $\triangle ABC$ چھوٹا مثلث ہے اور $\triangle PQR$ بڑا مثلث ہے۔

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{(2)^2}{(5)^2} = \frac{4}{25}$ ... (متشابہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت)

$\therefore \frac{64}{A(\Delta PQR)} = \frac{4}{25}$

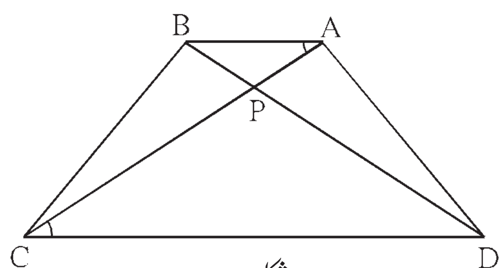
$4 \times A(\triangle PQR) = 64 \times 25$

$A(\Delta PQR) = \frac{64 \times 25}{4} = 400$

$\therefore$ بڑے مثلث کا رقبہ = 400 مربع سم

مثال (3) : ذوزنقہ ABCD میں ضلع CD || ضلع AB، وتر AC اور وتر BD ایک دوسرے کو P پر قطع کرتے ہیں۔

ثابت کیجیے کہ $\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$



شکل 1.65

حل : ذوزنقہ ABCD میں ضلع CD || ضلع AB

$\triangle APB$ اور $\triangle CPD$ میں،

$\angle PAB \cong \angle PCD$ ... (متبادلہ زاویے)

$\angle APB \cong \angle CPD$ ... (متقابلہ زاویے)

$\therefore \triangle APB \sim \triangle CPD$ ... (زا۔زا آزمائش)

$\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$ ... (متشابہ مثلثوں کے رقبوں کا مسئلہ)

مشقی سیٹ 1.4

.1 دو متشابہ مثلثوں کے نظیری ضلعوں کی نسبت 5 : 3 ہے تو ان کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔

.2 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ اور $AB : PQ = 2 : 3$ ہو تو درج ذیل کی خانہ پری کیجیے۔

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{\square} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{\square}{\square}$$

.3 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ تو درج ذیل کی خانہ پری کیجیے۔ اگر $A(\triangle ABC) = 80$ اور $A(\triangle PQR) = 125$

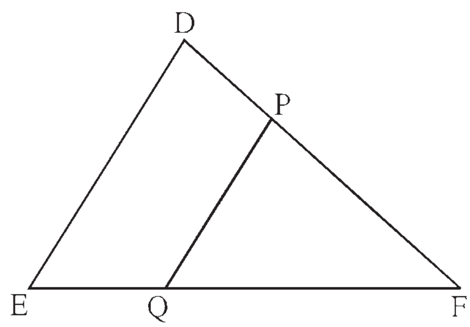
$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta \ldots\ldots)} = \frac{80}{125} = \frac{\square}{\square} \quad , \quad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\square}{\square}$$

.4 $\triangle LMN \sim \triangle PQR$، اگر $9 \times A(\triangle PQR) = 16 \times A(\triangle LMN)$ اور $QR = 20$ ہو تو MN معلوم کیجیے۔

.5 دو متشابہ مثلثوں کے رقبے 225 مربع سم اور 81 مربع سم ہیں۔ اگر چھوٹے مثلث کے ایک ضلع کی لمبائی 12 سم ہو تو بڑے مثلث کے نظیری ضلع کی لمبائی معلوم کیجیے۔

.6 $\triangle ABC$ اور $\triangle DEF$ دونوں متساوی الاضلاع مثلث ہیں۔ $A(\triangle ABC) : A(\triangle DEF) = 1 : 2$ اور $AB = 4$ ہو تو DE کی لمبائی معلوم کیجیے۔

.7 شکل 1.66 میں قطعہ $DE \parallel$ قطعہ PQ، $A(\triangle PQF) = 20$ مربع اکائی، $PF = 2DP$ ہو تو $A(\square DPQE)$ معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔



شکل 1.66

$A(\triangle PQF) = 20$ مربع اکائی , $PF = 2DP$

فرض کریں $DP = x$ ، اس لیے $PF = 2x$

$DF = DP + \square = \square + \square = 3x$

$\triangle FDE$ اور $\triangle FPQ$ میں،

$\angle FDE \cong \angle \square$ ... (نظیری زاویے)

$\angle FED \cong \angle \square$ ... (نظیری زاویے)

$\therefore \triangle FDE \sim \triangle FPQ$ ... (زا۔زا آزمائش)

$$\therefore \frac{A(\Delta FDE)}{A(\Delta FPQ)} = \frac{\square}{\square} = \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \frac{9}{4}$$

$$A(\Delta FDE) = \frac{9}{4} A(\Delta FPQ) = \frac{9}{4} \times \square = \square$$

$$A(\square DPQE) = A(\triangle FDE) - A(\triangle FPQ)$$

$$= \square - \square$$

$$= \square$$

.1 درج ذیل ضمنی سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

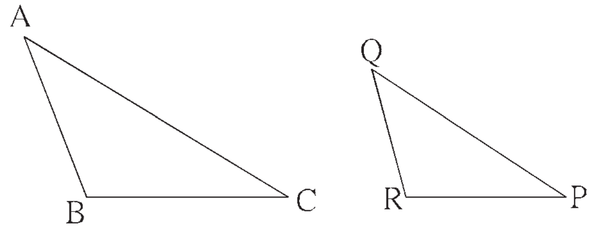
(1) اگر $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ میں ایک سے ایک کی مطابقت ہے۔اور $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$ ہو تو ذیل میں سے کون سے بیان صحیح ہیں؟

(A) $\triangle PQR \sim \triangle ABC$

(B) $\triangle PQR \sim \triangle CAB$

(C) $\triangle CBA \sim \triangle PQR$

(D) $\triangle BCA \sim \triangle PQR$

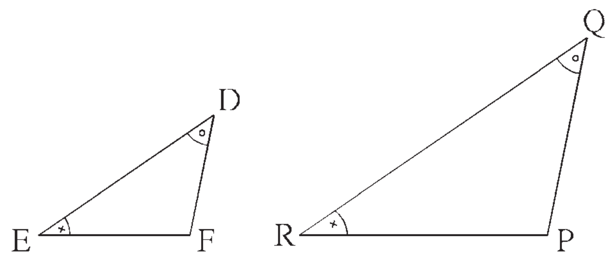


شکل **1.67**

(2) اگر $\triangle DEF$ اور $\triangle PQR$ میں، $\angle D \cong \angle Q$، $\angle R \cong \angle E$ تو درج ذیل میں غلط بیان کون سا ہے؟

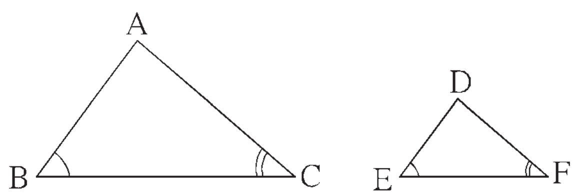
(A) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (B) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$

(C) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (D) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$



شکل **1.68**

(3) $\triangle ABC$ اور $\triangle DEF$ میں $\angle B = \angle E$، $\angle F = \angle C$ اور $AB = 3DE$ تو دونوں مثلثوں سے متعلق کون سا بیان صحیح ہے؟



شکل **1.69**

(A) وہ متماثل نہیں ہیں اور متشابہ بھی نہیں ہیں۔

(B) وہ متشابہ ہیں لیکن متماثل نہیں ہیں۔

(C) وہ متماثل ہیں اور متشابہ بھی ہیں۔

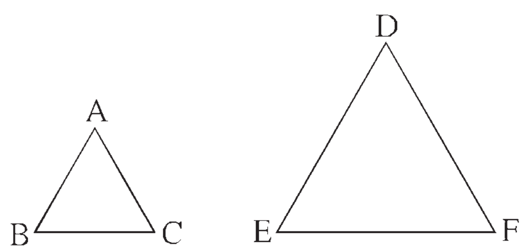
(D) درج بالا میں سے کوئی بھی بیان صحیح نہیں ہے۔

(4) $\triangle ABC$ اور $\triangle DEF$ یہ دونوں متساوی الاضلاع مثلث ہیں۔

$A(\triangle ABC) : A(\triangle DEF) = 1 : 2$ اور

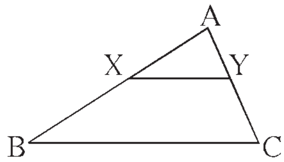
$AB = 4$ ہو تو DE کی لمبائی کیا ہوگی؟

(A) $2\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 8 (D) $4\sqrt{2}$



شکل **1.70**

(5) شکل 1.71 میں BC قطعہ $\parallel$ XY قطعہ ہوتو درج ذیل میں سے کون سا بیان صحیح ہے؟

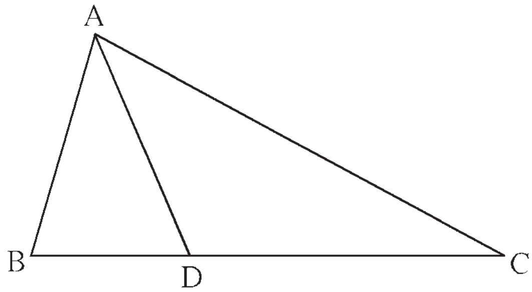


شکل **1.71**

(A) $\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AY}$ (B) $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{AC}$

(C) $\frac{AX}{YC} = \frac{AY}{XB}$ (D) $\frac{AB}{YC} = \frac{AC}{XB}$

.2 $\triangle ABC$ میں B – D – C اور BD = 7 ، BC = 20 تو درج ذیل نسبتیں معلوم کیجیے۔



شکل **1.72**

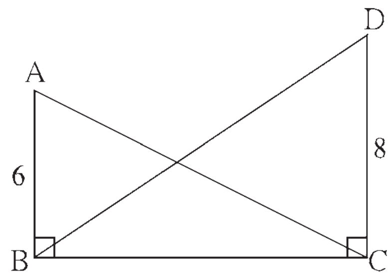
(1) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)}$

(2) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$

(3) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ABC)}$

.3 مساوی ارتفاع والے دو مثلثوں کے رقبوں کی نسبت 3 : 2 ہے۔ چھوٹے مثلث کا قاعدہ 6 سم ہے تو بڑے مثلث کے نظیری قاعدے کی لمبائی کیا ہوگی؟

.4 شکل 1.73 میں $\angle ABC = \angle DCB = 90°$ ، AB = 6 ، DC = 8 ہو تو کتنا $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)} = ?$



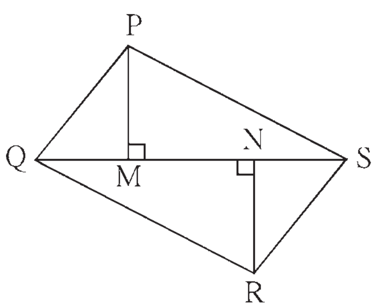
شکل **1.73**

.5 شکل 1.74 میں سم PM = 10 ،

مربع سم A (△PQS) = 100

مربع سم A (△QRS) = 110

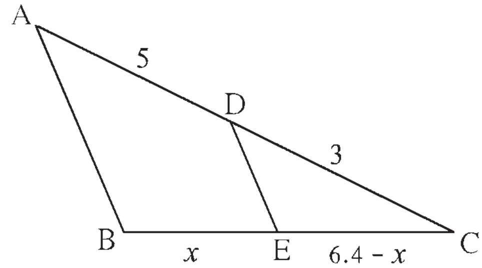
ہوتو NR معلوم کیجیے۔



شکل **1.74**

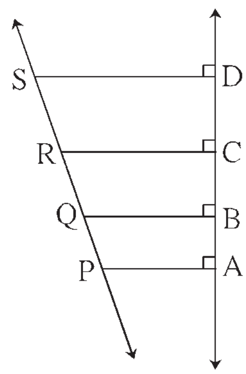
.6 △MNT ~ △QRS ، نقطہ T سے کھینچے گئے ارتفاع کی لمبائی 5 ہے، نقطہ S سے کھینچے گئے ارتفاع کی لمبائی 9 ہے تو نسبت $\frac{A(\Delta MNT)}{A(\Delta QRS)}$ معلوم کیجیے۔

7. شکل 1.75 میں A – D – C اور B – E – C،
AB ضلع || DE قطعہ، اگر AD = 5، DC = 3،
BC = 6.4 تو BE معلوم کیجیے۔



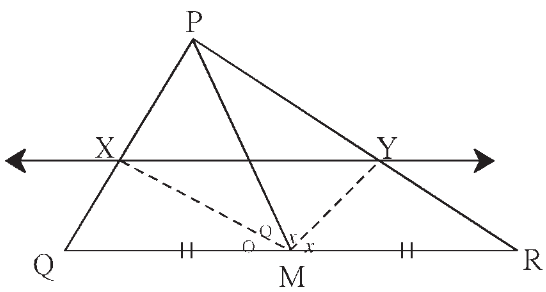
شکل **1.75**

8. شکل 1.76 میں قطعہ PA، قطعہ QB، قطعہ RC اور
قطعہ SD یہ سب خط AD پر عمود ہیں۔ AB = 60،
BC = 70، CD = 80، PS = 280 ہو تو PQ،
QR، RS معلوم کیجیے۔



شکل **1.76**

9. △PQR میں قطعہ PM وسطانیہ ہے۔ ∠PMQ اور
∠PMR کے ناصف ضلع PQ اور ضلع PR کو بالترتیب نقاط
X اور Y پر قطع کرتے ہیں۔
تو ثابت کیجیے کہ XY || QR
ثبوت میں خالی جگہ پر کر کے ثبوت مکمل کیجیے۔



شکل **1.77**

△PMQ میں، ∠PMQ کی ناصف شعاع MX ہے۔

(I) ... (مثلث کے زاویے کے ناصف کا مسئلہ) ... $\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

△PMR میں، ∠PMR کی ناصف شعاع MY ہے۔

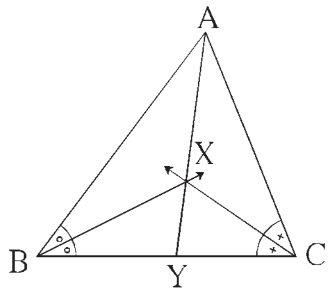
(II) ... (مثلث کے زاویے کے ناصف کا مسئلہ) ... $\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

(QR کا وسطی نقطہ M ہے یعنی MQ = MR) ... لیکن، $\frac{MP}{MQ} = \frac{MP}{MR}$

$\therefore \frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR}$

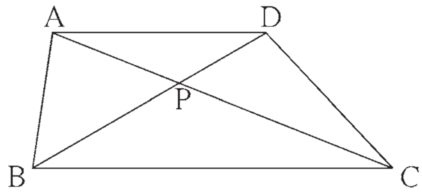
(تناسبت کے بنیادی مسئلے کا عکس) ... $\therefore$ XY || QR

.10 شکل 1.78 میں △ABC کے ∠B اور ∠C کے ناصف ایک دوسرے کو نقطہ X پر قطع کرتے ہیں۔خط AX، ضلع BC کو Y پر قطع کرتا ہے۔اگر AB = 5، AC = 4، BC = 6 ہوتو $\frac{AX}{XY}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔



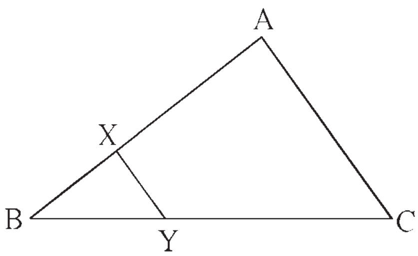
شکل 1.78

.11 □ABCD میں، BC قطعہ || AD قطعہ، وتر AC اوروتر BD ایک دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہیں، تو دکھائیے کہ $\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{BP}$



شکل 1.79

.12 شکل 1.80 میں AC ضلع || XY، اگر $2 \times AX = 3 \times BX$ اور XY = 9 تو AC کی قیمت معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔



شکل 1.80

عملی کام : $2AX = 3BX$, $\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{AX + BX}{BX} = \frac{\square + \square}{\square}$ ... (عمل ترکیب کے ذریعے)

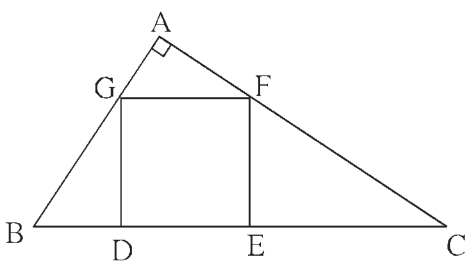
$\frac{AB}{BX} = \frac{\square}{\square}$ ... (I)

$\triangle BCA \sim \triangle BYX$ ... (متشابہ مثلثوں کی □ آزمائش)

$\therefore \frac{BA}{BX} = \frac{AC}{XY}$ ... (متشابہ مثلثوں کے نظیری اضلاع)

$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{AC}{9}$, $\therefore AC = \square$ ... [(1) سے]

*13. △ABC میں ∠A = 90°، □DEFG ایک مربع ہے جس کے راس D اور E ضلع BC پر ہیں۔نقطہ F، ضلع AC پراور نقطہ G ضلع AB پر ہے تو ثابت کیجیے کہ $DE^2 = BD \times EC$



شکل 1.81

(اشارہ : △GBD اور △CFE کو متشابہ دکھائیے GD = FE = DE کا استعمال کریں)

□□□

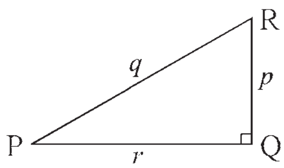
2 فیثا غورث کا مسئلہ Theorem of Pythagoras

آیئے سیکھیں

- فیثا غورث کے اعداد ثلاثہ
- متشابہت اور قائمۃ الزاویہ مثلث
- ہندسی وسط کا مسئلہ
- فیثا غورث کا مسئلہ
- فیثا غورث کے مسئلے کا اطلاق
- اپولونیس کا مسئلہ

آیئے ذرا یاد کریں

فیثا غورث کا مسئلہ : قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع، باقی ماندہ دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔



شکل 2.1

$\triangle PQR$ میں، $\angle PQR = 90°$

$\therefore\ l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$

اسے ہم $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ لکھتے ہیں۔

$\triangle PQR$ کے اضلاع PQ، QR اور PR کی لمبائیاں بالترتیب r، p، q سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس کے مطابق شکل 2.1 سے متعلق فیثا غورث کا مسئلہ $q^2 = p^2 + r^2$ بھی لکھا جاتا ہے۔

فیثا غورث کے اعداد ثلاثہ :

تین طبعی اعداد اس طرح ہوں کہ اگر ایک عدد کا مربع، باقی دو اعداد کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہو تو ان کو فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ کہتے ہیں۔ مثلاً (11, 60, 61) اعدادِ ثلاثہ میں،

$11^2 = 121\ ,\ 60^2 = 3600\ ,\ 61^2 = 3721\ ,\ 121 + 3600 = 3721$

اس مثال میں بڑے عدد کا مربع، باقی دو اعداد کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہے۔

$\therefore$ (11, 60, 61) فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ ہیں۔

اسی طرح (3, 4, 5)، (5, 12, 13)، (8, 15, 17)، (24, 25, 7) وغیرہ بھی فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ ہیں؟ جانچ کیجیے۔

فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ میں اعداد کسی بھی ترتیب میں لکھے جا سکتے ہیں۔

مزید معلومات کے لیے :

فیثاغورث کے اعدادِ ثلاثہ حاصل کرنے کا ضابطہ :

اگر a, b طبعی اعداد ہوں اور $a > b$ ہوتو

$[(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), (2ab)]$، فیثاغورث کے اعدادِ ثلاثہ ہوتے ہیں۔

$$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \quad \text{... (I)}$$

$$(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \quad \text{... (II)}$$

$$(2ab)^2 = 4a^2b^2 \quad \text{... (III)}$$

$$\therefore (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$$ ... [(I)، (II) اور (III) سے]

اس لیے اعداد $[(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), (2ab)]$ فیثاغورث کے اعدادِ ثلاثہ ہیں۔

اعدادِ ثلاثہ کے اس ضابطے کو فیثاغورث کے مختلف اعدادِ ثلاثہ حاصل کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

مثلاً $a = 5$ اور $b = 3$ لینے پر

$a^2 + b^2 = 34$, $a^2 - b^2 = 16$, $2ab = 30$ → اس لیے اعداد (34, 16, 30) فیثاغورث کے اعدادِ ثلاثہ ہیں۔

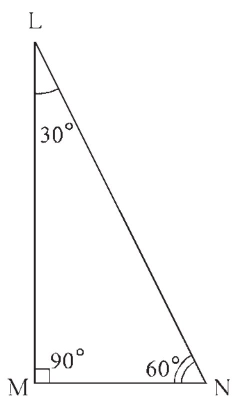
اس کی آپ تصدیق کرلیں۔

a اور b کے لیے مختلف طبعی اعداد لے کر ضابطے کی مدد سے فیثاغورث کے 5 اعدادِ ثلاثہ معلوم کیجیے۔

گذشتہ جماعت میں ہم $90° - 60° - 30°$ اور $90° - 45° - 45°$، زاویوں والے قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی خصوصیت دیکھ چکے ہیں۔

(I) $90° - 60° - 30°$ پیمائش کے زاویوں کے مثلث کی خصوصیت :

قائمۃ الزاویہ مثلث کے حادہ زاویے $30°$ اور $60°$ کے ہوں تو $30°$ پیمائش کے زاویے کے مقابل کا ضلع وتر کا نصف ہوتا ہے اور $60°$ پیمائش کے زاویے کے مقابل کا ضلع وتر کا $\frac{\sqrt{3}}{2}$ گنا ہوتا ہے۔



شکل 2.2

شکل 2.2 کا مشاہدہ کیجیے۔ $\triangle LMN$ میں، $\angle L = 30°$، $\angle N = 60°$، $\angle M = 90°$

$$\therefore \text{ کے مقابل کا ضلع } 30° = MN = \frac{1}{2} \times LN$$

$$\text{ کے مقابل کا ضلع } 60° = LM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times LN$$

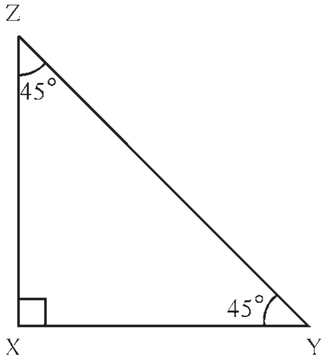
اگر $LN = 6$ سم ہوتو MN اور LM معلوم کیجیے۔

$$MN = \frac{1}{2} \times LN = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ سم}$$

$$LM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times LN = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} \text{ سم}$$

(II) $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$ پیمائش کے زاویوں کے مثلث کی خصوصیت :

قائمۃ الزاویہ مثلث کے حادہ زاویوں کی پیمائش 45° اور 45° ہوتو قائمہ زاویہ بنانے والا ہر ضلع وتر کا $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا ہوتا ہے۔



شکل 2.3

شکل 2.3 کا مشاہدہ کیجیے۔ $\triangle XYZ$ میں،

$$XY = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

$$XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

اگر سم $ZY = 3\sqrt{2}$ ہوتو XY اور ZX معلوم کیجیے۔

$$XY = XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$$

$\therefore \quad XY = XZ = 3$ سم

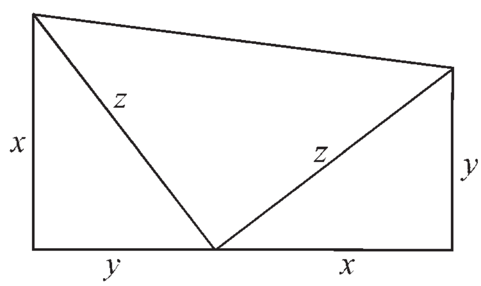
7 ویں جماعت میں ہم نے رقبے کی مدد سے فیثا غورث کے مسئلے کا مطالعہ کر چکے ہیں۔اس میں ہم نے چار قائمۃ الزاویہ مثلثوں اور ایک مربع کے رقبوں کا استعمال کیا تھا۔اس مسئلے کا ثبوت ہم کچھ دوسرے طریقے سے دے سکتے ہیں۔

عملی کام :

شکل 2.4 میں دکھائے ہوئے کے مطابق دو متماثل قائمۃ الزاویہ مثلث لیجیے۔ان کے وتروں کی لمبائی کے مساوی لمبائی کے دو ضلع والا ایک متساوی الساقین قائمۃ الزاویہ مثلث لیجیے۔یہ تینوں قائمۃ الزاویہ مثلث جوڑ کر ایک ذوزنقہ تیار کیجیے۔

ذوزنقہ کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × (متوازی ضلعوں کی لمبائیوں کا مجموعہ) × اونچائی

اس ضابطے کا استعمال کرتے ہوئے ذوزنقہ کا رقبہ، تینوں مثلثوں کے رقبوں کے مساوی لکھ کر فیثا غورث کا مسئلہ ثابت کیجیے۔



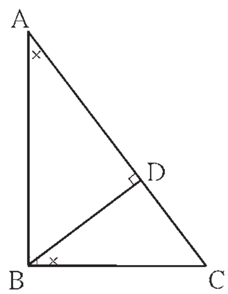
شکل 2.4

آئیے سمجھ لیں

اب ہم فیثا غورث کے مسئلے کا ثبوت متشابہ مثلثوں کی مدد سے دیں گے۔ اسے ثابت کرنے کے لیے قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی متشابہت کے متعلق خصوصیت کا مطالعہ کریں گے۔

متشابہت اور قائمۃ الزاویہ مثلث (Similarity and right angled triangle)

مسئلہ : قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر پر کھینچے ہوئے ارتفاع سے جو مثلث بنتے ہیں۔ وہ اصل قائمۃ الزاویہ مثلث کے متشابہ ہوتے ہیں اور آپس میں ایک دوسرے کے بھی متشابہ ہوتے ہیں۔



شکل 2.5

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ میں، $\angle ABC = 90°$

$A-D-C$ ، قطعہ $AC \perp$ قطعہ BD

ثابت کرنا ہے : $\triangle ADB \sim \triangle ABC$

$\triangle BDC \sim \triangle ABC$

$\triangle ADB \sim \triangle BDC$

ثبوت :

$\triangle ADB$ اور $\triangle ABC$ میں

$\angle DAB \cong \angle BAC$ ... (مشترک زاویے)

$\angle ADB \cong \angle ABC$ ... (90° زاویے)

$\triangle ADB \sim \triangle ABC$ ... (زا۔زا آزمائش) ... (I)

اسی طرح، $\triangle BDC$ اور $\triangle ABC$ میں

$\angle BCD \cong \angle ACB$ ... (مشترک زاویے)

$\angle BDC \cong \angle ABC$ ... (90° زاویے)

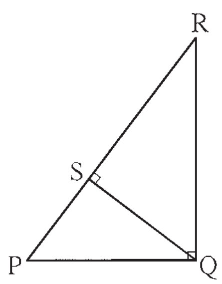
$\triangle BDC \sim \triangle ABC$ ... (زا۔زا آزمائش) ... (II)

$\therefore \triangle ADB \sim \triangle BDC$ ... [بیانات (I) اور (II) سے] ... (III)

$\therefore \triangle ADB \sim \triangle BDC \sim \triangle ABC$ ... (عبوری خاصیت) ... [بیانات (I)، (II) اور (III) سے]

ہندسی وسط کا مسئلہ (Theorem of Geometrical Mean)

مسئلہ : قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر پر کھینچا ہوا ارتفاع، اس ارتفاع کے ذریعے بننے والے وتر کے دونوں حصوں کا ہندسی وسط ہوتا ہے۔



شکل 2.6

ثبوت : قائمۃ الزاویہ مثلث PQR میں، وتر $PR \perp$ قطعہ QS

$\therefore \triangle QSR \sim \triangle PSQ$ ... (قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی متشابہت)

$$\therefore \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{SQ}$$

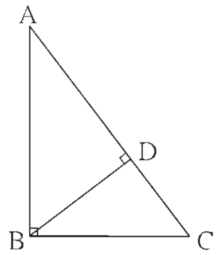
$$\therefore \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{QS} \quad ...(\because SQ = QS)$$

$$\therefore QS^2 = PS \times SR$$

اس لیے ارتفاع QS، قطعہ PS اور قطعہ SR کا ہندسی وسط ہے۔

فیثا غورث کا مسئلہ (Theorem of Pythagoras)

مسئلہ : قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع ، باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔



شکل 2.7

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ میں، $\angle ABC = 90°$

ثابت کرنا ہے : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

عمل : نقطہ B سے ضلع AC پر قطعہ BD عمود کھینچیے۔

$A - D - C$

ثبوت : $\triangle ABC$ میں،

قطعہ $BD \perp$ وتر AC ... (عمل)

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADB \sim \triangle BDC$ ... (قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی تشابہت)

$\triangle ABC \sim \triangle ADB$

$\therefore \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DB} = \dfrac{AC}{AB}$ ... (نظیری اضلاع)

$\therefore \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AB}$

$\therefore AB^2 = AD \times AC$ ... (I)

اسی طرح , $\triangle ABC \sim \triangle BDC$

$\therefore \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{AC}{BC}$ ... (نظیری اضلاع)

$\therefore \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{AC}{BC}$

$\therefore BC^2 = DC \times AC$ ... (II)

(I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$$

$$= AC\,(AD + DC)$$

$$= AC \times AC \quad \text{... } (A - D - C)$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$$

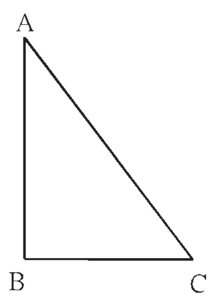
$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$$

فیثا غورث کے مسئلے کا عکس (Converse of Phythagoras theorem)

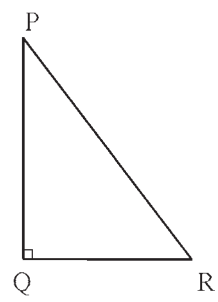
مسئلہ : کسی مثلث میں اگر ایک ضلع کا مربع ، دیگر دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہو تو وہ مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ میں، $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ثابت کرنا ہے : $\angle ABC = 90°$



شکل 2.8



شکل 2.9

عمل : $\triangle PQR$ اس طرح بنائیے کہ $AB = PQ$، $BC = QR$، $\angle PQR = 90°$

ثبوت : $\triangle PQR$ میں، $\angle Q = 90°$

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ ... (فیثاغورث کا مسئلہ)

$= AB^2 + BC^2$ ... (عمل) ... (I)

$= AC^2$ ... (دیا ہوا ہے) ... (II)

$\therefore \quad PR^2 = AC^2$

$\therefore \quad PR = AC$ ... (III)

$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle PQR$ ... (ضل۔ضل۔ضل آزمائش)

$\therefore \quad \angle ABC = \angle PQR = 90°$

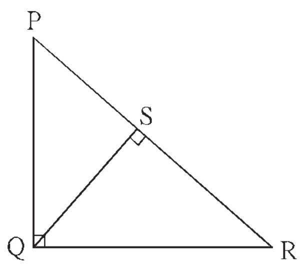
اسے ذہن نشین کرلیں

(1) (a) **متشابہت اور قائمۃ الزاویہ مثلث :**

$\triangle PQR$ میں، $\angle Q = 90°$، قطعہ $PR \perp$ قطعہ QS

یہاں، $\triangle PQR \sim \triangle PSQ \sim \triangle QSR$

اس طرح سے شکل 2.10 میں بننے والے تمام قائمۃ الزاویہ مثلث ایک دوسرے کے متشابہ ہیں۔



شکل 2.10

(b) **ہندسی وسط کا مسئلہ :**

درج بالا شکل میں، $\triangle PSQ \sim \triangle QSR$

$\therefore \quad QS^2 = PS \times SR$

$\therefore$ قطعہ PS اور قطعہ SR کا ہندسی وسط قطعہ QS ہے۔

(2) **فیثاغورث کا مسئلہ :**

قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع، باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

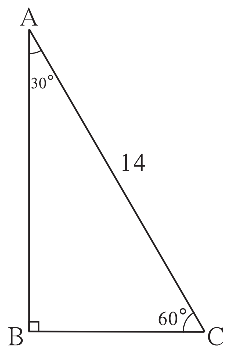
(3) **فیثاغورث کے مسئلے کا عکس :**

کسی مثلث میں اگر ایک ضلعے کا مربع، باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہو تو وہ مثلث قائمۃ الزاویہ ہوتا ہے۔

اس کے علاوہ ایک اور خصوصیت بہت زیادہ استعمال ہوتی ہے اسے دھیان میں رکھیے۔

(4) قائمۃ الزاویہ مثلث میں کسی ایک ضلعے کی لمبائی، وتر کی لمبائی کا نصف ہو تو اس ضلعے کے مقابل کا زاویہ $30°$ ہوتا ہے۔

یہ خصوصیت $30° - 60° - 90°$ مسئلے کا عکس ہے۔



شکل 2.11

مثال (1) : شکل 2.11 کا مشاہدہ کیجیے۔

$\triangle ABC$ میں، $\angle B = 90°$، $\angle A = 30°$، $AC = 14$

ہوتو AB اور BC معلوم کیجیے۔

حل : $\triangle ABC$ میں،

$\rightarrow \angle B = 90°\ ,\ \angle A = 30°\ ,\ \therefore\ \angle C = 60°$

$30° - 60° - 90°$ مسئلے کی رُو سے

$BC = \frac{1}{2} \times AC$

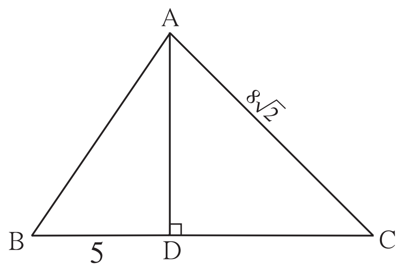
$BC = \frac{1}{2} \times 14$

$BC = 7$

$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC$

$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14$

$AB = 7\sqrt{3}$



شکل 2.12

مثال (2) : شکل 2.12 کا مشاہدہ کیجیے۔

$\triangle ABC$ میں BC $\perp$ AD قطعہ، قطعہ $\angle C = 45°$

$BD = 5$ اور $AC = 8\sqrt{2}$ ہوتو AD اور BC معلوم کیجیے۔

حل : $\triangle ADC$ میں $\angle ADC = 90°$، $\angle C = 45°$ اس لیے $\angle DAC = 45°$

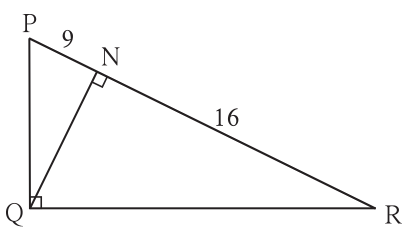
$AD = DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2}$ ... ($45° - 45° - 90°$ مسئلے کی رُو سے)

$\therefore\ DC = 8\ ,\ \therefore\ AD = 8$

$BC = BD + DC$

$= 5 + 8$

$\therefore\ BC = 13$



شکل 2.13

مثال (3) : شکل 2.13 میں $\angle PQR = 90°$، قطعہ PR $\perp$ قطعہ QN،

$PN = 9$، $NR = 16$ تو QN معلوم کیجیے۔

حل : $\triangle PQR$ میں قطعہ PR $\perp$ قطعہ QN

$\therefore NQ^2 = PN \times NR$ ... (ہندسی وسط کا مسئلہ)

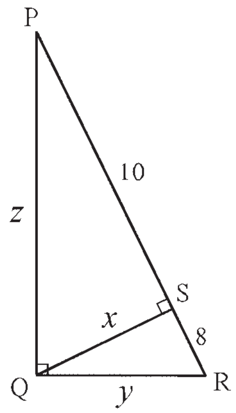
$\therefore\ QN = \sqrt{PN \times NR}$

$= \sqrt{9 \times 16}$

$= 3 \times 4$

$= 12$

مثال (4) : شکل 2.14 کا مشاہدہ کیجیے۔ $\triangle PQR$ میں، $\angle PQR = 90°$، PR قطعہ $\perp$ QS قطعہ ہو تو x، y، z کی قیمتیں معلوم کیجیے۔



شکل 2.14

حل : $\triangle PQR$ میں، $\angle PQR = 90°$

PR قطعہ $\perp$ QS قطعہ

$$QS = \sqrt{PS \times SR} \quad \text{...}$$ (ہندسی وسط کا مسئلہ)

$$= \sqrt{10 \times 8}$$

$$= \sqrt{5 \times 2 \times 8}$$

$$= \sqrt{5 \times 16}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

$$\therefore \; x = 4\sqrt{5}$$

$\triangle QSR$ میں، $\angle QSR = 90°$

$QR^2 = QS^2 + SR^2$ ... (فیثاغورث کا مسئلہ)

$$= \left(4\sqrt{5}\right)^2 + 8^2$$

$$= 16 \times 5 + 64$$

$$= 80 + 64$$

$$= 144$$

$$\therefore \; QR = 12 \;,\; \therefore \; y = 12$$

$\triangle PSQ$ میں، $\angle QSP = 90°$

$PQ^2 = QS^2 + PS^2$ ... (فیثاغورث کا مسئلہ)

$$= \left(4\sqrt{5}\right)^2 + 10^2$$

$$= 16 \times 5 + 100$$

$$= 80 + 100$$

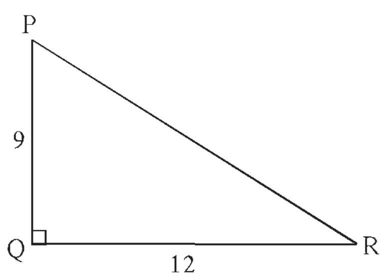
$$= 180$$

$$= 36 \times 5$$

$$\therefore \; PQ = 6\sqrt{5} \;,\; \therefore \; z = 6\sqrt{5}$$

جواب : $x = 4\sqrt{5}$ ، $y = 12$ ، $z = 6\sqrt{5}$

مثال (5) : قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع 9 سم اور 12 سم ہیں تو وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔



شکل 2.15

حل : $\triangle PQR$ میں، $\angle Q = 90°$

$QR = 12$ سم، $PQ = 9$ سم

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ ... (فیثاغورث کے مسئلے کی رو سے)

$$= 9^2 + 12^2$$

$$= 81 + 144$$

$$\therefore \; PR^2 = 225$$

$$\therefore \; PR = 15$$

$\therefore$ مثلث کے وتر کی لمبائی = 15 سم

مثال **(6) :** $\triangle LMN$ میں، $l = 5$، $m = 13$، $n = 12$ ہوتو $\triangle LMN$ قائمۃ الزاویہ مثلث ہے یا نہیں، طے کیجیے۔

یہاں l، m، n بالترتیب $\angle L$، $\angle M$، $\angle N$ کے مقابل کے اضلاع ہیں۔

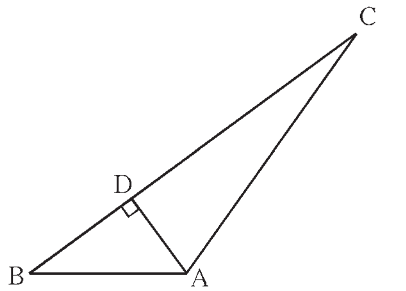
حل : $l = 5$، $m = 13$، $n = 12$

$$l^2 = 25,\ m^2 = 169,\ n^2 = 144$$

$$\therefore\ m^2 = l^2 + n^2$$

اس لیے فیثاغورث کے مسئلے کے عکس کی رو‌ٗ $\triangle LMN$ قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

مثال **(7) :** شکل 2.16 کا مشاہدہ کیجیے۔



شکل 2.16

$\triangle ABC$ میں، قطعہ $BC \perp$ قطعہ AD تو ثابت کیجیے کہ

$$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$$

حل : $\triangle ADC$ میں $\angle ADC = 90°$ فیثاغورث کے مسئلے کی رو‌ٗ سے،

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$\therefore\ AD^2 = AC^2 - CD^2 \quad \text{... (I)}$$

$\triangle ADB$ میں $\angle ADB = 90°$، فیثاغورث کے مسئلہ کی رو‌ٗ سے،

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$\therefore\ AD^2 = AB^2 - BD^2 \quad \text{... (II)}$$

$$AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$$ ... [(I) اور (II) سے]

$$\therefore\ AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$$

مشقی سیٹ 2.1

1. درج ذیل اعدادِ ثلاثہ میں سے فیثاغورث کے اعدادِ ثلاثہ معلوم کیجیے۔ وجہ لکھیے۔

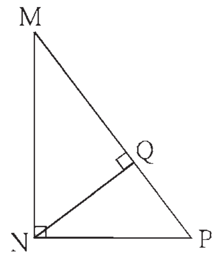
(i) (3, 5, 4) (ii) (4, 9, 12) (iii) (5, 12, 13)

(iv) (24, 70, 74) (v) (10, 24, 27) (vi) (11, 60, 61)

2. شکل 2.17 میں $\angle MNP = 90°$،

قطعہ $MP \perp$ قطعہ NQ،

$MQ = 9$، $QP = 4$ ہوتو NQ معلوم کیجیے۔

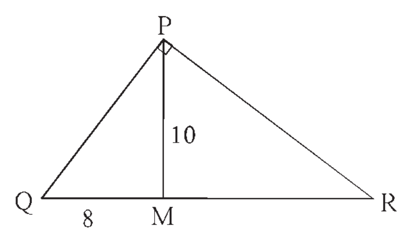


شکل 2.17

3. شکل 2.18 میں $\angle QPR = 90°$

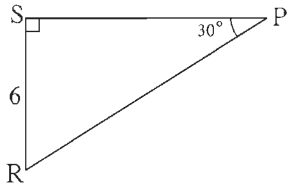
قطعہ $QR \perp$ قطعہ PM اور $Q - M - R$

$PM = 10$، $QM = 8$ اس کی مدد سے QR معلوم کیجیے۔



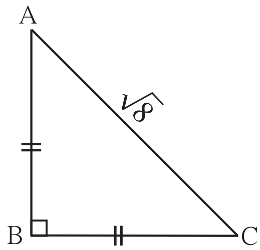
شکل 2.18

4. شکل 2.19 میں، $\triangle PSR$ میں دی ہوئی معلومات کی مدد سے RP اور PS معلوم کیجیے۔



شکل 2.19

5. شکل 2.20 میں دی ہوئی معلومات کی بناء پر AB اور BC معلوم کرنے کے لیے عملی کام مکمل کیجیے۔



شکل 2.20

$AB = BC \quad \ldots (\boxed{\quad})$

$\therefore \quad \angle BAC = \boxed{\quad}$

$\therefore \; AB = BC = \boxed{\quad} \times AC$

$= \boxed{\quad} \times \sqrt{8}$

$= \boxed{\quad} \times 2\sqrt{2}$

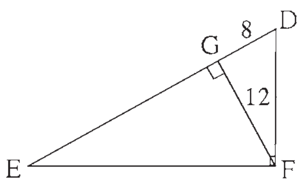
$= \boxed{\quad}$

6. ایک مربع کے وتر کی لمبائی 10 سم ہے۔اس کے ضلع کی لمبائی اور احاطہ معلوم کیجیے۔

7. شکل 2.21 میں، $\angle DFE = 90°$، قطعہ ED $\perp$ قطعہ FG

اگر $GD = 8$، $FG = 12$ ہو تو درج ذیل معلوم کیجیے۔

(i) EG (ii) FD (iii) EF



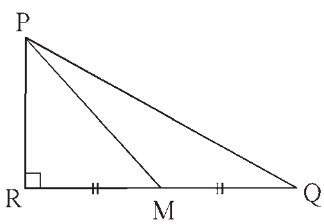
شکل 2.21

8. ایک مستطیل کی لمبائی 35 سم اور چوڑائی 12 سم ہے تو اس مستطیل کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

*9. شکل 2.22 میں ضلع QR کا وسطی نقطہ M ہے۔

$\angle PRQ = 90°$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

$PQ^2 = 4PM^2 - 3PR^2$



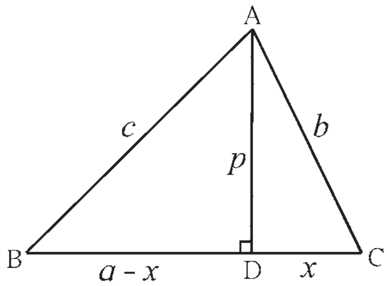
شکل 2.22

*10. راستے کے دونوں جانب ایک دوسرے کے مقابل واقع عمارتوں کی دیواریں ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔ 5.8 میٹر لمبی سیڑھی کا ایک سرا راستے پر کہیں رکھا ہوا ہے تو اس کا اوپری سرا پہلی عمارت کی 4 میٹر اونچائی پر واقع کھڑکی تک پہنچتا ہے۔اسی جگہ سے سیڑھی دوسری جانب موڑنے پر اس کا اوپری سرا دوسری عمارت کی 4.2 میٹر اونچائی پر واقع کھڑکی تک پہنچتا ہے۔راستے کی چوڑائی معلوم کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں

فیثا غورث کے مسئلے کا اطلاق

فیثا غورث کے مسئلے میں قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر اور قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع کے درمیان آپسی تعلق یعنی قائمہ زاویہ کے مقابل کا ضلع اور دیگر دو اضلاع کا تعلق بتایا گیا ہے۔ مثلث میں حادہ زاویے کے مقابل کے ضلع کا دیگر دو اضلاع کے درمیان تعلق اسی طرح منفرجہ زاویے کے مقابل کے ضلع کا دیگر دو اضلاع کے درمیان تعلق فیثا غورث کے مسئلے کے ذریعے طے کرتے ہیں۔ یہ تعلق مندرجہ ذیل مثال سے سمجھ لیجیے۔



شکل 2.23

مثال (1) : $\triangle ABC$ میں $\angle C$ حادہ زاویہ ہے، قطعہ $BC \perp$ قطعہ AD

تو ثابت کیجیے کہ $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

شکل 2.23 میں،

فرض کیجیے $AB = c$، $AC = b$، $AD = p$، $BC = a$، $DC = x$

$\therefore BD = a - x$

$\triangle ADB$ میں فیثا غورث کے مسئلے کی رو سے

$c^2 = (a-x)^2 + \square$

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \square$ ... (I)

$\triangle ADC$ میں فیثا غورث کے مسئلے کی رو سے

$b^2 = p^2 + \square$

$p^2 = b^2 - \square$ ... (II)

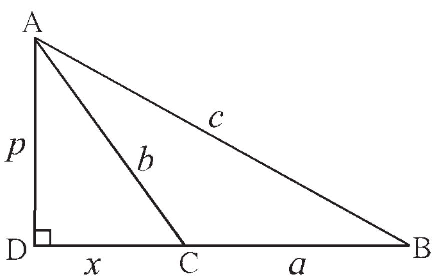
بیان (II) میں حاصل شدہ p^2 کی قیمت بیان (I) میں رکھنے پر،

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$

$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

مثال (2) : $\triangle ABC$ میں، $\angle ACB$ منفرجہ زاویہ ہے۔



شکل 2.24

شکل 2.24 میں، قطعہ $BC \perp$ قطعہ AD

تو ثابت کیجیے کہ $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

فرض کریں $AD = p$، $AC = b$، $AB = c$، $BC = a$، $DC = x$

$\therefore DB = a + x$

$\triangle ADB$ میں فیثا غورث کے مسئلے کی رو سے،

$c^2 = (a + x)^2 + p^2$

$= a^2 + 2ax + x^2 + p^2$ ... (I)

اسی طرح $\triangle ADC$ میں،

$$b^2 = x^2 + p^2$$

$$p^2 = b^2 - x^2 \quad \text{... (II)}$$

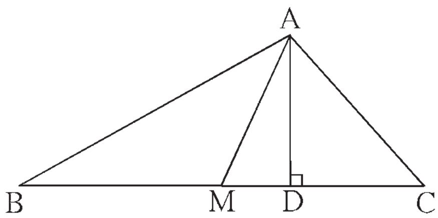
$\therefore$ مساوات (II) میں حاصل ہونے والے p^2 کی قیمت مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$c^2 = a^2 + 2ax + b^2$$

$$\therefore\ AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$$

اپولونیس کا مسئلہ (Apollonius' Theorem)



شکل **2.25**

$\triangle ABC$ میں نقطہ M، ضلع BC کا وسطی نقطہ ہے۔تو

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$$

دیا ہوا ہے : $\triangle ABC$ میں ضلع BC کا وسطی نقطہ M ہے۔

ثابت کرنا ہے : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

عمل : قطعہ BC $\perp$ AD قطعہ کھینچیے۔

ثبوت : اگر قطعہ AM، قطعہ BC پر عمود نہ ہو تو $\angle AMB$ اور $\angle AMC$ میں سے کوئی ایک منفرجہ زاویہ ہوگا اور دوسرا حادہ زاویہ ہوگا۔

شکل میں $\angle AMB$، منفرجہ زاویہ ہے اور $\angle AMC$ حادہ زاویہ ہے۔

درج بالا مثال (1) اور (2) سے

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \times MD \quad \text{... (I)}$$

اور

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \times MD$$

$$\therefore\ AC^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM \times MD \quad \text{... } (\because\ BM = MC) \quad \text{... (II)}$$

$\therefore$ (I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$$

اگر ضلع BC $\perp$ AM قطعہ ہو تو اس مسئلے کا ثبوت آپ خود لکھیں۔

اس مثال کے ذریعے مثلث کے ضلعوں اور وسطانیہ کے درمیان آپسی تعلق سمجھ میں آتا ہے۔اسے ہی اپولونیس کا مسئلہ کہتے ہیں۔

حل کردہ مثالیں

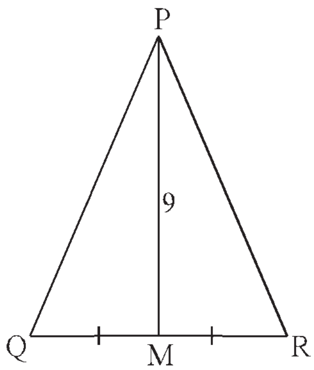
مثال **(1)** : $\triangle PQR$ میں قطعہ PM وسطانیہ ہے۔ $PM = 9$ اور $PQ^2 + PR^2 = 290$ ہو تو QR معلوم کیجیے۔

حل : $\triangle PQR$ میں قطعہ PM وسطانیہ ہے۔

ضلع QR کا وسطی نقطہ M ہے۔

$$QM = MR = \frac{1}{2} QR$$

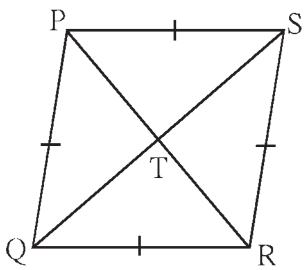
اپولونیس کے مسئلے کی رُو سے،



شکل 2.26

$$PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2$$
$$\therefore \quad 290 = 2 \times 9^2 + 2QM^2$$
$$\therefore \quad 290 = 2 \times 81 + 2QM^2$$
$$\therefore \quad 290 = 162 + 2QM^2$$
$$\therefore \quad 2QM^2 = 290 - 162$$
$$\therefore \quad 2QM^2 = 128$$
$$\therefore \quad QM^2 = 64$$
$$\therefore \quad QM = 8$$
$$\therefore \quad QR = 2QM$$
$$= 2 \times 8$$
$$= 16$$

مثال (2) : ثابت کیجیے کہ معین کے وتروں کے مربعوں کا مجموعہ، اس کے ضلعوں کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔



شکل 2.27

دیا ہوا ہے : □PQRS ایک معین ہے۔اس کے وتر PR اور QS ایک دوسرے کو نقطہ T پر قطع کرتے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : $PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = PR^2 + QS^2$

ثبوت : معین کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

اس لیے اپولونیس کے مسئلے کے ذریعے،

$$PQ^2 + PS^2 = 2PT^2 + 2QT^2 \quad \text{... (I)}$$
$$QR^2 + SR^2 = 2RT^2 + 2QT^2 \quad \text{... (II)}$$

اس لیے (I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$$PQ^2 + PS^2 + QR^2 + SR^2 = 2(PT^2 + RT^2) + 4QT^2$$
$$= 2(PT^2 + PT^2) + 4QT^2 \quad \text{... } (\because RT = PT)$$
$$= 4PT^2 + 4QT^2$$
$$= (2PT)^2 + (2QT)^2$$
$$= PR^2 + QS^2$$

(اس مثال کو فیثا غورث کے مسئلے کے ذریعے بھی حل کر سکتے ہیں۔)

مشقی سیٹ 2.2

.1 $\triangle PQR$ میں، ضلع QR کا وسطی نقطہ S ہے۔اگر $PQ = 11$، $PR = 17$، $PS = 13$ ہو تو QR کی لمبائی معلوم کیجیے۔

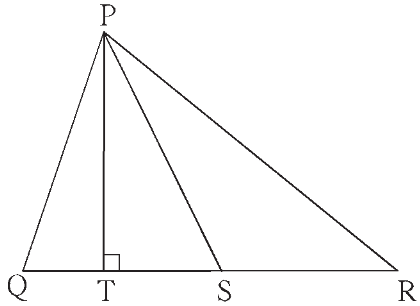
.2 $\triangle ABC$ میں $AB = 10$، $AC = 7$، $BC = 9$ ہو تو نقطہ C سے ضلع AB پر کھینچے گئے وسطانیہ کی لمبائی معلوم کیجیے۔

.3 شکل 2.28 میں قطعہ PS، یہ $\triangle PQR$ کا وسطانیہ ہے

اور $PT \perp QR$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

(1) $PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$

(2) $PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$

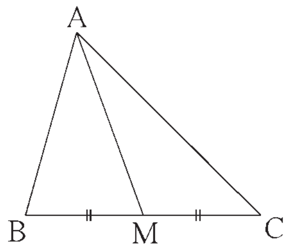


شکل 2.28

.4 شکل 2.29 میں $\triangle ABC$ کے ضلع BC کا وسطی نقطہ M ہے۔

اگر مربع سم $AB^2 + AC^2 = 290$، سم $AM = 8$ ہو تو

BC معلوم کیجیے۔



شکل 2.29

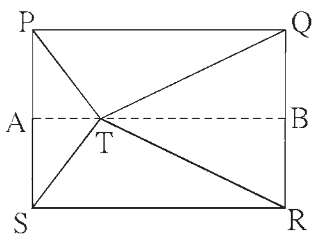
*.5 شکل 2.30 میں دکھائے ہوئے کے مطابق نقطہ T مستطیل PQRS

کے اندرون میں ہے تو ثابت کیجیے کہ

$TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$

(شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق A – T – B، اس طرح کہ

ضلع SR $\parallel$ ضلع AB کھینچیے)



شکل 2.30

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ مجموعہ سوالات 2 ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

.1 درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

(1) درج ذیل میں کون سا فیثاغورث کا اعدادِ ثلاثہ ہے؟

(A) (1, 5, 10) (B) (3, 4, 5) (C) (2, 2, 2) (D) (5, 5, 2)

(2) قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ 169 ہے تو اس مثلث کے وتر کی لمبائی کیا ہوگی؟

(A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

(3) درج ذیل میں سے کس تاریخ کو فیثا غورث کے اعدادِ ثلاثہ ہوں گے؟

(A) 15 / 08 / 17 (B) 16 / 08 / 16 (C) 3 / 5 / 17 (D) 4 / 9 / 15

(4) مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں a، b، c ہے اگر $a^2 + b^2 = c^2$ ہو تو وہ کس قسم کا مثلث ہوگا؟

(A) منفرجۃ الزاویہ مثلث (B) حادۃ الزاویہ مثلث

(C) قائمۃ الزاویہ مثلث (D) متساوی الاضلاع مثلث

(5) ایک مربع کے وتر کی لمبائی $10\sqrt{2}$ سم ہے۔اس کا احاطہ .... ہے۔

(A) 10 سم (B) $40\sqrt{2}$ سم (C) 20 سم (D) 40 سم

(6) ایک قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر پر بنائے گئے ارتفاع کی وجہ سے وتر کے 4 سم اور 9 سم لمبائی کے دو حصے بنتے ہیں تو اس ارتفاع کی لمبائی کتنی ہے؟

(A) 9 سم (B) 4 سم (C) 6 سم (D) $2\sqrt{6}$ سم

(7) قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع 24 سم اور 18 سم لمبائی کے ہیں۔مثلث کے وتر کی لمبائی .... ہوگی۔

(A) 24 سم (B) 30 سم (C) 15 سم (D) 18 سم

(8) $\triangle ABC$ میں $AB = 6\sqrt{3}$ سم، $AC = 12$ سم اور $BC = 6$ سم تو $\angle A$ کی پیمائش کیا ہوگی؟

(A) 30° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

.2 درج ذیل مثالیں حل کیجیے۔

(i) ایک متساوی الاضلاع مثلث کے ضلع کی لمبائی 2a ہے۔مثلث کے ارتفاع کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(ii) کیا 7 سم، 24 سم، 25 سم ضلعوں کی لمبائی والا مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہوگا؟ وجہ کے ساتھ لکھیے۔

(iii) ایک مستطیل کے اضلاع کی لمبائی 11 سم اور 60 سم ہے۔اس کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(iv) ایک قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ بنانے والے اضلاع کی لمبائی 9 سم اور 12 سم ہے۔مثلث کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(v) متساوی الساقین قائمۃ الزاویہ مثلث کے متماثل اضلاع کی لمبائی x ہے۔وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(vi) $\triangle PQR$ میں $PQ = \sqrt{8}$، $QR = \sqrt{5}$، $PR = \sqrt{3}$ ہو تو کیا $\triangle PQR$ قائمۃ الزاویہ مثلث ہے؟ اگر ہو تو مثلث کا کون سا زاویہ قائمہ زاویہ ہے۔

.3 $\triangle RST$ میں $\angle S = 90°$، $\angle T = 30°$، $RT = 12$ سم تو RS اور ST معلوم کیجیے۔

.4 ایک مستطیل کا رقبہ 192 مربع سم ہے۔اس کی لمبائی 16 سم ہے تو اس مستطیل کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

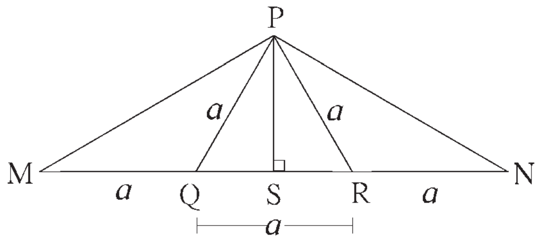
*5. ایک متساوی الاضلاع مثلث کا ارتفاع $\sqrt{3}$ سم ہے۔مثلث کے ضلع کی لمبائی اور احاطہ معلوم کیجیے۔

.6 $\triangle ABC$ میں قطعہ AP وسطانیہ ہے۔اگر $BC = 18$، $AB^2 + AC^2 = 260$ ہو تو AP معلوم کیجیے۔

.7* $\triangle ABC$ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔قاعدہ BC پر نقطہ P اس طرح ہے کہ $PC = \frac{1}{3}BC$ ، اگر سم $AB = 6$ ہو تو AP معلوم کیجیے۔

.8 شکل 2.31 میں $M - Q - R - N$ ہے اور دی ہوئی معلومات کی مدد سے ثابت کیجیے کہ

$PM = PN = \sqrt{3} \times a$

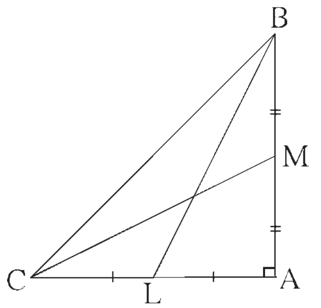


شکل **2.31**

.9 ثابت کیجیے کہ متوازی الاضلاع میں وتروں کے مربعوں کا مجموعہ، اس کے ضلعوں کے مربعوں کے مجموعے کے مساوی ہوتا ہے۔

.10 نازیہ اور حذیفہ ایک مقام سے ایک ہی وقت میں مشرق اور شمال کی سمت یکساں رفتار سے روانہ ہوئے دو گھنٹے بعد ان کے درمیان فاصلہ $15\sqrt{2}$ کلومیٹر ہے۔تو ان کی فی گھنٹہ رفتار معلوم کیجیے۔

.11* $\triangle ABC$ میں $\angle BAC = 90°$، قطعہ BL اور قطعہ CM، مثلث ABC کے وسطانیہ ہیں، تو ثابت کیجیے کہ $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$



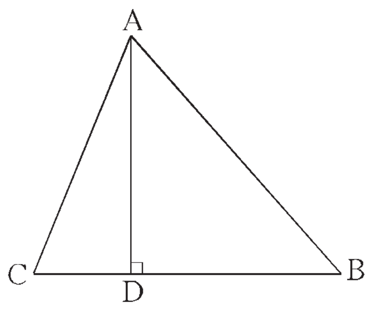
شکل **2.32**

.12 ایک متوازی الاضلاع میں دو متصلہ ضلعوں کی لمبائیوں کے مربعوں کا مجموعہ 130 مربع سم ہے۔اس کے ایک وتر کی لمبائی 14 سم ہے۔ دوسرے وتر کی لمبائی کتنی ہے؟

.13 $\triangle ABC$ میں قطعہ $AD \perp$ قطعہ BC اور $BD = 3CD$ تو

ثابت کیجیے کہ

$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$



شکل **2.33**

.14* متساوی الساقین مثلث میں متماثل اضلاع کی لمبائی 13 سم ہے۔اُس مثلث کا قاعدہ 10 سم ہے، تو اس مثلث کے ہندسی مرکز سے اور قاعدے کے مقابل کے راس کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

15. ذوزنقہ ABCD میں

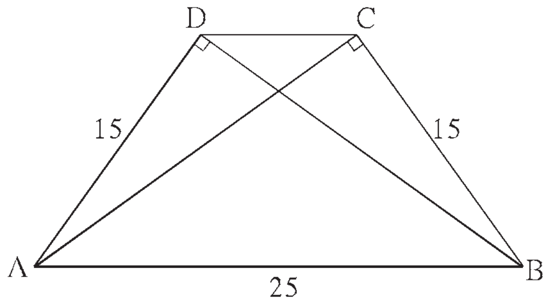
قطعہ DC || قطعہ AB

قطعہ AD ⊥ قطعہ BD

قطعہ BC ⊥ قطعہ AC

اگر AD = 15، BC = 15 اور AB = 25 ہوتو

A (□ABCD) کتنا ہے؟



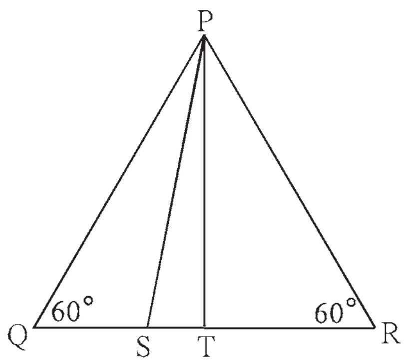
شکل 2.34

*16. شکل 2.35 میں △PQR متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

قطعہ QR پر نقطہ S اس طرح ہے کہ

$QS = \frac{1}{3} QR$ تو ثابت کیجیے کہ

$9PS^2 = 7PQ^2$



شکل 2.35

*17. △PQR کا وسطانیہ قطعہ PM ہے اگر PQ = 40، PR = 42 اور PM = 29 ہوتو QR معلوم کیجیے۔

18. △ABC کا وسطانیہ قطعہ AM ہے اگر AB = 22، AC = 34، BC = 24 ہوتو قطعہ AM کی لمبائی معلوم کیجیے۔

ICT Tools or Links

انٹرنیٹ سے 'Story on the life of Pythagoras' حاصل کیجیے اور Slide show تیار کیجیے۔

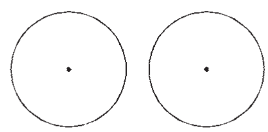
3 Circle دائرہ

آیئے سیکھیں

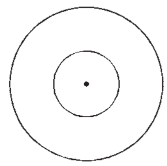
- ایک، دو، تین نقاط سے گذرنے والے دائرے
- مس کرنے والے دائرے
- قوسی زاویہ اور مقطوعہ قوس
- مماس قاطع زاویے کا مسئلہ
- قاطع خط اور مماس
- دائرہ کے قوس
- مستقیم المحیط ذوار بعتہ الاضلاع
- وتروں کے تقاطع کا مسئلہ

آیئے ذرا یاد کریں

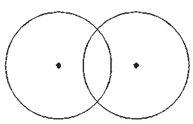
دائرہ کے تعلق سے اصطلاحات 'مرکز، نصف قطر، قطر، وتر، اندرون، بیرون' سے ہم بخوبی واقف ہیں۔ 'متماثل دائرے، ہم مرکز دائرے اور قطع کرنے والے دائرے' ان اصطلاحوں کو یاد کیجیے۔



متماثل دائرے



ہم مرکز دائرے



متقاطع دائرے

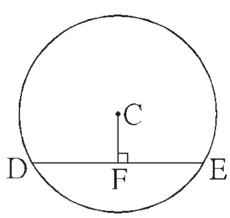
نویں جماعت میں مطالعہ کیے ہوئے وتروں کی خصوصیت ذیل کے عملی کام کی مدد سے یاد کیجیے۔

عملی کام (I) : بازو کی شکل 3.1 میں C مرکز والے دائرے کا وتر قطعہ DE ہے۔

قطعہ CF ⊥ وتر DE

اگر دائرے کا قطر 20 سم اور DE = 16 ہو تو CF = ?

اس سوال کو حل کرنے کے لیے استعمال کیے گئے مسئلے اور خصوصیت کو یاد کر کے لکھیے۔



شکل 3.1

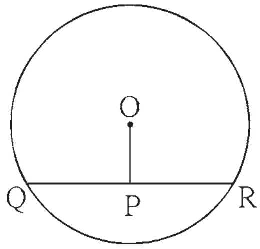
(1) دائرے کے مرکز سے وتر پر کھینچا گیا عمود ....

(2) ....

(3) ....

ان خصوصیت کا استعمال کر کے سوال حل کیجیے۔

عملی کام (II) : متصلہ شکل 3.2 میں دائرے کا مرکز 'O' ہے۔



شکل 3.2

قطعہ QR وتر ہے۔ نقطہ P وتر QR کا وسطی نقطہ ہے۔

اگر QR = 24 ، OP = 10 ہوتو دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

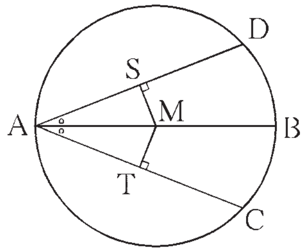
اس سوال کو حل کرنے کے لیے استعمال میں آنے والے مسئلے لکھیے۔

(1) ....

(2) ....

ان مسئلوں کا استعمال کر کے مثال حل کیجیے۔

عملی کام (III) : شکل 3.3 میں دائرے کا مرکز M ہے اور قطعہ AB قطر ہے۔



شکل 3.3

وتر AD ⊥ MS قطعہ، وتر AC ⊥ MT قطعہ،

∠ DAB ≅ ∠ CAB ہوتو ثابت کیجیے وتر AD ≅ وتر AC

اس سوال کو حل کرنے کے لیے درج ذیل میں سے کون سا مسئلہ استعمال کریں گے؟

(1) دائرے کے دو وتر، دائرے کے مرکز سے ہم فاصلہ ہوں تو ان کی لمبائی مساوی ہوتی ہے۔

(2) ایک ہی دائرے کے متماثل وتر، دائرے کے مرکز سے ہم فاصلہ ہوتے ہیں۔

اس کے علاوہ مثلث کے متماثلث کی درج ذیل میں سے کون سی آزمائش استعمال ہوگی؟

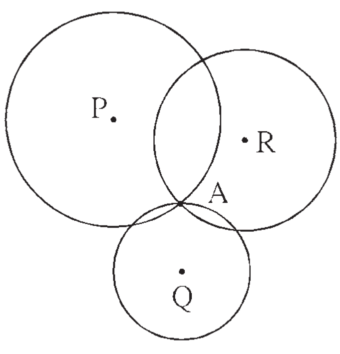
(1) ضل زا ضل (2) زا ضل زا (3) ضل ضل ضل (4) زا زا ضل (5) وتر ضلع آزمائش

مناسب آزمائش اور مسئلہ کا استعمال کر کے ثبوت لکھیے۔

آیئے سمجھ لیں

ایک، دو، تین نقاط سے گزرنے والے دائرے

متصلہ شکل 3.4 میں، ایک مستوی میں نقطہ A دکھایا گیا ہے۔ P، Q اور R مراکز کے تین دائرے نقطہ A سے گزرتے ہیں۔ کیا آپ کو ایسا محسوس ہوتا ہے کہ نقطہ A سے گزرنے والے اور کتنے دائرے ہو سکتے ہیں؟



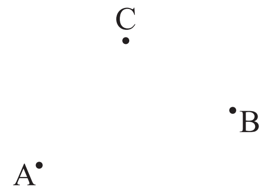
شکل 3.4

آپ کا جواب بہت زیادہ یا 'بے شمار' اس طرح ہوتو صحیح ہے۔ ایک ہی نقطہ سے گزرنے والے بے شمار دائرے ہوتے ہیں۔

متصلہ شکل 3.5 میں A اور B متفرق نقاط سے گذرنے والے کتنے دائرے ہوں گے؟

A، B، C ان تینوں نقاط سے کتنے دائرے گذر سکتے ہیں؟

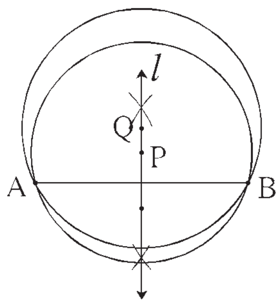
ذیل میں دیے ہوئے عملی کام میں کتنے جوابات حاصل ہوتے ہیں۔ آیئے دیکھتے ہیں۔



شکل 3.5

عملی کام (I) : نقطہ A اور نقطہ B کو ملانے والا قطعہ خط AB کھینچیے۔

اس قطعہ کا عمودی ناصف خط l کھینچیے۔ خط l پر نقطہ P مرکز ہے اور PA کو نصف قطر مان کر دائرہ بنایئے۔ دیکھیے کہ یہ دائرہ نقطہ B سے گذرتا ہے۔ اس کی وجہ معلوم کیجیے۔ (عمودی ناصف کی خصوصیت یاد کیجیے)



شکل 3.6

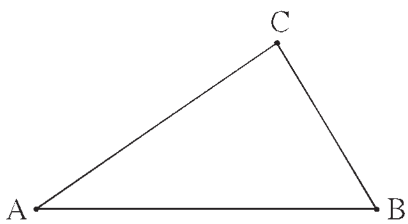
خط l پر ایک اور نقطہ Q لیجیے۔ Q کو مرکز اور QA کو نصف قطر مان کر بنایا گیا۔ کیا یہ دائرہ بھی نقطہ B سے گذرتا ہے؟ ذرا غور کیجیے۔
نقطہ A اور نقطہ B سے گذرنے والے اور کتنے دائرے آپ بنا سکتے ہیں؟ ان کے مراکز کہاں واقع ہوں گے؟

عملی کام (II) : غیر ہم خطی نقاط A، B، C لیجیے۔

ان تینوں نقاط سے گذرنے والا دائرہ بنانے کے لیے ہمیں کیا کرنا ہوگا؟

ان تینوں نقاط سے گذرنے والا دائرہ بنایئے۔

کیا ان تین نقاط سے گذرنے والے مزید دائرے بنائے جا سکتے ہیں؟ غور کیجیے۔



شکل 3.7

عملی کام (III) : تین ہم خطی نقاط D، E، F لیجیے۔ ان تینوں نقاط سے گذرنے والا دائرہ بنانے کی کوشش کیجیے۔ اس طرح ہمیں دائرہ بنانا ممکن ہے یا نہیں۔ اگر نہیں ہے تو وہ کیوں نہیں بنایا جا سکتا؟ غور کیجیے۔

اسے ذہن نشین کرلیں

(1) ایک نقطہ سے بے شمار دائرے گذرتے ہیں۔

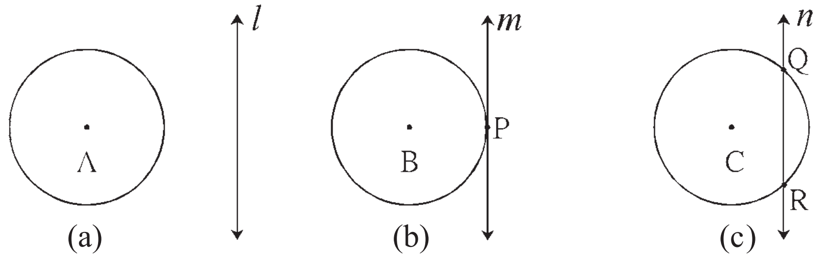
(2) دو مختلف نقاط سے بے شمار دائرے گذرتے ہیں۔

(3) تین غیر ہم خطی نقاط سے ایک اور صرف ایک ہی دائرہ گذرتا ہے۔

(4) تین ہم خطی نقاط سے ایک بھی دائرہ نہیں گذرتا۔

آیئے سمجھ لیں

قاطع خط اور مماس (Secant And Tangent)



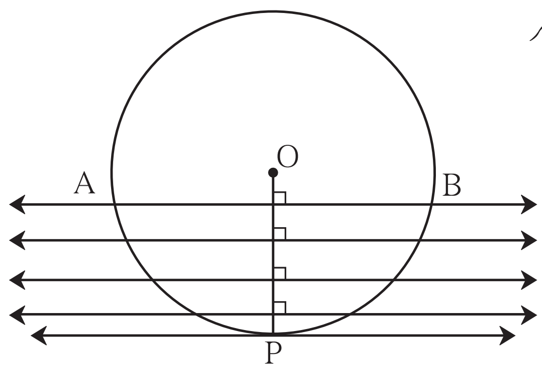
شکل **3.8**

شکل 3.8 (a) میں خط l اور دائرہ میں ایک بھی مشترک نقطہ نہیں ہے۔

شکل 3.8 (b) میں خط m اور دائرہ میں نقطہ P ایک ہی مشترک نقطہ ہے۔ یہاں خط m دائرے کا مماس ہے اور نقطہ P مماسی نقطہ یا تماسی نقطہ کہلاتا ہے۔

شکل 3.8 (c) میں خط n اور دائرے میں، دو مشترک نقاط ہیں۔ نقاط Q اور R خط n اور دائرے کے نقطہ تقاطع ہیں اور خط n، قاطع خط ہے۔ دائرے کے مماس کی ایک اہم خصوصیت ذیل کے عملی کام سے سمجھ لیجیے۔

عملی کام : مرکز 'O' والا ایک بڑا دائرہ بنایئے۔ اس دائرے کا ایک نصف قطر قطعہ OP بنایئے۔ اس نصف قطر پر ایک عمودی خط کھینچیے۔ اس خط اور دائرے کے نقطہ تقاطع کو A اور B نام دیجیے۔ غور کیجیے کہ خط AB نقطہ O سے نقطہ P کی جانب اس طرح کھسکتا ہے کہ اس کی پہلی حالت، نئی حالت کے متوازی رہے۔ یعنی کھسکتا ہوا خط AB اور نصف قطر، ان کے درمیان کا زاویہ قائمہ زاویہ برقرار رہے گا۔ ایسا ہوتے وقت نقطہ A اور نقطہ B دائرے پر ایک دوسرے کے قریب آنے لگتے ہیں۔ اور آخر میں نقطہ P میں شامل ہو جاتے ہیں۔



شکل **3.9**

اس حالت میں خط AB کی آخری حالت دائرے کا مماس ہوگا۔ البتہ نصف قطر OP اور خط AB کی نئی حالت کے درمیان کا زاویہ قائمہ زاویہ رہتا ہے۔

اس سے یہ بات سمجھ میں آتی ہے کہ دائرے کے کسی بھی نقطہ سے گذرنے والا مماس اس نقطہ کو مرکز سے جوڑنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔ اس خصوصیت کو 'مماس نصف قطر کا مسئلہ' کہتے ہیں۔

مماس – نصف قطر مسئلہ (Tangent–radius Theorem)

مسئلہ : ایک دائرے کے کسی بھی نقطہ سے گذرنے والا مماس، اس نقطہ کو مرکز سے جوڑنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔

یہ مسئلہ بالواسطہ طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں۔

مزید معلومات کے لیے :

دیا ہوا ہے : 'O' مرکز والے دائرے کو خط l، نقطہ A پر مس کرتا ہے۔ قطعہ OA نصف قطر ہے۔

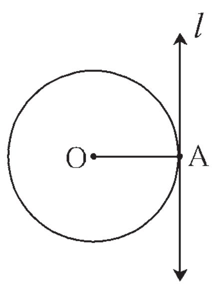
ثابت کرنا ہے : OA نصف قطر $\perp$ خط l

ثبوت : فرض کیجیے۔ خط l، خط OA پر عمود نہیں ہے۔

فرض کیجیے، نقطہ O سے گذرنے والے خط l پر دوسرا عمودی خط OB کھینچا گیا ہے۔

ظاہر ہے نقطہ B، نقطہ A سے متفرق ہونا چاہیے۔ (شکل 3.11 دیکھیے)

خط l پر نقطہ C، اس طرح لیجیے کہ A–B–C اور BA = BC



شکل 3.10

اب $\triangle$OBC اور $\triangle$OBA میں،

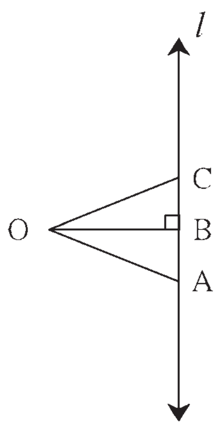
(عمل) ... قطعہ BA $\cong$ قطعہ BC

(ہر ایک قائمہ زاویہ) ... $\angle$OBA $\cong$ $\angle$OBC

(مشترک) ... قطعہ OB $\cong$ قطعہ OB

(ضل زا ضل آزمائش) ... $\therefore$ $\triangle$OBC $\cong$ $\triangle$OBA

$\therefore$ OC = OA



شکل 3.11

لیکن قطعہ OA، نصف قطر ہے۔

اس لیے OC قطعہ بھی نصف قطر ہوگا۔

$\therefore$ نقطہ C دائرے پر واقع ہوگا۔ یعنی خط l، دائرے کو نقاط A اور C دو نقاط پر قطع کرتا ہے۔

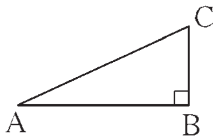
یہ بیان دیے ہوئے بیان سے متضاد ہے۔ کیونکہ خط l مماس ہے۔

لہٰذا خط l دائرے کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتا ہے۔ ... (دیا ہوا ہے)

خط l، نصف قطر OA پر عمود نہیں ہے، یہ غلط ہے۔

$\therefore$ OA نصف قطر $\perp$ خط l

آیئے ذرا یاد کریں



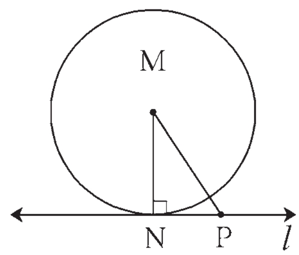
شکل 3.12

قائمۃ الزاویہ مثلث میں، وتر، سب سے بڑا ضلع ہوتا ہے، ہمارے سیکھے ہوئے کن کن مسئلوں کے ذریعے ہم اسے ثابت کر سکتے ہیں؟

آیئے سمجھ لیں

مماس- نصف قطر مسئلہ کا عکس (Converse of tangent radius theorem)

مسئلہ : دائرے کے نصف قطر کے بیرونی سرے سے گذرنے والا اور اس نصف قطر پر عمودی خط، اس دائرے کا مماس ہوتا ہے۔



شکل 3.13

دیا ہوا ہے : خط MN، مرکز M والے دائرے کا نصف قطر ہے۔

نقطہ N سے گذرنے والا خط l نصف قطر MN پر عمود ہے۔

ثابت کرنا ہے : خط l اس دائرے کا مماس ہے۔

ثبوت : خط l پر نقطہ N کے علاوہ کوئی دوسرا ایک نقطہ P لیجیے۔

قطعہ MP کھینچیے۔

اب، $\triangle MNP$ میں $\angle N$ قائمہ زاویہ ہے۔

$\therefore$ قطعہ MP وتر ہے۔

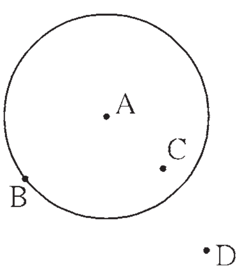
$\therefore$ قطعہ MP $>$ قطعہ MN

$\therefore$ نقطہ P کا دائرے پر واقع ہونا ممکن نہیں ہے۔ یعنی خط l پر نقطہ N کے علاوہ کوئی اور دوسرا نقطہ دائرے پر نہیں ہے۔

$\therefore$ خط l دائرے کو صرف نقطہ N پر قطع کرتا ہے۔

$\therefore$ خط l اس دائرے کا مماس ہے۔

آیئے بحث کریں

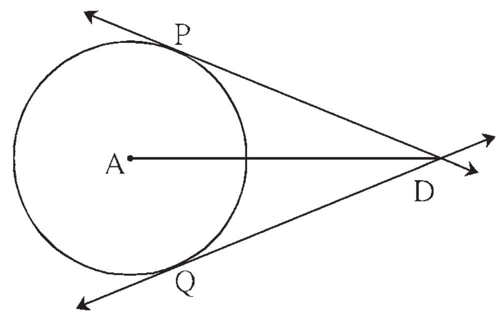


شکل 3.14

A مرکز والے دائرے پر نقطہ B دیا ہوا ہے۔ اس دائرے کا نقطہ B سے گذرنے والا مماس کھینچنا ہے۔ نقطہ B سے گذرنے والے بے شمار خطوط ہوتے ہیں۔ ان میں سے کون سا خط اس دائرے کا مماس ہوسکتا ہے؟ وہ کیسے معلوم کریں گے؟

کیا نقطہ B سے گذرنے والے ایک سے زیادہ مماس ہو سکتے ہیں؟

دائرے کے اندرون میں نقطہ C واقع ہے۔ کیا اس نقطہ سے اس دائرے پر مماس کھینچ سکتے ہیں؟



شکل 3.15

کیا دائرے کے بیرون میں واقع نقطہ D سے، دائرے کا مماس گذر سکتا ہے؟ اگر ہے تو کتنے مماس گذر سکتے ہیں؟

بحث و مباحثہ سے اس بات کا پتہ چلتا ہے کہ شکل 3.15 کے مطابق دائرے کے بیرونی نقطے سے دائرے پر دو مماس کھینچ سکتے ہیں۔

بازو کی شکل 3.15 میں خط DP اور خط DQ، دونوں مماس ہیں جو A مرکز والے دائرے کو نقطہ P اور Q پر مس کرتے ہیں۔

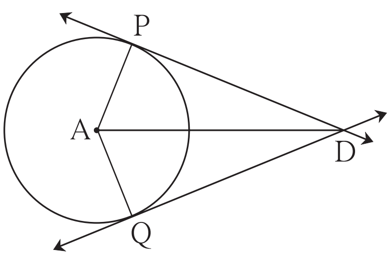
قطعہ DP اور قطعہ DQ کو مماسی قطعات کہتے ہیں۔

مماسی قطعات کا مسئلہ (Tangent seqment Theorem)

مسئلہ : دائرے کے بیرونی نقطہ سے، اس دائرے پر کھینچے گئے مماسی قطعات متماثل ہوتے ہیں۔

مقابل کی شکل کی مدد سے 'دیا ہوا ہے' اور 'ثابت کرنا ہے' طے کیجیے۔

نصف قطر AP اور AQ کھینچ کر اس مسئلہ کا ثبوت درج ذیل خالی جگہ پر کرتے ہوئے مکمل کیجیے۔



شکل 3.16

ثبوت : △PAD اور △QAD میں،

ضلع PA ≅ .... (ایک ہی دائرے کے نصف قطر)

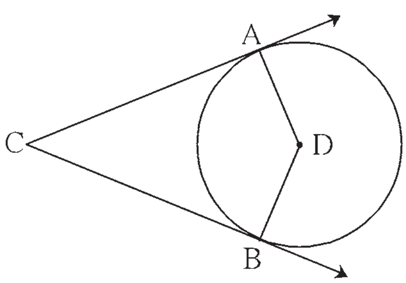
ضلع AD ≅ ضلع AD ... (..............................)

∠APD ≅ ∠AQD = 90° ... (مماس-نصف قطر کا مسئلہ)

∴ △PAD ≅ △QAD ... (..............................)

∴ ضلع DP ≅ ضلع DQ ... (..............................)

حل کردہ مثالیں



شکل 3.17

مثال (1) : دی ہوئی شکل 3.17 میں D مرکز والا دائرہ، ∠ACB کی ساقین کو نقطہ A اور نقطہ B پر مس کرتا ہے۔ اگر ∠ACB = 52° ہو تو ∠ADB کی پیمائش معلوم کیجیے۔

حل : ذوار بعۃ الاضلاع کے چاروں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 360° ہوتا ہے۔

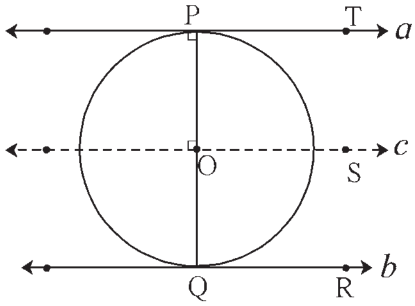
$\therefore\ \angle ACB + \angle CAD + \angle CBD + \angle ADB = 360°$

$\therefore\ 52° + 90° + 90° + \angle ADB = 360°$ ... (مماس-نصف قطر کا مسئلہ)

$\therefore\ \angle ADB + 232° = 360°$

$\angle ADB = 360° - 232° = 128°$

مثال (2) : خط a اور خط b متوازی مماس، O مرکز والے دائرے کو بالترتیب نقطہ P اور نقطہ Q پر مس کرتے ہیں، تو ثابت کیجیے۔ قطعہ PQ دائرے کا قطر ہے۔



شکل **3.18**

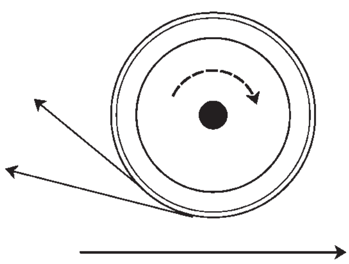
ثبوت : نقطہ O سے گذرنے والا خط c اس طرح کھینچیے جو خط a کے متوازی ہو۔
خطوط a، c، b پر بالترتیب نقاط R، S، T شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق لیجیے۔
نصف قطر OP اور نصف قطر OQ کھینچیے۔

(مماس-نصف قطر کا مسئلہ) ...	اب , $\angle OPT = 90°$
(I) ... (داخلہ زاویہ کی خصوصیت) ...	$\therefore \angle SOP = 90°$
(عمل) ...	اب, خط $a \parallel$ خط c
(دیا ہوا ہے) ...	خط $a \parallel$ خط b
(عبوری خاصیت) ...	خط $b \parallel$ خط c
(مماس-نصف قطر کا مسئلہ) ...	$\angle OQR = 90°$
(II) ... (داخلہ زاویے کی خصوصیت) ...	$\therefore \angle SOQ = 90°$
[بیان (I) اور (II) سے] ...	$\therefore \angle SOP + \angle SOQ = 90° + 90° = 180°$

$\therefore$ شعاع OP اور شعاع OQ، مخالف شعاعیں ہیں۔

$\therefore$ نقاط P، O، Q ہم خطی نقاط ہیں۔

$\therefore$ خط PQ، دائرے کا قطر ہے۔



پہیے کے بڑھنے کی سمت

آپ نے دیکھا ہوگا کہ بارش کے موسم میں راستے پر تھوڑا پانی جمع ہو اور وہاں سے تیز رفتار موٹر سائیکل گذرتی ہے تب اس کے پچھلے پہیہ سے اُڑنے والے پانی کی دھار آپ نے دیکھی ہے۔ یہ دھار دائرہ کے مماس کی طرح دکھائی دیتی ہے۔ یہ دھار ویسی ہی کیوں ہوتی ہیں؟ اس کی معلومات اپنے سائنس کے ٹیچر سے حاصل کیجیے۔

چھری تیز کرنے کے دوران سان سے نکلنے والی چنگاریوں کا مشاہدہ کیجیے کیا وہ بھی مماس کی طرح دکھائی دیتی ہیں؟

اسے ذہن نشین کرلیں

(1) مماس نصف قطر مسئلہ : دائرے کے کسی بھی نقطے سے گذرنے والا مماس اس نقطہ اور مرکزی نقطے کو ملانے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔

(2) مماس نصف قطر مسئلہ کا عکس : دائرے کے نصف قطر کے بیرونی سرے سے گذرنے والا اور اس نصف قطر پر عمودی خط، اس دائرے کا مماس ہوتا ہے۔

(3) دائرے کے بیرونی نقطے سے، اس دائرے پر کھینچے گئے مماسی قطعات متماثل ہوتے ہیں۔

مشقی سیٹ 3.1

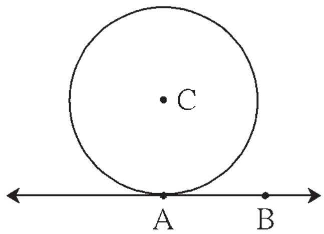
.1 متصلہ شکل 3.19 میں نقطہ C دائرے کا مرکز ہے۔ دائرے کا نصف قطر 6 سم ہے۔ خط AB دائرے کو نقطہ A پر مس کرتا ہے۔ اس معلومات کی بنا پر درج ذیل سوالات کے جوابات لکھیے۔

(1) $\angle CAB$ کی پیمائش کتنے درجے ہے؟ کیوں؟

(2) نقطہ C، خط AB سے کتنے فاصلے پر واقع ہے؟ کیوں؟

(3) اگر سم $d(A, B) = 6$ ہوتو $d(B, C)$ معلوم کیجیے۔

(4) $\angle ABC$ کی پیمائش کتنے درجے ہے؟ کیوں؟



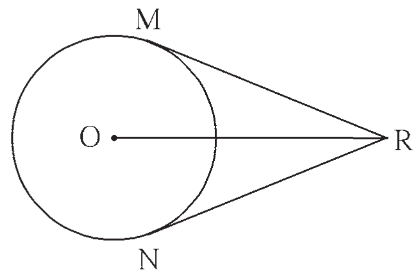
شکل 3.19

.2 بازو کی شکل میں، O مرکز والے دائرے کے بیرون میں واقع نقطہ R سے کھینچے گئے دائرے کے مماسی قطعات RM اور RN، بالترتیب M اور N نقاط پر مَس کرتے ہیں۔ اگر سم $OR = 10$ اور دائرے کا نصف قطر 5 سم ہوتو ۔

(1) ہر مماسی قطعات کی لمبائی کتنی ہے؟

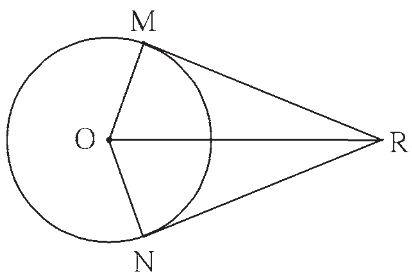
(2) $\angle MRO$ کی پیمائش کتنی ہے؟

(3) $\angle MRN$ کی پیمائش کتنی ہے؟



شکل 3.20

.3 O مرکز والے دائرے کے مماسی قطعات RM اور RN ہیں تو ثابت کیجیے کہ $\angle MRN$ اور $\angle MON$ ان دونوں زاویوں کا ناصف قطعہ OR ہے۔



شکل 3.21

.4 4.5 سم نصف قطر والے دائرے کے دو مماسی قطعات ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔ تو بتائیے کہ ان دو مماسی قطعات کے درمیان کتنا فاصلہ ہے؟ وجہ بتائیے۔

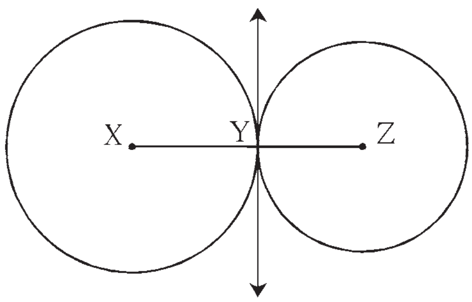
ICT Tools or Links

کمپیوٹر میں جیوجیبرا سافٹ ویئر کی مدد سے دائرہ اور دائرے کے بیرون میں واقع نقطہ سے مماسی قطعات کھینچ کر تصدیق کیجیے کہ یہ مماسی قطعات متماثل ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

مس کرنے والے دائرے (Touching circles)

عملی کام (I) :



شکل **3.22**

شکل 3.22 میں دکھائے ہوئے کے مطابق X-Y-Z ہم خطی نقاط لیجیے۔

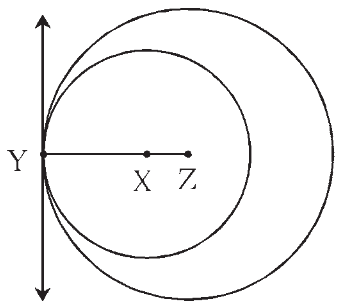
X کو مرکز مان کر XY نصف قطر والا دائرہ بنائیے۔

Z کو مرکز مان کر YZ نصف قطر کا دوسرا دائرہ بنائیے۔

آپ مشاہدہ کریں گے کہ یہ دو دائرے ایک دوسرے کو صرف ایک نقطہ Y قطع کرتے ہیں۔

نقطہ Y سے، خط XZ پر عمود کھینچیے۔ اسے ذہن میں رکھیں کہ یہ خط دونوں دائروں کا مشترک مماس ہے۔

عملی کام (II) :



شکل **3.23**

شکل 3.23 کے مطابق Y-X-Z ہم خطی نقاط لیجیے۔

Z کو مرکز مان کر ZY نصف قطر کا ایک دائرہ بنائیے۔

X کو مرکز مان کر XY نصف قطر کا دوسرا دائرہ بنائیے۔

دونوں دائرے صرف Y نقطے پر قطع کرتے ہیں۔ مشاہدہ کیجیے۔

نقطہ Y سے قطعہ YZ پر عمود کھینچیے۔ اسے ذہن نشین رکھیے کہ یہ خط دونوں دائروں کا مشترک مماس ہے۔

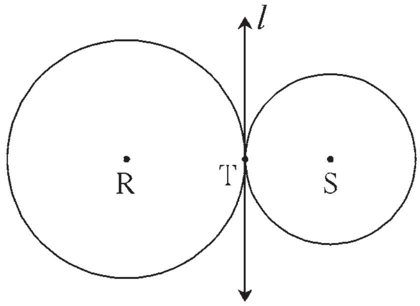
مذکورہ بالا عملی کام سے آپ یہ سمجھ چکے ہوں گے کہ دونوں شکلوں کے دائرے ایک ہی مستوی میں واقع ہیں۔ اور ایک دوسرے کو صرف ایک ہی نقطے پر قطع کرتے ہیں۔ ایسے دائروں کو ایک دوسرے کو مس کرنے والے دائرے یا مماسی دائرے کہتے ہیں۔

مس کرنے والے دائروں کی تعریف ذیل کے مطابق کر سکتے ہیں۔

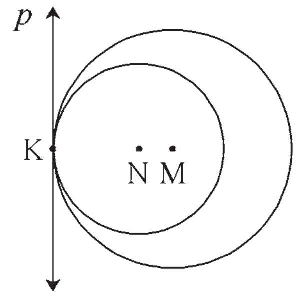
ایک ہی مستوی میں واقع دو دائرے اسی مستوی کے ایک ہی خط کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہوں تو انھیں مس کرنے والے دائرے کہتے ہیں۔

وہ خط دونوں دائروں کا مشترک مماس ہوتا ہے۔

دونوں دائرے اور خط میں واقع مشترک نقطہ کو مشترک تماسی نقطہ کہتے ہیں۔



شکل 3.24



شکل 3.25

شکل 3.24 میں، مرکز R اور S والے دو دائرے خط l کو صرف ایک نقطہ T پر قطع کرتے ہیں۔ اس لیے وہ دونوں مس کرنے والے دائرے ہیں اور خط l ان کا مشترک مماس ہے۔ اس شکل کے دائرے بیرونی طور پر مس کرنے والے دائرے ہیں۔

شکل 3.25 میں دائرے اندرونی طور پر مس کرنے والے ہیں۔ خط p، ان کا مشترک مماس ہے۔

غور کیجیے

(1) شکل 3.24 کے مطابق ایک دوسرے کو مس کرنے والے دائروں کو بیرونی طور پر مس کرنے والے دائرے کیوں کہتے ہیں؟

(2) شکل 3.25 کے مطابق ایک دوسرے کو مس کرنے والے دائروں کو اندرونی طور پر مس کرنے والے دائرے کیوں کہتے ہیں؟

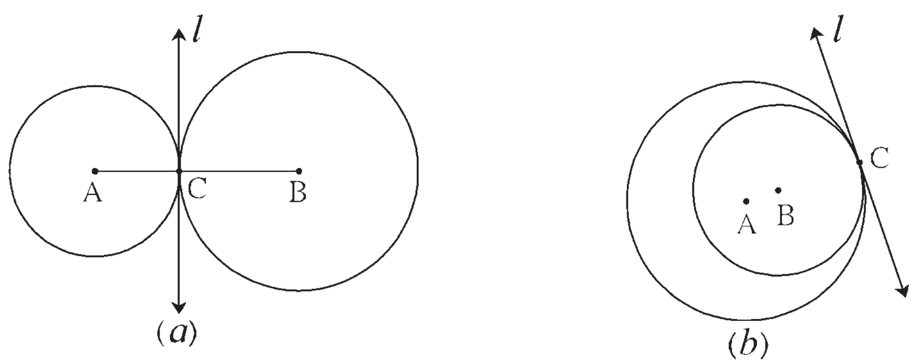
(3) شکل 3.26 میں مرکز A اور B والے دائرے کے نصف قطر بالترتیب 3 سم اور 4 سم ہوں تو

(i) شکل 3.26 (a) میں d (A, B) کتنا ہوگا؟

(ii) شکل 3.26 (b) میں d (A, B) کتنا ہوگا؟

مس کرنے والے دائروں کا مسئلہ (Theorem Of Touching Circles)

مسئلہ : ایک دوسرے کو مس کرنے والے دائروں کا تماسی نقطہ ان دائروں کے مراکز کو جوڑنے والے خط پر واقع ہوتا ہے۔



شکل 3.26

دیا ہوا ہے : A اور B ایک دوسرے کومس کرنے والے دو دائروں کے مراکز ہیں۔ان کا تماسی نقطہ C ہے۔

ثابت کرنا ہے : نقطہ C خط AB پر واقع ہے۔

ثبوت : فرض کیجیے، خط l مس کرنے والے دونوں دائروں کے نقطہ C سے گذرنے والا مشترک مماس ہے۔AC قطعہ $\perp$ l خط،

BC قطعہ $\perp$ l خط

$\therefore$ خط AC اور خط BC، خط l پر عمود ہیں۔

$\therefore$ نقطہ C سے خط l پر ایک ہی عمود کھینچ سکتے ہیں۔ C, A, B ہم خطی ہیں۔

اسے ذہن نشین کرلیں

(1) ایک دوسرے کومس کرنے والے دائروں کا مشترک نقطہ (تماسی نقطہ)، ان دائروں کے مراکز کو ملانے والے خط پر ہوتا ہے۔

(2) بیرونی طور پر مس کرنے والے دائروں کے مراکز کے درمیان فاصلہ، ان دائروں کے نصف قطروں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

(3) اندرونی طور پر مس کرنے والے دائروں کے مراکز کے درمیان فاصلہ، ان دائروں کے نصف قطروں کے فرق کے مساوی ہوتا ہے۔

مشقی سیٹ 3.2

.1 ایک دوسرے کو اندرونی طور پر مس کرنے والے دو دائروں کے نصف قطر بالترتیب 3.5 سم اور 4.8 سم ہیں۔تب ان کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

.2 بیرونی طور پر مس کرنے والے دو دائروں کے نصف قطر بالترتیب 5.5 سم اور 4.2 سم ہیں۔تب ان کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

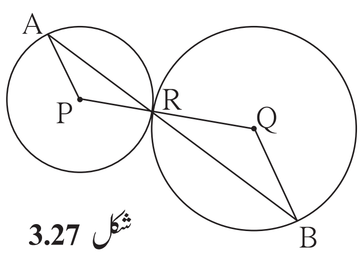
.3 اگر دو دائروں کے نصف قطر بالترتیب 4 سم اور 2.8 سم کے (i) بیرونی طور پر مس کرنے والے (ii) اندرونی طور پر مس کرنے والے دائرے بنائیے۔

.4 شکل 3.27 میں P اور Q مرکز والے دائرے ایک دوسرے کو نقطہ R پر مس کرتے ہیں۔نقطہ R سے گذرنے والا خط اس دائرے کو بالترتیب نقطہ A اور نقطہ B پر قطع کرتا ہے۔تو

(1) BQ قطعہ $\parallel$ AP قطعہ ثابت کیجیے۔

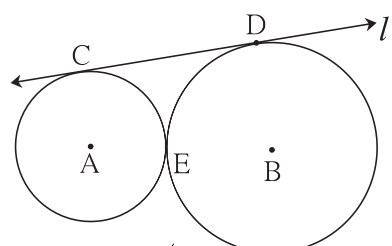
(2) ثابت کیجیے $\Delta APR \sim \Delta RQB$

(3) اگر $\angle PAR$ کی پیمائش 35° ہو تو $\angle RQB$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔



شکل 3.27

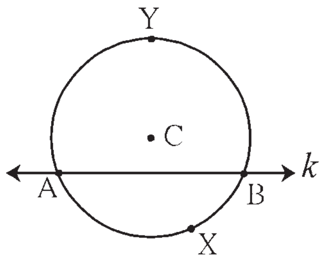
.5 شکل 3.28 میں، مرکز A اور B والے دو دائرے ہیں جو ایک دوسرے کو نقطہ E پر مس کرتے ہیں۔خط l ان کا مشترک مماس، انھیں نقاط C اور D پر مس کرتا ہے۔اگر دائروں کے نصف قطر بالترتیب 4 سم اور 6 سم ہوں تو قطعہ CD کی لمبائی کتنی ہوگی؟



شکل 3.28

آیئے ذرا یاد کریں

دائرہ کا قوس (Arc of a Circle) :



شکل 3.29

قاطع خط کی وجہ سے دائرہ دو حصوں میں تقسیم ہوتا ہے۔ ان میں سے کوئی ایک حصہ اور قاطع خط کے دائرے پر واقع دو نقاط سے مل کر حاصل ہونے والی شکل کو دائرہ کا قوس کہتے ہیں۔

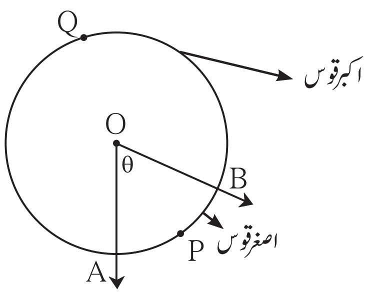
دائرہ اور قاطع خط کے نقطہ تقاطع کو قوس کے اختتامی نقاط یا قوسین کے سرے کہتے ہیں۔

شکل 3.29 میں قاطع خط k کی وجہ سے، C مرکز والے دائرے کے AYB اور AXB، دو قوس بنے ہوئے ہیں۔

قاطع خط کے جس سمت میں دائرے کا مرکز ہوتا ہے۔ اس جانب کے قوس کو اکبر قوس کہتے ہیں۔ اور مخالف سمت کے قوس کو اصغر قوس کہتے ہیں۔ شکل 3.29 میں قوس AYB اکبر قوس اور قوس AXB اصغر قوس ہے۔ کسی بھی قوس کا نام تین حروف استعمال کر کے لکھنے پر ہمیں واضح طور پر سمجھ میں آتا ہے لیکن کچھ شک نہ ہو تو اصغر قوس کا نام اختتامی نقاط کے حروف سے ظاہر کرتے ہیں۔ مثلاً شکل 3.29 میں قوس AXB کو قوس AB بھی لکھتے ہیں۔

ہم اصغر قوس کا نام لکھنے کے لیے یہی طریقہ استعمال کریں گے۔

مرکزی زاویہ (Central Angle)



شکل 3.30

جس زاویے کا راسی نقطہ دائرے کے مرکز پر واقع ہو۔ اس زاویہ کو مرکزی زاویہ کہتے ہیں۔

شکل 3.30 میں 'O' مرکز والے دائرے کا مرکزی زاویہ ∠AOB ہے۔

قاطع خط کی طرح مرکزی زاویہ کی وجہ سے بھی دائرہ دو قوسوں میں تقسیم ہوتا ہے۔

قوس کی پیمائش (Measure of an arc)

کبھی کبھار دو قوسوں کا موازنہ کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے۔ اس لیے قوس کی پیمائش کی تعریف اگلے صفحہ کے مطابق طے کی گئی ہے۔

(1) اصغر قوس کی پیمائش، اس کے نظیری مرکزی زاویہ کی پیمائش کے مساوی ہوتی ہے۔ شکل 3.30 میں مرکزی ∠AOB کی پیمائش θ ہے اس لیے اصغر قوس APB کی پیمائش بھی θ ہی ہے۔

(2) نظیری اصغرقوس کی پیائش – $360°$ = اکبرقوس کی پیائش →

(شکل 3.30 میں) ... $360° - \theta°$ = قوس APB کی پیائش – 360 = اکبرقوس AQB کی پیائش

(3) نصف دائرہ کے قوس کی پیائش، یعنی نصف دائرے کی پیائش $180°$ ہوتی ہے۔

(4) مکمل دائرے کی پیائش $360°$ ہوتی ہے۔

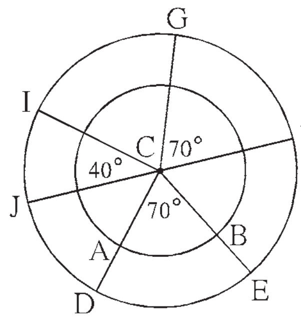
آیئے سمجھ لیں

قوسین کی متماثلت (Congruence of arcs)

جب دو ہم مستوی شکلیں ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں، تب ایسا کہا جاتا ہے کہ وہ شکلیں ایک دوسرے کے متماثل ہوتی ہیں۔ یہ ہمیں معلوم ہے کہ متماثلت کے اس تصور کی مدد سے مساوی پیائش کے زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

اسی طرح دو قوسین کی پیائش مساوی ہو تو کیا وہ دونوں قوس متماثل ہو سکتے ہیں؟

اس سوال کا جواب درج ذیل عملی کام کے ذریعے معلوم کیجیے۔



شکل 3.31

عملی کام : شکل 3.31 کے مطابق C مرکز والے دو دائرے بنایئے۔ $\angle DCE$ اور $\angle FCG$ مساوی پیائشوں کے دو زاویے بنایئے۔ ان زاویوں کی پیائشوں کے علاوہ مختلف پیائش کا زاویہ ICJ بنایئے۔

$\angle DCE$ کی ساقین، اندرونی دائرے کو قطع کرنے کی وجہ سے حاصل ہونے والے قوس کا نام AB دیجیے۔

قوس کی پیائش کی تعریف کی بنا پر قوس AB اور قوس DE کی پیائش مساوی ہے، کیا یہ آپ کو سمجھ میں آ گیا؟

کیا یہ قوس ایک دوسرے کو مکمل طور پر منطبق ہوتے ہیں؟ یقینی طور منطبق نہیں ہوتے۔

اب C – DE، C – FG اور C – IJ ان قوسی تراشوں کو کاٹ کر جدا کیجیے۔ انھیں ایک دوسرے سے جوڑ کر DE ، FG اور IJ ان میں سے کون سے قوس ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں؟ دیکھیے۔

اس عملی کام سے دو قوسوں کو متماثل ہونے کے لیے ان کی پیائش مساوی ہونا کافی نہیں، یہ بات ذہن نشین کیجیے۔

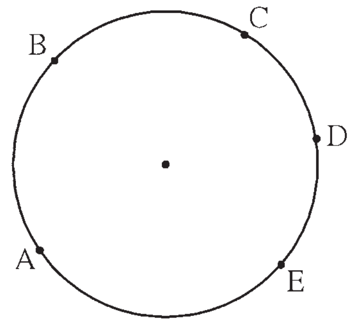
دو قوسوں کو متماثل ہونے کے لیے اور کون سی شرط کا مکمل ہونا ضروری ہے کیا ایسا آپ کو محسوس ہوتا ہے؟

اوپر کے عملی کام سے یہ بات ذہن میں آتی ہے کہ،

دو قوس کے نصف قطر اور ان کی پیائش متماثل ہوں تو وہ دو قوسین ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔

قوس DE اور قوس GF متماثل ہیں۔ اسے 'قوس DE ≅ قوس GF' سے ظاہر کرتے ہیں۔

قوسین کے پیمائشوں کے مجموعے کی خصوصیت (Property of sum of measures of arcs)



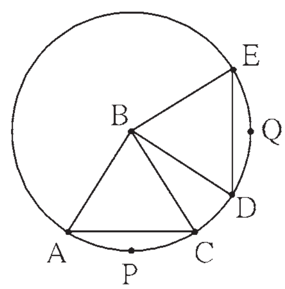
شکل 3.32

شکل 3.32 میں D،C،B،A اور E ایک ہی دائرے پر واقع نقاط ہیں۔ ان نقاط کی وجہ سے کئی قوس بن گئے ہیں۔ ان میں سے قوس ABC اور قوس CDE دونوں میں صرف ایک نقطہ C مشترک ہے۔ اس لیے قوس ABC اور قوس CDE کی پیمائش کا مجموعہ قوس ACE کی پیمائش کے مساوی ہے۔

$m($قوس$\ ABC) + m\ ($قوس$\ CDE) = m($قوس$\ ACE)$

لیکن قوس ABC اور قوس BCE میں ایک سے زائد نقاط [قوس BC کے تمام نقاط] مشترک ہیں۔ اس لیے قوس ABC اور قوس BCE کی پیمائشوں کا مجموعہ قوس ABE کی پیمائش کے مساوی نہیں ہے۔

مسئلہ : ایک ہی دائرے کے (یا متماثل دائروں کے) متماثل قوسین کے نظیری وتر متماثل ہوتے ہیں۔



شکل 3.33

دیا ہوا ہے : B مرکز والے دائرے میں DQE قوس $\cong$ APC قوس

ثابت کرنا ہے : DE وتر $\cong$ AC وتر

ثبوت : (خالی جگہ پر کرتے ہوئے ثبوت مکمل کیجیے)

$\triangle ABC$ اور $\triangle DBE$ میں،

ضلع DB $\cong$ ضلع AB	... (..........................)
ضلع .... $\cong$ ضلع	... (..........................)
$\angle ABC \cong \angle DBE$	... (متماثل قوسین کی تعریف)
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DBE$	... (..........................)
$\therefore$ وتر AC $\cong$ وتر DE	... (..........................)

مسئلہ : ایک دائرے کے (یا متماثل دائروں کے) متماثل وتروں کے نظیری قوسین متماثل ہوتے ہیں۔

دیا ہوا ہے : قطعہ PQ اور قطعہ RS یہ O مرکز والے دائرے کے متماثل وتر ہیں۔

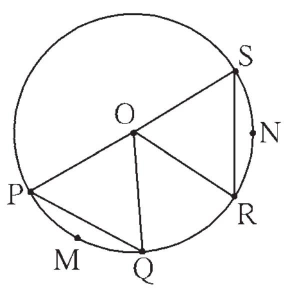
ثابت کرنا ہے : RNS قوس $\cong$ PMQ قوس

ذیل کی باتوں پر غور کرتے ہوئے ثبوت لکھیے۔

دو قوسین متماثل ہونے کے لیے ان کے نصف قطر اور پیمائش مساوی ہونا ضروری ہے۔

قوس PMQ اور قوس RNS صرف ایک ہی دائرے کے قوسین ہیں۔

اس لیے ان کے نصف قطر مساوی ہیں۔



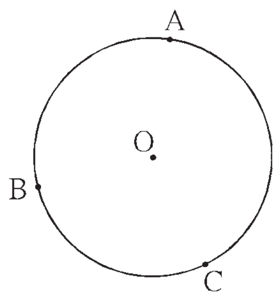
شکل 3.34

ان قوسین کی پیائش یعنی ان کے نظیری مرکزی زاویوں کی پیائش ہوتی ہے۔ یہ مرکزی زاویہ حاصل کرنے کے لیے نصف قطر OR, OQ, OP اور OS کا کھینچنا ضروری ہے۔ ان کو کھینچنے پر حاصل ہونے والے $\triangle$OPQ اور $\triangle$ORS کیا متماثل ہوں گے؟
اوپر کے دونوں مسئلے آپ متماثل دائروں کے لیے ثابت کیجیے۔

غور کیجیے

- اوپر کے دو مسئلوں میں سے پہلے مسئلہ میں قوس APC اور قوس DQE، یہ دونوں اصغر قوس متماثل فرض کیے گئے ہیں۔ ان کے نظیری اکبر قوس متماثل فرض کر کے کیا اس مسئلہ کو ثابت کر سکتے ہیں؟
- دوسرے مسئلہ میں کیا متماثل وتروں کے نظیری اکبر قوس بھی متماثل ہو سکتے ہیں؟
وتر PQ اور وتر RS جب قطر ہوں، تب کیا یہ مسئلہ درست ہوگا؟

حل کردہ مثالیں



شکل 3.35

مثال (1) : 'O' مرکز والے دائرے پر A، B، C یہ تین نقاط واقع ہیں۔

(i) ان تین نقاط کی وجہ سے بننے والے تمام قوسوں کے نام لکھیے۔

(ii) جب قوس BC اور قوس AB کی پیائش بالترتیب $110°$ اور $125°$ ہو تب بقیہ تمام قوسوں کی پیائش معلوم کیجیے۔

حل : (i) قوسوں کے نام۔

قوس AB، قوس BC، قوس AC، قوس ABC، قوس ACB، قوس BAC

(ii) قوس BC کی پیائش + قوس AB کی پیائش = قوس ABC کی پیائش

$= 125° + 110° = 235°$

قوس ABC کی پیائش – $360°$ = قوس AC کی پیائش

$= 360° - 235° = 125°$

اسی طرح،

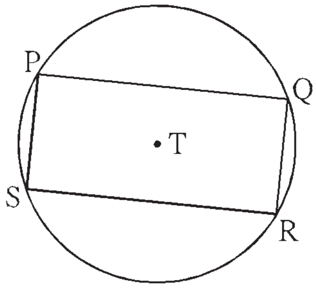
قوس ACB کی پیائش $= 360° - 125° = 235°$

اور

قوس BAC کی پیائش $= 360° - 110° = 250°$

مثال (2) : شکل 3.36 میں T مرکز والے دائرے میں مستطیل PQRS حائط ہے تو دکھائیے کہ

(i) قوس SR ≅ قوس PQ   (ii) قوس PQR ≅ قوس SPQ



شکل 3.36

حل : (i) □PQRS ایک مستطیل ہے۔

(مستطیل کے مقابل کے اضلاع) ... وتر SR ≅ وتر PQ ∴

(متماثل وتر کے نظیری قوس) ... قوس SR ≅ قوس PQ ∴

(ii) (مستطیل کے مقابل کے اضلاع) ... وتر QR ≅ وتر PS ∴

(متماثل وتر کے نظیری قوس) ... قوس QR ≅ قوس SP ∴

قوس SP اور قوس QR کی پیمائش مساوی ہے۔

قوس PQ اور قوس QR کی پیمائشوں کا مجموعہ = قوس SP اور قوس QR کی پیمائشوں کا مجموعہ

قوس PQR کی پیمائش = قوس SPQ کی پیمائش ∴

قوس PQR ≅ قوس SPQ ∴

اسے ذہن نشین کرلیں

(1) جس زاویے کا راس، دائرے کے مرکز پر ہو اس زاویے کو مرکزی زاویہ کہتے ہیں۔

(2) قوس کے پیمائش کی تعریف (i) اصغر قوس کی پیمائش، اس کے نظیری مرکزی زاویے کی پیمائش کے مساوی ہوتی ہے۔

(ii) نظیری اصغر قوس کی پیمائش − 360° = اکبر قوس کی پیمائش → (iii) نصف دائرے کے قوس کی پیمائش 180° ہوتی ہے۔

(3) دو قوسین کے نصف قطر اور پیمائش مساوی ہوں تب وہ متماثل ہوتے ہیں۔

(4) ایک ہی دائرے کے قوس ABC اور قوس CDE میں جب C صرف ایک ہی نقطہ مشترک ہو تب،

m(قوس ABC) + m(قوس CDE) = m(قوس ACE)

(5) ایک ہی دائرے (یا متماثل دائروں) کے متماثل قوسین کے نظیری وتر، متماثل ہوتے ہیں۔

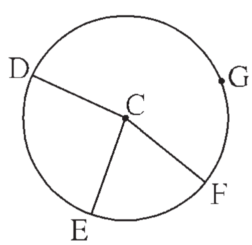
(6) ایک ہی دائرے (یا متماثل دائروں) کے متماثل وتروں کے نظیری قوس، متماثل ہوتے ہیں۔

مشقی سیٹ 3.3

.1 شکل 3.37 میں،

C مرکز والے دائرے پر E,D,G اور F نقاط واقع ہیں۔

∠ECF کی پیمائش 70° اور قوس DGF کی پیمائش 200° ہو تو قوس DE اور قوس DEF کی پیمائش معلوم کیجیے۔

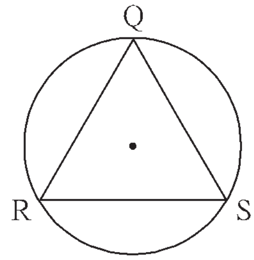


شکل 3.37

*2. شکل 3.38 میں △QRS متساوی الاضلاع مثلث ہے۔تو دکھائیے کہ

(1) قوس QR ≅ قوس QS ≅ قوس RS

(2) قوس QRS کی پیائش °240 ہے۔

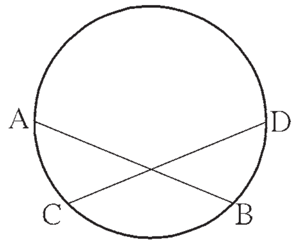


شکل 3.38

3. شکل 3.39 میں CD وتر ≅ AB وتر

تو ثابت کیجیے کہ

قوس BD ≅ قوس AC



شکل 3.39

آیئے سمجھ لیں

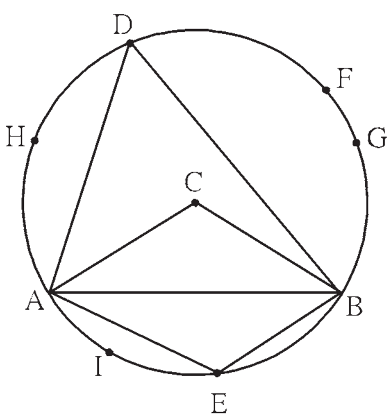
دائرے اور نقطہ، دائرہ اور خط (مماس) ان کے ایک دوسرے سے تعلق کی کچھ خصوصیات کا ہم نے مطالعہ کر چکے ہیں۔اب دائرے اور زاویہ کے درمیان تعلق کی کچھ خصوصیات کا مطالعہ کریں گے۔ان میں سے کچھ خصوصیات پہلے ہم عملی کام کے ذریعے معلوم کریں گے۔

عملی کام (I) :

'C' مرکز والا ایک بڑا دائرہ بنائیے۔شکل 3.40 کے مطابق وتر AB کھینچیے۔ مرکزی زاویہ ACB کھینچیے۔ وتر AB سے بنے ہوئے اکبر قوس پر نقطہ D اور اصغر قوس پر نقطہ E لیجیے۔

(1) ∠ADB اور ∠ACB کی پیائش کیجیے۔ان کی پیائشوں کا موازنہ کیجیے۔

(2) ∠ADB اور ∠AEB کی پیائش کیجیے۔ان کی پیائشوں کی جمع کرکے دیکھیے ۔



شکل 3.40

(3) قوس ADB پر H,G,F اس طرح کچھ نقاط لیجیے۔ $\angle AFB$، $\angle AGB$ ، $\angle AHB$ ، .... ان کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔
ان پیمائشوں کا $\angle ADB$ کی پیمائش سے اور ایک دوسرے سے بھی موازنہ کیجیے۔

(4) قوس AEB پر ایک اور نقطہ I لیجیے۔ $\angle AIB$ کی پیمائش کیجیے اور اس پیمائش کا $\angle AEB$ کی پیمائش سے موازنہ کیجیے۔
اس عملی کام سے آپ کو درج ذیل مشاہدات حاصل ہوں گے۔

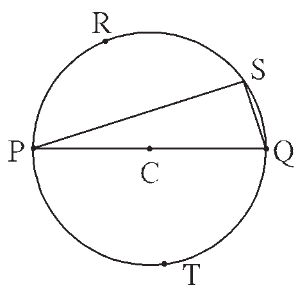
(1) $\angle ACB$ کی پیمائش $\angle ADB$ کی پیمائش کے دگنا ہے۔

(2) $\angle ADB$ اور $\angle AEB$ کی پیمائشوں کا مجموعہ $180°$ ہے۔

(3) $\angle AHB$، $\angle ADB$، $\angle AFB$، $\angle AGB$ ان تمام کی پیمائشیں مساوی ہیں۔

(4) $\angle AEB$ اور $\angle AIB$ کی پیمائشیں مساوی ہیں۔

عملی کام (II) :

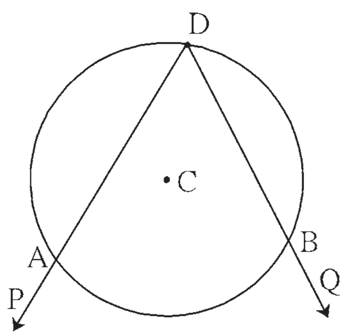


شکل 3.41

شکل 3.41 کے مطابق 'C' کو مرکز مان کر ایک بڑا دائرہ بنائیے۔ قطعہ PQ اس کا کوئی ایک قطر کھینچیے۔ اس قطر سے بنے ہوئے دونوں نصف دائروں پر نقاط T,S,R لیجیے۔ $\angle PRQ$، $\angle PSQ$، $\angle PTQ$ کی پیمائش کیجیے۔ ان میں سے ہر ایک زاویہ، قائمہ زاویہ ہے۔ مشاہدہ کیجیے۔

اوپر کے عملی کام سے آپ کو دکھائی دینے والی خصوصیت یعنی دائرے اور زاویے سے متعلق مسئلہ ہے۔ اس مسئلہ کا ثبوت کا اب ہم مطالعہ کریں گے۔ اس سے پہلے ہمیں بعض اصطلاحات کا تعارف حاصل کریں گے۔

قوسی زوایہ (Inscribed Angle)



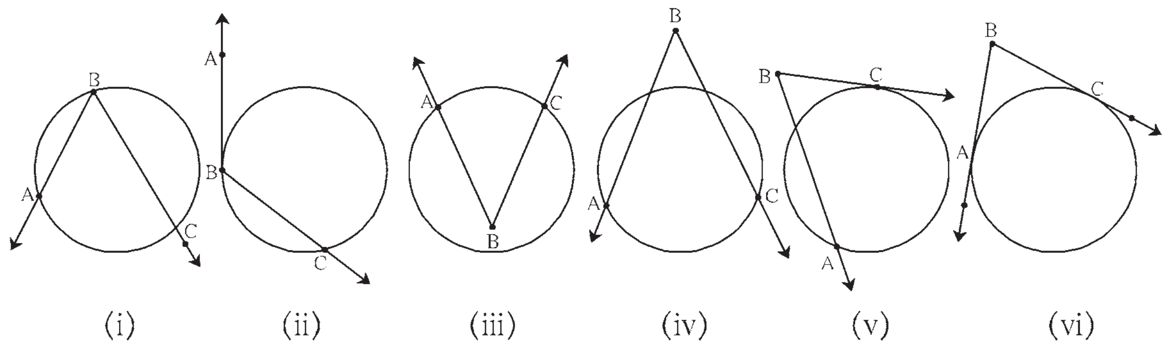
شکل 3.42

شکل 3.42 میں دائرے کا مرکز 'C' ہے۔ $\angle PDQ$ کا راس D، دائرے پر واقع ہے۔ زاویے کی ساقین DP اور DQ دائرے کو بالترتیب نقاط A اور B پر قطع کرتی ہیں۔ ایسے زاویے کو دائرے کا قوسی زاویہ کہتے ہیں۔

شکل 3.42 میں $\angle ADB$، قوس ADB کا قوسی زاویہ ہے اور قوس ADB میں حائط ہے۔

مقطوعہ قوس (Intercepted Arc)

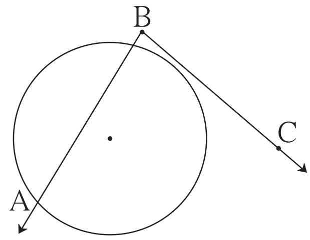
ذیل کی شکل 3.43 میں (i) سے (vi) ان تمام اشکال کا مشاہدہ کیجیے۔



شکل 3.43

ہر شکل میں $\angle ABC$ کے اندرونی حصہ میں شامل قوس کو $\angle ABC$ کا مقطوعہ قوس کہتے ہیں۔ مقطوعہ قوس کے اختتامی نقاط، دائرہ اور زاویہ کے نقطہ تقاطع ہوتے ہیں۔ زاویے کے ہر ساق پر قوس کا ایک اختتامی نقطہ ہونا ضروری ہے۔

شکل 3.43 میں (i)، (ii) اور (iii) ان اشکال میں زاویوں کا صرف ایک ہی مقطوعہ قوس ہے۔ لیکن (iv)، (v) اور (vi) میں ہر زاویہ کے دو مقطوعہ قوسین ہیں۔



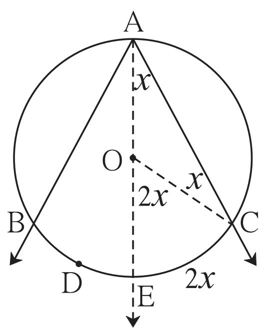
شکل 3.44

جبکہ شکل (ii) اور (v) میں زاویہ کی ایک ساق اور (vi) میں زاویہ کی دونوں ساقین دائرے کو مس کرتے ہیں، اسے بھی ذہن نشین رکھیے۔

شکل 3.44 میں قوس، مقطوعہ نہیں ہے۔ کیونکہ زاویے کی ساق BC پر قوس کا ایک بھی اختتامی نقطہ واقع نہیں ہے۔

قوسی زاویے کا مسئلہ (Inscribed angle Theorem)

مسئلہ : دائرے میں قوسی زاویے کی پیمائش، اس کے مقطوعہ قوس کی پیمائش کا نصف ہوتی ہے۔



شکل 3.45

دیا ہوا ہے : دائرے کا مرکز 'O' ہے۔

$\angle BAC$، قوس BAC کا قوسی زاویہ ہے۔

اس زاویے کی وجہ سے قوس BDC مقطوعہ قوس بن گیا ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\angle BAC = \frac{1}{2}\, m($قوس BDC$)$

عمل : شعاع AO کھینچیے جو دائرہ کو نقطہ E پر قطع کرتی ہے۔ نصف قطر OC کھینچیے۔

ثبوت : $\triangle AOC$ میں،

(ایک ہی دائرے کے نصف قطر) ... ضلع $OA \cong$ ضلع OC

(متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ) ... $\therefore \angle OAC \cong \angle OCA$

... (I) (فرض کیجیے) ... $\angle OAC \cong \angle OCA = x$

(مثلث کے خارجہ زاویے کا مسئلہ) ... اب، $\angle EOC = \angle OAC + \angle OCA$

$$= x^\circ + x^\circ = 2x^\circ$$

لیکن، $\angle EOC$ مرکزی زاویہ ہے۔

... (II) (قوس کی پیمائش کی تعریف) ... $\therefore \quad m(\text{قوس } EC) = 2x^\circ$

$\therefore$ بیان (I) اور (II) کی رو سے،

... (III) $\angle OAC = \angle EAC = \frac{1}{2} m(\text{قوس } EC)$

اسی طرح، نصف قطر OB کھینچیے۔

... (IV) ... (یہ ثابت کر سکتے ہیں) ... $\angle EAB = \frac{1}{2} m(\text{قوس } BE)$

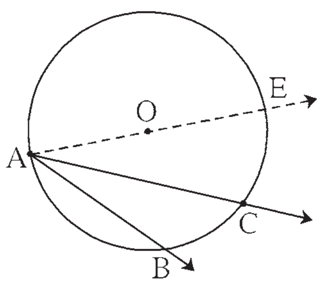
[(III) اور (IV) کی بنا پر] ... $\therefore \quad \angle EAC + \angle EAB = \frac{1}{2} m(\text{قوس } EC) + \frac{1}{2} m(\text{قوس } BE)$

$$\therefore \quad \angle BAC = \frac{1}{2} [m(\text{قوس } EC) + m(\text{قوس } BE)]$$

... (V) $= \frac{1}{2} [m(\text{قوس } BEC)] = \frac{1}{2} [m(\text{قوس } BDC)]$

ذہن نشین رکھیں کہ دائرے کا قوسی زاویے اور مرکزی زاویے کے تعلق سے تین امکانات ہوتے ہیں۔ کسی دائرے کا مرکز زاویے کی ساق پر واقع ہو، زاویے کے اندرون میں واقع ہو، یا بیرون میں۔ ان میں سے پہلے دو امکانات (III) اور (V) میں ثابت ہو چکے ہیں۔ اب تیسرے امکان کے متعلق غور کیجیے۔

شکل 3.46 میں



شکل 3.46

$\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE$

[(III) کی بنا پر] ... $= \frac{1}{2} m(\text{قوس } BCE) - \frac{1}{2} m(\text{قوس } CE)$

$$= \frac{1}{2} [m(\text{قوس } BCE) - m(\text{قوس } CE)]$$

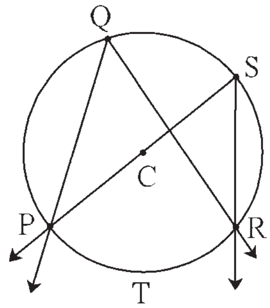
... (VI) $= \frac{1}{2} [m(\text{قوس } BC)]$

اس مسئلہ کا بیان ذیل کے مطابق بھی لکھ سکتے ہیں۔

دائرے کے قوس سے، دائرے کے کسی بھی نقطے پر بننے والے محاذی زاویے **(subtended angle)** کی پیمائش، اسی قوس کے مرکز پر بننے والے محاذی زاویے کی پیمائش کا نصف ہوتی ہے۔

اس مسئلہ کو آگے کی مطابق ضمنی مسئلوں کے بیانات کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

قوسی زاویہ کے مسئلہ کے ضمنی مسئلے (Corollaries of inscribed angle theorem)



شکل 3.47

(1) ایک ہی قوس میں بننے والے تمام قوسی زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

شکل 3.47 کی مدد سے 'دیا ہوا ہے' اور 'ثابت کرنا ہے' لکھیے۔

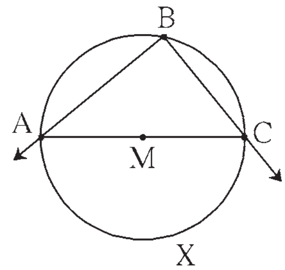
مندرجہ ذیل سوالات پر غور کیجیے اور ثبوت لکھیے۔

(1) ∠PQR کا کون سا قوس، مقطوعہ قوس ہے؟

(2) ∠PSR کا کون سا قوس، مقطوعہ قوس ہے؟

(3) قوسی زاویے کی پیمائش اور اس کے مقطوعہ قوس کی پیمائش میں کیا تعلق ہوتا ہے؟

(2) نصف دائرے میں بننے والا قوسی زاویہ، قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔



شکل 3.48

شکل 3.48 کی مدد سے اس مسئلہ کا 'دیا ہوا ہے'، 'ثابت کرنا ہے' اور 'ثبوت' لکھیے۔

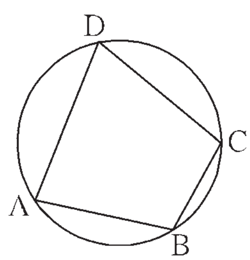
مستقیم المحیط ذو اربعۃ الاضلاع (Cyclic quadrilateral)

ذو اربعۃ الاضلاع کے چاروں راس ایک ہی دائرے پر واقع ہوں تب اس ذو اربعۃ الاضلاع کو مستقیم المحیط ذو اربعۃ الاضلاع کہتے ہیں۔

مستقیم المحیط ذو اربعۃ الاضلاع کا مسئلہ (Theorem of cyclic quadrilateral)

مسئلہ : مستقیم المحیط ذو اربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے متمم ہوتے ہیں۔

اس مسئلہ کا ثبوت مندرجہ ذیل خالی جگہ پر کرتے ہوئے مکمل کر کے لکھیے۔



شکل 3.49

دیا ہوا ہے : ☐ [ ] مستقیم المحیط ذو اربعۃ الاضلاع ہے۔

ثابت کرنا ہے : ∠B + ∠D = [ ]

[ ] + ∠C = 180

ثبوت : ∠ADC، قوسی زاویہ ہے، اور اس کا مقطوعہ قوس ABC ہے۔

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}$ [ ] ... (I)

اسی طرح [ ] قوسی زاویہ ہے۔ اور اس کا مقطوعہ قوس ADC ہے۔

$\therefore$ $\square = \frac{1}{2}$ m(قوس ADC) ... (II)

$\therefore$ $\angle ADC + \square = \frac{1}{2}\ \square + \frac{1}{2}$ m(قوس ADC) ... [بیان (I) اور (II) کی بنا پر]

$= \frac{1}{2}\ [\square$ + m(قوس ADC)]

$= \frac{1}{2} \times 360^\circ$ ... (قوس ABC اور قوس ADC مل کر مکمل دائرہ بنتا ہے)

$= \square$

اسی طرح، $\angle A + \angle C = \square$ بھی ثابت کرسکتے ہیں۔

مستقیم المحیط ذو اربعۃ الاضلاع کے مسئلہ کا ضمنی مسئلہ (Corollary of cyclic quadrilateral theorem)

مستقیم المحیط ذو اربعۃ الاضلاع کا خارجہ زاویہ، اس کے متصلہ زاویے کے مقابل کے زاویے کے متماثل ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کا ثبوت آپ لکھیے۔

غور کیجیے

مذکورہ بالا مسئلہ میں $\angle B + \angle D = 180^\circ$، اسے ثابت کرنے پر بقیہ مقابل کے زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ بھی 180° ہے۔

کیا یہ دوسرے طریقے سے ثابت کیا جاسکتا ہے؟

مستقیم المحیط ذو اربعۃ الاضلاع کے مسئلہ کا عکس (Converse of cyclic quadrilateral theorem)

مسئلہ : ذو اربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے متمم ہوں، تب وہ ذو اربعۃ الاضلاع مستقیم المحیط ہوتا ہے۔

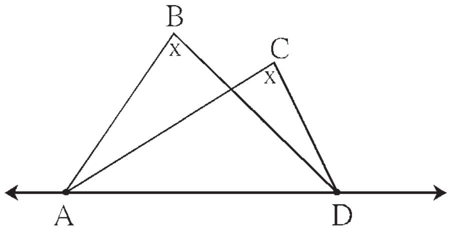
یہ مسئلہ بالواسطہ طریقے سے ثابت کرسکتے ہیں۔ آپ کوشش کیجیے۔

مذکورہ بالا مسئلہ کے عکس سے ہمیں اس بات کا پتہ چلتا ہے کہ ذو اربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے جب متمم ہوں تب ہم جانتے ہیں کہ وہ ذو اربعۃ الاضلاع مستقیم المحیط ہوتا ہے۔ ہر مثلث کا ایک حائط دائرہ ہوتا ہے۔ لیکن ہر ذو اربعۃ الاضلاع مستقیم المحیط نہیں ہوتا۔ آپ مشاہدہ کیجیے۔

کون سی شرط پوری ہوجائے تب ذو اربعۃ الاضلاع مستقیم المحیط ہوتا ہے۔ یعنی ذو اربعۃ الاضلاع کے تمام راسی نقاط دائرے پر واقع ہوں، یہ بات ہمیں اوپر کے مسئلہ سے سمجھ میں آتی ہے۔

ایک اور مختلف حالت میں چار غیر ہم خطی نقاط مستقیم المحیط ہوتے ہیں۔ یہ آگے کے مسئلے میں بتایا گیا ہے۔

مسئلہ : کسی خط پر واقع کوئی دو متفرق نقاط، اسی خط کے ایک ہی جانب واقع دو متفرق نقاط پر متماثل زاویے بناتے ہوں تب وہ چار نقاط ایک ہی دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔



شکل 3.50

دیا ہوا ہے : نقطہ B اور C خط AD کے ایک ہی جانب واقع ہو۔

$\angle ABD \cong \angle ACD$

ثابت کرنا ہے : نقاط A، B، C اور D ایک ہی دائرے پر واقع ہیں۔

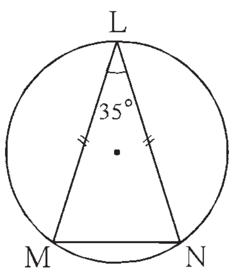
(یعنی $\square$ABCD مستقیم المحیط ذواربعۃ الاضلاع ہے) اس مسئلہ کا بھی ہم بالواسطہ ثبوت لکھ سکتے ہیں۔

غور کیجیے

مذکورہ بالا مسئلہ کس مسئلہ کا عکس ہے؟

حل کردہ مثالیں

مثال (1) : شکل 3.51 میں وتر LN $\cong$ وتر LM اور $\angle L = 35^\circ$ ہو تو



شکل 3.51

(i) m(قوس MN) = ?

(ii) m(قوس LN) = ?

حل : (i) $\angle L = \frac{1}{2}$ m(قوس MN) ... (قوسی زاویے کا مسئلہ)

$\therefore 35 = \frac{1}{2}$ m(قوس MN)

$\therefore 2 \times 35 =$ m(قوس MN) $= 70^\circ$

(ii) m(قوس MLN) $= 360^\circ -$ m(قوس MN) ... (قوس کی پیمائش کی تعریف)

$= 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$

اب , وتر LM $\cong$ وتر LN

$\therefore$ قوس LM $\cong$ قوس LN

لیکن , m(قوس LM) + m(قوس LN) = m(قوس MLN) = 290° ... (قوسین کے جمع کی خصوصیت)

m(قوس LM) = m(قوس LN) = $\frac{290^\circ}{2} = 145^\circ$

یا (ii) وتر LM $\cong$ وتر LN

$\therefore \angle M = \angle N$ ... (متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ)

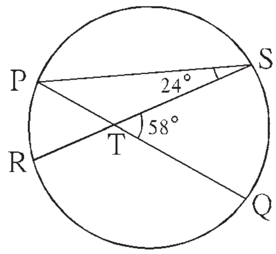
$\therefore 2\angle M = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$

$\therefore \angle M = \frac{145^\circ}{2}$

(قوسی زاویے کا مسئلہ) ... اب , $m($قوس $LN) = 2 \times \angle M$

$= 2 \times \frac{145^\circ}{2} = 145^\circ$

مثال (2) : شکل 3.52 میں وتر PQ اور وتر RS، ایک دوسرے کو نقطہ T پر قطع کرتے ہیں۔



شکل 3.52

(i) اگر $\angle STQ = 58^\circ$ اور $\angle PSR = 24^\circ$ ہو تو $m($قوس $SQ)$ معلوم کیجیے۔

(ii) $\angle STQ = \frac{1}{2}[m($قوس $PR) + m($قوس $SQ)]$ اس کی تصدیق کیجیے۔

(iii) وتر PQ اور وتر RS میں زاویے کی پیائش کوئی بھی ہو تب بھی ثابت کیجیے کہ

$\angle STQ = \frac{1}{2}[m($قوس $PR) + m($قوس $SQ)]$

(iv) اس مثال میں ثابت ہونے والی خصوصیت کو الفاظ میں لکھیے۔

حل : (مثلث کے خارجہ زاویے کا مسئلہ) ... (i) $\angle SPQ = \angle SPT = 58^\circ - 24^\circ = 34^\circ$

$m($قوس $QS) = 2\angle SPQ = 2 \times 34^\circ = 68^\circ$

(ii) $m($قوس $PR) = 2\angle PSR = 2 \times 24^\circ = 48^\circ$

اب , $\frac{1}{2}[m($قوس $PR) + m($قوس $SQ)] = \frac{1}{2}[48 + 68]$

$= \frac{1}{2} \times 116 = 58^\circ$

$= \angle STQ$

(iii) اس خصوصیت کے ثبوت کے لیے خالی چوکون پر کر کے مکمل کیجیے۔

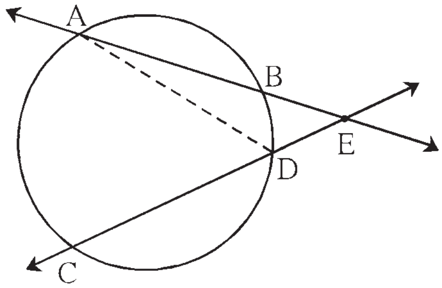
(مثلث کے خارجہ زاویے کا مسئلہ) ... $\angle STQ = \angle SPQ + \square$

(قوسی زاویے کا مسئلہ) ... $= \frac{1}{2}m($قوس $SQ) + \square$

$= \frac{1}{2}[\square + \square]$

(iv) دائرے کے وتر ایک دوسرے کو دائرے کے اندرون میں قطع کرتے ہوں تب ان وتروں میں بننے والے زاویے کی پیائش اس زاویے کے مقطوعہ قوس اور اس کے مخالف زاویہ کا مقطوعہ قوس کی پیائشوں کے مجموعہ کے نصف ہوتی ہے۔

مثال (3) : ثابت کیجیے کہ دائرے کے وتروں کو شامل کرنے والے خطوط دائرے کے بیرون میں قطع کرتے ہوں تو ان خطوط کے درمیان کا زاویہ، اس زاویہ کے مقطوعہ قوسین کی پیمائش کے فرق کا نصف ہوتا ہے۔



شکل 3.53

دیا ہوا ہے : دائرے کے وتر AB اور وتر CD، دائرے کے بیرون میں نقطہ E پر قطع کرتے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : $\angle AEC = \frac{1}{2}$ [m(قوس AC) − m(قوس BD)]

عمل : قطعہ AD کھینچیے۔

ثبوت : اس خصوصیت کا ثبوت اوپر کی دی ہوئی مثال (2) میں دیے ہوئے ثبوت کے مطابق دے سکتے ہیں۔
اس کے لیے △AED کے داخلہ زاویے اور اس کے خارجہ زاویے وغیرہ پر غور کیجیے اور ثبوت لکھیے۔

اسے ذہن نشین کرلیں

(1) دائرے کے قوسی زاویے کی پیمائش، اس کے مقطوعہ قوس کی پیمائش کے نصف ہوتی ہے۔

(2) دائرے کے ایک ہی قوس پر بننے والے قوسی زاویوں کی پیمائشیں متماثل ہوتی ہے۔

(3) نصف دائرے میں بننے والا قوسی زاویہ، قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

(4) ذواربعۃ الاضلاع کے چاروں راس ایک ہی دائرے پر واقع ہوں تو اس ذواربعۃ الاضلاع کو مستقیم المحیط ذواربعۃ الاضلاع کہتے ہیں۔

(5) مستقیم المحیط ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے متمم ہوتے ہیں۔

(6) مستقیم المحیط ذواربعۃ الاضلاع کا خارجہ زاویہ اس کے متصلہ زاویے کے مقابل کے زاویے کے متماثل ہوتا ہے۔

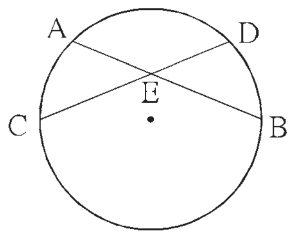
(7) ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے متمم ہوں تو وہ ذواربعۃ الاضلاع مستقیم المحیط ذواربعۃ الاضلاع ہوتا ہے۔

(8) کسی خط پر واقع کوئی دو متفرق نقاط، اس خط کے ایک ہی جانب واقع دو متفرق نقاط پر متماثل زاویے بناتے ہوں تب وہ چار نقاط ایک ہی دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔

(9) مقابل کی شکل 3.54 میں،

(i) $\angle AEC = \frac{1}{2}$ [m(قوس AC) + m(قوس DB)]

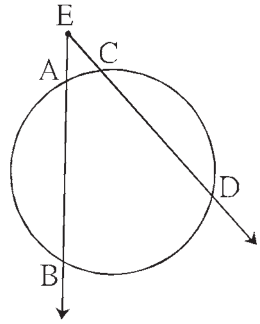
(ii) $\angle CEB = \frac{1}{2}$ [m(قوس AD) + m(قوس CB)]



شکل 3.54

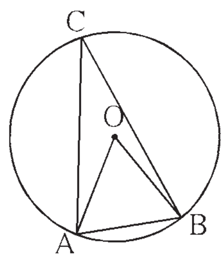
(10) مقابل کی شکل 3.55 میں

$\angle BED = \frac{1}{2}$ [m(قوس BD) − m(قوس AC)]



شکل 3.55

مشقی سیٹ 3.4

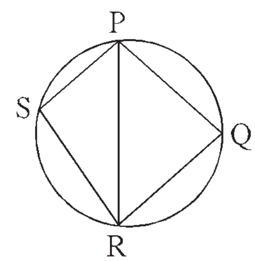


شکل 3.56

.1 شکل 3.56 میں دائرے کا مرکز 'O' ہے۔ دائرے کے وتر AB کی لمبائی نصف قطر کے مساوی ہے تو۔

(1) $\angle AOB$ (2) $\angle ACB$

(3) قوس AB اور (4) قوس ACB کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 3.57

.2 شکل 3.57 میں □PQRS مستقیم المحیط ذواربعۃ الاضلاع ہے۔

ضلع PQ ≅ ضلع RQ، $\angle PSR = 110°$ ہو تو

(i) $\angle PQR$ = ?

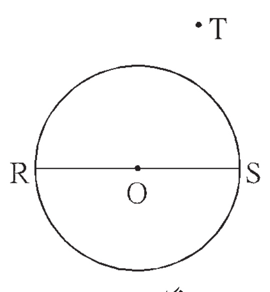
(ii) m(قوس PQR) = ?

(iii) m(قوس QR) = ?

(iv) $\angle PRQ$ = ?

.3 مستقیم المحیط □MRPN میں،

$\angle R = (5x - 13)°$ اور $\angle N = (4x + 4)°$ ہو تو $\angle R$ اور $\angle N$ کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔



شکل 3.58

.4 شکل 3.58 میں قطعہ RS، 'O' مرکز والے دائرے کا قطر ہے۔ نقطہ T دائرے کے بیرون میں واقع کوئی نقطہ ہے۔

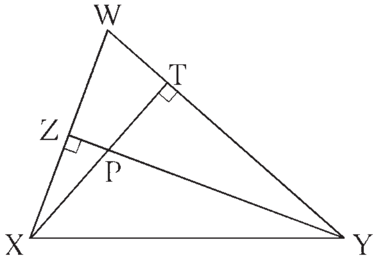
تو ثابت کیجیے کہ $\angle RTS$ حادہ زاویہ ہے۔

.5 ثابت کیجیے کہ ہر مستطیل مستقیم المحیط ذواربعۃ الاضلاع ہوتا ہے۔

6. شکل 3.59 میں $\triangle WXY$ کے ارتفاع، قطعہ YZ اور قطعہ XT نقطہ P پر قطع کرتے ہیں۔تو ثابت کیجیے۔

(1) $\square$WZPT مستقیم المحیط ہے۔

(2) نقاط Y,T,Z,X ایک ہی دائرے پر واقع ہیں۔



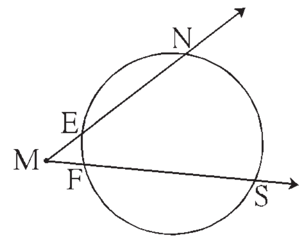
شکل **3.59**

7. شکل 3.60 میں،

m(قوس NS) = 125°

m(قوس EF) = 37° ہوتو

$\angle$NMS کی پیمائش معلوم کیجیے۔



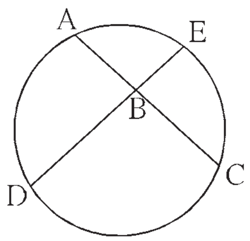
شکل **3.60**

8. شکل 3.61 میں،

وتر AC اور وتر DE ایک دوسرے کو نقطہ B پر قطع کرتے ہیں۔

اگر $\angle$ABE = 108° اور m(قوس AE) = 95° ہوتو،

m(قوس DC) کی پیمائش معلوم کیجیے۔



شکل **3.61**

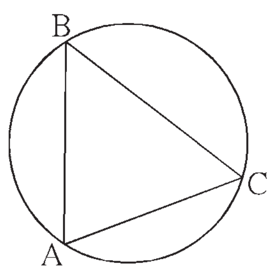
آیئے سمجھ لیں

عملی کام :

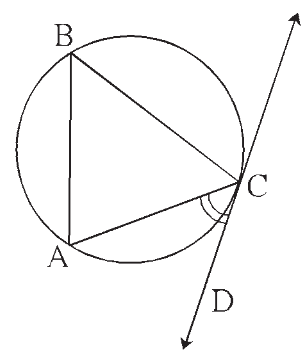
ایک بڑا دائرہ بنایئے۔شکل 3.62 کے مطابق اس دائرے کا ایک وتر قطعہ AC کھینچیے۔

اس دائرے پر کوئی نقطہ B لیجیے۔ $\angle$ABC قوسی زاویہ ہے۔

$\angle$ABC کی پیمائش کیجیے۔اور اندراج کیجیے۔



شکل **3.62**



شکل **3.63**

اب شکل 3.63 کے مطابق اسی دائرے پر خط CD مماس کھینچیے۔

$\angle$ACD کی پیمائش کیجیے۔

$\angle ACD$ کی پیمائش، $\angle ABC$ کی پیمائش کے مساوی ہے۔اس بات کا آپ کو مشاہدہ ہوتا ہے۔

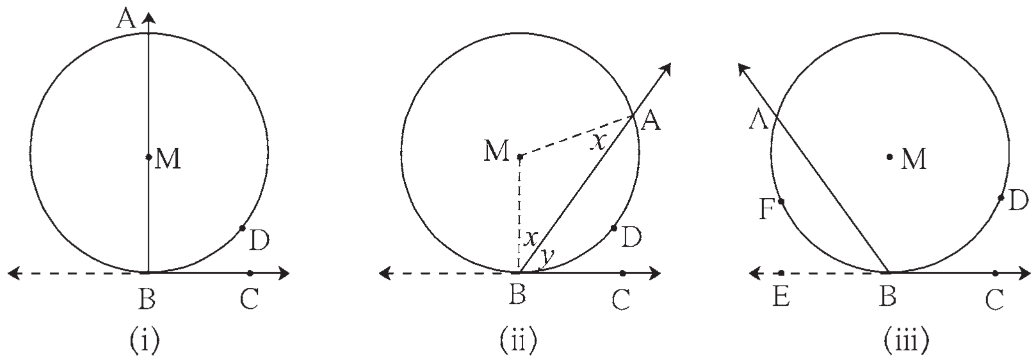
$\angle ABC = \frac{1}{2}\, m($قوس AC$)$ یہ آپ جانتے ہیں۔

اس بنا پر $\angle ACD$ کی پیمائش بھی (قوس AC) کی پیمائش کے نصف ہوتی ہے۔ایسا ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔

دائرہ کے مماس کی یہ ایک اہم خصوصیت ہے۔اسے ہم اب ثابت کریں گے۔

مماس قاطع کے زاویہ کا مسئلہ (Theorem of angle between tangent and secant)

مسئلہ : اگر کسی زاویہ کا راس دائرے پر ہو، اس کی ایک ساق دائرے کو مس کرتی ہو اور دوسری دائرہ کو دو نقاط پر قطع کرتی ہو، تب اس زاویے کی مقطوعہ قوس کی پیمائش کا نصف ہوتی ہے۔

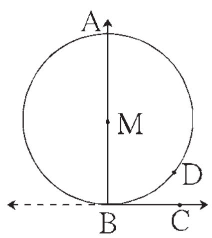


شکل 3.64

دیا ہوا ہے : $\angle ABC$ کا راسی نقطہ، M مرکز والے دائرے پر واقع ہے۔اس کی ساق BC دائرے کو مس کرتی ہے اور ساق BA دائرے کو نقطہ A پر قطع کرتی ہے۔ $\angle ABC$ کا مقطوعہ قوس، قوس ADB ہے۔

ثابت کرنا ہے : $\angle ABC = \frac{1}{2}\, m($قوس ADB$)$

ثبوت : اس مسئلہ کا ثبوت، تین امکانات کا خیال کرتے ہوئے دینا ہوگا۔



شکل (i) 3.64

(1) شکل (i) 3.64 کے مطابق، دائرے کا مرکز M یہ $\angle ABC$ کی ایک ساق پر واقع ہو تو۔

$\angle ABC = \angle MBC = 90^\circ$ ... (مماس کا مسئلہ) ... (I)

قوس ADB، نصف دائرہ ہے۔

$\therefore\ m($قوس ADB$) = 180^\circ$ ... (قوس کی پیمائش کی تعریف) ... (II)

$\angle ABC = \frac{1}{2}\, m($قوس ADB$)$ ... [(I) اور (II) کی بنا پر]

(2) شکل (ii) 3.64 کے مطابق، دائرے کا مرکز M یہ $\angle ABC$ کے بیرون میں واقع ہے۔نصف قطر MA اور نصف قطر MB بنائیے۔

اب , $\angle MBA = \angle MAB$ ... (متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ)

اسی طرح , $\angle MBC = 90^\circ$ ... (مماس کا مسئلہ) ... (I)

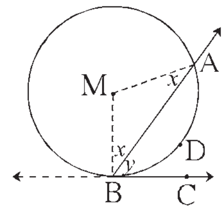
فرض کیجیے : $\angle MBA = \angle MAB = x,\ \angle ABC = y$

$$\angle AMB = 180 - (x + x) = 180 - 2x$$

$$\angle MBC = \angle MBA + \angle ABC = x + y$$

$$\therefore\ x + y = 90^\circ \quad , \quad \therefore\ 2x + 2y = 180^\circ$$

$\triangle AMB$ میں،



شکل 3.64 (ii)

$$2x + \angle AMB = 180^\circ$$

$$\therefore\ 2x + 2y = 2x + \angle AMB$$

$$\therefore\ 2y = \angle AMB$$

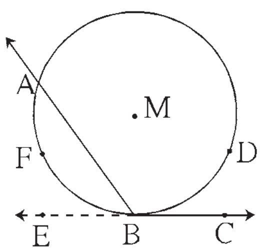
$\therefore\ y = \angle ABC = \frac{1}{2}\angle AMB = \frac{1}{2}\, m($قوس ADB$)$

(3) تیسری امکانی حالت کے لیے مندرجہ ذیل ثبوت شکل (iii) 3.64 کی مدد سے خالی جگہ پر کرتے ہوئے مکمل کیجیے۔

شعاع $\boxed{\quad}$ یہ شعاع BC کی مخالف شعاع کھینچیے۔

[(II) میں ثابت کیا گیا] ... اب , $\angle ABE = \frac{1}{2}\, m(\boxed{\quad})$

(خطی جوڑی کے زاویے) ... $180 - \boxed{\quad} = \angle ABE$



شکل 3.64 (iii)

$\therefore\ 180 - \boxed{\quad} = \frac{1}{2}\, m($قوس AFB$)$

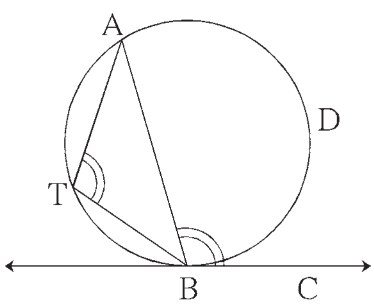
$= \frac{1}{2}\,[360 - m(\boxed{\quad})]$

$\therefore\ 180 - \angle ABC = 180 - \frac{1}{2}\, m($قوس ADB$)$

$\therefore\ -\angle ABC = -\frac{1}{2}\, m(\boxed{\quad})$

$\therefore\ \angle ABC = \frac{1}{2}\, m($قوس ADB$)$

مماس قاطع کے زاویے کے مسئلے کے لیے متبادل بیان :



شکل 3.65

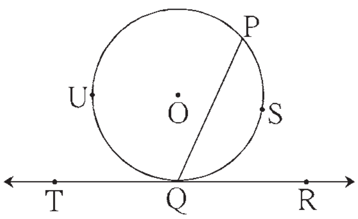
شکل 3.65 میں AB قاطع خط ہے اور BC مماس ہے۔ قوس ADB، $\angle ABC$ کا مقطوعہ قوس ہے۔ وتر AB دائرے کو دو قوسین میں تقسیم کرتا ہے۔ دونوں قوسین ایک دوسرے کے مخالف قوس ہیں۔ اب قوس ADB کے مخالف قوس پر نقطہ T لیجیے۔ اوپر دیے ہوئے مسئلے کی بنا پر،

$\angle ABC = \frac{1}{2}\, m$ (قوس ADB) $= \angle ATB$

$\therefore$ دائرے کا مماس اور نقطہ تماس سے کھینچا ہوا وتر ان سے بننے والا زاویہ اس زاویے کے مقطوعہ قوس کے مخالف قوس میں بننے والے قوسی زاویے کے مساوی ہوتا ہے۔

مماس قاطع زاویے کے مسئلہ کا عکس

دائرے کے وتر کے ایک اختتامی نقطے سے گذرنے والا خط کھینچنے پر اس خط کا اس وتر سے بنائے ہوئے زاویے کی پیمائش، اس زاویے کے مقطوعہ قوس کے پیمائش کا نصف ہو تو، وہ خط اس دائرے کا مماس ہوتا ہے۔



شکل **3.66**

شکل 3.66 میں،

اگر $\angle PQR = \frac{1}{2}\, m($قوس$\ PSQ)$ ہو تو

[یا $\angle PQT = \frac{1}{2}\, m($قوس$\ PUQ)$]

خط TR یہ دائرے کا مماس ہے۔ اس مسئلے کے عکس کا استعمال دائرے کا مماس کھینچنے کے لیے ہندسی عمل میں کیا جاتا ہے۔ اس مسئلے کا ثبوت بالواسطہ طریقے سے دیا جا سکتا ہے۔

وتروں کے داخلی تقاطع کا مسئلہ **(Theorem of internal division of chords)**

ایک ہی دائرے کے دو وتر جب دائرے کے اندرون میں ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب ایک وتر کے بنے ہوئے دو حصوں کا حاصل ضرب، دوسرے وتر کے بنے ہوئے دو حصوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

دیا ہوا ہے : P مرکز والے دائرے کے وتر AB اور CD ایک دوسرے کو دائرے کے اندرون میں نقطہ E پر قطع کرتے ہیں۔

ثابت کرنا ہے : $AE \times EB = CE \times ED$

عمل : قطعہ AC اور قطعہ DB کھینچیے۔

ثبوت : $\triangle CAE$ اور $\triangle BDE$ میں،

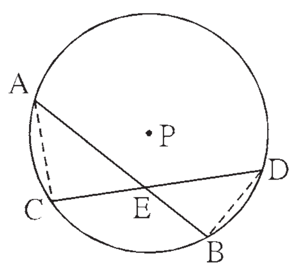
$\angle AEC \cong \angle DEB$ ... (متقابلہ زاویے)

$\angle CAE \cong \angle BDE$ ... (ایک ہی قوس کے قوسی زاویے)

$\therefore \Delta CAE \sim \Delta BDE$ ... (زازا آزمائش متشابہت)

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$ ... (متشابہ مثلثوں کے نظیری اضلاع)

$\therefore AE \times EB = CE \times ED$



شکل 3.67

غور کیجیے

شکل 3.67 میں قطعہ AC اور قطعہ DB کھینچ کر ہم نے مسئلہ ثابت کیا اس کی بجائے قطعہ AD اور قطعہ CB کھینچ کر کیا یہ مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں؟

مزید معلومات کے لیے :

شکل 3.67 میں وتر AB کے نقطہ E کی وجہ سے دو حصے AE اور EB بنے ہیں۔قطعہ AE اور قطعہ EB کو مستطیل کے متصل اضلاع مان کر ایک مستطیل بنایا جائے۔تب $AE \times EB$ مستطیل کا رقبہ ہوگا۔اسی طرح $CE \times ED$، وتر CD کے دو حصوں سے بننے والے مستطیل کا رقبہ ہوگا۔

ہم $AE \times EB = CE \times ED$ ثابت کر چکے ہیں۔

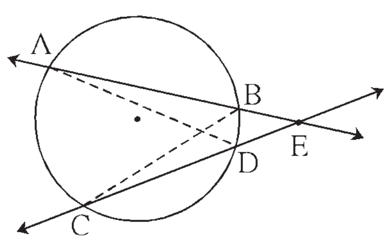
اس لیے یہ مسئلہ مختلف الفاظ میں ذیل کے مطابق بیان کیا جا سکتا ہے۔

ایک ہی دائرے کے دو وتر، دائرے کے اندرون میں قطع کرتے ہوں تو، ایک وتر کے دو حصوں سے بننے والے مستطیل کا رقبہ، دوسرے وتر کے دو حصوں سے بننے والے مستطیل کے رقبے کے مساوی ہوتا ہے۔

وتروں کے بیرونی تقاطع کا مسئلہ (Theorem of external division of chords)

ایک ہی دائرے کے وتر AB اور وتر CD کو شامل کرنے والے قاطع خط ایک دوسرے کو دائرے کے بیرون میں نقطہ E پر قطع کرتے ہوں تو $AE \times EB = CE \times ED$

اوپر دیے ہوئے مسئلے کا بیان اور شکل کی مدد سے ''دیا ہوا ہے'' اور ''ثابت کرنا ہے'' لکھیے۔



شکل 3.68

عمل : قطعہ AD اور قطعہ BC کھینچیے۔

خالی جگہ پر کر کے ثبوت مکمل کیجیے۔

ثبوت : $\triangle ADE$ اور $\triangle CBE$ میں،

$\angle AED \cong$ [ ] ... (مشترک زاویہ)

$\angle DAE \cong \angle BCE$ ... ([ ])

$\therefore \ \Delta ADE \cong$ [ ] ... ([ ])

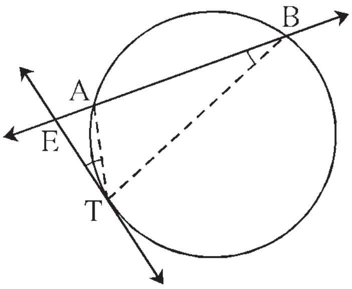
$\therefore \dfrac{AE}{[\ ]} = \dfrac{[\ ]}{[\ ]}$ ... (متشابہ مثلثوں کے نظیری اضلاع)

$\therefore$ [ ] $= CE \times ED$

مماس قاطع قطعۂ خط کا مسئلہ (Tangent Secant Segment Theorem)

دائرے کے بیرونی نقطہ E سے دائرے کا قاطع خط دائرے کو نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے اور اسی نقطے سے گذرنے والا مماس، دائرے کو T پر مس کرتا ہے تو $EA \times EB = ET^2$

اس مسئلہ کو ذہن میں رکھتے ہوئے دیا ہوا ہے اور ثابت کرنا ہے لکھیے۔



شکل 3.69

عمل : قطعہ TA اور قطعہ TB کھینچیے۔

ثبوت : $\triangle EAT$ اور $\triangle ETB$ میں،

$\angle AET \cong \angle TEB$ ... (مشترک زاویے)

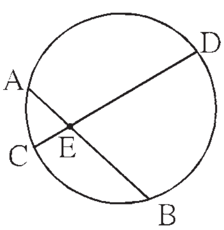
$\angle ETA \cong \angle EBT$ ... (مماس قاطع مسئلہ)

$\therefore \triangle EAT \sim \triangle ETB$ ... (زازا تشابہت)

$\therefore \dfrac{ET}{EB} = \dfrac{EA}{ET}$ ... (متشابہ مثلثوں کے نظیری اضلاع)

$\therefore EA \times EB = ET^2$

اسے ذہن نشین کر لیں

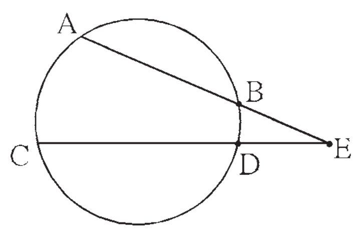


شکل 3.70

(1) شکل 3.70 کے مطابق،

$AE \times EB = CE \times ED$

اس خصوصیت کو وتروں کے داخلی طور پر قطع کرنے کا مسئلہ کہتے ہیں۔

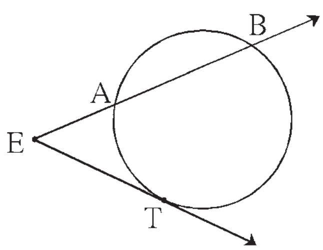


شکل 3.71

(2) شکل 3.71 کے مطابق،

$AE \times EB = CE \times ED$

اس خصوصیت کو وتروں کے بیرونی طور پر قطع کرنے کا مسئلہ کہتے ہیں۔

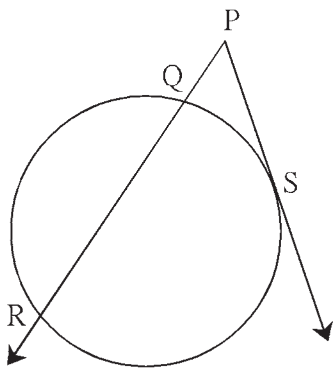


شکل 3.72

(3) شکل 3.72 کے مطابق،

$EA \times EB = ET^2$

اس خصوصیت کو مماس قاطع خط کا مسئلہ کہتے ہیں۔



شکل **3.73**

مثال **(1)** : شکل 3.73 میں قطعہ PS مماس ہے۔خط PR دائرے کا قاطع ہے

اگر PQ = 3.6 ، QR = 6.4 تو PS معلوم کیجیے۔

حل : (مماس قاطع مسئلہ) ...

$$PS^2 = PQ \times PR$$

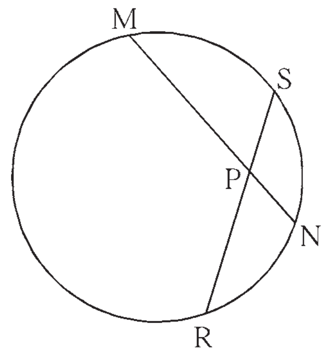
$$= PQ \times (PQ + QR)$$

$$= 3.6 \times [3.6 + 6.4]$$

$$= 3.6 \times 10$$

$$= 36$$

$$\therefore\ PS = 6$$



شکل **3.74**

مثال **(2)** : شکل 3.74 میں وتر MN اور وتر RS ایک دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہیں۔

اگر PR = 6 ، PS = 4 ، MN = 11 ہو تو PN معلوم کیجیے۔

حل : وتروں کے اندرونی طور پر قطع کرنے کے مسئلے کے ذریعے

$PN \times PM = PR \times PS$ ... (I)

فرض کریں $PN = x$ اس لیے، $PM = 11 - x$

بیان (I) میں یہ قیمت رکھنے پر،

$$x(11 - x) = 6 \times 4$$

$$\therefore\ 11x - x^2 - 24 = 0$$

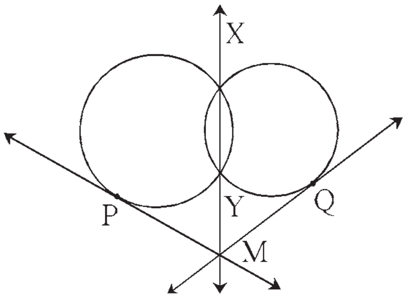
$$\therefore\ x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$\therefore\ (x - 3)(x - 8) = 0$$

$\therefore\ x - 3 = 0$ یا $x - 8 = 0$

$\therefore\ x = 3$ یا $x = 8$

$\therefore\ PN = 3$ یا $PN = 8$



شکل 3.75

مثال (3) : شکل 3.75 میں دو دائرے ایک دوسرے کو نقاط X اور Y پر قطع کرتے ہیں۔
خط XY پر واقع نقطہ M سے کھینچا گیا مماس دائروں کو نقاط P اور Q پر مس کرتا
ہے تو ثابت کیجیے کہ قطعہ PM ≅ قطعہ QM

ثبوت : خالی جگہیں پُر کرکے ثبوت لکھیے۔

خط MX دونوں دائروں کا مشترک .... ہے۔

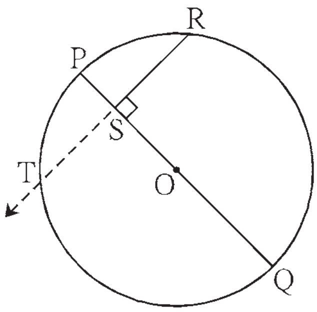
... (I) ... (......................) $\therefore\ PM^2 = MY \times MX$

... (II) ... (مماس قاطع خط مسئلہ) .... × .... = ... , اسی طرح

[∴ بیان (I) اور (II) سے] ... $QM^2 =$ ....

$\therefore\ PM = QM$

$\therefore$ قطعہ PM ≅ قطعہ QM



شکل 3.76

مثال (4) : شکل 3.76 میں قطعہ PQ , O مرکز والے دائرے کا قطر ہے۔
نقطہ R دائرے پر واقع کوئی نقطہ ہے۔
قطعہ PQ ⊥ قطعہ RS تو ثابت کیجیے کہ قطعہ PS اور
قطعہ SQ کا ہندسی وسط SR ہے۔
{یعنی $SR^2 = PS \times SQ$}

حل : مندرجہ ذیل مرحلوں کی مدد سے ثبوت لکھیے۔

(1) شعاع RS کھینچیے۔ وہ دائرے کو جس نقطے پر قطع کرتی ہے اسے T نام دیجیے۔

(2) RS = TS دکھایئے۔

(3) وتروں کے اندرون میں قطع کرنے والے مسئلے کا استعمال کرکے مساوات لکھیے۔

(4) RS = TS کا استعمال کرکے ثابت کیجیے۔

غور کیجیے

(1) مندرجہ بالا شکل 3.76 میں قطعہ PR اور قطعہ RQ بنانے پر △PRQ کس قسم کا مثلث ہوگا؟

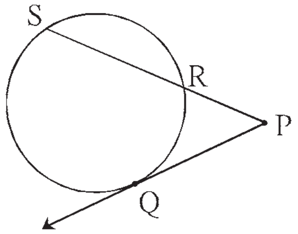
(2) مندرجہ بالا مثال (4) میں ثابت کی گئی خصوصیت کو کیا آپ کسی دوسرے طریقے سے ثابت کر سکتے ہیں؟

مشقی سیٹ 3.5

.1 شکل 3.77 میں نقطہ Q تماسی نقطہ ہے اگر

$PR = 8, \; PQ = 12$ تو

$PS =$ کتنا ? $RS =$ کتنا ?



شکل 3.77

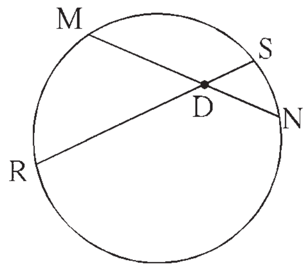
.2 شکل 3.78 میں وتر MN اور وتر RS ایک دوسرے کو نقطہ D پر قطع کرتے ہیں۔

(1) اگر $MD = 8, \; DS = 4, \; RD = 15$ تو

$DN =$ کتنا ?

(2) اگر $DN = 8, \; MD = 9, \; RS = 18$ تو

$DS =$ کتنا ?



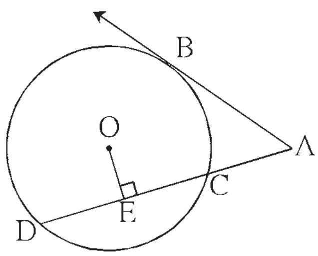
شکل 3.78

.3 شکل 3.79 میں نقطہ B تماسی نقطہ ہے اور O دائرے کا مرکز ہے۔

قطعہ $OE \perp$ خط AD

$AC = 8, \; AB = 12$ ہو تو

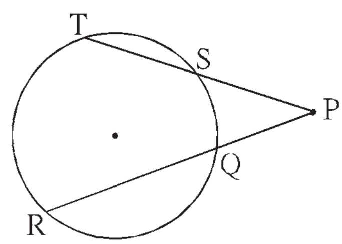
(1) AD (2) DC اور (3) DE معلوم کیجیے۔



شکل 3.79

.4 شکل 3.80 میں اگر $PS = 8, \; QR = 10, \; PQ = 6$ ہو تو

$TS =$ کتنا ?

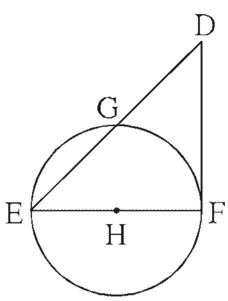


شکل 3.80

.5 شکل 3.81 میں قطعہ EF قطر ہے اور قطعہ DF مماس ہے۔

دائرے کا نصف قطر r ہے تو ثابت کیجیے کہ

$$DE \times GE = 4r^2$$



شکل 3.81

.1 درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے :

(1) دو دائرے جن کے نصف قطر بالترتیب 5.5 سم اور 3.3 سم ہیں ۔ وہ ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں ۔ ان کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ کتنے سم ہے؟

(A) 4.4 (B) 8.8 (C) 2.2 (D) 8.8 یا 2.2

(2) دو دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں ۔ ان میں سے ہر دائرہ دوسرے دائرے کے مرکز سے گذرتا ہے۔ اگر ان مرکزوں کے درمیان فاصلہ 12 سم ہو تو ہر دائرے کا نصف قطر کتنا سم ہے؟

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) بتایا نہیں جاسکتا

(3) ایک دائرہ ایک متوازی الاضلاع کے تمام ضلعوں کو مس کرتا ہے تو وہ متوازی الاضلاع .... ہونا چاہیے۔ اس بیان کی خالی جگہ مناسب لفظ لکھیے۔

(A) مستطیل (B) معین (C) مربع (D) ذوزنقہ

(4) ایک دائرے کے مرکز سے 12.5 سم فاصلے پر واقع ایک نقطے سے دائرے پر کھینچے گئے مماسی قطعہ کی لمبائی 12 سم ہے تو اس دائرے کا قطر کتنے سم کا ہے۔

(A) 25 (B) 24 (C) 7 (D) 14

(5) ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرنے والے دو دائروں پر زیادہ سے زیادہ کتنے مشترک مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔

(A) ایک (B) دو (C) تین (D) چار

(6) ‘O’ مرکز والے دائرے کے قوس ACB میں $\angle ACB$ قوسی زاویہ بنایا گیا ہے۔ اگر $\angle ACB = 65°$ ہو تو $m($قوس ACB$) =$ کتنا ?

(A) 65° (B) 130° (C) 295° (D) 230°

(7) ایک دائرے کے وتر AB اور وتر CD ایک دوسرے کو دائرے کے اندرون میں نقطہ E پر قطع کرتے ہیں۔ اگر $AE = 5.6$, $EB = 10$, $CE = 8$, تو $ED = ?$

(A) 7 (B) 8 (C) 11.2 (D) 9

(8) مستقیم المحیط □ABCD میں، $\angle A$ کی پیمائش کا دگنا $\angle C$ کی پیمائش کے تین گنا کے مساوی ہے تو $\angle C$ کی پیمائش کتنی ہے؟

(A) 36° (B) 72° (C) 90° (D) 108°

(9)* ایک دائرے پر نقاط A, B, C اس طرح واقع ہیں کہ $m($قوس AB$) = m($قوس BC$) = 120°$ دونوں قوسین میں B کے سوا ایک بھی نقطہ مشترک نہیں ہے۔ تو $\triangle ABC$ کس قسم کا مثلث ہے؟

(A) متساوی الاضلاع مثلث (B) منفرجۃ الزاویہ مثلث (C) قائمۃ الزاویہ مثلث (D) متساوی الساقین مثلث

(10) قطعہ XZ قطر والے دائرے کے اندرون میں ایک نقطہ Y ہے۔ تو ذیل میں سے کون سا بیان صحیح ہے۔

(i) ∠XYZ کا حادہ زاویہ ہونا، ناممکن ہے۔

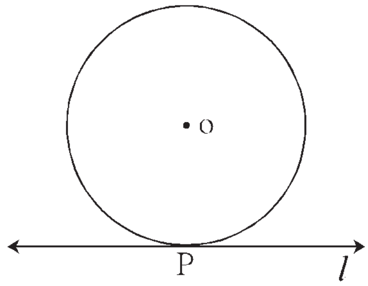
(ii) ∠XYZ کا قائمہ زاویہ ہونا، ناممکن ہے۔

(iii) ∠XYZ منفرجہ زاویہ ہے۔

(iv) ∠XYZ کی پیمائش سے متعلق متعین بیان نہیں دیا جاسکتا۔

(A) صرف ایک (B) صرف دو (C) صرف تین (D) سب

.2 **'O'** مرکز والے دائرے کو خط l نقطہ **P** پر مس کرتا ہے۔ اگر دائرے کا نصف قطر **9** سم ہو تب ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔



شکل **3.82**

(1) ? کتنا = d(O ,P) اور کیوں؟

(2) اگر سم 8 = d(O,Q) ہو تو نقطہ Q کا مقام کہاں ہے؟

(3) سم 15 = d(O,R) ہو تو نقطہ R خط l کے کتنے مقام پر ہو سکتا ہے؟

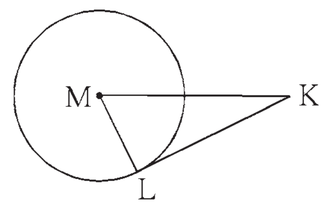
وہ نقطہ P سے کتنے فاصلے پر ہوگا؟

.3 متصلہ شکل میں، نقطہ M دائرے کا مرکز ہے۔ اور قطعہ KL مماس ہے۔

اگر $MK = 12$, $KL = 6\sqrt{3}$ ہو تو

(1) دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

(2) ∠K اور ∠M کی پیمائشیں معلوم کیجیے۔

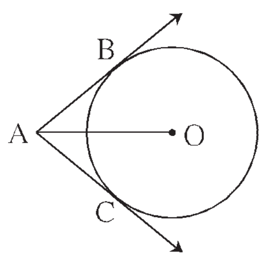


شکل **3.83**

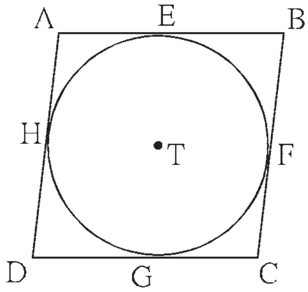
.4 شکل 3.84 میں نقطہ O دائرے کا مرکز ہے اور قطعہ AB اور

قطعہ AC مماسی قطعات ہیں اگر دائرے کا نصف قطر r اور $l(AB) = r$

ہو تو دکھائیے کہ ABOC□ مربع ہے۔



شکل **3.84**

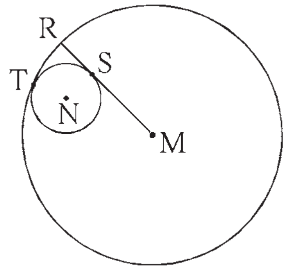


شکل 3.85

.5 شکل 3.85 میں ABCD□ متوازی الاضلاع ہے۔ یہ T مرکز والے دائرے کے گرد حائط ہے۔ (یعنی اس ذوار بعۃ الاضلاع کے ضلعے دائرے کو مس کرتے ہیں۔)

نقاط G, F, E اور H تماسی نقاط ہیں۔

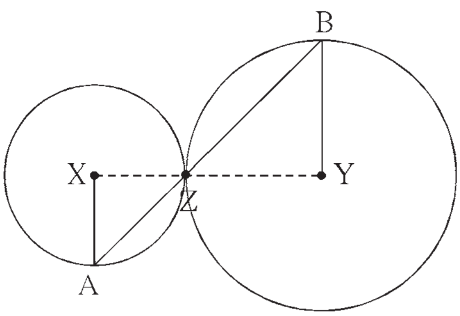
اگر AE = 4.5 اور EB = 5.5 ہوتو AD معلوم کیجیے۔



شکل 3.86

.6 شکل 3.86 میں N مرکز والا دائرہ M مرکز والے دائرے کو نقطہ T پر اندرونی طور پر مس کرتا ہے۔ بڑے دائرے کا نصف قطر چھوٹے دائرے کے نقطہ S پر مس کرتا ہے۔ اگر بڑے اور چھوٹے دائروں کے نصف قطر بالترتیب 9 سم اور 2.5 سم ہوتو ذیل کے سوالوں کے جواب معلوم کیجیے اوران پر سے MS : SR نسبت معلوم کیجیے۔

(1) MT = ?　(2) MN = ?　(3) ∠NSM = ?



شکل 3.87

.7 متصلہ شکل میں X اور Y مرکز والے دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر نقطہ Z پر مس کرتے ہیں۔

نقطہ Z سے گذرنے والا قاطع خط ان دائروں کو بالترتیب نقطہ A اور نقطہ B پر قطع کرتا ہے۔تو ثابت کیجیے کہ YB نصف قطر ∥ XA نصف قطر

نیچے دیے ہوئے ثبوت میں خالی جگہوں کو پر کر کے ثبوت مکمل کیجیے۔

عمل : قطعہ XZ اور .... کھینچیے۔

ثبوت : مس کرنے والے دائروں کے مسئلہ کی بناء پر نقاط Y, Z, X .... ہیں۔

∠XZA ≅ ....　　(∵ متقابلہ زاویہ) ...

∠XZA = ∠BZY = *a*　　(فرض کیجیے) ... (I)

اب , قطعہ XA ≅ قطعہ XZ　　(∵ ....) ...

∴ ∠XAZ = ... = *a*　　(متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ) ... (II)

اسی طرح, قطعہ YB ≅ .... (.....................)

∴ ∠BZY = ... = *a* ... (.................) ... (III)

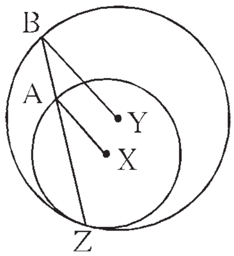
∴ (I), (II) اور (III) سے،

∠XAZ = ...

∴ نصف قطر XA ∥ نصف قطر YB (∵ ....)

8. شکل 3.88 میں X اور Y مرکز والے دو دائرے اندرونی طور پر نقطہ Z پر مس کرتے ہیں۔ قطعہ BZ بڑے دائرے کا وتر ہے اور چھوٹے دائرے کو نقطہ A پر قطع کرتا ہے۔ تو

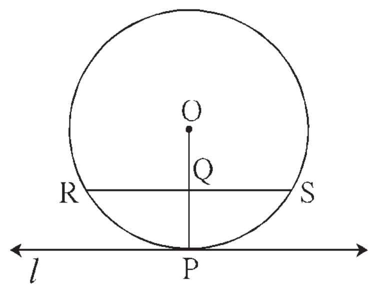
ثابت کیجیے کہ قطعہ BY ∥ قطعہ AX



شکل 3.88

9. بازو میں دی ہوئی شکل میں 'O' مرکز والے دائرے کو خط *l* نقطہ P پر مس کرتا ہے۔ نقطہ Q نصف قطر OP کا وسطی نقطہ ہے۔ نقطہ Q کو شامل کرنے والا وتر RS ہے اسی طرح کہ خط *l* ∥ وتر RS

اگر RS = 12 سم ہو تو دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔



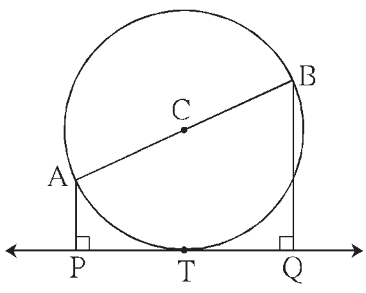
شکل 3.89

10. شکل 3.90 میں C مرکز والے دائرے کا قطر قطعہ AB ہے۔

دائرہ کا مماس PQ دائرے کو نقطہ T پر مس کرتا ہے۔

خط PQ ⊥ قطعہ AP اور خط PQ ⊥ قطعہ BQ

تو ثابت کیجیے کہ قطعہ CQ ≅ قطعہ CP

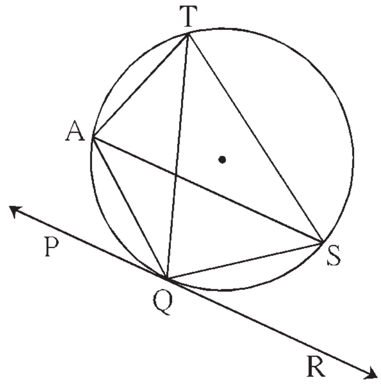


شکل 3.90

11. 3 سم نصف قطر والے تین دائرے کھینچیے جن کے مرکز A, B اور C ہیں۔ اس طرح کہ ہر دائرہ دوسرے دو دائروں کو مس کرتا ہے۔

12.* ثابت کیجیے کہ دائرے کے کوئی بھی تین نقاط ہم خطی نہیں ہوتے۔

.13 شکل 3.91 میں خط PR دائرے کے نقطے Q پر مس کرتا ہے۔اس شکل کی مدد سے ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے ۔



شکل **3.91**

(1) $\angle$TAQ اور $\angle$TSQ کی پیمائشوں کی جمع کیجیے۔

(2) $\angle$AQP کے متماثل زاویہ کون سا ہے؟

(3) $\angle$QTS کے متماثل زاویہ کون سا ہے؟

(4) اگر $\angle$TAS = 65° ہوتو $\angle$TQS اور m(قوس TS) معلوم کیجیے۔

(5) اگر $\angle$AQP = 42° اور $\angle$SQR = 58° تو $\angle$ATS کی پیمائش معلوم کیجیے۔

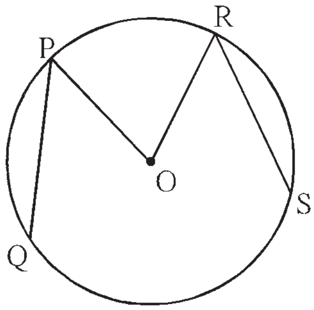
.14 متصلہ شکل میں O مرکز والے دائرے کے قطعہ PQ اور قطعہ RS متماثل وتر ہیں۔

اگر $\angle$POR = 70° اور m(قوس RS) = 80° ہوتو

(1) m(قوس PR) = ?

(2) m(قوس QS) = ?

(3) m(قوس QSR) = ?



شکل **3.92**

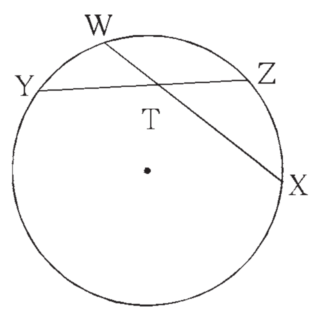
.15 شکل 3.93 میں m(قوس WY) = 44°،

m(قوس ZX) = 68° ہوتو

(1) $\angle$ZTX کی پیمائش طے کیجیے۔

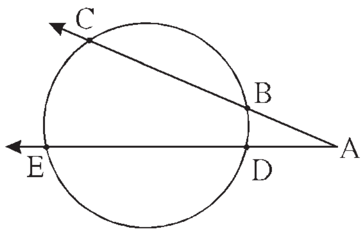
(2) YT = 6.4, TX = 8.0, WT = 4.8 ہوتو TZ = ?

(3) YZ = 26, YT = 8, WX = 25 ہوتو WT = ?



شکل **3.93**

16. شکل 3.94 میں،



شکل **3.94**

(1) $m($قوس$\,BD) = 23°$, $m($قوس$\,CE) = 54°$

ہوتو $\angle CAE = ?$

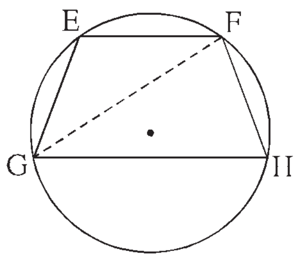
(2) $AE = 12.0$, $BC = 5.4$, $AB = 4.2$

ہوتو $AD = ?$

(3) $AD = 5.4$, $AC = 9.0$, $AB = 3.6$

ہوتو $AE = ?$

17. بازو میں دی ہوئی شکل 3.95 میں وتر GH || وتر EF،



شکل **3.95**

توثابت کیجیے کہ وترFH ≅ وترEG

ذیل میں دیے ہوئے ثبوت کی خالی جگہوں کو پر کر کے ثبوت مکمل کر کے لکھیے۔

ثبوت : قطعہ GF کھینچیے۔

... (I) ... ([ ]) $\angle EFG = \angle FGH$

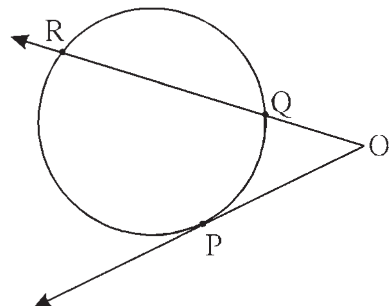
... (II) ... (قوسی زاویے کا مسئلہ) $\angle EFG =$ [ ]

... (III) ... (قوسی زاویے کا مسئلہ) $\angle FGH =$ [ ]

[(I), (II) اور (III) سے} ... $\therefore$ $m($قوس$\,EG) =$ [ ]

... ([ ]) $\therefore$ وتر FH ≅ وتر EG

18. بازو کی شکل 3.96 میں نقطہ P تماسی نقطہ ہے۔



شکل **3.96**

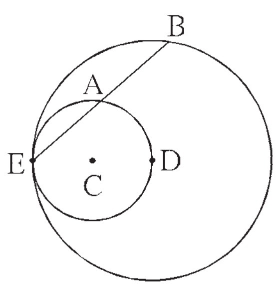
(1) $\angle POR = 36°$, $m($قوس$\,PR) = 140°$

تو $m($قوس$\,PQ) = ?$

(2) $OP = 7.2$, $OQ = 3.2$ ہوتو $OR = ?$ اور $QR = ?$

(3) $OP = 7.2$, $OR = 16.2$ ہوتو $QR = ?$

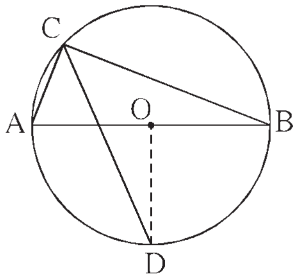
19. متصلہ شکل 3.97 میں C مرکز والا دائرہ، D مرکز والے دائرے کو اندرونی طور پر نقطہ E پر مس کرتا ہے۔



شکل **3.97**

نقطہ D اندرونی دائرے پر واقع ہے۔ بیرونی دائرہ کا وتر EB، اندرونی دائرے کو نقطہ A پر قطع کرتا ہے۔ تو ثابت کیجیے کہ قطعہ AB ≅ قطعہ EA

20. شکل 3.98 میں O مرکز والے دائرے کا قطر قطعہ AB ہے۔
قوسی زاویہ ACB کا ناصف دائرے کو نقطہ D پر قطع کرتا ہے۔
تو ثابت کیجیے کہ قطعہ BD ≅ قطعہ AD
نیچے دیے ہوئے ثبوت میں خالی جگہوں کو پر کر کے اسے مکمل کیجیے اور لکھیے۔



شکل **3.98**

ثبوت : قطعہ OD کھینچیے۔

$\angle ACB$ = ______ ... (نصف دائرہ میں قوسی زاویہ ہے)

$\angle DCB$ = ______ ... ($\angle C$ کا ناصف قطعہ AD ہے)

m(قوس DB) = ______ ... (قوسی زاویہ کا مسئلہ)

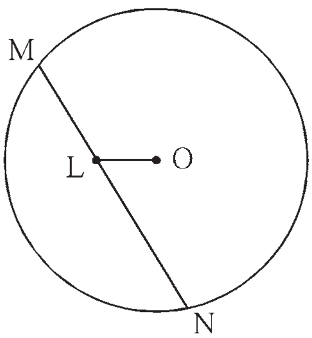
$\angle DOB$ = ______ ... (قوس کی پیمائش کی تعریف) ... (I)

قطعہ OB ≅ قطعہ OA ... (______) ... (II)

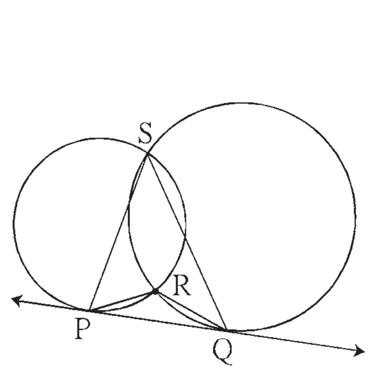
∴ خط OD ، قطعہ AB پر ______ ہے۔ {(I), (II) اور (III) سے}

قطعہ BD ≅ قطعہ AD

21. متصلہ شکل میں، O مرکز والے دائرے کا وتر قطعہ MN ہے۔
MN = 25، وتر MN پر نقطہ L اس طرح ہے کہ
ML = 9 اور $d(O, L) = 5$ ہو تو اس دائرے کا نصف قطر کتنا ہوگا؟



شکل **3.99**

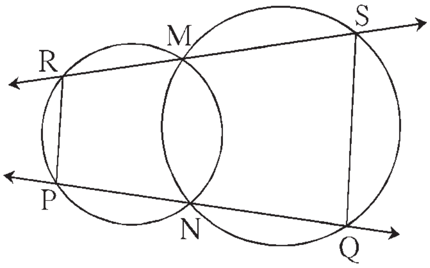


شکل **3.100**

22*. شکل 3.100 میں دو دائرے ایک دوسرے کو نقطہ S اور R پر قطع کرتے ہیں۔ خط PQ ان کا مشترک مماس ہے۔ جو انھیں نقطہ P اور نقطہ Q پر مس کرتا ہے۔
تو ثابت کیجیے کہ $\angle PRQ + \angle PSQ = 180°$

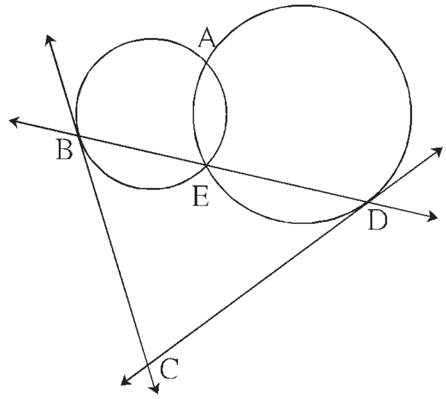
.23 شکل 3.101 دودائرے ایک دوسرے کو نقاط M اور N پر قطع کرتے ہیں۔ نقطہ M اور N سے کھینچے گئے قاطع نقاط R اور S اور نقاط P اور Q پر دونوں دائروں کو قطع کرتے ہیں۔

تو ثابت کیجیے کہ قطعہ QS || قطعہ PR



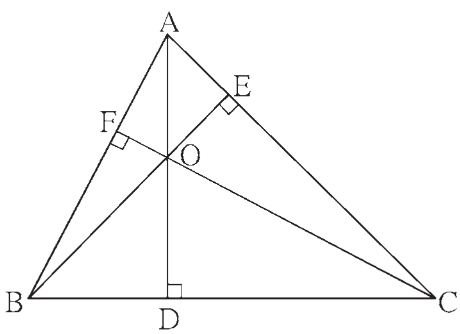
شکل **3.101**

***24.** دودائرے ایک دوسرے کو نقاط A اور E پر قطع کرتے ہیں۔ نقطہ E سے گزرنے والا مشترک قاطع خط دائروں کو نقاط B اور D پر قطع کرتا ہے۔ نقاط B اور D پر بنائے گئے مماس ایک دوسرے کو نقطہ C پر قطع کرتے ہیں۔ تو ثابت کیجیے کہ □ABCD مستقیم الحیط ہے۔



شکل **3.102**

***25.** △ABC میں، ضلع BC ⊥ قطعہ AD، ضلع AC ⊥ قطعہ BE، ضلع AB ⊥ قطعہ CF اور نقطہ O ارتفاعی مرکز ہے۔ تو ثابت کیجیے کہ △DEF کا داخلی مرکز نقطہ O ہے۔



شکل **3.103**

ICT Tools or Links

Geogebra کی مدد سے مختلف دائرے بنائیے۔
ان میں وتر اور مماس کھینچ کر خصوصیت کی جانچ کیجیے۔

4 ہندسی عمل Construction

آیئے سیکھیں

- متشابہ مثلثوں کی تشکیل

 * دو متشابہ مثلثوں میں سے ایک مثلث کے ضلعوں اور دوسرے مثلث کے نظیری ضلعوں کی نسبت دی جائے تو دوسرا مثلث بنانا۔

 (i) ایک بھی نقطہ راس مشترک نہ ہو۔

 (ii) ایک نقطہ راس مشترک ہو۔

- دائرے کا مماس بنانا۔

 * دائرے پر واقع نقطے سے گذرتا ہوا دائرے پر مماس بنانا۔

 (i) دائرے کے مرکز کا استعمال کر کے۔

 (ii) دائرے کے مرکز کا استعمال کیے بغیر

 * دائرے کے بیرونی نقطے سے دائرے پر مماس بنانا۔

آیئے ذرا یاد کریں

درج ذیل ہندسی عمل ہم گذشتہ جماعتوں میں سیکھ چکے ہیں۔ان اعمال کا اعادہ کریں۔

- دیے ہوئے خط کے باہر دیے ہوئے نقطے سے خط کے متوازی گزرتا ہوا خط کھینچنا۔
- دیے ہوئے قطعہ خط کا عمودی ناصف کھینچنا۔
- مثلث کے اضلاع کی لمبائیوں اور زاویوں میں سے کافی اجزا دیے ہوں تو مثلث بنانا۔
- دیے ہوئے قطعہ کو دی ہوئی تعداد کے مساوی حصوں میں تقسیم کرنا۔
- دی ہوئی نسبت میں دیے ہوئے قطعہ خط کو تقسیم کرنا۔
- دیے ہوئے زاویے کے متماثل زاویہ بنانا۔

نویں جماعت میں ہم نے اسکول کے اطراف کا نقشہ تیار کرنے کی سرگرمی کی ہے۔کوئی عمارت تعمیر کرنے سے پہلے اس عمارت کا خاکہ تیار کرتے ہیں۔اسکول کے اطراف کا ماحول اور اس کا نقشہ،عمارت اور اس کا خاکہ ایک دوسرے کے متشابہ ہوتے ہیں۔جغرافیہ،فن تعمیر،میکانیات وغیرہ شعبوں میں متشابہ اشکال بنانے کی ضرورت پیش آتی ہے۔مثلث سب سے آسان بند مشکل ہے۔لہٰذا آیئے اس کا مشاہدہ کریں کہ دیے ہوئے مثلث کے متشابہ مثلث کس طرح بناتے ہیں۔

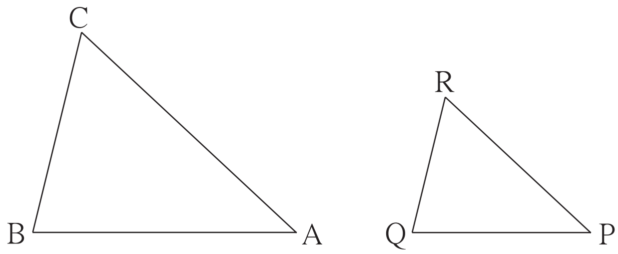
آیئے سمجھ لیں

متشابہ مثلث بنانا (Construction of similar triangles)

جب ایک مثلث کے اضلاع دیے ہوئے ہوں تو اس کے متشابہ مثلث کے نظیری ضلعوں کی نسبت کی شرط پوری کرنے والا مثلث بنانا۔

دو متشابہ مثلثوں کے نظیری اضلاع یکساں تناسب میں ہوتے ہیں اور ان کے نظیری زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ اس کا استعمال کرکے دیے ہوئے مثلث کے متشابہ مثلث بنایا جا سکتا ہے۔

مثال (1) : $\triangle ABC \sim \triangle PQR$، $\triangle ABC$ میں $AB = 5.4$ سم، $BC = 4.2$ سم، $AC = 6.0$ سم، $AB : PQ = 3 : 2$ ہوتو $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ بنایئے۔



شکل 4.1

(کچی شکل)

پہلے دی ہوئی پیمائشوں کے مطابق ΔABC بنایئے۔

$\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ متشابہ ہیں۔

$\therefore$ ان کے نظیری اضلاع تناسب میں ہیں۔

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{3}{2} \qquad \text{... (I)}$$

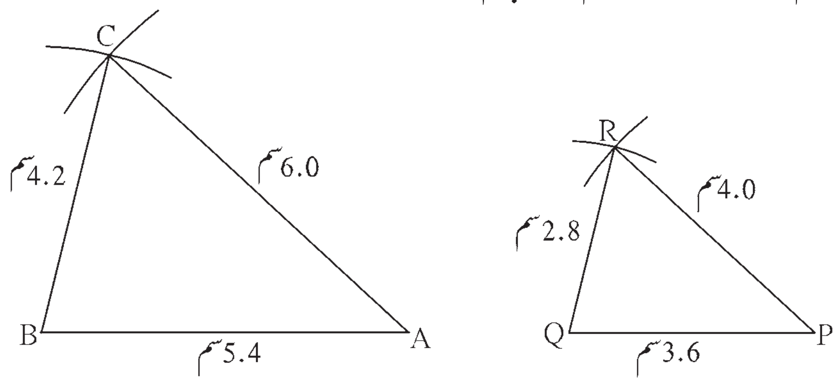
AB، BC اور AC کی لمبائیاں معلوم ہیں اس لیے درج بالا مساوات کی رو سے PQ، QR، PR اضلاع کی لمبائیاں حاصل ہوتی ہیں۔

مساوات (1) سے

$$\frac{5.4}{PQ} = \frac{4.2}{QR} = \frac{6.0}{PR} = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ $PQ = 3.6$ سم , $QR = 2.8$ سم , $PR = 4.0$ سم

$\triangle PQR$ کے تمام اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہونے پر ہم وہ مثلث بنا سکتے ہیں۔



شکل 4.2

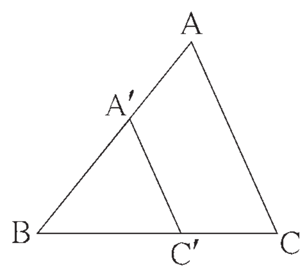
مزید معلومات کے لیے

بعض مرتبہ دیے ہوئے مثلث کے متشابہ مثلث بنانا ہوتا ہے اس کے ضلع کی لمبائی اسکیل پٹی کی مدد سے معلوم نہیں کر سکتے۔ اس وقت دیے ہوئے قطعہ خط کو دی ہوئی تعداد کے مساوی حصوں میں تقسیم کرنا، اس عمل کا استعمال کر کے مثلث کے ضلعوں کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔
مثلاً ضلع AB کی لمبائی $\frac{11.6}{3}$ سم ہو تو 11.6 سم لمبائی کا قطعہ خط بنا کر اس کو 3 مساوی حصوں میں تقسیم کریں تو قطعہ AB کھینچا جا سکتا ہے۔

درج بالا مثال (1) میں ہندسی عمل میں دیے ہوئے اور بنائے جانے والے مثلث میں کوئی مشترک راس نہیں ہے۔

اگر ایک راس مشترک ہو تو مثلث بنانے کے لیے ذیل میں دی ہوئی مثال کے مطابق عمل کرنا آسان ہوتا ہے۔

مثال (2) : کوئی بھی ایک $\triangle ABC$ بنائیے۔



شکل 4.3

$\triangle ABC$ کے متشابہ، $\triangle A'BC'$ اس طرح بنائیے کہ $AB : A'B = 5 : 3$

تجزیہ : B, A', A اسی طرح B, C', C ہم خطی نقاط لیں۔

$$\triangle ABC \sim \triangle A'BC' \quad , \quad \therefore \ \angle ABC = \angle A'BC'$$

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}$$

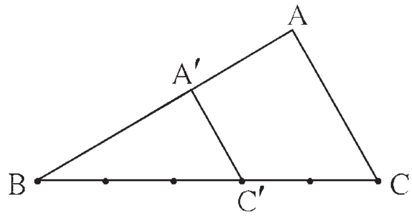
اس لیے $\triangle ABC$ کے اضلاع، $\triangle A'BC'$ کے نظیری اضلاع سے بڑے ہوں گے۔

اس لیے اگر قطعہ BC کے 5 مساوی حصے کریں تو اس میں سے تین حصوں کے مساوی لمبائی کا قطعہ BC' ہوگا۔

$\triangle ABC$ بنا کر قطعہ BC پر نقطہ B سے تین حصوں کے مساوی فاصلے پر نقطہ C' ہونا چاہیے۔ نقطہ C' سے قطعہ AC کے متوازی بنایا گیا خط قطعہ BA کو جس نقطے پر قطع کرے وہ نقطہ A' ہوگا۔

$$\frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{3} \quad \text{یعنی}, \quad \frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{5}$$ ... (عمل عکس سے)

ہندسی عمل کے مرحلے :



شکل 4.4

(1) کوئی بھی ایک $\triangle ABC$ بنائیے۔

(2) قطعہ BC کے 5 مساوی حصے کیجیے۔

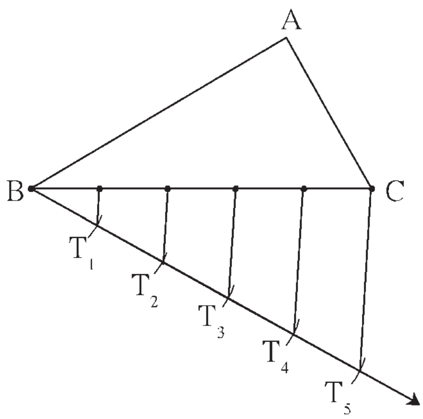
(3) نقطہ B سے تیسرے نقطے کو C' نام دیجیے۔

$\therefore BC' = \frac{3}{5} BC$

(4) اب C' سے CA کے متوازی خط کھینچیے ، جو BA کو جس نقطے پر قطع کرے اس نقطہ کو A' نام دیجیے۔

(5) $\triangle ABC$ کے متشابہ $\triangle A'BC'$ مطلوبہ مثلث ہے۔

نوٹ : BC کے پانچ مساوی حصے کرنے کے دوران خط BC کے جس سمت میں A ہے۔اس کے مخالف سمت میں B سے گذرتے ہوئے ایک شعاع بنائیے اس طرح حصے کرنے میں آسانی ہوتی ہے۔

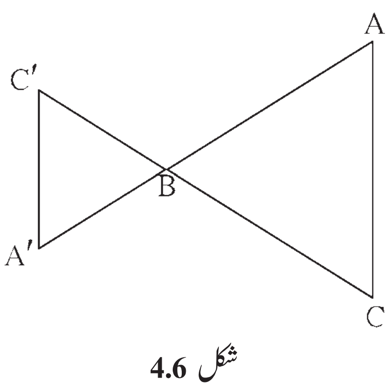


شکل 4.5

اس شعاع پر $BT_1 = T_1T_2 = T_2T_3 = T_3T_4 = T_4T_5$ ایسے مساوی حصے لیں۔

T_5C کو ملائیے اور T_1، T_2، T_3، T_4 سے T_5C کے متوازی خطوط کھینچیے۔

غور کیجیے

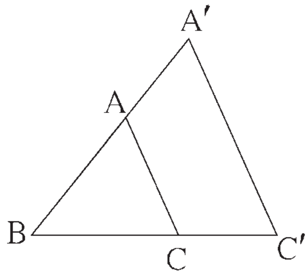


شکل 4.6

متشابہ مثلث بنانے کے لیے شکل میں دکھائے ہوئے پیمانے کے مطابق بھی $\triangle A'BC'$ بنایا جاسکتا ہے۔

اس شکل کے مطابق اگر $\triangle A'BC'$ بنانا ہو تو ہندسی عمل کے مرحلوں میں کیا تبدیلی کرنا ہوگی؟

مثال (3) : $\triangle ABC$ کے متشابہ $\triangle A'BC'$ اس طرح بنائیے کہ $AB : A'B = 5 : 7$



شکل 4.7
کچی شکل

تجزیہ : نقاط B, A, A' ہم خطی ہیں اسی طرح B, C, C' بھی ہم خطی ہیں۔

$\triangle ABC \sim \triangle A'BC'$ اور $AB : A'B = 5 : 7$

$\triangle ABC$ کے اضلاع، $\triangle A'BC'$ کے نظیری اضلاع سے چھوٹے ہیں۔

اسی طرح $\angle ABC \cong \angle A'BC'$

اس بارے میں غور کرتے ہوئے کچی شکل بنائیں گے۔

اب، $\dfrac{BC}{BC'} = \dfrac{5}{7}$

اس لیے قطعہ خط BC کے 5 مساوی حصے کریں اور اس میں سے ایک حصے کا 7 گنا BC' کی لمبائی ہوگی۔

$\triangle ABC$ بنا کر قطعہ BC کے پانچ مساوی حصے کریں گے۔ شعاع BC پر نقطہ B سے سات حصوں کے مساوی لمبائی کے فاصلے پر نقطہ C' ہوگا۔

متناسبت کے بنیادی مسئلے کے رو سے نقطہ C' سے ضلع AC کے متوازی خط بناتے ہیں تو وہ بڑھائی ہوئی شعاع BA کو جس نقطے پر قطع کرتا ہے وہ نقطہ A' ہے۔ قطعہ $A'C'$ کھینچ کر $\triangle A'BC'$ مطلوبہ مثلث ہوگا۔

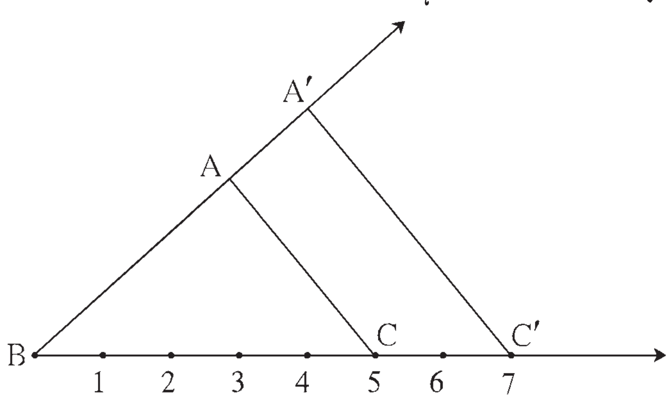
ہندسی عمل کے مرحلے :

(1) کوئی بھی $\triangle ABC$ بنائیے۔

(2) قطعہ BC کے 5 مساوی حصے کیجیے۔ شعاع BC پر نقطہ C' اس طرح لیجیے کہ قطعہ BC' کی لمبائی، قطعہ BC کے ایک حصے کا سات گنا ہے۔

(3) نقطہ C' سے قطعہ AC کے متوازی خط کھینچیے جو شعاع BA کو جس نقطے پر قطع کرے اسے A' نام دیجیے۔

$\triangle ABC$ کے متشابہ مطلوبہ مثلث $\triangle A'BC'$ ہے۔



شکل 4.8

مشقی سیٹ 4.1

.1 $\triangle ABC \sim \triangle LMN$، $\triangle ABC$ اس طرح بنایئے کہ $AB = 5.5$ سم، $BC = 6$ سم، $CA = 4.5$ سم اور $\frac{BC}{MN} = \frac{5}{4}$ ہوتو $\triangle ABC$ اور $\triangle LMN$ بنایئے۔

.2 $\triangle PQR \sim \triangle LTR$، $\triangle PQR$ میں $PQ = 4.2$ سم، $QR = 5.4$ سم، $PR = 4.8$ سم اور $\frac{PQ}{LT} = \frac{3}{4}$ ہوتو $\triangle PQR$ اور $\triangle LTR$ بنایئے۔

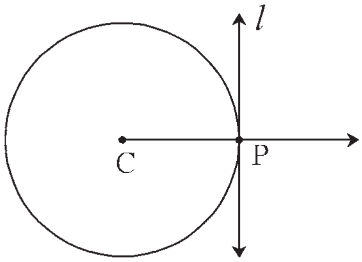
.3 $\Delta RST \sim \Delta XYZ$، ΔRST میں $RS = 4.5$ سم، $\angle RST = 40°$، $ST = 5.7$ سم اور $\frac{RS}{XY} = \frac{3}{5}$ ہوتو $\triangle RST$ اور $\triangle XYZ$ بنایئے۔

.4 $\triangle AMT \sim \triangle AHE$، $\triangle AMT$ میں $AM = 6.3$ سم، $\angle TAM = 50°$، $AT = 5.6$ سم اور $\frac{AM}{AH} = \frac{7}{5}$ ہوتو $\triangle AHE$ بنایئے۔

آیئے سمجھ لیں

دیے ہوئے دائرے پر دیے ہوئے نقطے سے گزرتا ہوا مماس کھینچنا

(i) دائرے کے مرکز کا استعمال کرکے :



شکل **4.9**

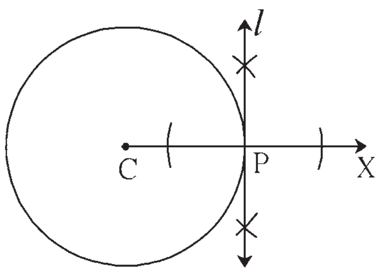
تجزیہ : فرض کریں C مرکز والے دائرے پر واقع نقطہ P سے گذرنے والے دائرے پر خط مماس l کھینچنا ہے۔

دائرے کے نصف قطر کے بیرونی سرے پر کھینچا ہوا عمودی خط دائرے کا مماس ہوتا ہے اس خصوصیت کا استعمال کریں گے۔

فرض کریں نصف قطر CP بناتے ہیں تو خط $l \perp CP$ قطعہ، یعنی نصف قطر CP کے نقطہ P سے گذرنے والا عمودی خط کھینچیں تو وہ مطلوبہ مماس ہوگا۔

دیے ہوئے خط پر واقع نقطے سے گذرنے والا اس خط پر عمودی خط کھینچنے کے عمل کا استعمال کرتے ہیں۔ یعنی سہولت کے لیے شعاع CP بنا کر خط l کا ہندسی عمل کرتے ہیں۔

ہندسی عمل کے مرحلے :



شکل **4.10**

(i) ایک دائرہ بنایئے جس کا مرکز C ہے دائرے پر ایک نقطہ لیجیے۔

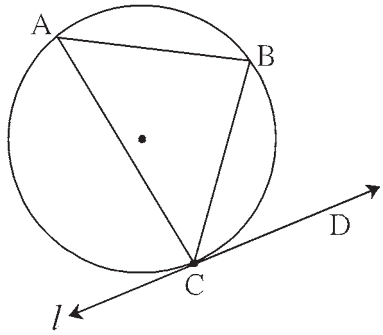
(ii) شعاع CP کھینچیے۔

(iii) نقطہ P سے گذرتا ہوا شعاع CX پر عمودی خط l کھینچیے۔

خط l، نقطہ P سے گذرنے والا مطلوبہ دائرے کا مماس ہے۔

(ii) دائرے کے مرکز کا استعمال کیے بغیر :

مثال : کسی بھی نصف قطر کا ایک دائرہ بنائیے۔ دائرے پر کوئی بھی ایک نقطہ C لیجیے۔ دائرے کے مرکز کا استعمال کیے بغیر نقطہ C سے اس دائرے کا مماس بنائیے۔



شکل 4.11

تجزیہ : فرض کریں شکل میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق خط l، نقطہ C سے گذرنے والا مماس ہے۔ قطعہ CB وتر ہے۔

اور قوسی زاویہ $\angle CAB$ بنائیں گے۔ مماس قاطع خط زاویہ مسئلے کی رُو سے

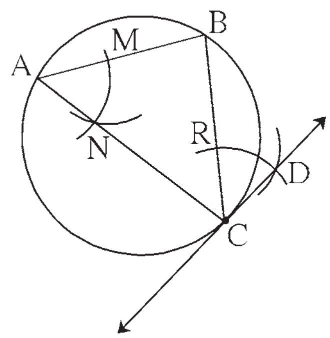
$$\angle CAB \cong \angle BCD$$

مماس قاطع زاویے کے مسئلے کے عکس کے مطابق اگر $\angle BCD \cong \angle CAB$ ہوتو

خط l دائرے کا مماس ہوتا ہے۔ یعنی قطعہ CB دائرے کا وتر اور قوسی زاویہ $\angle CAB$ بنائیں گے۔ $\angle BCD$ کا ہندسی عمل اس طرح کرتے ہیں کہ $\angle BCD \cong \angle BAC$

خط CD، دیے ہوئے دائرے کے نقطہ C سے گذرنے والا اس دائرے کا مماس ہے۔

ہندسی عمل کے مرحلے :



شکل 4.12

(1) ایک دائرہ بنائیے۔ دائرے پر کوئی بھی ایک نقطہ C لیجیے۔

(2) وتر CB اور قوسی زاویہ $\angle CAB$ کھینچیے۔

(3) پرکار میں مناسب نصف قطر لے کر اور نقطہ A کو مرکز مان کر $\angle BAC$ کی ساقین کو نقاط M اور N پر قطع کرنے والا قوس کھینچیے۔

(4) وہی نصف قطر لے کر نقطہ C کو مرکز مان کر وتر CB کو قطع کرنے والا قوس بنائیے۔ اسے R نام دیجیے۔

(5) پرکار میں MN نصف قطر لے کر R کو مرکز مان کر پہلے کھینچے ہوئے قوس کو قطع کرتا ہوا ایک دوسرا قوس کھینچیے۔ ان کے نقطہ تقاطع کو D نام دیجیے۔

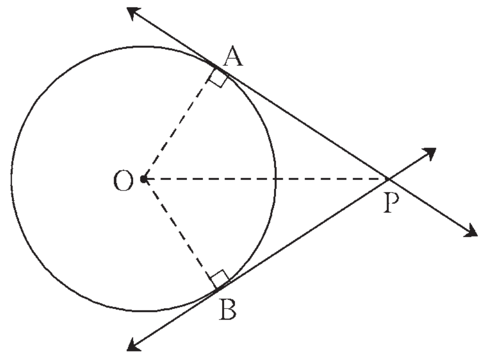
خط CD کھینچیے۔ خط CD دائرے کا مماس ہے۔

(درج بالا شکل میں $\triangle MAN \cong \triangle BCD$ اس کی وجہ پر دھیان دیجیے۔

قطعہ MN اور قطعہ RD بنائیے تو 'ضل ضل ضل' متماثلت کی آزمائش کے مطابق،

$\triangle MAN \cong \triangle RCD$ اس لیے $\angle MAN = \angle BCD$

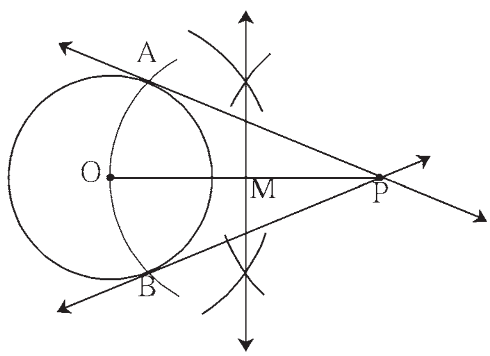
دیے ہوئے دائرے کے بیرون میں واقع نقطے سے مماس کھینچنا



شکل 4.13

تجزیہ : فرض کریں شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق O مرکز والے دائرے کے بیرون میں نقطہ P ہے۔نقطہ P سے دائرے پر بنائے گئے مماس دائرے پر نقاط A اور B پر مس کرتے ہیں۔اگر دائرے پر نقاط A اور B کا تعین ہوجائے تو مماس PA اور PB بنا سکتے ہیں۔کیونکہ اگر نصف قطر OA اور OB بنائیں تو PA خط ⊥ OA نصف قطر اور PB خط ⊥ OB نصف قطر، $\triangle OAP$ اور $\triangle OBP$ قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں اور OP دونوں مثلثوں کا وتر ہے۔قطعہ OP کو قطر مان کر دائرہ بنائیں تو یہ دائرہ اصل دائرے جس کا مرکز O ہے کو نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے۔ کیونکہ نصف دائرے میں بننے والا قوسی زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

ہندسی عمل کے مرحلے :



شکل 4.14

(1) نقطہ O کو مرکز لے کر کسی بھی نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔

(2) دائرے کے بیرون میں ایک نقطہ P لیجیے۔

(3) قطعہ OP بنائیے۔قطعہ OP کا عمودی ناصف بنا کر وسطی نقطہ کو M نام دیجیے۔

(4) نقطہ M کو مرکز مان کر OM نصف قطر کا قوس بنائیے۔

(5) یہ قوس، دیے ہوئے دائرے کو نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے۔

(6) قطعہ PA اور قطعہ PB بنائیے۔

قطعہ PA اور قطعہ PB دائرے کے مطلوبہ مماس ہیں۔

مشقی سیٹ 4.2

1. نقطہ P کو مرکز مان کر 3.2 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔اس پر واقع نقطہ M سے گذرنے والا مماس بنائیے۔

2. 2.7 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔اس دائرے پر واقع نقطے سے دائرے کا مماس بنائیے۔

3. 3.6 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔دائرے پر کوئی ایک نقطہ لے کر مرکز کا استعمال کیے بغیر اس نقطے سے گذرتا ہوا دائرہ کا مماس بنائیے۔

4. 3.3 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔اس میں 6.6 سم لمبائی کا وتر PQ بنائیے۔نقاط P اور Q سے گذرنے والے دائرے کے مماس بنائیے۔مماسوں کے متعلق اپنا مشاہدہ لکھیے۔

.5 3.4 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ اس میں 5.7 سم لمبائی کا وتر MN کھینچیے۔ نقطہ M اور نقطہ N سے گذرنے والا مماس بنائیے۔

.6 P مرکز مان کر 3.4 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ دائرے کے مرکز سے 5.5 سم کے فاصلے پر ایک نقطہ Q لیجیے۔ نقطہ Q سے دائرے پر مماس بنائیے۔

.7 4.1 سم نصف لے کر ایک دائرہ بنائیے۔ دائرے کے مرکز سے 7.3 سم فاصلے پر واقع نقطے سے دائرے پر مماس بنائیے۔

مجموعہ سوالات 4

.1 درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے :

(1) دائرے پر دیے ہوئے نقطے سے دائرے پر بنائے ہوئے مماس کی تعداد .... ہوگی۔

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

(2) دائرے کے بیرون میں واقع نقطے سے دائرے پر زیادہ سے زیادہ .... مماس بنائے جاسکتے ہیں۔

(A) 2 (B) 1 (C) ایک اور صرف ایک (D) 0

(3) اگر $\triangle ABC \sim \triangle PQR$، $\frac{AB}{PQ} = \frac{7}{5}$ تو .... ۔

(A) $\triangle ABC$ بڑا ہے (B) $\triangle PQR$ بڑا ہے (C) دونوں مثلث مساوی ہیں (D) قطعی طور پر نہیں کہہ سکتے

.2 نقطہ O کو مرکز مان کر 3.5 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ دائرے کے مرکز سے 5.7 سم فاصلے پر ایک نقطہ P لیجیے۔ نقطہ P سے دائرے پر مماس بنائیے۔

.3 کوئی بھی ایک دائرہ بنائیے۔ اس پر ایک نقطہ A لیجیے۔ نقطہ A سے دائرے کے مرکز کا استعمال کیے بغیر مماس بنائیے۔

.4 6.4 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ دائرے کے مرکز سے قطر کے مساوی فاصلے پر نقطہ R لیجیے۔ اس نقطے سے دائرے پر مماس بنائیے۔

.5 P مرکز والا ایک دائرہ بنائیے۔ دائرے میں $100°$ پیمائش کا ایک قوس AB بنائیے۔ نقاط A اور B سے گذرنے والے دائرے کا مماس بنائیے۔

.6 نقطہ E کو مرکز مان کر 3.4 سم نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ دائرے پر ایک نقطہ F لیجیے۔ نقطہ A اس طرح لیں کہ E–F–A اور FA = 4.1 سم، نقطہ A سے دائرے کا مماس بنائیے۔

.7 اگر $\triangle ABC \sim \triangle LBN$، $\triangle ABC$ میں AB = 5.1 سم، $\angle B = 40°$، BC = 4.8 سم، $\frac{AC}{LN} = \frac{4}{7}$ تو $\triangle ABC$ اور $\triangle LBN$ بنائیے۔

.8 $\triangle PYQ$ اس طرح بنائیے کہ PY = 6.3 سم، YQ = 7.2 سم، PQ = 5.8 سم ہو تو $\triangle PYQ$ کے متشابہ $\triangle XYZ$ اس طرح بنائیے کہ $\frac{YZ}{YQ} = \frac{6}{5}$

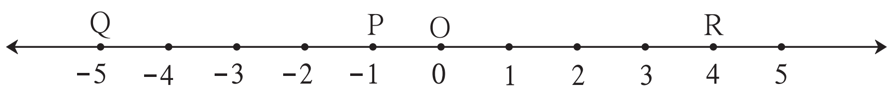
5 محددی علم ہندسہ Co-ordinate Geometry

آیئے سیکھیں

- فاصلہ کا ضابطہ (Distance formula)
- حصے کا ضابطہ (Section formula)
- خط کی ڈھلان (Slope of a line)

آیئے ذرا یاد کریں

ہم جانتے ہیں کہ عددی خط پر واقع دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ کس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔ P، Q اور R نقاط کے محدد بالترتیب -1 ، -5 ، اور 4 ہیں۔ تب قطعہ PQ اور قطعہ QR کی لمبائی معلوم کیجیے۔



شکل 5.1

اگر نقاط A اور B کے محدد x_1 اور x_2 ہوں اور $x_1 > x_2$ ہو تب

قطعہ خط AB کی لمبائی $= d\,(A, B) = x_2 - x_1$

شکل کے مطابق نقاط P، Q اور R بالترتیب -1 ، -5 ، اور 4 ہیں۔

$$\therefore \quad d\,(P, Q) = (-1) - (-5) = -1 + 5 = 4$$

اور، $d\,(Q, R) = 4 - (-5) = 4 + 5 = 9$

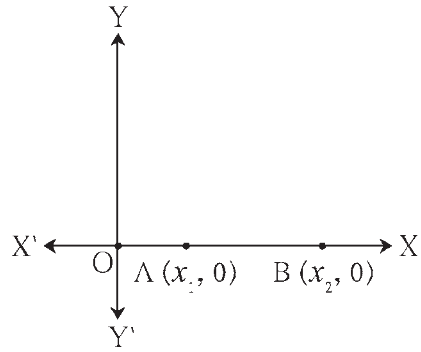
اس تصور کا استعمال کر کے ہم XY مستوی میں، ایک ہی محور پر واقع دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کریں گے۔

آیئے سمجھ لیں

1. ایک ہی محور پر واقع دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا۔

ایک ہی محور پر واقع دو نقاط یعنی ایک ہی عددی خط پر واقع دو نقاط ہوتے ہیں۔ اسے ذہن نشین رکھیں کہ X-محور پر نقاط کے محددین $(2, 0)$، $(\frac{-5}{2}, 0)$، $(8, 0)$ اس طرح ہوتے ہیں اور Y-محور پر نقاط کے محددین $(0, 1)$، $(0, \frac{17}{2})$، $(0, 3)$ اس طرح ہوتے ہیں۔ X-محور کا منفی محدد دکھانے والا حصہ، شعاع OX' ہے اور Y-محور کا منفی محدد دکھانے والا حصہ، شعاع OY' ہے۔

(i) X -محور پر دونقاط کا درمیانی فاصلہ معلوم کرنا۔



شکل 5.2

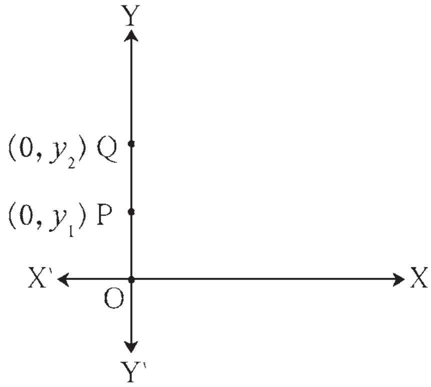
اوپر کی شکل میں،

$A(x_1, 0)$ اور $B(x_2, 0)$ یہ دو نقاط

X-محور پر اس طرح واقع ہیں کہ $x_2 > x_1$،

$\therefore \; d(A, B) = x_2 - x_1$

(ii) Y - محور پر واقع دو نقاط کا درمیانی فاصلہ معلوم کرنا۔



شکل 5.3

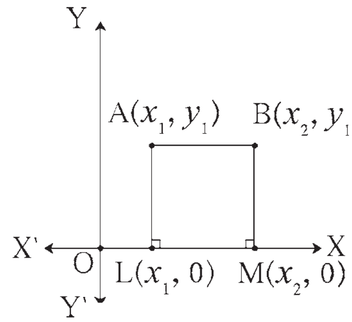
اوپر کی شکل میں،

$P(0, y_1)$ اور $Q(0, y_2)$ یہ دو نقاط Y-محور پر اس طرح

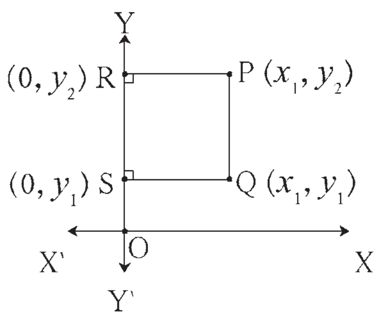
واقع ہیں کہ $y_2 > y_1$،

$\therefore \; d(A, B) = y_2 - y_1$

(2) دو نقاط کو ملانے والا XY مستوی کا قطعہ کسی محور کے متوازی ہو تو ان دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ معلوم کرنا۔



شکل 5.4



شکل 5.5

(i) شکل 5.4 میں، قطعہ AB، X-محور کے متوازی ہے۔

اس لیے نقطہ A اور نقطہ B کے y-محدد مساوی ہیں۔

X-محور پر قطعہ AL اور قطعہ BM عمود کھینچیے۔

$\therefore$ □ABML مستطیل ہے۔

$\therefore \; AB = LM$

لیکن , $LM = x_2 - x_1$

$\therefore \; d(A, B) = x_2 - x_1$

(ii) شکل 5.5 میں، قطعہ PQ، Y-محور کے متوازی ہے۔

اس لیے نقطہ P اور نقطہ Q کے x-محدد مساوی ہیں۔

Y- محور پر قطعہ PR اور قطعہ QS عمود کھینچیے۔

$\therefore$ □PQSR مستطیل ہے۔

$\therefore \; PQ = RS$

لیکن , $RS = y_2 - y_1$

$\therefore \; d(P, Q) = y_2 - y_1$

عملی کام :

شکل 5.6 میں Y–محور || AB قطعہ اور X–محور || CB قطعہ ہے۔

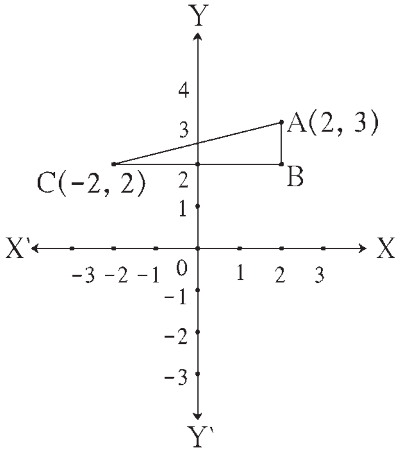
نقاط A اور C کے محددین دیے ہوئے ہیں۔

AC کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے ذیل کی خانہ پری کیجیے۔

ΔABC قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

فیثاغورث کے مسئلہ کی رُو سے،

$(AB)^2 + (BC)^2 = \square$



شکل 5.6

AB اور BC معلوم کرنے کے لیے نقطہ B کے محددین معلوم کریں گے۔

CB || X-محور , ∴ B کا Y-محدد = $\square$

BA || Y-محور , ∴ B کا X-محدد = $\square$

AB = $\boxed{3} - \square = \square$, BC = $\square - \square = \boxed{4}$

$\therefore AC^2 = \square + \square = \square$, $\therefore AC = \boxed{\sqrt{17}}$

آیئے سمجھ لیں

فاصلے کا ضابطہ (Distance Formula)

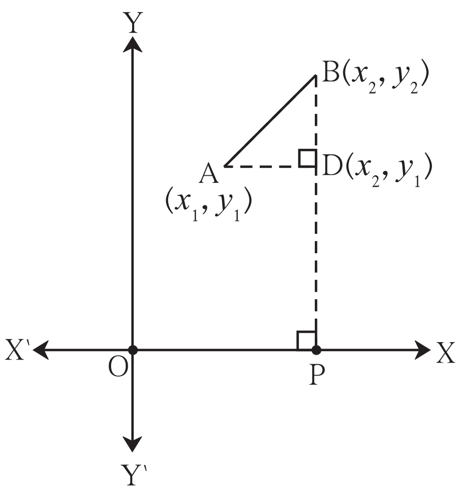
شکل 5.7 میں، $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ یہ XY-مستوی میں واقع کوئی دو نقاط ہیں۔

نقطہ B سے X-محور پر BP ایک عمود کھینچیے۔اسی طرح نقطہ A سے قطعہ BP پر عمود AD کھینچیے۔Y-محور کے متوازی قطعہ BP ہے۔

∴ نقطہ D کا x محدد x_2 ہے۔

X-محور کے متوازی قطعہ AD ہے۔

∴ نقطہ D کا y محدد y_1 ہے۔



شکل 5.7

$\therefore\ AD = d(A, D) = x_2 - x_1,\ BD = d(B, D) = y_2 - y_1$

△ABD قائمۃ الزاویہ مثلث میں،

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

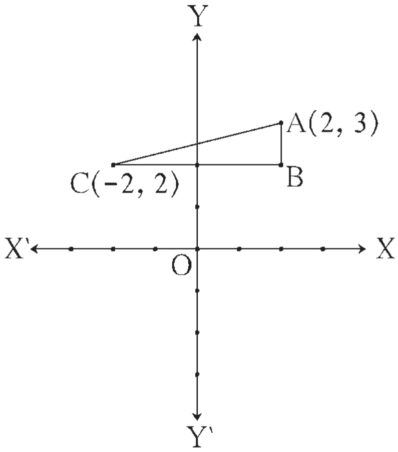
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

اس نتیجے کو فاصلہ کا ضابطہ کہتے ہیں۔

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$ ... (اسے ذہن نشین رکھیے)

پچھلے صفحہ پر ہم نے AC کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے AB اور BC کی لمبائی معلوم کرکے فیثا غورث کا مسئلہ استعمال کیا۔ اب فاصلہ کا ضابطہ استعمال کرکے اسی قطعہ خط کی لمبائی معلوم کریں گے۔



شکل 5.8

دیا ہوا ہے : A(2, 3) اور C(−2, 2)

فرض کیجیے : $A(x_1, y_1)$ ، $C(x_2, y_2)$

یہاں $x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -2, y_2 = 2$

$$AC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-2-2)^2+(2-3)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2+(-1)^2}$$
$$= \sqrt{16+1}$$
$$= \sqrt{17}$$

قطعہ AB ‖ Y–محور اور قطعہ BC ‖ X–محور

∴ نقطہ B کے محدد (2, 2) ہیں۔

$$\therefore\ AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{0+1} = 1$$

$$BC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-2-2)^2+(2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2+0} = 4$$

شکل 5.1 میں نقاط P اور Q کا درمیانی فاصلہ '4 = (5−) − (1−)' ہم نے معلوم کیا ہے۔ انہی نقاط کے محددی مستوی میں (0 ,1−) اور (0 ,5−) ہوں تو فاصلہ کا ضابطہ استعمال کرکے P اور Q کا درمیانی فاصلہ بھی اتنا آئے گا۔ تصدیق کیجیے۔

اسے ذہن نشین کرلیں

- مبداء O کے محددین (0, 0) ہوتے ہیں۔ اس لیے نقطہ P کے محددین (x, y) ہوں تو $d(O, P) = \sqrt{x^2+y^2}$ اسے ذہن نشین کرلیں۔
- $P(x_1, y_1)$ ، $Q(x_2, y_2)$ یہ دو نقاط XY–مستوی پر واقع ہوں تو

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

یعنی , $PQ^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

مثال **(1)** : $P(-1, 1)$ ، $Q(5, -7)$ ان دونقاط کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$

یہاں $x_1 = -1, \quad y_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = -7$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{... (فاصلے کے ضابطے سے)}$$

$$= \sqrt{[5-(-1)]^2 + [(-7)-1]^2}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{36+64}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{100} = 10$$

$\therefore$ P اور Q نقاط کا درمیانی فاصلہ 10 ہے۔

مثال **(2)** : $A(-3, 2)$ ، $B(1, -2)$ اور $C(9, -10)$ دکھائیے کہ یہ تینوں نقاط ہم خطی ہیں۔

حل : اگر $d(A, B)$; $d(B, C)$ اور $d(A, C)$ ان میں سے کوئی دو فاصلوں کا مجموعہ تیسرے فاصلے کے برابر ہو تو A ، B ، C ہم خطی نقاط ہوں گے۔

$\therefore$ $d(A, B)$ ، $d(B,C)$ اور $d(A, C)$ کی لمبائی معلوم کریں۔

فاصلے کا ضابطہ	نقطہ B کے محدد	نقطہ A کے محدد
$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$(1, -2)$ (x_2, y_2)	$(-3, 2)$ (x_1, y_1)

$$\therefore d(A, B) = \sqrt{[1-(-3)]^2 + [(-2)-2]^2} \quad \text{... (فاصلے کے ضابطے سے)}$$

$$= \sqrt{(1+3)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{16+16}$$

$$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad \text{...(I)}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(9-1)^2 + (-10+2)^2}$$

$$= \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2} \quad \text{...(II)}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(9+3)^2 + (-10-2)^2}$$

$$= \sqrt{144+144} = 12\sqrt{2} \quad \text{...(III)}$$

$$4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \quad \text{... [بیان (I)، (II) اور (III) کی رو سے]}$$

$$\therefore d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$$

$\therefore$ A ، B اور C ہم خطی نقاط ہیں۔

مثال (3) : $P(6,-6)$، $Q(3,-7)$ اور $R(3,3)$ کیا یہ تینوں نقاط ہم خطی ہیں؟ طے کیجیے۔

حل : (فاصلے کے ضابطے سے)

$$PQ = \sqrt{(6-3)^2+(-6+7)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2+(1)^2} = \sqrt{10} \quad \ldots (I)$$

$$QR = \sqrt{(3-3)^2+(-7-3)^2}$$

$$= \sqrt{(0)^2+(-10)^2} = \sqrt{100} \quad \ldots (II)$$

$$PR = \sqrt{(3-6)^2+(3+6)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2+(9)^2} = \sqrt{90} \quad \ldots (III)$$

بیان (I)، (II) کی بنا پر $\sqrt{10}$، $\sqrt{100}$ اور $\sqrt{90}$ ان میں سے $\sqrt{100}$ سب سے بڑا عدد ہے۔

اب $\left(\sqrt{100}\right)$ اور $\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right)$ یہ اعداد مساوی ہیں یا نہیں یہ دیکھیں گے۔

اس لیے $\left(\sqrt{100}\right)^2$ اور $\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right)^2$ کا موازنہ کیجیے۔

اس بنا پر ہمیں اس بات کا پتا چلتا ہے کہ

$$\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right) > \left(\sqrt{100}\right), \therefore PQ + PR \neq QR$$

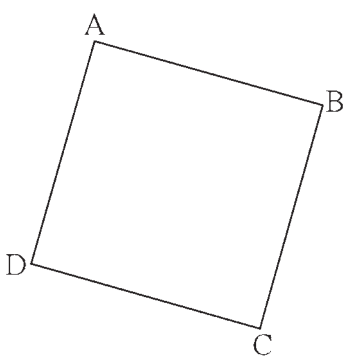
$\therefore$ $P(6,-6)$، $Q(3,-7)$ اور $R(3,3)$ یہ نقاط غیر ہم خطی ہیں۔

مثال (4) : دکھائیے کہ $(1,7)$, $(4,2)$, $(-1,-1)$, $(-4,4)$ یہ مربع کے راس ہیں۔

حل : جب ذوار بعۃ الاضلاع کے تمام اضلاع مساوی لمبائی کے ہوں اور وتر بھی مساوی ہوں تب ذوار بعۃ الاضلاع مربع ہوتا ہے۔

$\therefore$ تمام اضلاع کی لمبائیاں اور وتروں کی لمبائیاں فاصلے کے ضابطے سے معلوم کریں۔

فرض کیجیے : $A(1,7)$, $B(4,2)$, $C(-1,-1)$ اور $D(-4,4)$ دیے ہوئے نقاط ہیں۔



شکل 5.9

$$AB = \sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2+(7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

$\therefore AB = BC = CD = DA$

اور , $AC = BD$

اس سے ہمیں پتا چلتا ہے ذواربعۃ الاضلاع کے چاروں اضلاع کی لمبائیاں مساوی ہے اور دونوں وتر AC اور BC کی لمبائیاں بھی مساوی ہے۔

$\therefore$ (1, 7)، (4, 2)، (−1, −1) اور (−4, 4) راسوں سے بننے والا ذواربعۃ الاضلاع مربع ہے۔

مثال (5) : Y-محور پر واقع ایسے نقطہ کے محددین معلوم کیجیے کہ وہ M(−5, −2) اور N(3, 2) سے ہم فاصلہ ہو۔

حل : فرض کیجیے، Y-محور پر نقطہ P(0, y) نقطہ M اور N سے ہم فاصلہ ہے۔

$$\therefore\ PM = PN \quad , \quad \therefore\ PM^2 = PN^2$$

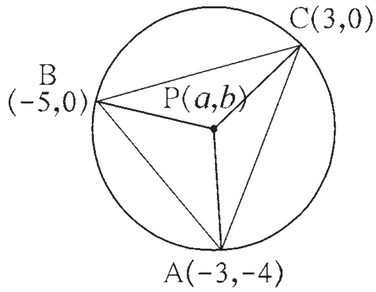
$$\therefore\ [0-(-5)]^2 + [y-(-2)]^2 = (0-3)^2 + (y-2)^2$$

$$\therefore\ 25 + (y+2)^2 = 9 + y^2 - 4y + 4$$

$$\therefore\ 25 + y^2 + 4y + 4 = 13 + y^2 - 4y$$

$$\therefore\ 8y = -16 \quad , \quad \therefore\ y = -2$$

$\therefore$ M(−5, −2) اور N(3, 2) ان نقاط سے ہم فاصلہ، Y-محور پر نقطہ کے محددین (0, −2) ہیں۔



شکل 5.10

مثال (6) : A(−3, −4)، B(−5, 0)، C(3, 0) یہ △ABC کے راس ہیں۔

△ABC کے حائط مرکز کے محددین معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے : نقطہ P(a, b)، △ABC کا حائط مرکز ہے۔

$\therefore$ نقطہ P، نقاط A، B، C سے ہم فاصلہ ہے۔

$$\therefore\ PA^2 = PB^2 = PC^2 \quad \dots (I) \quad , \quad \therefore\ PA^2 = PB^2$$

$$(a+3)^2 + (b+4)^2 = (a+5)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore\ a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 + 10a + 25 + b^2$$

$$\therefore\ -4a + 8b = 0$$

$$\therefore\ a - 2b = 0 \quad \dots (II)$$

اسی طرح ، $PA^2 = PC^2$ ... [(I) سے]

$$\therefore\ (a+3)^2 + (b+4)^2 = (a-3)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore\ a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 - 6a + 9 + b^2$$

$$\therefore\ 12a + 8b = -16$$

$$\therefore\ 3a + 2b = -4 \quad \dots (III)$$

مساوات (II) اور (III) حل کرنے پر $a = -1$ اور $b = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ حائط مرکز کے محددین $(-1, -\frac{1}{2})$ ہیں۔

مثال (7) : نقطہ (x, y) نقاط $(7, 1)$ اور $(3, 5)$ سے ہم فاصلہ ہو تو دکھایئے کہ $y = x - 2$

حل : فرض کیجیے : نقطہ $P(x, y)$ یہ نقاط $A(7, 1)$ اور $B(3, 5)$ سے ہم فاصلہ ہے۔

$$\therefore\ AP = BP$$

$$\therefore\ AP^2 = BP^2$$

$$\therefore\ (x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$\therefore\ x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$\therefore -8x + 8y = -16$$

$$\therefore\ x - y = 2$$

$$\therefore\ y = x - 2$$

مثال (8) : نقطہ $A(2, -2)$ اور نقطہ $B(-1, y)$ کے درمیان فاصلہ 5 ہے۔تو y کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : (فاصلہ کے ضابطے کی مدد سے)،

$$\therefore\ AB^2 = [(-1) - 2]^2 + [y - (-2)]^2$$

$$\therefore\ 5^2 = (-3)^2 + (y+2)^2$$

$$\therefore\ 25 = 9 + (y+2)^2$$

$$\therefore\ 16 = (y+2)^2$$

$$\therefore\ y + 2 = \pm\sqrt{16}$$

$$\therefore\ y + 2 = \pm 4$$

$\therefore\ y = 4 - 2$ یا $y = -4 - 2$

$\therefore\ y = 2$ یا $y = -6$

مشقی سیٹ 5.1

.1 مندرجہ ذیل نقاط کے ہر جوڑی کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

(1) $A(2, 3), B(4, 1)$ (2) $P(-5, 7), Q(-1, 3)$ (3) $R(0, -3), S(0, \frac{5}{2})$

(4) $L(5, -8), M(-7, -3)$ (5) $T(-3, 6), R(9, -10)$ (6) $W(\frac{-7}{2}, 4), X(11, 4)$

.2 مندرجہ ذیل نقاط ہم خطی ہیں یا نہیں طے کیجیے۔

(1) $A(1, -3), B(2, -5), C(-4, 7)$ (2) $L(-2, 3), M(1, -3), N(5, 4)$

(3) $R(0, 3), D(2, 1), S(3, -1)$ (4) $P(-2, 3), Q(1, 2), R(4, 1)$

3. X-محور پر ایسا نقطہ معلوم کیجیے جو نقطہ $A(-3, 4)$ اور $B(1, -4)$ سے ہم فاصلہ ہو۔

4. دکھائیے کہ نقاط $P(-2, 2)$، $Q(2, 2)$ اور $R(2, 7)$ قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔ اس کی تصدیق کیجیے۔

5. دکھائیے کہ نقاط $P(-2, 2)$، $Q(7, 3)$، $R(11, -1)$ اور $S(6, -6)$ متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

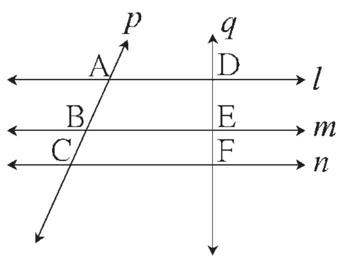
6. دکھائیے کہ نقاط $A(-4, -7)$، $B(-1, 2)$، $C(8, 5)$ اور $D(5, -4)$ معین ABCD کے راس ہیں۔

7. اگر نقاط $L(x, 7)$ اور $M(1, 15)$ کا درمیانی فاصلہ 10 ہے تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔

8. دکھائیے کہ نقاط $A(1, 2)$، $B(1, 6)$، $C(1 + 2\sqrt{3}, 4)$ متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

آیئے ذرا یاد کریں

تین متوازی خطوط پر بنے حائل قطعات کی خصوصیت



شکل 5.11

شکل میں خط n || خط m || خط l

اور خطوط p اور q تقاطع ہیں۔

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

آیئے سمجھ لیں

قطعہ خط کی تقسیم (Division of a line Seqment)

شکل 5.12

شکل میں $AP = 6$ اور $PB = 10$

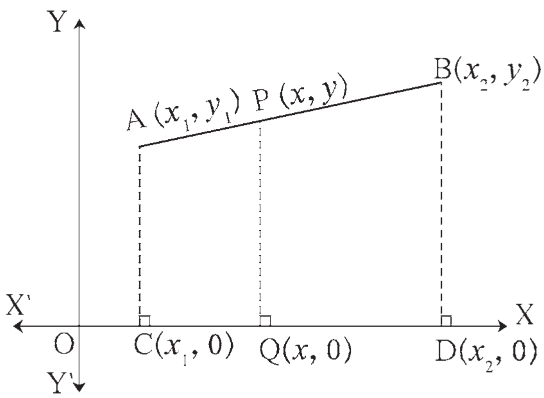
$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

اسے دوسرے الفاظ میں یوں کہتے ہیں کہ نقطہ P، قطعہ AB کو 5 : 3 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ جب کسی قطعہ خط پر کوئی نقطہ، اسی قطعہ خط کو دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرتا ہو تب اس تقسیم کرنے والے نقطے کے محددین کس طرح معلوم کریں گے۔

آیئے سمجھ لیں

حصے کا ضابطہ (Section Formula)



شکل 5.13

شکل 5.13 میں XY-مستوی میں قطعہ AB پر واقع نقطہ P، قطعہ AB کو $m : n$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

فرض کیجیے : $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$، $P(x, y)$ ہے۔

قطعہ AC، قطعہ PQ اور قطعہ BD عمودی قطعات X-محور پر کھینچے گئے ہیں۔

اس لیے، $C(x_1, 0)$ ، $Q(x, 0)$ اور $D(x_2, 0)$

$$\therefore \left.\begin{aligned} CQ &= x - x_1 \\ QD &= x_2 - x \end{aligned}\right\} \quad \ldots (I)$$

اسی طرح BD قطعہ ∥ PQ قطعہ ∥ AC قطعہ

∴ تین متوازی خطوط سے بننے والے حائل قطعات کی خصوصیات کی بنا پر،

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD} = \frac{m}{n}$$

اب, $CQ = x - x_1$, $QD = x_2 - x$ ... [(1) سے]

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

$$\therefore mx + nx = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x(m + n) = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

اس طرح نقاط A، P اور B سے Y-محور پر عمود کھینچ کر اوپر کے مطابق عمل کر کے ہم $y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$ حاصل کر سکتے ہیں۔

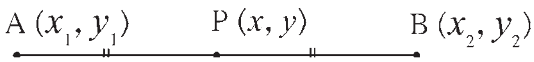
∴ نقطہ $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والا قطعہ AB کو $m : n$ کی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کے محددین

$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$ ہوتے ہیں۔

قطعہ خط کے وسطی نقطے کا ضابطہ

نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ میں نقطہ $P(x, y)$، قطعہ AB کا وسطی نقطہ ہو تو، $m = n$

اب حصے کے ضابطے کی رو سے x اور y کی قیمتیں لکھیں گے۔



شکل 5.14

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$= \frac{mx_2 + mx_1}{m+m} \quad \ldots (\because m = n)$$

$$= \frac{m(x_1 + x_2)}{2m}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$= \frac{my_2 + my_1}{m+m} \quad \ldots (\because m = n)$$

$$= \frac{m(y_1 + y_2)}{2m}$$

$$= \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$\therefore$ نقطہ P کے محددین $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ہیں۔اسی کو وسطی نقطے کے محددین کا ضابطہ کہتے ہیں۔

ہم نے گذشتہ جماعت میں دکھایا ہے کہ دو ناطق اعداد a اور b کو عددی خط پر ظاہر کر کے اور انھیں ملانے والے قطعات کا $\frac{a+b}{2}$، وسطی نقطہ ہوتا ہے۔وہ نتیجہ یعنی ابھی ہمیں حاصل ہوئے ضابطے کی مخصوص قسم ہے۔اسے ذہن نشین کرلیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) : اگر $A(3, 5)$، $B(7, 9)$ اور نقطہ Q قطعہ AB کو $3 : 2$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تو نقطہ 'Q' کے محددین معلوم کیجیے۔

حل : دی ہوئی مثال میں فرض کیجیے،

$(x_1, y_1) = (3,5)$ اور

$(x_2, y_2) = (7,9)$

اسی طرح, $m : n = 2 : 3$

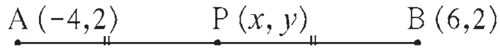
قطعہ خط کے وسطی نقطے کے ضابطے کی رو سے،

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{2\times 7 + 3\times 3}{2+3} = \frac{23}{5} \quad , \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{2\times 9 + 3\times 5}{2+3} = \frac{33}{5}$$

$\therefore$ نقطہ Q کے محددین $\left(\frac{23}{5}, \frac{33}{5}\right)$

مثال (2) : اگر $A(-4, 2)$، $B(6, 2)$ اس قطعہ کا وسطی نقطہ P ہو تو نقطہ P کے محددین معلوم کیجیے۔

حل : شکل 5.15 کی مثال میں،



شکل 5.15

فرض کیجیے نقطہ P کے محددین (x, y) ہیں اور $(-4, 2) = (x_1, y_1)$، $(6, 2) = (x_2, y_2)$

وسطی نقطے کے ضابطے کی رو سے،

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

وسطی نقطہ P کے محددین $(1, 2)$ ہوں گے۔

آیئے ذرا یاد کریں

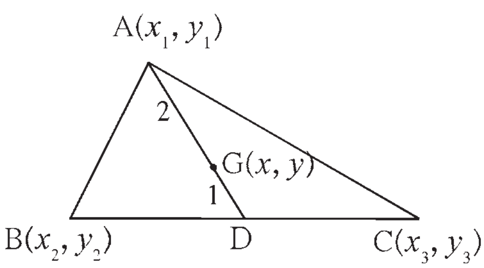
ہم جانتے ہیں کہ مثلث کے وسطانیے متراکز ہوتے ہیں۔

نقطہ تراکز (Centroid) یعنی ہندسی مرکز وسطانیہ کو 1 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

آیئے سمجھ لیں

ہندسی مرکز کا ضابطہ (Centroid Formula)

مثلث کے تینوں راس کے محددین دیے ہوئے ہوں تو، حصے کے ضابطے کا استعمال کر کے ہندسی مرکز کے محددین کس طرح معلوم کریں گے، آیئے دیکھتے ہیں۔



شکل 5.16

فرض کیجیے۔ $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$، $C(x_3, y_3)$

$\triangle ABC$ کے راس ہیں۔ اور $\triangle ABC$ کا وسطانیہ قطعہ AD

ہے۔ نقطہ $G(x, y)$ اس مثلث کا ہندسی مرکز ہے۔

نقطہ D قطعہ BC کا وسطی نقطہ ہے۔

اس لیے نقطہ D کے محددین،

(قطعہ کے وسطی نقطے کے ضابطہ کی رو سے) ... $x = \frac{x_2 + x_3}{2}$ ، $y = \frac{y_2 + y_3}{2}$

یہاں، $\triangle ABC$ کا ہندسی مرکز نقطہ $G\,(x, y)$ ہے۔

$$\therefore\ AG : GD = 2 : 1$$

$\therefore$ قطعہ خط کے حصے کے ضابطے کی رو سے،

$$x = \frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1 \times y_1}{2+1} = \frac{y_2 + y_3 + y_1}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

یعنی (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3) راس والے مثلث کے ہندسی مرکز کے محددین $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ ہیں۔

اسے ہی ہندسی مرکز کا ضابطہ کہتے ہیں۔

اسے ذہن نشین کرلیں

- **حصے کا ضابطہ :**

(x_1, y_1)، (x_2, y_2) ان دو متفرق نقاط کو جوڑنے والے قطعہ خط کو $m : n$ کی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کے محددین $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ ہیں۔

- **وسطی نقطے کا ضابطہ :**

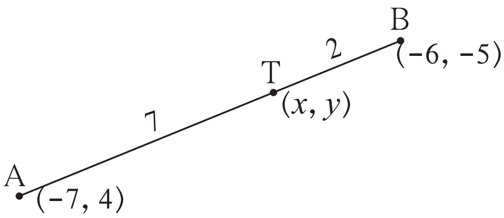
(x_1, y_1)، (x_2, y_2) ان دو متفرق نقاط کو جوڑنے والے قطعہ خط کے وسطی نقطہ کے محددین $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ہیں۔

- **ہندسی مرکز کا ضابطہ :**

(x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3) یہ مثلث کے راس کے محددین ہیں۔ تو ہندسی مرکز کے محددین $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ ہیں۔

مثال (1) : $A(-7, 4)$ اور $B(-6, -5)$ ہے۔نقطہ T قطعہ AB کو 2 : 7 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔تو نقطہ T کے محددین معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے T کے محددین (x, y) ہیں۔



شکل 5.17

$\therefore$ قطعہ خط کی حصے کے ضابطہ کی رو سے،

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{7\times(-6)+2\times(-7)}{7+2}$$

$$= \frac{-42-14}{9} = \frac{-56}{9}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{7\times(-5)+2\times(4)}{7+2}$$

$$= \frac{-35+8}{9} = \frac{-27}{9} = -3$$

نقطہ T کے محددین $\left(\frac{-56}{9}, -3\right)$ ہیں۔

مثال (2) : $A(-6, 10)$ اور $B(r, s)$ ان کو جوڑنے والے قطعہ خط کو $P(-4, 6)$، 1 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے،تو نقطہ B کے محددین معلوم کیجیے۔

حل : قطعہ خط کی حصے کے ضابطے کی رو سے،

$$-4 = \frac{2\times r + 1\times(-6)}{2+1}$$

$\therefore\ -4 = \frac{2r-6}{3}$

$\therefore\ -12 = 2r - 6$

$\therefore\ 2r = -6$

$\therefore\ r = -3$

$$6 = \frac{2\times s + 1\times 10}{2+1}$$

$\therefore\ 6 = \frac{2s+10}{3}$

$\therefore\ 18 = 2s + 10$

$\therefore\ 2s = 8$

$\therefore\ s = 4$

$\therefore$ نقطہ B کے محددین $(-3, 4)$ ہیں۔

مثال (3) : معلوم کیجیے کہ $A(15, 5)$ ، $B(9, 20)$ اور $P(11, 15)$ اس طرح ہیں کہ A–P–B، تو قطعہ AB کو نقطہ P کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

حل : فرض کیجیے نقطہ $P(11, 15)$ قطعہ AB کو $m : n$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

$\therefore$ حصے کے ضابطے کی رو سے،

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$\therefore\ 11 = \frac{9m+15n}{m+n}$$

$$\therefore\ 11m + 11n = 9m + 15n$$

$$\therefore\ 2m = 4n$$

$$\therefore\ \frac{m}{n} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

$\therefore$ تقسیم کی نسبت 1 : 2 ہے۔

> اسی طرح Y-محددین کی قیمت رکھ کر حاصل ہونے والی نسبت کیا آئے گی؟ اسے معلوم کیجیے۔ اپنا نتیجہ لکھیے۔

مثال **(4)** : نقطہ A(2, −2) اور B(−7, 4) ان کو جوڑنے والے قطعہ خط کو ثلاثی تقسیم کار نقاط کے محددین معلوم کیجیے۔

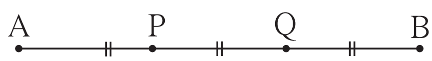
(قطعہ خط کو جو دو نقاط، اس قطعہ خط کے تین مساوی حصے کرتے ہیں۔ ان نقاط کو اس قطعہ خط کے ثلاثی تقسیم کار نقاط کہتے ہیں)

حل : فرض کیجیے۔ نقاط P اور Q نقاط A اور B کو جوڑنے والے قطعہ خط AB کے ثلاثی تقسیم کار نقاط ہیں۔ یعنی نقطہ P اور نقطہ Q کی وجہ سے قطعہ AB کے تین مساوی حصے ہوتے ہیں۔

$$AP = PQ = QB \qquad ..\ (I)$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AP}{PQ+QB} = \frac{AP}{AP+AP} = \frac{AP}{2AP} = \frac{1}{2}$$

نقطہ P قطعہ AB کو 2 : 1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔



شکل **5.18**

$$\frac{1\times(-7)+2\times 2}{1+2} = \frac{-7+4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\frac{1\times 4+2\times(-2)}{1+2} = \frac{4-4}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

اس طرح نقطہ Q قطعہ AB کو 1 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ یعنی $\frac{AQ}{QB} = \frac{2}{1}$

$$\frac{2\times(-7)+1\times 2}{2+1} = \frac{-14+2}{3} = \frac{-12}{3} = -4$$

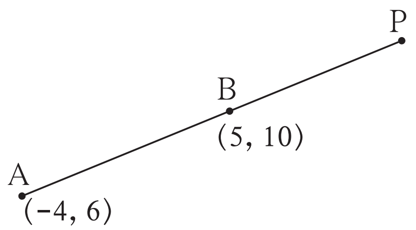
$$\frac{2\times 4+1\times(-2)}{2+1} = \frac{8-2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$\therefore$ قطعہ خط کے ثلاثی تقسیم کار نقاط کے محددین (−1, 0) اور (−4, 2) ہیں۔

مزید معلومات کے لیے :

آیئے دیکھتے ہیں کہ دونقاط A اور B کو جوڑنے والے قطعہ خط کی خارجی تقسیم کیسے کی جاتی ہے۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ $A(-4, 6)$، $B(5, 10)$ اس طرح دونقاط ہوں تو قطعہ خط AB کی $3 : 1$ کی نسبت میں خارجی تقسیم کرنے والے نقطہ P کی محددین کس طرح معلوم کرسکتے ہیں۔



شکل **5.19**

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ یعنی AP، PB کی بہ نسبت بڑا ہے اور A–B–P ہے۔

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ یعنی $AP = 3k$, $BP = k$ تب $AB = 2k$

$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{2}{1}$

اب نقطہ B قطعہ خط AP کو $2 : 1$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

A اور B کے محددین دیے ہوں تو P کے محددین معلوم کرنا ہم سیکھ چکے ہیں۔

مشقی سیٹ 5.2

.1 اگر نقطہ P، $A(-1, 7)$ اور $B(4, -3)$ کو ملانے والے قطعہ خط کو $2 : 3$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہو تو نقطہ P کے محددین معلوم کیجیے۔

.2 ذیل کی ہر مثال میں قطعہ PQ کو $a : b$ کی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ A کے محددین معلوم کیجیے۔

(1) $P(-3, 7)$, $Q(1, -4)$, $a : b = 2 : 1$

(2) $P(-2, -5)$, $Q(4, 3)$, $a : b = 3 : 4$

(3) $P(2, 6)$, $Q(-4, 1)$, $a : b = 1 : 2$

.3 P–T–Q ہو تو نقطہ $P(-3,10)$ اور نقطہ $Q(6,-8)$ کو ملانے والے قطعہ خط کو نقطہ $T(-1,6)$ کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے ؟

.4 دائرے کا قطر قطعہ AB ہے اور نقطہ P دائرے کا مرکز ہے۔ $A(2,-3)$ اور $P(-2, 0)$ ہو تو نقطہ B کے محددین معلوم کیجیے۔

.5 نقطہ $A(8, 9)$ اور $B(1, 2)$ کو ملانے والے قطعہ AB کو نقطہ $P(k, 7)$ کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے، معلوم کیجیے اور k کی قیمت بھی معلوم کیجیے۔

.6 $(22, 20)$ اور $(0, 16)$ ان کو ملانے والے قطعہ خط کے وسطی نقطہ کے محددین معلوم کیجیے۔

.7 درج ذیل مثلث کے راس ہیں۔ ہر مثلث کے ہندسی مرکز کے محددین معلوم کیجیے۔

(1) $(-7, 6)$, $(2, -2)$, $(8, 5)$

(2) $(3, -5)$, $(4, 3)$, $(11, -4)$

(3) $(4, 7)$, $(8, 4)$, $(7, 11)$

.8 $\triangle ABC$ کا ہندسی مرکز $G(-4, -7)$ ہے $A(-14, -19)$، $B(3, 5)$ ہے تو نقطہ C کے محددین معلوم کیجیے۔

.9 ہندسی مرکز $G(1, 5)$ والے مثلث کے $A(h, -6)$ ، $B(2, 3)$ اور $C(-6, k)$ راس ہیں تو h اور k کی قیمت معلوم کیجیے۔

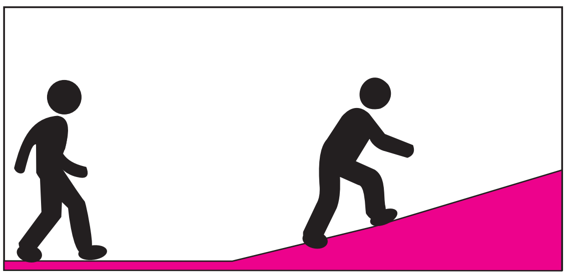
.10 نقطہ $A(2, 7)$ اور $B(-4, -8)$ کو ملانے والے قطعہ AB کے تقسیم ثلاثی کرنے والے نقاط کے محددین معلوم کیجیے۔

.11 $A(-14, -10)$، $B(6, -2)$ والے قطعہ AB کے چار متماثل قطعات میں تقسیم کرنے والے نقاط کے محددین معلوم کیجیے۔

.12 $A(20, 10)$، $B(0, 20)$ والے قطعہ AB کے پانچ متماثل قطعات میں تقسیم کرنے والے نقاط کے محددین معلوم کیجیے۔

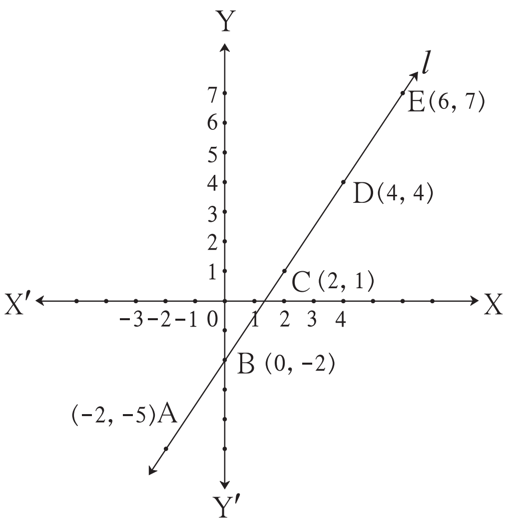
آیئے سمجھ لیں

خط کا ڈھلان (Slope of Line)



ہم سائنس میں پڑھ چکے ہیں کہ جب ہم ہموار زمین پر چلتے ہیں تب محنت ومشقت اٹھانی پڑتی۔ چڑھائی (ڈھلان) پر چڑھتے وقت کچھ محنت وطاقت کی ضرورت پیش آتی ہے۔ انسان کا دَم بھر جاتا ہے۔ چڑھائی پر چڑھتے وقت کشش ثقل کی قوت کے مخالف سمت میں کام کرنا پڑتا ہے۔

مستوی محددی علم ہندسہ میں خط کی ڈھلان کا بھی ایک اہم تصور ہے۔ ذیل میں دیے ہوئے عملی کام کے ذریعے اس تصور کو سمجھیں گے۔



شکل **5.20**

عملی کام (I) : متصلہ شکل میں $A(-2, -5)$، $B(0, -2)$، $C(2, 1)$، $D(4, 4)$، $E(6, 7)$ یہ خط l کے نقاط ہیں۔ ان محددین کا استعمال کر کے بننے والی درج ذیل جدول کا مشاہدہ کیجیے۔

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	دوسرے نقطے کے محددین (x_2, y_2)	پہلے نقطے کے محددین (x_1, y_1)	دوسرا نقطہ	پہلا نقطہ	نمبر شمار
$\frac{7-1}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$	(6, 7)	(2, 1)	E	C	1
$\frac{4-(-5)}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$	(4, 4)	(−2, −5)	D	A	2
$\frac{-5-4}{-2-4} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$	(−2, −5)	(4, 4)	A	D	3
−−	−−	−−	C	B	4
−−	−−	−−	A	C	5
−−	−−	−−	C	A	6

جدول کے باقی خانوں کو پر کر کے جدول مکمل کیجیے۔اسی طرح خط l پر واقع مزید نقاط کی کچھ جوڑیاں لیجیے اور ہر جوڑی کے لیے $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ نسبت معلوم کیجیے۔

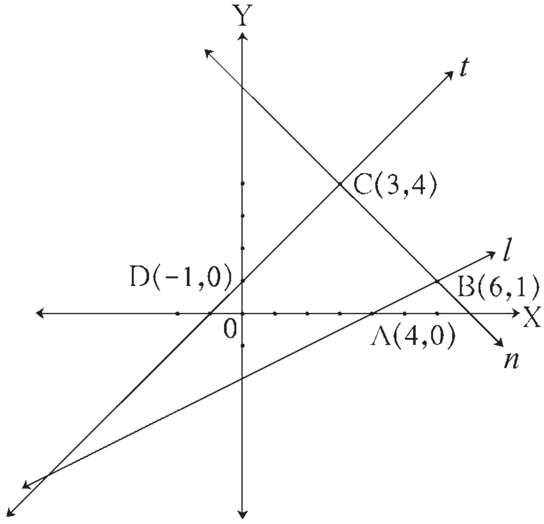
اس عملی کام سے پتا چلتا ہے کہ خط l کے (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) ایسے کوئی دو نقاط کے لیے $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ نسبت مستقل ہوتی ہے۔

خط l کے (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) ایسے کوئی بھی دو نقاط ہوں تو $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ نسبت کو خط l کی ڈھلان کہتے ہیں۔

خط کی ڈھلان کو عام طور پر حرف m سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\therefore \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

عملی کام (II) :



شکل 5.21

متصلہ شکل 5.21 میں خطوط l، t اور n ہیں اوران پر کچھ نقاط دیے ہوئے ہیں۔اس کی مدد سے ان خطوط کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

آپ کو پتا چلے گا کہ

(1) خط l اور خط t ان دونوں کی ڈھلان مثبت ہیں۔

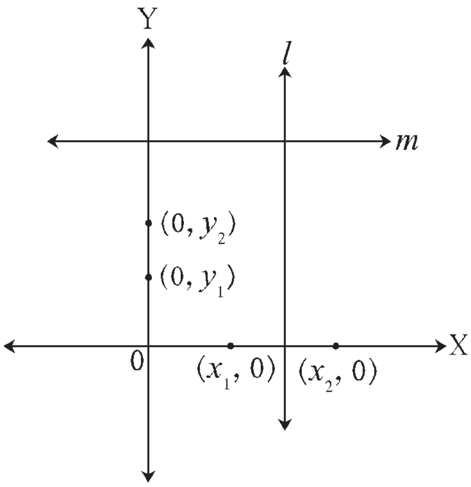
(2) خط n کی ڈھلان منفی ہے۔

(3) خط t کی ڈھلان، خط l کی ڈھلان کی بہ نسبت زیادہ ہے۔

(4) X–محور کے مثبت سمت حادہ زاویہ بنانے والے l اور t خطوط کی ڈھلان مثبت ہیں۔

(5) X–محور کے مثبت سمت منفرجہ زاویہ بنانے والے خط n کی ڈھلان منفی ہے۔

X–محور، Y–محور اور محوروں کے متوازی خطوط کی ڈھلان



شکل 5.22

شکل 5.22 میں $(x_1, 0)$ اور $(x_2, 0)$ یہ X–محور پر واقع دو نقاط ہیں۔

$$\text{X-محور کی ڈھلان} = \frac{0-0}{x_2 - x_1} = 0$$

اسی طرح $(0, y_1)$ اور $(0, y_2)$ Y–محور پر واقع دو نقاط ہیں۔

$$\text{Y-محور کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{0-0} = \frac{y_2 - y_1}{0}$$

لیکن 0 سے تقسیم نہیں کی جاسکتی،اس Y–محور کی ڈھلان طے نہیں کیا جاسکتا۔
اسی طرح خط m کے جیسے X–محور کے متوازی کوئی بھی خط کی ڈھلان معلوم کر کے دیکھتے ہیں۔ وہ صفر آئے گی۔اسی طرح ہمیں سمجھ میں آتا ہے کہ جیسے Y–محور کے متوازی خط کی ڈھلان طے نہیں کی جاسکتی۔

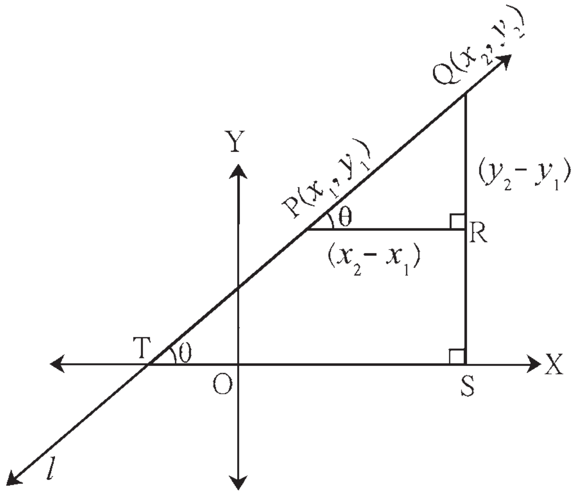
خط کی ڈھلان – علم مثلث کی مثلثیاتی نسبت کا استعمال کر کے

شکل 5.23 میں $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ یہ خط l پر واقع دو نقاط ہیں۔خط l یہ X–محور کو نقطہ T پر قطعہ کرتا ہے۔

X–محور ⊥ قطعہ QS، قطعہ QS ⊥ قطعہ PR،

$\therefore$ قطعہ TS ⊥ قطعہ PR ... (نظیری زاویوں کی آزمائش)

$PR = x_2 - x_1$ اور $QR = y_2 - y_1$



شکل 5.23

$$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{... (I)}$$

خط TQ، X-محور سے θ زاویہ بناتا ہے۔

$$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \tan\theta \qquad \text{... (II)}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$$ ... [(I) اور (II) سے]

$$\therefore \quad m = \tan\theta$$

اب، TS قطعہ || PR قطعہ اور خط l تقاطع ہے۔

$\therefore \quad \angle QPR = \angle QTS$ ... (نظیری زاویے)

اس بناپر خط کے ذریعے X-محور کے مثبت سمت بنائے گئے زاویے کی tan نسبت یعنی اس خط کی ڈھلان ہے۔اس طرح بھی ڈھلان کی تعریف کی جاسکتی ہے۔

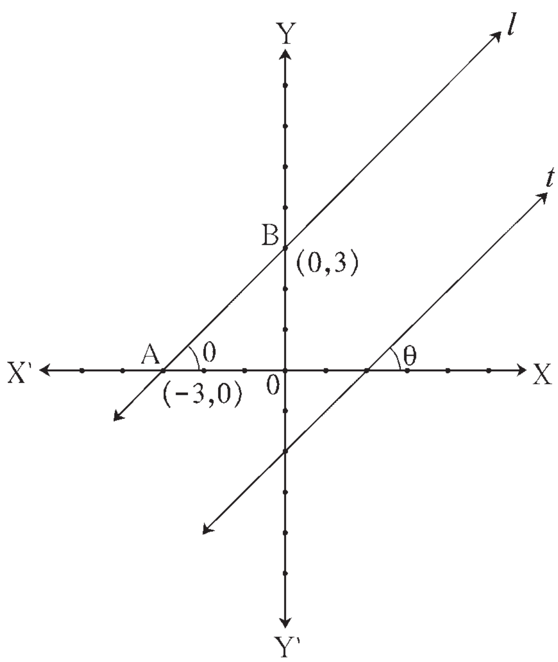
دوخطوط کی ڈھلان مساوی ہوتی ہیں تب وہ خطوط X-محور کے مثبت سمت میں ایک ہی زاویہ یا مساوی زاویہ بناتے ہیں۔

$\therefore$ وہ دونوں متوازی ہوتے ہیں۔

متوازی خطوط کی ڈھلان (Slope of parallel lines) :

عملی کام :

شکل 5.24 میں، خط l اور خط t یہ دونوں خطوط X-محور کے مثبت سمت زاویہ θ بناتے ہیں۔



شکل 5.24

$\therefore$ خط l || خط t ... (نظیری زاویوں کی آزمائش)

خط l پر نقطہ $A(-3, 0)$ اور نقطہ $B(0, 3)$ پر غور کیجیے۔ خط AB کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

خط AB کی ڈھلان $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{\square - \square}{\square - \square} = \frac{\square}{\square}$$

$$= \square$$

اسی طرح t پر اپنی سہولت کے مطابق نقاط لے کر اس کی ڈھلان معلوم کیجیے۔اس بناء پر متوازی خطوط کی ڈھلان مساوی ہوتی ہیں۔اس کی تصدیق آپ کرسکتے ہیں۔

یہاں پر $\theta = 45°$ ہے۔

ڈھلان $m = \tan\theta$ کا استعمال کر کے متوازی خطوط کی ڈھلان مساوی ہوتی ہیں۔ اس کی تصدیق کیجیے۔

اسی طرح $\theta = 30°$، $\theta = 60°$ لے کر متوازی خطوط کی ڈھلان مساوی ہوتی ہیں۔ اس کی تصدیق کیجیے۔

اسے ذہن نشین کرلیں

شکل میں X-محور کے یا X-محور کے متوازی خطوط کی ڈھلان صفر ہوتی ہیں۔

Y-محور یا Y-محور کے متوازی خط کی ڈھلان طے نہیں کی جاسکتی۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) : $A(-3, 5)$ اور $B(4, -1)$ ان نقاط سے گذرنے والے خط کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے۔ $x_1 = -3$، $x_2 = 4$، $y_1 = 5$، $y_2 = -1$

$$\therefore \text{خط AB کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-5}{4-(-3)} = \frac{-6}{7}$$

مثال (2) : $P(-2, 3)$، $Q(1, 2)$، $R(4, 1)$ ان نقاط کو ہم خطی بتایئے۔

حل : $P(-2, 3)$، $Q(1, 2)$، $R(4, 1)$

$$\text{خط PQ کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-3}{1-(-2)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{خط QR کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{4-1} = -\frac{1}{3}$$

خط PQ اور QR کی ڈھلان مساوی ہے۔

لیکن نقطہ Q دونوں خطوط پر واقع ہے۔

$\therefore$ نقاط P، Q، R ہم خطی ہیں۔

مثال (3) : اگر $P(k, 0)$ اور $Q(-3, -2)$ ان دو نقاط کو ملانے والے خط کی ڈھلان $\frac{2}{7}$ ہے تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : $P(k, 0)$، $Q(-3, -2)$

$$\text{خط PQ کی ڈھلان} = \frac{-2-0}{-3-k} = \frac{-2}{-3-k}$$

خط PQ کی ڈھلان $\frac{2}{7}$ دی ہوئی ہے۔

$$\therefore \frac{-2}{-3-k} = \frac{2}{7} \quad , \quad \therefore k = 4$$

مثال **(4)** : A(6,1)، B(8,2)، C(9,4)، D(7,3) یہ ABCD□ کے راس ہیں تو دکھایئے ABCD□ متوازی الاضلاع ہے۔

حل : آپ کو معلوم ہے کہ

$$\text{خط کی ڈھلان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

خط AB کی ڈھلان $= \frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2}$ ... (I)

خط BC کی ڈھلان $= \frac{4-2}{9-8} = 2$ ... (II)

خط CD کی ڈھلان $= \frac{3-4}{7-9} = \frac{1}{2}$ ... (III)

خط DA کی ڈھلان $= \frac{3-1}{7-6} = 2$ ... (IV)

خط AB کی ڈھلان = خط CD کی ڈھلان ... [(I) اور (III) سے]

$\therefore$ خط AB ∥ خط CD

خط BC کی ڈھلان = خط DA کی ڈھلان ... [(II) اور (IV) سے]

$\therefore$ خط BC ∥ خط DA

یعنی ذو اربعۃ الاضلاع کے مقابل کے ضلعوں کی دونوں جوڑیاں ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

$\therefore$ ABCD□ متوازی الاضلاع ہے۔

مشقی سیٹ 5.3

.1 ذیل میں خط کے ذریعے X- محور کی مثبت سمت بنائے گئے زاویے دیے ہوئے ہیں، اس کی مدد سے اس خط کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

(1) 45°　　(2) 60°　　(3) 90°

.2 ذیل میں دیے ہوئے نقاط سے گذرنے والے خطوط کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

(1) A(2, 3) اور B(4, 7)　　(2) P(−3, 1) اور Q(5, −2)

(3) C(5, −2) اور D(7, 3)　　(4) L(−2, −3) اور M(−6, −8)

(5) E(−4, −2) اور F(6, 3)　　(6) T(0, −3) اور S(0, 4)

.3 ذیل میں دیے ہوئے نقاط ہم خطی ہیں یا نہیں، اسے طے کیجیے۔

(1) A(−1, −1),　B(0, 1),　C(1, 3)　　(2) D(−2, −3),　E(1, 0),　F(2, 1)

(3) L(2, 5),　M(3, 3),　N(5, 1)　　(4) P(2, −5),　Q(1, −3),　R(−2, 3)

(5) R(1, −4),　S(−2, 2),　T(−3, 4)　　(6) A(−4, 4),　K$(-2, \frac{5}{2})$,　N(4, −2)

4. $A(1, -1)$، $B(0, 4)$، $C(-5, 3)$ یہ مثلث کے راس ہیں تو ہر ضلع کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

5. $A(-4, -7)$، $B(-1, 2)$، $C(8, 5)$ اور $D(5, -4)$ دکھائیے کہ یہ متوازی الاضلاع ABCD کے راس ہیں۔

6. $R(1, -1)$، $S(-2, k)$، ہے اور خط RS کی ڈھلان -2 ہو تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

7. $B(k, -5)$، $C(1, 2)$ اور خط BC کی ڈھلان 7 ہو تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

8. $P(2, 4)$، $Q(3, 6)$، $R(3, 1)$ اور $S(5, k)$ ہے اور خط PQ، خط RS کے متوازی ہے تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ مجموعہ سوالات 5 ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

1. درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کر کے خالی جگہ پر کیجیے۔

(1) قطعہ AB، Y-محور کے متوازی ہے۔نقطہ A کے محددین (1, 3) ہیں تو نقطہ B کے محددین .... ہوں گے۔

(A) (3,1) (B) (5,3) (C) (3,0) (D) (1,-3)

(2) درج ذیل میں سے نقطہ .... X-محور پر مبدا کے دائیں سمت میں واقع ہے۔

(A) (-2,0) (B) (0,2) (C) (2,3) (D) (2,0)

(3) (-3, 4) اس نقطہ کا مبداء سے فاصلہ .... ہے۔

(A) 7 (B) 1 (C) 5 (D) -5

(4) ایک خط X-محور سے مثبت سمت میں $30°$ کا زاویہ بناتا ہے، تو اس خط کی ڈھلان .... ہے۔

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

2. ذیل کے نقاط ہم خطی ہیں یا نہیں طے کیجیے۔

(1) $A(0, 2)$, $B(1, -0.5)$, $C(2, -3)$

(2) $P(1, 2)$, $Q(2, \frac{8}{5})$, $R(3, \frac{6}{5})$

(3) $L(1, 2)$, $M(5, 3)$, $N(8, 6)$

3. $P(0, 6)$ اور $Q(12, 20)$ نقاط کو ملانے والے قطعہ کے وسطی نقطہ کے محددین معلوم کیجیے۔

4. $A(3, 8)$ اور $B(-9, 3)$ ان نقاط کو ملانے والے قطعہ کو Y-محور کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

5. X-محور پر ایسا نقطہ لیجیے کہ جو $P(2, -5)$ اور $Q(-2, 9)$ سے ہم فاصلہ ہے۔

6. ذیل کے نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔

(1) $A(a, 0)$, $B(0, a)$ (2) $P(-6, -3)$, $Q(-1, 9)$ (3) $R(-3a, a)$, $S(a, -2a)$

7. ایک مثلث کے راس $A(-3, 1)$، $B(0, -2)$ اور $C(1, 3)$ ہیں۔تو اس مثلث کا حائط مرکز معلوم کیجیے۔

.8 کیا ذیل کے نقاط کو ملانے والے قطعات مثلث بنا سکیں گے؟ مثلث بن جانے پر اس کے اضلاع کی وجہ سے بننے والے مثلث کی قسم بتائیے۔

(1) L (6,4) , M (−5,−3) , N (−6,8)

(2) P (−2,−6) , Q (−4,−2), R (−5,0)

(3) A ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), B ($-\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$), C ($-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$)

.9 اگر $P(-12, -3)$ اور $Q(4, k)$ اس خط کی ڈھلان $\frac{1}{2}$ ہے تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

.10 $A(4, 8)$ اور $B(5, 5)$ ان نقاط کو ملانے والا خط $C(2, 4)$ اور $D(1, 7)$ ان نقاط کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔ اسے دکھائیے۔

.11 $P(1, -2)$، $Q(5, 2)$، $R(3, -1)$، $S(-1, -5)$ دکھائیے کہ یہ متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

.12 اگر $P(2, 1)$، $Q(-1, 3)$، $R(-5, -3)$ اور $S(-2, -5)$ ہوتو دکھائیے کہ $\square$PQRS ایک مستطیل ہے۔

.13 $A(-1, 1)$، $B(5, -3)$، $C(3, 5)$ راس والے مثلث کے وسطانیوں کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

*.14 اگر $D(-7, 6)$، $E(8, 5)$ اور $F(2, -2)$ یہ مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط ہیں تو اس مثلث کے وسطانیوں کے ہندسی مرکز کے محددین معلوم کیجیے۔

.15 $A(4, -1)$، $B(6, 0)$، $C(7, -2)$ اور $D(5, -3)$ تو دکھائیے کہ یہ مربع کے راس ہیں۔

.16 $A(7, 1)$، $B(3, 5)$ اور $C(2, 0)$ راس والے مثلث کے حائط دائرہ کے مرکز کے محددین اور حائط دائرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

.17 $A(4, -3)$ اور $B(8, 5)$ ہے تو قطعہ AB کے 1 : 3 کی نسبت میں حصہ کرنے والے نقطہ کے محددین معلوم کیجیے۔

*.18 $A(-4, -2)$، $B(-3, -7)$، $C(3, -2)$ اور $D(2, 3)$ ان نقاط کو ترتیب سے جوڑیں تو بننے والے ذواربعۃ الاضلاع ABCD کی قسم لکھیے۔

*.19 نقاط P، Q، R اور S کی وجہ سے قطعہ AB کو 5 متماثل قطعات میں تقسیم اس طرح ہوتی ہے۔ کہ A–P–Q–R–S–B اگر $Q(12, 14)$ اور $S(4, 18)$ ہے تو A، P، R اور B کے محددین معلوم کیجیے۔

.20 $P(6, -6)$، $Q(3, -7)$ اور $R(3, 3)$ ان نقاط سے گذرنے والے دائرہ کے مرکز کے محددین معلوم کیجیے۔

*.21 متوازی الاضلاع کے تین راسوں کے محددین $A(5, 6)$، $B(1, -2)$ اور $C(3, -2)$ ہوں تو چوتھے نقطے کے محددین کی ممکن ہو تو تمام جوڑیاں معلوم کیجیے۔

.22 $A(1, 7)$، $B(6, 3)$، $C(0, -3)$ اور $D(-3, 3)$ راسوں والا ایک ذواربعۃ الاضلاع ہے۔ اس ذواربعۃ الاضلاع کے ہر وتر کی ڈھلان معلوم کیجیے۔

Q9N9J8

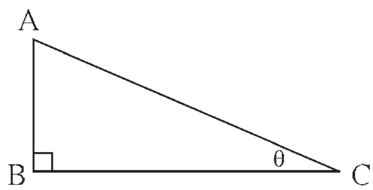
6 علمِ مثلث Trigonometry

آیئے سیکھیں

- مثلثیاتی نسبتیں
- مثلثیاتی متماثلہ مساوات
- صعودی زاویہ اور نزولی زاویہ
- اونچائی اور فاصلے پر مشتمل مثالیں

آیئے ذرا یاد کریں

.1 شکل 6.1 کی مدد سے خالی جگہ پر کیجیے۔



شکل 6.1

$\sin\theta = \dfrac{\square}{\square}$, $\cos\theta = \dfrac{\square}{\square}$,

$\tan\theta = \dfrac{\square}{\square}$

.2 ذیل کی نسبتوں کے تعلق کو مکمل کیجیے۔

(i) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \square$ (ii) $\sin\theta = \cos(90 - \square)$

(iii) $\cos\theta = \sin(90 - \square)$ (iv) $\tan\theta\ \tan(90 - \theta) = \square$

.3 ذیل کی مساوات مکمل کیجیے۔

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \square$

.4 ذیل کی مثلثیاتی نسبتوں کی قیمت لکھیے۔

(i) $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{\square}$ (ii) $\cos 30^\circ = \dfrac{\square}{\square}$ (iii) $\tan 30^\circ = \dfrac{\square}{\square}$

(iv) $\sin 60^\circ = \dfrac{\square}{\square}$ (v) $\cos 45^\circ = \dfrac{\square}{\square}$ (vi) $\tan 45^\circ = \square$

ہم نویں جماعت میں حادہ زاویہ کی بعض مثلثیاتی نسبتوں کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ اس سال حادہ زاویہ کی مزید مثلثیاتی نسبتوں سے متعلق مطالعہ کریں گے۔

آیئے سمجھ لیں

cosec، sec اور cot نسبتیں (cosec, sec and cot ratios)

زاویہ کی sine نسبت کی معکوس نسبت کو cosecant نسبت کہتے ہیں۔اس مختصراً cosec لکھتے ہیں۔

$$\therefore \ \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

اسی طرح cosine اور tangent نسبتوں کی معکوس نسبتوں کو بالترتیب secant اور cotangent نسبتیں کہتے ہیں، اور اسے مختصراً بالترتیب sec اور cot لکھتے ہیں۔

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{اور} \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

شکل 6.2 میں،

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \ \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{AC}{AB}$$

لہٰذا،

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابل کا ضلع}}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore \ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}}$$

$$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{متصلہ ضلع}}{\text{مقابل کا ضلع}}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AC}{BC}$$

لہٰذا،

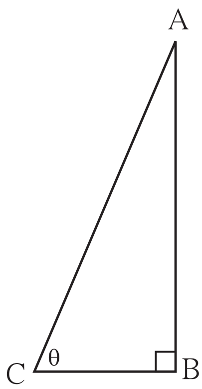
$$\sec\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{متصلہ ضلع}}$$

یہ تو آپ کو معلوم ہی ہے کہ،

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore \ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore \ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

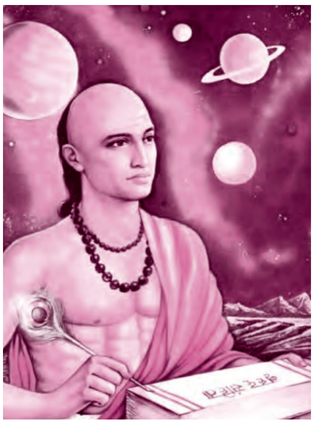


شکل 6.2

اسے ذہن نشین کرلیں

مثلثیاتی نسبتوں میں ایک دوسرے سے تعلق cosec، sec اور cot ان نسبتوں کی تعریف کی بناپر،

- $\frac{1}{\sin\theta} = \text{cosec } \theta \quad , \quad \therefore \ \sin\theta \times \text{cosec } \theta = 1$
- $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \quad , \quad \therefore \ \cos\theta \times \sec\theta = 1$
- $\frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta \quad , \quad \therefore \ \tan\theta \times \cot\theta = 1$



مزید معلومات کے لیے

عظیم بھارتی سائنس داں آریا بھٹ کی پیدائش 476 عیسوی میں کُسُم پور میں ہوئی۔ یہ مقام موجودہ ریاست بہار میں پٹنہ شہر کے قریب تھا۔ انھوں نے علم حساب، الجبرا اور علم ہندسہ، ریاضی کی شاخوں میں قابل ذکر کام کیا ہے۔ 'آریہ بھٹیئ' نامی کتاب میں کئی ریاضیاتی نتائج ضابطوں کی صورت میں لکھے ہوئے ہیں۔ مثلاً

(1) حسابی تصاعد میں n واں رکن معلوم کرنا اور پہلے n ارکان کی جمع کا ضابطہ

(2) $\sqrt{2}$ کی قیمت معلوم کرنے کا ضابطہ

(3) انھوں نے π عدد کی قیمت 3.1416 معلوم کی جو چار اعشاریہ مقام تک کی صحیح قیمت ہے۔ وغیرہ۔

علم فلکیات کے مطالعہ میں انھوں نے علم مثلث کا استعمال کیا اور 'جیانسبت' یعنی sine نسبت (sine ratio) کا تصور پہلی مرتبہ استعمال کیا۔

ریاضی کے علم کے بارے میں غور کریں تو انھوں نے اپنے زمانے میں ریاضی میں عظیم خدمات انجام دیں۔ اس وجہ سے ان کی کتاب کی ترسیل سارے بھارت میں ہوئی۔ اسی طرح عربوں کے توسط سے یہ یورپ میں بھی پہنچی۔

سورج زمین کے گرد گردش نہیں کرتا ہے بلکہ سورج کے گرد زمین گردش کرتی ہے۔ اس خیال کو سب سے پہلے کوپرنیکس نے پیش کیا، ایسا مانا جاتا ہے لیکن اس سے تقریباً 1000 سال قبل ''سورج زمین کے گرد گردش ہوا نظر آتا ہے، ایسا تصور کیا جاتا تھا۔'' ایسا آریہ بھٹ نے اس کتاب میں واضح طور پر لکھا ہے۔

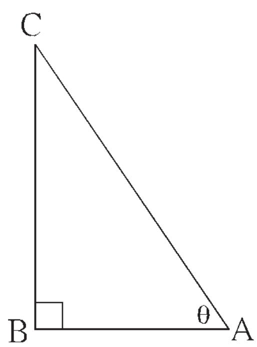
19 اپریل 1975 کے روز بھارت نے اپنا پہلا مصنوعی سیارچہ آسمان میں داغا۔ اس ذیلی سیارچہ کو 'آریا بھٹ' نام دے کر ہمارے ملک نے عظیم ریاضی داں کو مناسب خراج تحسین پیش کی۔

0°، 30°، 45°، 60° اور 90° پیمائش کے زاویوں کی مثلثیاتی نسبتوں کی جدول

مثلثیاتی نسبتیں	زاویوں کی پیمائش (θ)				
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	طے نہیں کر سکتے
$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	طے نہیں کر سکتے	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	طے نہیں کر سکتے
$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	طے نہیں کر سکتے	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

آیئے سمجھ لیں

مثلثیاتی متماثلہ مساواتیں (Trigonometrical identities) :



شکل 6.3

بازو کی شکل 6.3 میں، △ABC، قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس میں $\angle B = 90°$

(i) $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$ (ii) $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$

(iii) $\tan\theta = \frac{BC}{AB}$ (iv) $\text{cosec}\,\theta = \frac{AC}{BC}$

(v) $\sec\theta = \frac{AC}{AB}$ (vi) $\cot\theta = \frac{AB}{BC}$

اسی طرح فیثا غورث کے مسئلہ سے،

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad \ldots (I)$$

مساوات (I) کے طرفین کو AC^2 سے تقسیم دینے پر

$$\frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$$\therefore \quad \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = 1$$

$$\therefore \quad \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \quad (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

[ہم $(\sin\theta)^2$ کو $\sin^2\theta$ اور $(\cos\theta)^2$ کو $\cos^2\theta$ لکھتے ہیں]

$$\therefore \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{... (II)}$$

اب مساوات (II) کے طرفین کو $\sin^2\theta$ سے تقسیم کرنے پر،

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\therefore \quad 1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta \qquad \text{... (III)}$$

اسی طرح، مساوات (II) کے طرفین کو $\cos^2\theta$ سے تقسیم کرنے پر،

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\therefore \quad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad \text{... (IV)}$$

مساوات (I)، (II)، (III) اور (IV) یہ بنیادی مثلثیاتی متماثلہ مساواتیں ہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) : اگر $\sin\theta = \frac{20}{29}$ ہو تو $\cos\theta$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : طریقہ I

ہمیں معلوم ہے کہ

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{20}{29}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\frac{400}{841} + \cos^2\theta = 1$$

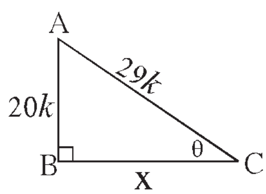
$$\cos^2\theta = 1 - \frac{400}{841}$$

$$= \frac{441}{841}$$

طرفین کا جذر المربع لینے پر،

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{21}{29}$$

طریقہ II



شکل 6.4

$$\sin\theta = \frac{20}{29}$$

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} \qquad \text{... (لیکن شکل 6.4 سے)}$$

$\therefore$ فرض کیجیے $AB = 20k$، $AC = 29k$ اور $BC = x$

فیثاغورث کے مسئلہ سے،

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$(20k)^2 + x^2 = (29k)^2$$

$$400k^2 + x^2 = 841k^2$$

$$x^2 = 841k^2 - 400k^2$$

$$= 441k^2$$

$$\therefore \quad x = 21k$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{21k}{29k} = \frac{21}{29}$$

مثال (2) : اگر $\sec\theta = \frac{25}{7}$ ہوتو $\tan\theta$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : طریقہ I

ہمیں معلوم ہے کہ

$$\therefore \quad 1 + \tan^2\theta = \left(\frac{25}{7}\right)^2$$

$$\therefore \quad \tan^2\theta = \frac{625}{49} - 1$$

$$= \frac{625 - 49}{49}$$

$$= \frac{576}{49}$$

جذرالمربع لینے پر،

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{24}{7}$$

طریقہ II

$$\sec\theta = \frac{PR}{PQ}$$

فرض کیجیے،

$PR = 25k$ ،$PQ = 7k$ اور $QR = X$

فیثاغورث کے مسئلہ سے،

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

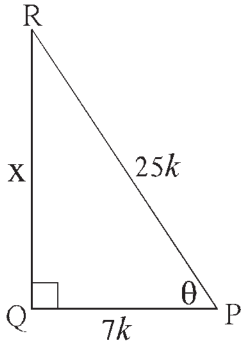
$$\therefore \quad (7k)^2 + QR^2 = (25k)^2$$

$$\therefore \quad QR^2 = 625k^2 - 49k^2 = 576k^2$$

جذرالمربع لینے پر،

$$\therefore \quad QR = 24k$$

اب , $\tan\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$



شکل 6.5

مثال (3) : اگر $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$ ہوتو $\sec\theta$ اور $\operatorname{cosec}\theta$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$

$$\therefore \quad 5\sin\theta = 12\cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{12}{5}$$

ہمیں معلوم ہے کہ

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad \frac{25 + 144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad \sec^2\theta = \frac{169}{25}$$

$$\therefore \quad \sec\theta = \frac{13}{5}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{5}{13}$$

اب, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\therefore \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\therefore \quad \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{25}{169}$$

$$= \frac{144}{169}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{12}$$

مثال (4) : اگر $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ تو $\frac{1-\sec\theta}{1+\csc\theta}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : طریقہ I

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \therefore \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\therefore \sin^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \sin^2\theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} \quad , \quad \therefore \operatorname{cosec}\theta = 2$$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

طریقہ II

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \ldots \text{(یہ ہم جانتے ہیں)}$$

$$\therefore \quad \theta = 30^\circ$$

$$\therefore \quad \sec\theta = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$$

$$\therefore \quad \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

مثال (5) : دکھایئے کہ $\sec x + \tan x = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

حل :

$$\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

مثال (6) : درج ذیل مساوات میں θ کا اخراج کیجیے۔

$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta$

$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta$

حل :

$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta \quad \dots \text{(I)}$

$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta \quad \dots \text{(II)}$

مساوات (I) اور (II) دونوں کی جمع کرنے پر،

$x + y = 2a \cot\theta$

$\therefore \cot\theta = \dfrac{x+y}{2a} \quad \dots \text{(III)}$

مساوات (II) سے (I) تفریق کرنے پر،

$y - x = 2b \operatorname{cosec}\theta$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{y-x}{2b} \quad \dots \text{(IV)}$

اب , $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\therefore \left(\dfrac{y-x}{2b}\right)^2 - \left(\dfrac{y+x}{2a}\right)^2 = 1$

$\therefore \dfrac{(y-x)^2}{4b^2} - \dfrac{(y+x)^2}{4a^2} = 1$

یا , $\left(\dfrac{y-x}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{y+x}{a}\right)^2 = 4$

مشقی سیٹ 6.1

1. اگر $\sin\theta = \dfrac{7}{25}$ ہوتو $\cos\theta$ اور $\tan\theta$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

2. اگر $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ ہوتو $\sec\theta$ اور $\cos\theta$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

3. اگر $\cot\theta = \dfrac{40}{9}$ ہوتو $\operatorname{cosec}\theta$ اور $\sin\theta$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

4. اگر $5\sec\theta - 12\operatorname{cosec}\theta = 0$ ہوتو $\sec\theta$، $\cos\theta$ اور $\sin\theta$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

5. اگر $\tan\theta = 1$ ہوتو $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

6. ثابت کیجیے کہ

(1) $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

(2) $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$

(3) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

(4) $(\sec\theta - \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta) = \tan\theta\sec\theta$

(5) $\cot\theta + \tan\theta = \mathrm{cosec}\theta \,.\, \sec\theta$

(6) $\dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

(7) $\sin^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$

(8) $\sec\theta + \tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

(9) اگر $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 2$ ہوتو دکھایئے کہ $\tan^2\theta + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = 2$

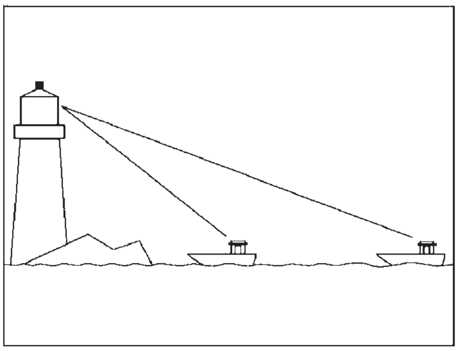
(10) $\dfrac{\tan A}{(1+\tan^2 A)^2} + \dfrac{\cot A}{(1+\cot^2 A)^2} = \sin A \cos A$

(11) $\sec^4 A\,(1 - \sin^4 A) - 2\tan^2 A = 1$

(12) $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} = \dfrac{\tan\theta + \sec\theta + 1}{\tan\theta + \sec\theta - 1}$

آیئے سمجھ لیں

علم مثلث کا اطلاق (Application of Trigonometry)



شکل 6.6

بسا اوقات مینار کی بلندی، عمارت یا درخت کی اونچائی اسی طرح جہازوں کا روشنی کے مینار سے فاصلہ یا ندی کی پاٹ کی چوڑائی وغیرہ کی جانکاری کی ضرورت ہوتی ہے یہ فاصلے ہم عملی طور پر معلوم نہیں کرسکتے، لیکن مثلثیاتی نسبتوں کا استعمال کرکے اونچائی یا فاصلے معلوم کرسکتے ہیں۔

اونچائی یا فاصلہ معلوم کرنے کے لیے، دی ہوئی معلومات کے مطابق پہلے ہم کچی شکل بناتے ہیں۔ درخت، ٹیکری، مینار وغیرہ جیسی اشیا زمین پر عموداً ایستادہ ہوتی ہیں یہ دکھانے کے لیے ہم شکل میں عمودی قطعہ کا استعمال کرتے ہیں۔ یہاں ہم ناظر کی اونچائی نظرانداز کردیں گے۔ عام حالت میں ایسا مان لیا جاتا ہے کہ ناظر کی نظر، افقی خط کے متوازی ہوتی ہے۔

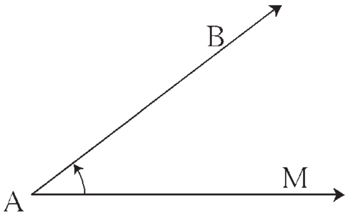
اب ہم اس سے مربوط چند اصطلاحات کا مطالعہ کریں گے۔

(i) بصری خط **(Line of Vision)** : اگر کوئی شخص نقطہ A کے مقام سے کسی جسم B کو دیکھتا ہے تب خط AB کو بصری خط کہتے ہیں۔

(ii) صعودی زاویہ یا زاویہ فراز **(Angle of Elevation)** :

خط AM ناظر کا بصری خط عام حالت میں، افقی خط کے متوازی ہوتا ہے۔ مشاہدہ کیا جانے والا نقطہ B، اگر A کی نسبت سے زیادہ اونچائی پر ہو تو، بصری خط AB یہ خط AM کے ساتھ جو زاویہ بناتا ہے اسے صعودی زاویہ کہتے ہیں۔

شکل میں $\angle MAB$ صعودی زاویہ ہے۔

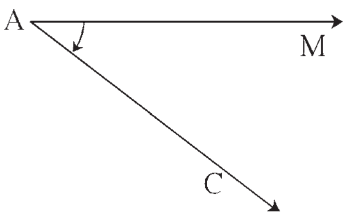


شکل 6.7

(iii) نزولی زاویہ یا نشیبی زاویہ **(Angle of Depression)** :

مشاہدہ کیا جانے والا نقطہ C اگر افقی خط AM سے نیچے کی جانب ہو تو بصری خط AC یہ خط AM کے ساتھ جو زاویہ بناتا ہے اسے نزولی زاویہ کہتے ہیں۔

شکل میں $\angle MAC$، نزولی زاویہ ہے۔



شکل 6.8

جب ہم افق کے متوازی خط سے اوپر کی جانب واقع کسی شے کو دیکھتے ہیں تو بننے والا زاویہ صعودی زاویہ ہوتا ہے۔

جب ہم افق کے متوازی خط سے نیچے کی جانب واقع کسی شے کو دیکھتے ہیں تو بننے والا زاویہ نزولی زاویہ ہوتا ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) : ایک درخت کے تنے سے 10 میٹر فاصلے پر کھڑے ہو کر ایک ناظر درخت کے اوپری سرے کو دیکھتا ہے تو 60° پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے تو درخت کی اونچائی کتنی ہے؟ $(\sqrt{3} = 1.73)$ شکل میں C نقطہ کے پاس ناظر ہے اور AB درخت ہے۔

حل : شکل 6.9 میں،

درخت کی اونچائی = $AB = h$ قطعہ

ناظر کا درخت سے فاصلہ = $BC = 10$ میٹر

صعودی زاویہ = $\theta = \angle BCA = 60^\circ$

$\tan\theta = \dfrac{AB}{BC}$ ... (شکل سے) ... (I)

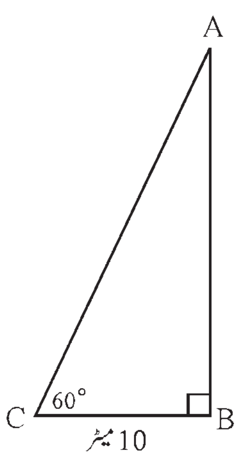
$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ... (II)

$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \sqrt{3}$ ... [(I) اور (II) سے]

$\therefore AB = BC\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

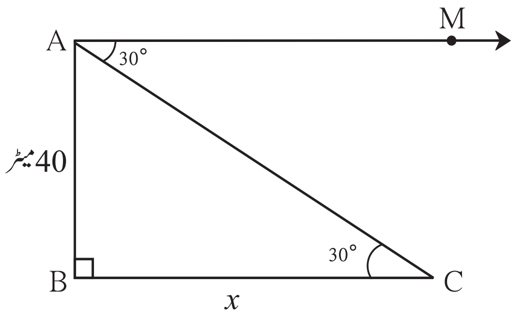
$\therefore AB = 10 \times 1.73 = 17.3$ میٹر

اس لیے درخت کی اونچائی 17.3 میٹر ہے۔



شکل 6.9

مثال (2) : 40 میٹر بلند عمارت کی چھت سے، اس عمارت سے کچھ فاصلے پر کھڑے اسکوٹر کا مشاہدہ کرنے پر 30° کا نزولی زاویہ بنتا ہے۔ اسکوٹر عمارت سے کتنے فاصلے پر کھڑا ہے؟ $(\sqrt{3} = 1.73)$



شکل **6.10**

حل : شکل 6.10 میں، قطعہ AB عمارت ظاہر کرتا ہے۔ عمارت سے 'x' میٹر فاصلے پر مقام 'C' پر اسکوٹر کھڑا ہے۔

شکل میں عمارت کی چھت کے مقام A پر ناظر کھڑا ہے۔ خط AM افق کے متوازی ہے $\angle MAC$ نزولی زاویہ ہے۔ $\angle MAC$ اور $\angle ACB$ متبادلہ زاویے ہیں اسے دھیان میں رکھیے۔

$\therefore$ $\triangle ABC$ میں، $\angle B = 90^\circ$

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC} \quad \text{...} \text{(شکل کی بنا پر)}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40}{x}$$

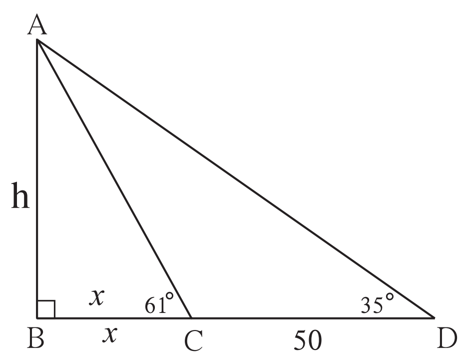
$$\therefore \quad x = 40\sqrt{3}$$

$$= 40 \times 1.73$$

$= 69.20$ میٹر

$\therefore$ وہ اسکوٹر عمارت سے 69.20 میٹر فاصلے پر ہے۔

مثال (3) : ندی کے پاٹ کی چوڑائی معلوم کرنے کے لیے ایک شخص ندی کے ایک کنارے پر کھڑے ہو کر دوسرے کنارے پر موجود مینار کے اوپری سرے کو دیکھتا ہے تو 61° پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ اسی خط میں ندی کے پاٹ کے کنارے سے 50 میٹر فاصلے پیچھے جا کر مینار کے اوپری سرے کو دیکھنے پر 35° پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ ندی کی چوڑائی اور مینار کی بلندی معلوم کیجیے۔ $(\tan 61^\circ \approx 1.8, \tan 35^\circ \approx 0.7)$



شکل **6.11**

حل : قطعہ AB کو مینار سے ظاہر کیا گیا ہے۔ 'A' مینار کا اوپری سرا ہے قطعہ BC ندی کی چوڑائی ظاہر کرتا ہے۔ فرض کریں مینار کی اونچائی h میٹر اور ندی کی چوڑائی x میٹر ہے۔

$$\tan 61^\circ = \frac{h}{x} \quad \text{...} \text{(شکل میں)}$$

$$\therefore \quad 1.8 = \frac{h}{x}$$

$$h = 1.8 \times x \qquad \text{... (I)}$$

$10h = 18x$ ... (طرفین کو 10 سے ضرب کرنے پر)

قائمۃ الزاویہ میں $\triangle ABD$ میں،

اسی طرح ، $\tan 35 = \frac{h}{x + 50}$

$$0.7 = \frac{h}{x + 50}$$

$$\therefore \quad 10h = 7(x + 50) \qquad \text{... (II)}$$

(I) اور (II) سے،

$$18x = 7(x + 50)$$

$$\therefore 18x = 7x + 350$$

$$\therefore 11x = 350$$

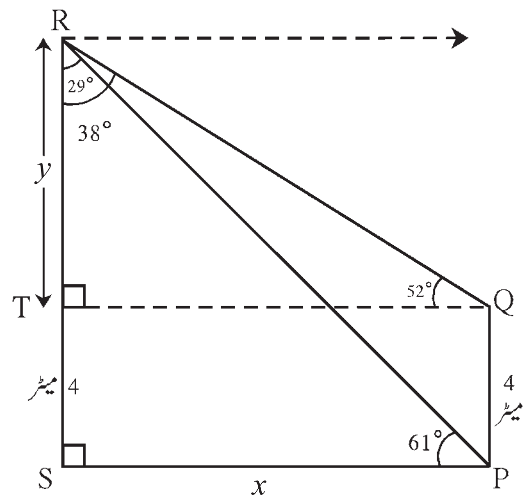
$$\therefore \quad x = \frac{350}{11} = 31.82$$

اب ، $h = 1.8x = 1.8 \times 31.82$

$= 57.28$ میٹر

∴ ندی کے پاٹ کی چوڑائی 31.82 میٹر اور مینار کی بلندی 57.28 میٹر

مثال (4) : جویریہ گھر کے دروازے میں کھڑی ہے۔ گھر سے کچھ فاصلے پر واقع ایک درخت کے اوپر بیٹھی ہوئی چیل کو دیکھتی ہے تو $61°$ پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ چیل کو واضح طور پر دیکھنے کے لیے وہ گھر کی چھت پر گئی جو 4 میٹر کی اونچائی پر ہے وہاں سے $52°$ پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ بتایئے وہ چیل زمین سے کتنی بلندی پر ہے۔
(اپنا جواب مکمل صحیح عدد میں لکھیے)



شکل 6.12

(tan 61° = 1.80, tan 52° = 1.28, tan 29° = 0.55, tan 38° = 0.78)

حل : فرض کیجیے، شکل 6.10 میں، گھر PQ اور درخت SR ہے۔اور چیل کا مقام نقطہ R ہے۔

RS قطعہ $\perp$ QT قطعہ کھینچیے۔

اس لیے □TSPQ ایک مستطیل ہے۔

فرض کیجیے $TR = y$ اور $SP = x$

اب △RSP میں، $\angle PRS = 90° - 61° = 29°$

اسی طرح، △RTQ میں، $\angle QRT = 90° - 52° = 38°$

$\therefore \tan \angle PRS = \tan 29° = \dfrac{SP}{RS}$

$\therefore 0.55 = \dfrac{x}{y+4}$

$\therefore x = 0.55\,(y + 4)$ ... (I)

اسی طرح ، $\tan \angle QRT = \dfrac{TQ}{RT}$

$\therefore \tan 38° = \dfrac{x}{y}$ ... $[\because SP = TQ = x]$

$\therefore 0.78 = \dfrac{x}{y}$

$\therefore x = 0.78\,y$ ... (II)

$\therefore 0.78\,y = 0.55\,(y + 4)$ ... [(I) اور (II) سے]

$\therefore 78y = 55\,(y + 4)$

$\therefore 78y = 55y + 220$

$\therefore 23y = 220$

$\therefore y = 9.565 \approx 10$ ... (قریبی صحیح عدد میں)

$\therefore RS = y + 4 = 10 + 4 = 14$

$\therefore$ چیل زمین سے 14 میٹر اونچائی پر تھی۔

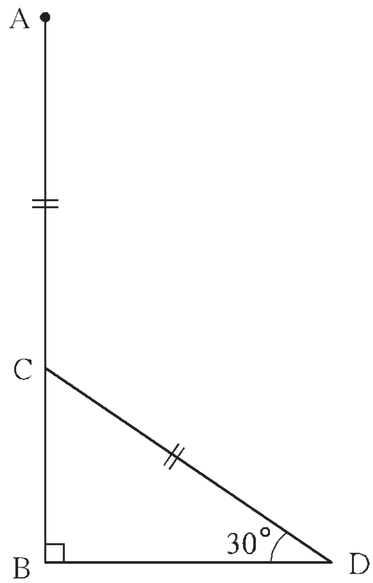
مثال (5) : تیز طوفانی ہوا کی وجہ سے ایک درخت ٹوٹ گیا۔اس کا اوپری سرا زمین سے $30°$ کا زاویہ بناتے ہوئے زمین سے ٹک گیا۔اگر درخت کے اوپری سرے اور اس کے تنے کے نچلے حصے کے درمیان کا فاصلہ 10 میٹر ہو تو درخت کی کل اونچائی معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے کہ شکل 6.11 میں درخت AB کا اوپری سرا 'A' ہے۔طوفانی ہوا کی وجہ سے درخت 'C' مقام سے ٹوٹ گیا اور 'D' مقام پر ٹک گیا۔

$BC = x$ میٹر، $BD = 10$ میٹر، $\angle CDB = 30°$

$CA = CD = y$ میٹر

قائمۃ الزاویہ $\triangle CBD$ میں،



شکل 6.11

$$\tan 30° = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = 10\sqrt{3}$$

لہٰذا درخت کی کل اونچائی $10\sqrt{3}$ میٹر ہے۔

مشقی سیٹ 6.2

1. ایک شخص، ایک گرجا گھر سے 80 میٹر کے فاصلہ پر کھڑا ہے۔ وہ شخص گرجا گھر کی چھت کی جانب دیکھتا ہے تو 45° پیمائش کا صعودی زاویہ بناتا ہے۔ گرجا گھر کی اونچائی کتنی ہے؟

2. مینارۂ نور سے ایک جہاز کو دیکھنے پر 60° پیمائش کا نزولی زاویہ بنتا ہے۔ اگر مینارۂ نور کی بلندی 90 میٹر ہو تب وہ جہاز مینارۂ نور سے کتنے فاصلے پر ہے؟ $(\sqrt{3} = 1.73)$

3. 12 میٹر چوڑے راستے کے دونوں جانب ایک دوسرے کے مقابل دو عمارتیں ہیں۔ ان میں سے ایک عمارت کی بلندی 10 میٹر ہے۔ اس عمارت کی چھت پر سے دوسری عمارت کی چھت کو دیکھنے پر 60° پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ بتایئے کہ دوسری عمارت کی بلندی کتنی ہے؟

4. 18 میٹر اور 7 میٹر اونچائی کے دو ستون زمین پر نصب کیے گئے ہیں۔ 22 میٹر کے لمبے تار سے ستون کے اوپری سروں کو باندھ دیا گیا ہے۔ تب تار کے ذریعے افقی خط کے ساتھ بننے والا زاویہ معلوم کیجیے۔

5. طوفانی ہوا کے ذریعے ایک درخت ٹوٹ گیا۔ اس کا اوپری سرا تنے کے نچلے حصے سے 20 میٹر فاصلے پر سطح زمین سے 60° کا زاویہ بناتے ہوئے ٹکا ہوا ہے۔ درخت کی کل اونچائی معلوم کیجیے۔

6. سطح زمین سے 60 میٹر بلندی پر ایک پتنگ اڑ رہی ہے۔ پتنگ کی ڈور سطح زمین سے عارضی طور پر باندھ دی گئی۔ ڈور کا زمین کے ساتھ 60° کی پیمائش کا زاویہ بنا تا ہے۔ ڈور کی لمبائی معلوم کیجیے یہ مانتے ہوئے کہ ڈور میں کسی قسم کا جھول نہیں ہے۔ $(\sqrt{3} = 1.73)$

مجموعہ سوالات 6

1. درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

(1) $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta = ?$

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

(2) بتائیے کہ $\operatorname{cosec} 45^\circ$ کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہے؟

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) $1 + \tan^2\theta = ?$

(A) $\cot^2\theta$ (B) $\operatorname{cosec}^2\theta$ (C) $\sec^2\theta$ (D) $\tan^2\theta$

(4) جب ہم افقی خط کے اوپری سمت دیکھتے ہیں تب، .... زاویہ بنتا ہے۔

(A) صعودی زاویہ (B) نزولی زاویہ (C) صفر (D) خطی

2. اگر $\sin\theta = \frac{11}{61}$ ہو تو متماثلہ مساوات کا استعمال کر کے $\cos\theta$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

3. جب $\tan\theta = 2$ ہو تو دیگر مثلثیاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔

4. اگر $\sec\theta = \frac{13}{12}$ ہو، تب دیگر مثلثیاتی نسبتیں معلوم کیجیے۔

5. ثابت کیجیے کہ،

(1) $\sec\theta (1 - \sin\theta) (\sec\theta + \tan\theta) = 1$

(2) $(\sec\theta + \tan\theta) (1 - \sin\theta) = \cos\theta$

(3) $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$

(4) $\cot^2\theta - \tan^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$

(5) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

(6) $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

(7) $\sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3\sec^2 x \times \tan^2 x$

(8) $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta+1}=\dfrac{\sec\theta-1}{\tan\theta}$

(9) $\dfrac{\tan^3\theta-1}{\tan\theta-1} = \sec^2\theta + \tan\theta$

(10) $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}=\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

.6 ایک لڑکا ایک عمارت سے 48 میٹر کے فاصلے پر کھڑا ہوا ہے۔ وہ عمارت کے اوپری سرے کو دیکھتے ہوئے 30° پیمائش کا صعودی زاویہ بناتا ہے تو اس عمارت کی بلندی معلوم کیجیے۔

.7 مینارۂ نور سے ایک جہاز کو دیکھنے پر، ناظر 30° پیمائش کا نزولی زاویہ بناتا ہے۔ اگر مینارۂ نور کی اونچائی 100 میٹر ہو تب جہاز سے مینارۂ نور کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

.8 15 میٹر چوڑے راستے کے دونوں جانب ایک دوسرے کے مقابل دو عمارتیں ہیں۔ ان میں سے ایک عمارت کی بلندی 12 میٹر ہے۔ اس کی چھت سے دوسری عمارت کی چھت دیکھنے پر 30° پیمائش کا صعودی زاویہ بنتا ہے۔ اس عمارت کی بلندی معلوم کیجیے۔

.9 آگ بجھانے والی گاڑی پر نصب سیڑھی زیادہ سے زیادہ 70° پیمائش کے زاویہ میں اُٹھائی جاسکتی ہے۔ اس وقت اس کی لمبائی زیادہ سے زیادہ 20 میٹر ہوتی ہے۔ گاڑی پر رکھی ہوئی سیڑھی کا سرا زمین سے 2 میٹر اونچائی پر ہے۔ تو سیڑھی کا دوسرا سرا زمین سے زیادہ سے زیادہ کتنی اونچائی تک پہنچ سکتا ہے۔ $(\sin 70 \approx 0.94)$

***.10** آسمان میں پرواز کرتے ہوئے ہوائی جہاز کے پائلٹ نے ہوائی اڈے پر اترنا شروع کرتے وقت 20° پیمائش کا نزولی زاویہ بناتا ہے۔ تب ہوائی جہاز کی اوسط رفتار 200 کلومیٹر فی گھنٹا تھی۔ وہ ہوائی جہاز 54 سیکنڈ میں ہوائی اڈے پر اترتا ہے۔ ہوائی اڈے پر اترنا شروع کرنے کے وقت، وہ جس مقام پر تھا وہاں سے زمین سے کتنی اونچائی پر تھا؟ $(\sin 20^\circ \approx 0.342)$

Q9X5KV

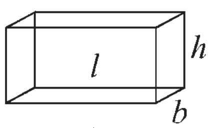
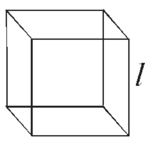
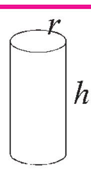
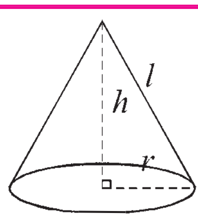
7 مساحت Mensuration

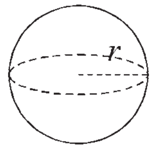
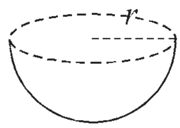
آیئے سیکھیں

- مختلف مجسم اشکال کی سطحوں کا رقبہ اور حجم پر مشتمل مخلوط مثالیں
- دائرے کا قوس – قوس کی لمبائی
- دائرے کے تراشے کا رقبہ
- قطعہ دائرے کا رقبہ

آیئے ذرا یاد کریں

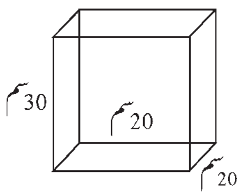
گذشتہ جماعتوں میں ہم نے بعض سہ ابعادی اشکال کی سطحوں کا رقبہ اور حجم کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ اس کے لیے استعمال ہونے والے ضابطوں کا اعادہ کرتے ہیں۔

نمبر شمار	سہ ابعادی اشکال	ضابطے
1	 مکعب نما / مستطیلی منشور	عمودی سطحوں کا رقبہ $= 2h(l+b)$ کل سطحوں کا رقبہ $= 2(lb+bh+hl)$ مکعب نما کا حجم $= lbh$
2	 مکعب	مکعب کی عمودی سطحوں کا رقبہ $= 4l^2$ مکعب کی کل سطحوں کا رقبہ $= 6l^2$ مکعب کا حجم $= l^3$
3	 مدور استوانہ	مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ $= 2\pi rh$ مدور استوانے کی کل سطحوں کا رقبہ $= 2\pi r(r+h)$ مدور استوانے کا حجم $= \pi r^2 h$
4	 مخروط	مخروط کی مائل بلندی $(l) = \sqrt{h^2+r^2}$ مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ $= \pi rl$ مخروط کی کل سطحوں کا رقبہ $= \pi r(r+l)$ مخروط کا حجم $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

5	 کرہ	کرہ کی سطح کا رقبہ = $4\pi r^2$ کرہ کا حجم = $\frac{4}{3}\pi r^3$
6	 نصف کرہ	نصف کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ = $2\pi r^2$ نصف کرہ کی کل سطح کا رقبہ = $3\pi r^2$ نصف کرہ کا حجم = $\frac{2}{3}\pi r^3$

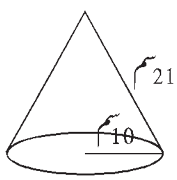
درج ذیل مثالیں حل کیجیے :

مثال (1) : متصلہ شکل میں 30 سم اونچائی، 20 سم لمبائی اور 20 سم چوڑائی کا ایک تیل کا ڈبہ ہے۔اس میں کتنے لیٹر تیل سمائے گا؟ (1 لٹر = 1000 مکعب سم)



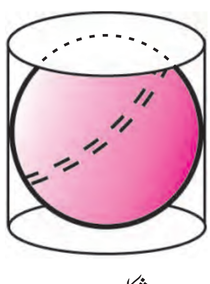
شکل 7.1

مثال (2) : متصلہ شکل میں جوکر کی ٹوپی دکھائی گئی ہے۔اس ٹوپی کو تیار کرنے کے لیے کتنا کپڑا درکار رہوگا؟



شکل 7.2

غور کیجیے



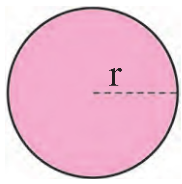
شکل 7.3

متصلہ شکل میں دکھائے ہوئے کے مطابق،

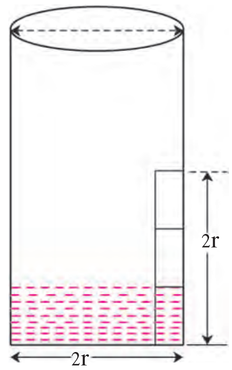
ایک مدور استوانے میں ایک گیند ہے۔گیند مدور استوانے کی تہہ اور خمدار سطح کو مس کرتی ہے۔مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر r ہو تو

1. کرہ کا نصف قطر کتنا ہوگا؟
2. مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ اور کرہ کی خمدار سطح کا رقبہ کے درمیان نسبت کیا ہوگی؟
3. مدور استوانے کا حجم اور کرہ کے حجم میں کیا نسبت ہے؟

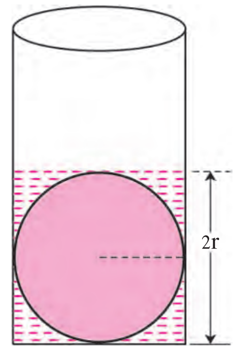
عملی کام :



شکل 7.4



شکل 7.5



شکل 7.6

درج بالا شکل میں دکھائے ہوئے طریقے کے مطابق ایک گیند اور گیند کے نصف قطر کے مساوی (r) نصف قطر والا ایک بیکر لیجیے۔ بیکر کے قطر کے مساوی لمبائی (2r) کے ایک کاغذ کی پٹی لیجیے۔ اس کاغذ کی لمبائی کے تین مساوی حصے کرنے کے لیے دو لکیریں کھینچیے۔ کاغذ کی وہ پٹی بیکر کے قاعدے سے عموداً چسپاں کیجیے۔ اب بیکر میں کاغذ کی پٹی کے نیچے پہلے حصے کے نشان تک پانی بھریئے۔ بعد میں گیند بیکر میں آہستہ سے اس طرح چھوڑیے کہ وہ بیکر کی تہہ سے مس ہو جائے۔ بیکر میں پانی کی سطح میں کہاں تک اضافہ ہوا ہے اس کا مشاہدہ کیجیے۔

پانی کی سطح کاغذ کی پٹی کے اونچائی کے نشان تک پہنچی ہوئی دکھائی دے گی۔

اس مشاہدے کے ذریعے گیند کے حجم کا ضابطہ کس طرح حاصل ہوتا ہے اسے سمجھ لیجیے۔

بیکر مدور استوانے کی شکل کا ہے۔ یعنی بیکر کی 2r اونچائی تک کے حصے کا حجم، مدور استوانے کے حجم کے ضابطے سے ظاہر ہوتا ہے۔

فرض کریں یہ حجم V ہے۔

$\therefore \quad V = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$

لیکن، V = بیکر میں پہلے بھرے ہوئے پانی کا حجم + گیند کا حجم

$= $ گیند کا حجم $+ \frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$\therefore$ گیند کا حجم $= V - \frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$

کرے کے حجم کا ضابطہ '$V = \frac{4}{3}\pi r^3$' حاصل ہوتا ہے۔

آپ اس ضابطے کا استعمال کر کے شکل 7.3 کے سوال نمبر 3 کا جواب حاصل کر سکتے ہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) : ایک مدوراستوانہ نما پانی کی ٹانکی کا نصف قطر 2.8 میٹر اور اونچائی 3.5 میٹر ہے۔ اس ٹانکی میں کتنا لٹر پانی سمائے گا؟ ایک شخص کو روزانہ اوسطاً 70 لٹر پانی درکار رہتا ہو تو پوری بھری ہوئی ٹانکی کا پانی روزانہ کتنے لوگوں کے لیے کافی ہوگا؟ $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

حل : نصف قطر (r) = 2.8 میٹر، اونچائی (h) = 3.5 میٹر، $\pi = \frac{22}{7}$

پانی کی ٹانکی کی گنجائش = مدوراستوانہ شکل کی ٹانکی کا حجم

$= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \times 3.5$

= 86.24 مکعب میٹر

= 86.24 × 1000 لٹر ... ($\because$ 1 مکعب میٹر = 1000 لٹر)

= 86240.00 لٹر

اس لیے ٹانکی میں 86240 لٹر پانی سمائے گا۔

ایک شخص کو روزانہ 70 لٹر پانی درکار رہتا ہے۔

$\therefore$ مکمل بھری ہوئی ٹانکی کا پانی استعمال کرنے والے اشخاص کی تعداد = $\frac{86240}{70} = 1232$

اس لیے مکمل بھری ہوئی ٹانکی کا پانی 1232 اشخاص کے لیے کافی ہوگا۔

مثال (2) : 30 سم نصف قطر کا ایک ٹھوس کرہ پگھلا کر اس سے 10 سم نصف قطر اور 6 سم اونچائی والے ٹھوس مدوراستوانے بنائیں تو بتائیے کتنے استوانے تیار ہوں گے؟

حل : کرے کا نصف قطر، $r = 30$ سم

مدوراستوانے کا نصف قطر، R = 10 سم

مدوراستوانے کی اونچائی، H = 6 سم

فرض کریں n استوانے تیار ہوں گے۔

$\therefore$ کرے کا حجم = n × ایک مدوراستوانے کا حجم

$\therefore$ مدوراستوانوں کی تعداد = n = کرہ کا حجم / ایک مدوراستوانے کا حجم

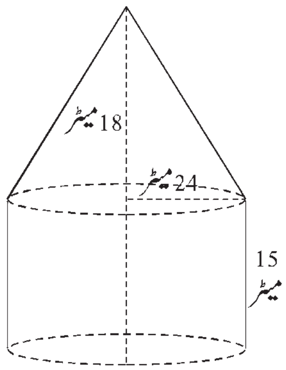
$$= \frac{\frac{4}{3}\pi (r)^3}{\pi (R)^2 H}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\times(30)^3}{10^2\times 6} \qquad = \frac{\frac{4}{3}\times 30\times 30\times 30}{10\times 10\times 6} = 60$$

$\therefore$ کل 60 مدوراستوانے تیار ہوں گے۔

مثال (3) : سرکس کے خیمے کا نچلا حصہ مدور استوانہ شکل کا اور اوپری حصہ مخروط شکل کا ہے۔ خیمے کے قاعدے کا قطر 48 میٹر ہے۔ مدور استوانہ نما حصے کی اونچائی 15 میٹر ہے۔ خیمے کی کل بلندی 33 میٹر ہے تو خیمے کے لیے درکار کپڑے کا رقبہ اور خیمے میں موجود ہوا کا حجم معلوم کیجیے۔

حل : خیمے کی کل اونچائی 33 میٹر ہے۔



شکل 7.7

فرض کریں مدور استوانہ نما حصے کی اونچائی = H، اس لیے میٹر H = 15

$\therefore$ مخروطی حصے کی عمودی اونچائی $= h = 33 - 15 = 18$ میٹر

مخروط کی مائل بلندی $(l) = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{24^2 + 18^2}$

$= \sqrt{576 + 324}$

$= \sqrt{900}$

$l = 30$ میٹر

مخروطی حصے کی مائل سطح کا رقبہ + مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ = سرکس کے خیمے کے لیے درکار کپڑے کا رقبہ

$= 2\pi rH + \pi rl$

$= \pi r\,(2H + l)$

$= \frac{22}{7} \times 24\,(2 \times 15 + 30)$

$= \frac{22}{7} \times 24 \times 60$

$= 4525.71$ مربع سم

مخروطی حصے کا حجم + مدور استوانہ نما حصے کا حجم = خیمے میں موجود ہوا کا حجم

$= \pi r^2 H + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \pi r^2 \left(H + \frac{1}{3}h\right)$

$= \frac{22}{7} \times 24^2\,(15 + \frac{1}{3} \times 18)$

$= \frac{22}{7} \times 576 \times 21$

$= 38,016$ مکعب میٹر

$\therefore$ خیمے کے لیے لگنے والے کپڑے کا رقبہ = 4525.71 مربع میٹر اور

خیمے میں موجود ہوا کا حجم = 38016 مکعب میٹر

مشقی سیٹ 7.1

1. ایک مخروط کے قاعدے کا نصف قطر 1.5 سم اور عمودی بلندی 5 سم ہے۔ تو اُس مخروط کا حجم معلوم کیجیے۔

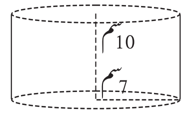
2. 6 سم قطر والے کرے کا حجم معلوم کیجیے۔

3. ایک مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر 5 سم اور اونچائی 40 سم ہے تو اس کی کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

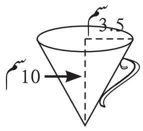
4. ایک کرہ کا نصف قطر 7 سم ہو تو اس کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

5. ایک ٹھوس دھاتی مکعب نما کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 44 سم، 21 سم اور 12 سم ہے اسے پگھلا کر 24 سم بلندی والا ایک مخروط بنایا گیا۔ مخروط کے قاعدے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

6. شکل 7.8 اور 7.9 میں برتنوں کے پیمائش (ناپ) کا مشاہدہ کیجیے۔ اس کی مدد سے بتایئے کہ مدور استوانہ نما ڈرم بھرنے کے لیے کتنے جگ پانی لگے گا؟

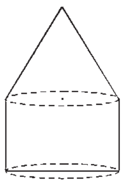


شکل 7.9
استوانہ شکل کا ڈرم

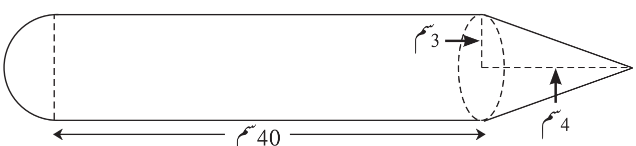


شکل 7.8
مخروطی شکل کا پانی کا جگ

7. شکل میں مدور استوانہ اور مخروط کے قاعدے مساوی ہیں۔ مدور استوانے پر مخروط رکھا گیا ہے۔ مدور استوانے کی اونچائی 3 سم ہے۔ قاعدے کا رقبہ 100 مربع سم ہے۔ اگر کل مجسم شکل کا حجم 500 مکعب سم ہو تو اس مجسم شکل کی اونچائی معلوم کیجیے۔


شکل 7.10

8. کھلونے کی ایک تصویر میں دی ہوئی معلومات پر سے نصف کرہ، مدور استوانہ اور مخروط سے تیار ہونے والے کھلونے کی کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

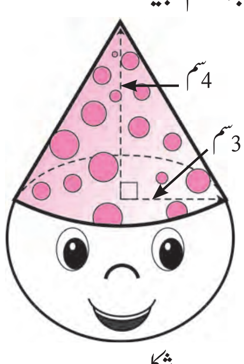


شکل 7.11

9. شکل 7.12 میں مدور استوانے کی شکل کا قرص رکھنے والا ڈبا ہے۔ ایک قرص کا نصف قطر 7 ملی میٹر اور بلندی 5 ملی میٹر ہو تو اس ڈبے میں کتنی قرص رکھی جا سکتی ہیں؟

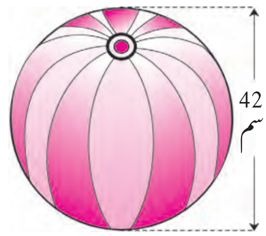
شکل 7.12

10. شکل 7.13 میں بچوں کا ایک کھلونا ہے۔ جو ایک نصف کرے اور ایک مخروط کی مدد سے تیار کیا گیا ہے۔ شکل میں دکھائی گئی پیمائشوں کی مدد سے کھلونے کا حجم اور خمدار سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔



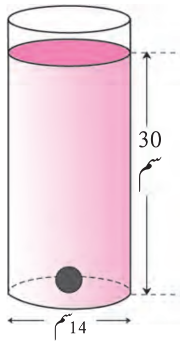
شکل 7.13

11. شکل میں دکھائے گئے بیچ بال (beach ball) کی خمدار سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کیجیے۔



شکل 7.14

12. شکل میں دکھائے ہوئے طریقے کے مطابق ایک مدور استوانہ نما گلاس میں پانی ہے اس میں 2 سم قطر والی ایک دھاتی گولی (شکل کے مطابق) ڈوبی ہوئی ہے۔ تو پانی کا حجم معلوم کیجیے۔



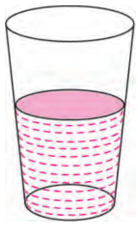
شکل 7.15

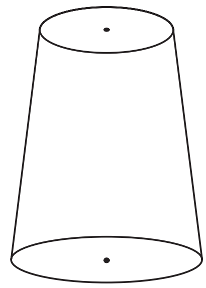
آیئے سمجھ لیں

مخروطِ ناقص (Frustum of the cone)

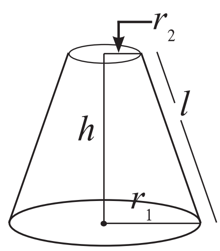
ہم پانی پینے کے لیے گلاس کا استعمال کرتے ہیں۔

یہ گلاس کی شکل اور ساتھ ہی ساتھ پانی کی شکل بھی ناقص مخروط ہے۔


شکل 7.16

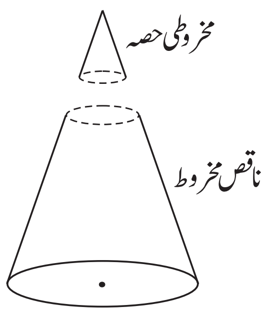

شکل 7.20

اوندھا رکھا ہوا گلاس



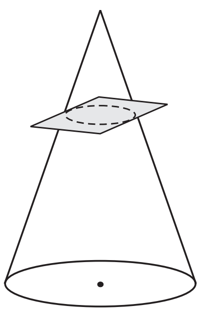
شکل 7.19

مخروط ناقص



شکل 7.18

مخروط کاٹنے کے بعد علیحدہ ہوئے دو حصے

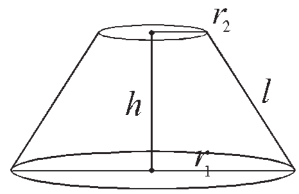

شکل 7.17

مخروط کاٹتے وقت

شکل 7.17 میں ایک مخروط کو اوندھا کر کے دکھایا گیا ہے۔ اس مخروط کو اس کے قاعدے کے متوازی اس طرح قطع کیا گیا ہے کہ اس طرح بننے والے دو حصوں میں سے ایک حصہ کی شکل مخروط ہے بچے ہوئے دوسرے حصے کو ناقص مخروط (Frustum) کہتے ہیں۔

مخروط کی طرح ہی ناقص مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کیا جاتا ہے۔ اس کے لیے ہم درج ذیل ضابطوں کا استعمال کریں گے۔

اسے ذہن نشین کرلیں



شکل 7.21

ناقص مخروط کی مائل بلندی $= l$, ناقص مخروط کی بلندی $= h$

یہاں، ناقص مخروط کے دائروی سروں کے نصف قطر r_1 اور r_2 ہیں اور $r_1 > r_2$

ناقص مخروط کی مائل بلندی $= l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

ناقص مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ $= \pi l\,(r_1 + r_2)$

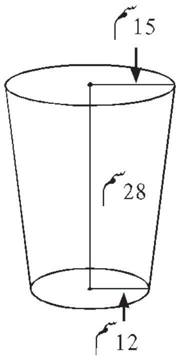
ناقص مخروط کی کل سطح کا رقبہ $= \pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

ناقص مخروط کا حجم $= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) : ایک ناقص مخروط شکل کی بالٹی کی اونچائی 28 سم ہے۔ اس بالٹی کے دونوں سرے کے دائروں کے نصف قطر 12 سم اور 15 سم ہیں تو بالٹی میں کتنے لٹر پانی سمائے گا؟ $(\pi = \frac{22}{7})$

حل : بالٹی کے دونوں سروں کے دائروں کے نصف قطر $r_1 = 15$ سم، $r_2 = 12$ سم، بالٹی کی بلندی $=$ 28 سم $= h$



شکل 7.22

بالٹی کی گنجائش $=$ ناقص مخروط کا حجم

$= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 28\,(15^2 + 12^2 + 15 \times 12)$

$= \frac{22 \times 4}{3} \times (225 + 144 + 180)$

$= \frac{22 \times 4}{3} \times 549$

$= 88 \times 183$

$= 16104$ مکعب سم $= 16.104$ لٹر

بالٹی میں 16.104 لٹر پانی سمائے گا۔

مثال (2) : ناقص مخروط کے دائروی حصوں کے نصف قطر 14 سم اور 8 سم ہیں۔ اگر ناقص مخروط کی بلندی 8 سم ہو تو درج ذیل قیمتیں معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

(i) ناقص مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ (ii) ناقص مخروط کی کل سطح کا رقبہ (iii) ناقص مخروط کا حجم

حل : یہاں $r_1 = 14$ سم، $r_2 = 8$ سم، $h = 8$ سم بلندی

ناقص مخروط کی مائل بلندی ، $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$l = \sqrt{8^2 + (14 - 8)^2}$

$l = \sqrt{64 + 36} = 10$ سم

ناقص مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ $= \pi (r_1 + r_2)\, l$

$= 3.14 \times (14 + 8) \times 10$

$= 690$ مربع سم

ناقص مخروط کی کل سطح کا رقبہ $= \pi\, l(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$= 3.14 \times 10\,(14 + 8) + 3.14 \times 14^2 + 3.14 \times 8^2$

$= 690.8 + 615.44 + 200.96$

$= 690.8 + 816.4$

$= 1507.2$ مربع سم

ناقص مخروط کا حجم $= \frac{1}{3}\, \pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 8\, (14^2 + 8^2 + 14 \times 8)$

$= 3114.88$ مکعب سم

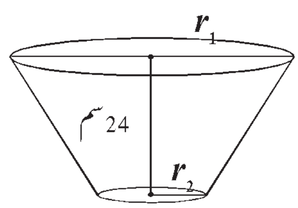
مشقی سیٹ 7.2

1. ناقص مخروط شکل والی پانی کی بالٹی کی بلندی 30 سم اور دونوں دائروی حصوں کے نصف قطر 14 سم اور 7 سم ہیں۔ بالٹی میں کتنے لٹر پانی سمائے گا؟ (1000 مکعب سم = 1 لٹر)

2. ایک ناقص مخروط کے دائروی حصوں کا نصف قطر 14 سم اور 6 سم ہے۔ اس کی بلندی 6 سم ہے۔ درج ذیل قیمتیں معلوم کیجیے۔

   (i) ناقص مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ (ii) ناقص مخروط کی کل سطح کا رقبہ (iii) ناقص مخروط کا حجم

3. شکل 7.23 میں ایک ناقص مخروط کے دائروی حصوں کے محیط بالترتیب 132 سم اور 88 سم ہیں۔ اس کی بلندی 24 سم ہے تو اس ناقص مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$



شکل 7.23

محیط$_1 = 2\pi r_1 = 132$

$r_1 = \frac{132}{2\pi} = \square$ سم

محیط$_2 = 2\pi r_2 = 88$

$r_2 = \frac{88}{2\pi} = \square$ سم

ناقص مخروط کی مائل بلندی $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$l = \sqrt{\square^2 + \square^2}$

$l = \square$ سم

ناقص مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ $= \pi(r_1 + r_2)l$

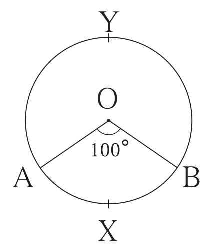
$= \pi \times \square \times \square$

$= \square$ مربع سم

آیئے ذرا یاد کریں

متصلہ شکل 7.24 کی مدد سے جدول مکمل کیجیے۔

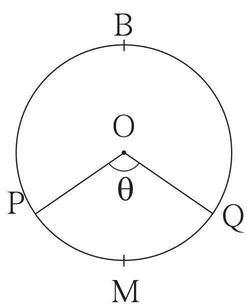
قوس کی پیمائش	قوس کا نام	قوس کی قسم
....	قوس AXB	اصغر قوس
....	قوس AYB	....



شکل **7.24**

آیئے سمجھ لیں

دائرے کا تراشہ (Sector of a circle)



شکل 7.25

شکل میں مرکزی زاویے کی وجہ سے دائروی علاقہ دو حصوں میں تقسیم ہو گیا ہے۔ ہر حصہ کو دائرے کا تراشہ کہتے ہیں۔

’’دائرے کے دو نصف قطر اور اس کے سروں کو ملانے والے دائرے کے قوس کے ذریعے بننے والے حصے کو دائرے کا تراشہ کہتے ہیں۔‘‘

شکل میں O – PMQ اور O – PBQ یہ دونوں ایک دائرے کے تراشے ہیں۔

اصغر تراشہ (Minor sector) :

دو نصف قطر اور ان سے متعلقہ اصغر قوس کے ذریعے بننے والے تراشے کو اصغر تراشہ کہتے ہیں۔

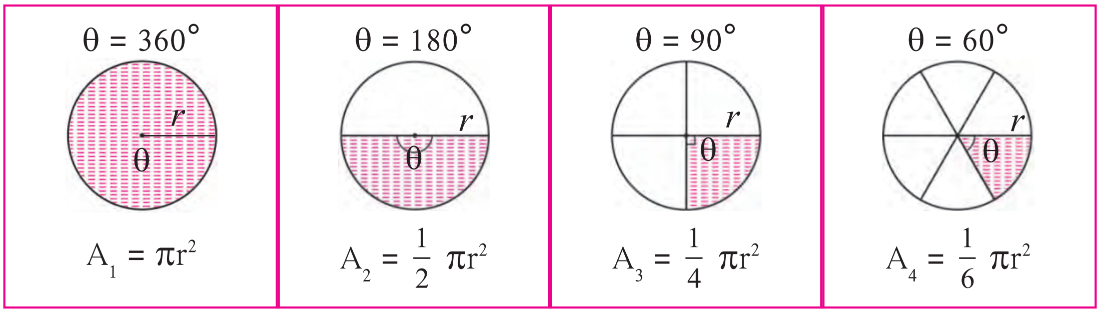
شکل میں O – PMQ اصغر تراشہ ہے۔

اکبر تراشہ (Major sector) :

دو نصف قطر اور ان سے متعلقہ اکبر قوس کے ذریعے بننے والا تراشہ، اکبر تراشہ کہلاتا ہے۔ شکل میں O – PBQ اکبر تراشہ ہے۔

دائرے کے تراشہ کا رقبہ (Area of a sector)

درج ذیل شکل میں دکھائے ہوئے طریقے کے مطابق مساوی نصف قطر والے دائروں کے نشان زدہ حصوں کے رقبوں کا مشاہدہ کیجیے اور درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔



شکل 7.26

مکمل زاویہ = 360° = دائرے کے مرکزی زاویے کی پیمائش

دائرے کا مرکزی زاویہ = 360°,		دائرے کا رقبہ = πr^2	
دائرے کا تراشہ	دائرے کے تراشے کے قوس کی پیمائش	$\frac{\theta}{360}$	دائرے کے تراشے کا رقبہ A
A_1	360°	$\frac{360}{360} = 1$	$1 \times \pi r^2$
A_2	180°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \pi r^2$
A_3	90°	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times \pi r^2$
A_4	60°	....	....
A	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

جدول کی مدد سے سمجھ میں آتا ہے کہ دائرے کے رقبے کو $\frac{\theta}{360}$ سے ضرب کرنے پر θ پیمائش والے قوس سے متعلقہ تراشے کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

یہ ضابطہ درج ذیل طریقے سے لکھا جا سکتا ہے۔

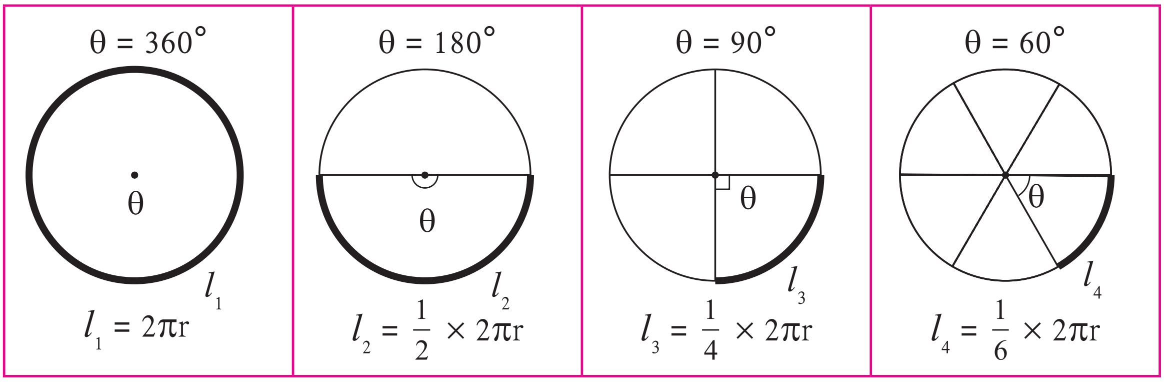
$$\text{دائرے کے تراشے کا رقبہ } (A) = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

(اس ضابطے کی بنا پر) ... $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360}$

یعنی $\frac{\text{دائرے کے تراشے کا رقبہ}}{\text{دائرے کا رقبہ}} = \frac{\theta}{360}$,

قوس کی لمبائی (Length of an arc)

درج ذیل میں دکھائے ہوئے طریقے کے مطابق مساوی نصف قطر والے دائروں کے واضح نمایاں کیے ہوئے قوس کی لمبائی کا مشاہدہ کیجیے اور درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔



شکل 7.27

دائرے کے قوس کی لمبائی	دائرے کے قوس کی پیمائش (θ)	$\frac{\theta}{360}$	دائرے کے قوس کی لمبائی (l)
l_1	360°	$\frac{360}{360} = 1$	$1 \times 2\pi r$
l_2	180°	$\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 2\pi r$
l_3	90°	$\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 2\pi r$
l_4	60°	....	....
l	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

مندرجہ بالا تواتر کی بنا پر یہ سمجھ میں آتا ہے کہ جب محیط کو $\frac{\theta}{360}$ سے ضرب کرتے ہیں تو θ پیمائش والے دائرے کے قوس کی لمبائی حاصل ہوتی ہے۔ اسے ضابطے کی شکل میں مندرجہ ذیل کے مطابق لکھتے ہیں۔

$$\text{دائرے کے قوس کی لمبائی } (l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

اس ضابطے کی بنا پر،

$$\therefore \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$$

$$\frac{\text{دائرے کے قوس کی لمبائی}}{\text{محیط}} = \frac{\theta}{360}$$

دائرے کے قوس کی لمبائی اور دائرے کے تراشے کے رقبے کے درمیان تعلق۔

دائرے کے تراشے کا رقبہ (A) = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ ... (I)

اسی طرح, دائرے کے قوس کی لمبائی (l) = $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$\therefore \frac{\theta}{360} = \frac{l}{2\pi r} \quad \text{... (II)}$$

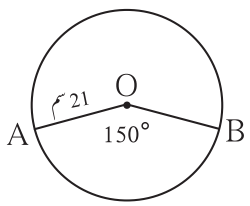
$A = \frac{l}{2\pi r} \times \pi r^2$ ... (I اور II سے)

$$A = \frac{1}{2} lr = \frac{lr}{2}$$

∴ دائرے کے تراشے کا رقبہ = $\frac{\text{نصف قطر} \times \text{دائرے کے قوس کی لمبائی}}{2}$

اسی طرح, $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$

حل کردہ مثالیں



شکل 7.28

مثال (1) : 21 سم نصف قطر والے دائرے کے تراشے کے قوس کی پیمائش °150 ہے۔ دائرے کے تراشے کا رقبہ اور نظیری قوس کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل : یہاں، $r = 21$ سم، $\theta = 150°$، $\pi = \frac{22}{7}$

دائرے کے تراشے کا رقبہ (A) = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{150}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

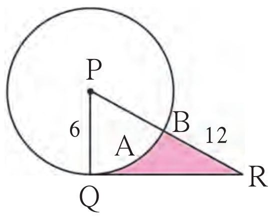
$= \frac{1155}{2}$ مربع سم $= 577.5$ مربع سم

دائرے کے قوس کی لمبائی $= l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$= \frac{150}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$

$= 55$ سم

مثال (2) : شکل میں دائرے کا مرکز P اور دائرے کا نصف قطر 6 سم ہے۔قطعہ QR دائرے کا مماس ہے۔سم PR = 12 ہو تو نشان زدہ حصے کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\sqrt{3} = 1.73)$



شکل 7.29

حل : دائرے کے مماس کے تماسی نقطے سے کھینچا گیا نصف قطر مماس پر عمود ہوتا ہے۔

اس لیے $\triangle PQR$ میں،

$\angle PQR = 90°$, $PQ = 6$ سم , $PR = 12$ سم , $\therefore\ PQ = \frac{PR}{2}$

اگر قائمۃ الزاویہ مثلث کا ایک ضلع، وتر کا نصف ہو تو اس ضلع کے مقابل کے زاویے کی پیمائش $30°$ ہوتی ہے۔

$\therefore\ \angle R = 30°$ اور $\angle P = 60°$

$30° - 60° - 90°$ مسئلے کی رو سے،

$$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times PR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$$

$QR = 6\sqrt{3}$ سم

$\therefore\ A(\Delta PQR) = \frac{1}{2}\ QR \times PQ$ ... (مثلث کے رقبے کا ضابطہ)

$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6$

$= 18\sqrt{3} = 18 \times 1.73$

$= 31.14$ مربع سم

دائرے کے تراشے کا رقبہ $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$\therefore\ A(P\text{-}QAB) = \frac{60}{360} \times 3.14 \times 6^2$

$= \frac{1}{6} \times 3.14 \times 6 \times 6 = 3.14 \times 6$

$= 18.84$ مربع سم

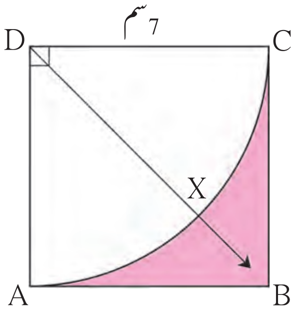
نشان زدہ حصے کا رقبہ $= A(\triangle PQR) - A(P - QAB)$

$= 31.14 - 18.84$

$= 12.30$ مربع سم

نشان زدہ حصے کا رقبہ $= 12.30$ مربع سم

عملی کام :



شکل 7.30

دی ہوئی شکل میں، مربع ABCD کا ہر ضلع 7 سم ہے۔نقطہ D کو مرکز مان کر DA نصف قطر کا تراشہ D – AXC بنایا گیا ہے۔تو نشان زدہ علاقے کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے خالی چوکون مکمل کر کے مثال حل کیجیے۔

حل : (ضابطہ) ... مربعے کا رقبہ = ☐

= ☐

= 49 مربع سم

(ضابطہ) ... تراشے (D – AXC) کا رقبہ = ☐

$= \frac{☐}{360} \times \frac{22}{7} \times ☐$

= 38.5 مربع سم

نشان زدہ علاقے کا رقبہ = ☐ کا رقبہ – ☐ کا رقبہ

= ☐ مربع سم – ☐ مربع سم

= ☐ مربع سم

مشقی سیٹ 7.3

1. دائرے کا نصف قطر 10 سم ہے۔قوس کی پیمائش 54° ہو تو اس قوس سے بننے والے تراشہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ($\pi = 3.14$)

2. ایک دائرے کے قوس کی پیمائش 80° اور نصف قطر 18 سم ہے۔اس قوس کی لمبائی معلوم کیجیے۔ ($\pi = 3.14$)

3. دائرے کا نصف قطر 3.5 سم اور قوس کی لمبائی 2.2 سم ہو تو تراشے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

4. ایک دائرے کا نصف قطر 10 سم ہے۔تراشے کا رقبہ 100 مربع سم ہو تو اس کے متعلقہ اکبر تراشہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ($\pi = 3.14$)

5. 15 سم نصف قطر والے دائرے کے ایک تراشے کا رقبہ 30 مربع سم ہے۔اس کے متعلقہ قوس کی لمبائی معلوم کیجیے۔

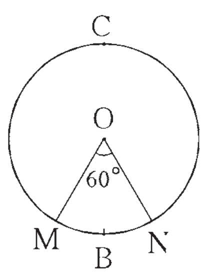
6. مقابل کی شکل میں، دائرے کا نصف قطر 7 سم ہے۔

اور m(قوس MBN) = 60°

ہو تو (1) دائرے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

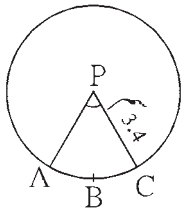
(2) A(O – MBN) معلوم کیجیے۔

(3) A(O – MCN) معلوم کیجیے۔



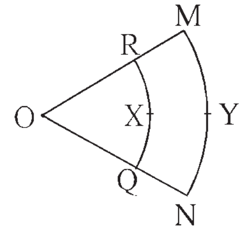
شکل 7.31

.7 3.4 سم نصف قطر کے تراشے کا محیط 12.8 سم ہے۔تو تراشے کا رقبہ معلوم کیجیے۔



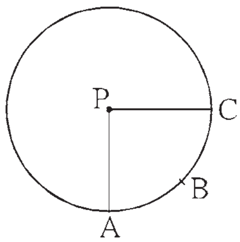
شکل 7.32

.8 شکل 7.33 میں، نقطہ 'O' تراشے کا مرکز ہے۔
$\angle ROQ = \angle MON = 60°$، OR = 7 سم
OM = 21 سم ہوتو قوس RXQ اور قوس MYN کی قیمت
معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$



شکل 7.33

.9 شکل 7.34 میں، مربع سم A (P – ABC) = 154، دائرے کا نصف قطر 14 سم ہوتو
(i) $\angle APC$ کی پیمائش معلوم کیجیے۔
(ii) قوس ABC کی لمبائی معلوم کیجیے۔



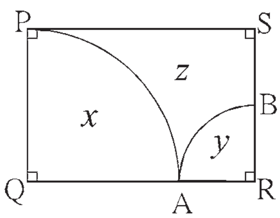
شکل 7.34

.10 دائرے کا نصف قطر 7 سم ہے۔اگر تراشوں کے قوسین کی پیمائشیں ذیل کے مطابق ہوں تو ان تراشوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(i) 30° (ii) 210° (iii) 3 قائمہ زاویہ

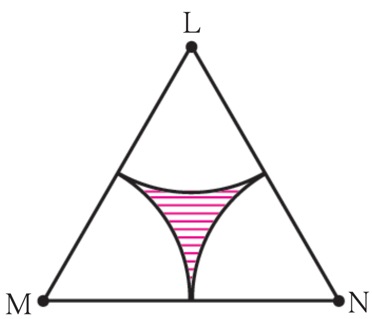
.11 اصغر تراشے کا رقبہ 3.85 مربع سم اور نظیری مرکزی زاویہ کی پیمائش 36° ہوتو اس دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

.12 شکل 7.35 میں □PQRS ایک مستطیل ہے۔
PQ = 14 سم، QR = 21 سم ہوتو شکل میں x، y اور z میں سے ہر ایک کا رقبہ معلوم کیجیے۔



شکل 7.35

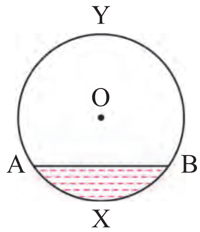
.13 △LMN متساوی الاضلاع مثلث ہے۔
LM = 14 سم، مثلث کے ہر راس کو مرکز مان کر 7 سم نصف قطر لے کر شکل کے مطابق تین تراشے بنائے گئے ہیں۔
اس معلومات کی بنا پر،
(1) A (△LMN) = ?
(2) ایک تراشے کا رقبہ معلوم کیجیے۔
(3) تینوں تراشوں کا کل رقبہ معلوم کیجیے۔
(4) نشان زدہ علاقے کا رقبہ معلوم کیجیے۔



شکل 7.36

آیئے سمجھ لیں

دائرے کا قطعہ دائرہ (Segment of a circle)



شکل 7.37

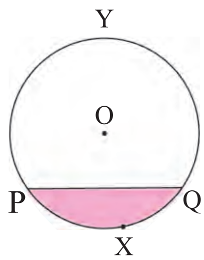
قطعہ دائرہ یعنی، وتر اور قوس سے گھرا ہوا علاقہ

اصغر قطعہ دائرہ : وتر اور اصغر قوس سے گھرا ہوا علاقہ اصغر قطعہ دائرہ کہلاتا ہے۔شکل میں قطعہ دائرہ AXB، اصغر قطعہ دائرہ ہے۔

اکبر قطعہ دائرہ : وتر اور اکبر قوس سے گھرا علاقہ، اکبر قطعہ دائرہ کہلاتا ہے۔شکل میں قطعہ دائرہ AYB، اکبر قطعہ دائرہ ہے۔

نصف قطعہ دائرہ : قطر سے بنے قطعہ دائرے کو نصف قطعہ دائرہ کہتے ہیں۔

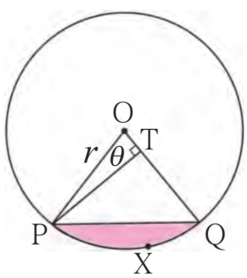
قطعہ دائرہ کا رقبہ (Area of a segment)



شکل 7.38

شکل میں PXQ، اصغر قطعہ دائرہ ہے۔

اور PYQ، اکبر قطعہ دائرہ ہے۔



شکل 7.39

اصغر قطعہ دائرہ کا رقبہ کیسے معلوم کریں؟

مرکز 'O' سے دائرے میں OP اور OQ دو نصف قطر کھینچیے۔

یہاں $\angle POQ = \theta$ ہے۔آپ تراشے O–PXQ کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں۔اُسی طرح $\triangle OPQ$ کا رقبہ بھی معلوم کر سکتے ہیں۔تراشے کے رقبے میں سے مثلث کا رقبہ تفریق کرنے پر اصغر قطعہ دائرے کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

اصغر قطعہ دائرہ PXQ کا رقبہ = تراشے (O – PXQ) کا رقبہ – $\triangle OPQ$ کا رقبہ

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \triangle OPQ \text{ کا رقبہ} \quad \ldots \text{(I)}$$

شکل میں $\triangle OPQ$ میں، قطعہ PT، ضلع OQ پر کھینچا ہوا عمود ہے۔

قائمۃ الزاویہ $\triangle OTP$ میں،

$$\sin\theta = \frac{PT}{OP}$$

$\therefore\ PT = OP \times \sin\theta$

$PT = r\sin\theta$ ... ($\because$ OP = r)

Δ OPQ کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × قاعدہ × ارتفاع

$= \frac{1}{2} \times OQ \times PT$

$= \frac{1}{2} \times r \times r\sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times r^2 \sin\theta$ ... (ii)

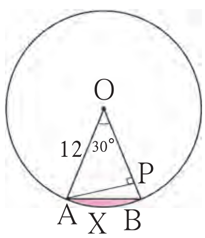
بیان (I) اور (II) کی رؤ سے،

PXQ قطعہ دائرہ کا رقبہ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

$= r^2\left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$

(ہم نے حادّہ زاویوں کے sine مثلثیاتی نسبتوں کا مطالعہ کیا ہے اس لیے θ کی پیائش 90° یا اس سے کم ہو تو اس ضابطہ کو آسانی سے استعمال کر سکتے ہیں۔ اسے ذہن نشین کر لیجیے۔

حل کردہ مثالیں



مثال (1) : شکل 7.40 میں $\angle AOB = 30°$، OA = 12 سم ہو تو اصغر قطعہ دائرے کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ($\pi = 3.14$)

طریقہ (I)

r = 12 سم، $\theta = 30°$، $\pi = 3.14$

O–AXB تراشہ کا رقبہ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 12^2$

$= 3.14 \times 2$

= 37.68 مربع سم

$A(\Delta\ OAB) = \frac{1}{2} r^2 \times \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times 12^2 \times \sin 30$

$= \frac{1}{2} \times 144 \times \frac{1}{2}$

...($\because \sin 30 = \frac{1}{2}$)

= 36 مربع سم

AXB قطعہ دائرہ کا رقبہ = (O – AXB) تراشے کا رقبہ – A ($\triangle$OAB)

= 37.68 – 36 = 1.68 مربع سم

طریقہ (II) :

$$\text{قطعہ دائرے AXB کا رقبہ} = r^2\left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$$

$$= 12^2\left[\frac{3.14\times30}{360} - \frac{\sin 30}{2}\right]$$

$$= 144\left[\frac{3.14}{12} - \frac{1}{2\times2}\right]$$

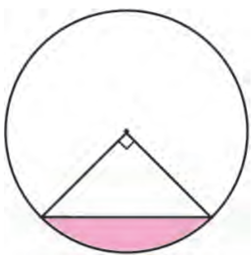
$$= \frac{144}{4}\left[\frac{3.14}{3} - 1\right]$$

$$= 36\left[\frac{3.14-3}{3}\right]$$

$$= \frac{36}{3}\times0.14 = 12\times0.14$$

قطعہ دائرے AXB کا رقبہ = 1.68 مربع سم

مثال (2) : 'P' مرکز والے دائرے کا نصف قطر 10 سم ہے۔ وتر AB، دائرے کے مرکز پر قائمہ زاویہ بناتا ہو تو اصغر قطعہ دائرے اور اکبر قطعہ دائرے کے رقبے معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$



X

شکل 7.41

حل : r = 10 سم، $\theta = 90°$، $\pi = 3.14$

$$\text{تراشے کا رقبہ} = \frac{\theta}{360}\times\pi r^2$$

$$= \frac{90}{360}\times3.14\times10^2$$

$$= \frac{1}{4}\times314$$

= 78.5 مربع سم

$$A(\Delta APB) = \frac{1}{2}\times\text{قاعدہ}\times\text{ارتفاع}$$

$$= \frac{1}{2}\times10\times10$$

= 50 مربع سم

اصغر قطعہ دائرے کا رقبہ = تراشے کا رقبہ − مثلث کا رقبہ

= 78.5 − 50

= 28.5 مربع سم

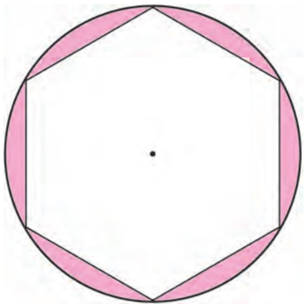
اکبر قطعہ دائرے کا رقبہ = دائرہ کا رقبہ − اصغر قطعہ دائرے کا رقبہ

$= 3.14\times10^2 - 28.5$

= 314 − 28.5

= 285.5 مربع سم

مثال (3) : ایک دائرے کا نصف قطر 14 سم ہے۔ اُس میں ایک منتظم مسدس حائط ہے۔ منتظم مسدس کے بیرونی اور دائرے کے اندرونی علاقے کے درمیان کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7}, \sqrt{3} = 1.732)$



شکل 7.42

حل : منتظم مسدس کے حائط دائرے کا نصف قطر = منتظم مسدس کا ضلع

$\therefore$ منتظم مسدس کا ضلع = 14 سم

منتظم مسدس کا رقبہ $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{ضلع})^2$

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14^2$

= 509.21 مربع سم

دائرے کا رقبہ $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

= 616 مربع سم

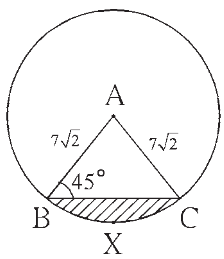
منتظم مسدس کا رقبہ − دائرہ کا رقبہ = منتظم مسدس کے بیرونی اور دائرے کے اندرونی علاقے کے درمیان کا رقبہ (خط کشیدہ علاقے کا رقبہ)

= 616 − 509.21

= 106.79 مربع سم

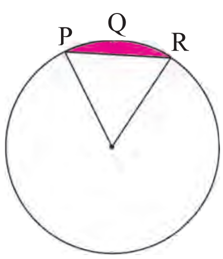
مشقی سیٹ 7.4

1. شکل 7.43 میں، 'A' مرکز والے دائرے میں، $\angle ABC = 45°$، $AC = 7\sqrt{2}$ سم ہو تو قطعہ دائرہ BXC کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14, \sqrt{2} = 1.41)$



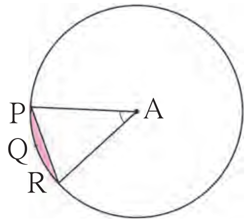
شکل 7.43

2. شکل 7.44 میں دائرے کا مرکز 'O' ہے۔ m(قوس PQR) = 60°، OP = 10 سم ہو تو نشان زدہ علاقے کا رقبہ معلوم کیجیے۔
$(\pi = 3.14, \sqrt{3} = 1.73)$



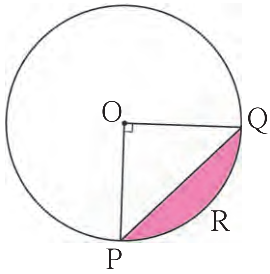
شکل 7.44

.3 'A' مرکز والے دائرے میں، $\angle PAR = 30°$ اور سم $AP = 7.5$ ہوتو قطعہ دائرہ PQR کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$



شکل 7.45

.4 متصلہ شکل میں دائرے کا مرکز 'O' اور اس کا وتر PQ ہے۔ $\angle POQ = 90°$ اور نشان زدہ علاقہ کا رقبہ 114 مربع سم ہے تو دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$



شکل 7.46

.5 15 سم نصف قطر والے دائرے کا وتر PQ، مرکز پر $60°$ کا زاویہ بناتا ہے۔ اس وتر کی وجہ سے بننے والے اصغر قطعہ دائرے اور اکبر قطعہ دائرے کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14, \sqrt{3} = 1.73)$

مجموعہ سوالات 7

.1 درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

(1) اگر ایک دائرے کے محیط اور دائرے کے رقبے میں $7 : 2$ کی نسبت ہوتو دائرے کا محیط کتنا ہوگا؟

(A) 14π (B) $\frac{7}{\pi}$ (C) 7π (D) $\frac{14}{\pi}$

(2) 44 سم لمبائی کے قوس کی پیمائش $160°$ ہوتو، اس دائرے کا محیط کتنا ہوگا؟

(A) 66 سم (B) 44 سم (C) 160 سم (D) 99 سم

(3) قوس کی پیمائش $90°$ اور نصف قطر 7 سم ہوتو تراشے کا احاطہ معلوم کیجیے۔

(A) 44 سم (B) 25 سم (C) 36 سم (D) 56 سم

(4) مخروط کے قاعدے کا نصف قطر 7 سم اور اونچائی 24 سم ہوتو مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(A) 440 مربع سم (B) 550 مربع سم (C) 330 مربع سم (D) 110 مربع سم

(5) مدور استوانہ کی خمدار سطح کا رقبہ 440 مربع سم اور نصف قطر 5 سم ہوتو اس کی اونچائی کتنی سینٹی میٹر ہوگی؟

(A) $\frac{44}{\pi}$ (B) 22π (C) 14π (D) $\frac{22}{\pi}$

(6) ایک مخروط پگھلا کر اس کے قاعدے کے نصف قطر کے مساوی نصف قطر والا مدور استوانہ بنایا گیا۔ اگر استوانے کی بلندی 5 سم ہوتو مخروط کی بلندی کتنی ہوگی؟

(A) 15 سم (B) 10 سم (C) 18 سم (D) 5 سم

(7) 0.01 سم ضلعے کے مکعب کا حجم کتنا مکعب سم ہے؟

(A) 1 (B) 0.001 (C) 0.0001 (D) 0.000001

(8) ایک مکعب میٹر حجم والے مکعب کے ضلعے کی لمبائی کتنی ہوگی؟

(A) 1 سم (B) 10 سم (C) 100 سم (D) 1000 سم

.2 ایک مخروط ناقص شکل کے کپڑے دھونے کے ٹب (ناند) کی اونچائی 21 سم ہے۔ٹب کے دونوں دائروی حصوں کے نصف قطر 20 سم اور 15 سم ہیں۔ بتائیے ٹب میں کتنے لیٹر پانی سمائے گا؟ $(\pi = \frac{22}{7})$

*.3 پلاسٹک کے 1 سم نصف قطر کی گولیاں پگھلا کر، استوانہ نما نلی تیار کی گئی۔نلی کی موٹائی 2 سم، اونچائی 90 سم اور بیرونی نصف قطر 30 سم ہو تو، اس نلی کو بنانے کے لیے کتنے گولیاں پگھلائی گئی ہوں گی؟

.4 لمبائی 16 سم، چوڑائی 11 سم اور اونچائی 10 سم کے دھاتی مکعب نما (مستطیلی منشور) سے، 2 ملی میٹر موٹائی اور 2 سم قطر کے سکے بنائے گئے ہوں تو بتائیے کل کتنے سکے بنائے جا سکتے ہیں؟

.5 ایک رولر (متحرکہ دھمس) کا قطر 120 سم اور لمبائی 84 سم ہے۔ایک میدان ایک مرتبہ ہموار بنانے کے لیے رولر 200 گردشیں مکمل کرتا ہے۔ 10 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے میدان ہموار کرنے کا کل خرچ کتنا ہوگا؟

.6 ایک کھوکھلے دھاتی کرے کا قطر 12 سم اور موٹائی 0.01 میٹر ہے۔اس کرے کے بیرونی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے اور جب کہ دھات کی کثافت 8.88 گرام فی مکعب میٹر ہو تو اس کرے کی کمیت معلوم کیجیے۔

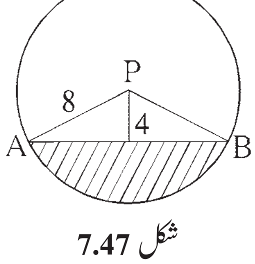
.7 ایک مدور استوانہ نما بالٹی کے قاعدے کا قطر 28 سم اور اونچائی 20 سم ہے۔ یہ بالٹی ریت سے مکمل بھری ہوئی ہے۔اس بالٹی کی ریت زمین پر اس انداز میں انڈیل دی گئی کہ ریت کا مخروط بن گیا۔ریت کے مخروط کی اونچائی 14 سم ہو تو اس مخروط کے قاعدے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

.8 ایک دھاتی کرے کا نصف قطر 9 سم ہے۔اس کرے کو پگھلا کر، 4 ملی میٹر قطر کی دھات کا تار بنایا گیا تو اس تار کی لمبائی کتنی ہوگی؟

.9 6 سم نصف قطر کے ایک دائرے کے تراشے کا رقبہ 15π مربع سم ہے۔اس تراشے کے قوس کی لمبائی اور قوس کی پیمائش معلوم کیجیے۔

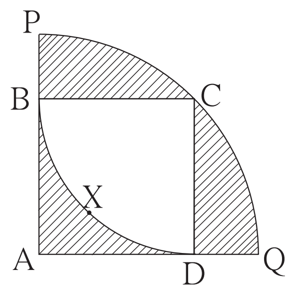
.10 شکل 7.47 میں، P دائرے کا مرکز ہے۔ AB وتر ہے۔ PA = 8 سم اور وتر AB دائرے کے مرکز سے 4 سم کے فاصلے پر واقع ہے۔تو نشان زدہ علاقے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

$(\pi = 3.14, \quad \sqrt{3} = 1.73)$



شکل 7.47

11. دائرہ کا تراشہ A – PCQ میں ABCD□ ایک مربع ہے۔
اگر C – BXD، اس تراشے کا نصف قطر 20 سم ہو تو نشان زدہ
علاقے کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔



شکل 7.48

حل : مربع ABCD کا ضلع = تراشہ C – BXD کا نصف قطر = ☐ سم

مربع کا رقبہ = ضلع^2 = $☐^2$ = ☐ ... (I)

مربع کا نشان زدہ علاقے کا رقبہ = مربع ABCD کا رقبہ − تراشہ C – BXD کا رقبہ

$= ☐ - \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= ☐ - \frac{90}{360} \times \frac{3.14}{1} \times \frac{400}{1}$

$= ☐ - 314$

$= ☐$

بڑے تراشے کا نصف قطر = مربع ABCD کے وتر کی لمبائی

$= 20\sqrt{2}$

بڑے تراشہ میں مربع کے باہر نشان زدہ علاقے کا رقبہ = تراشے A – PCQ کا رقبہ − مربع ABCD

= A (B – PCQ) − A (□ABCD)

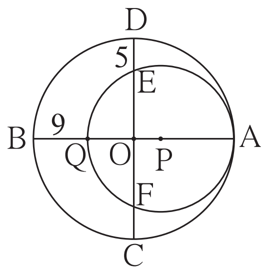
$= \left(\frac{\theta}{360} \times \pi \times r^2\right) - ☐^2$

$= \frac{90}{360} \times 3.14\,(20\sqrt{2})^2 - (20)^2$

$= ☐ - ☐$

$= ☐$

کل نشان زدہ علاقے کا رقبہ = 86 + 228 = 314 مربع سم



شکل 7.49

.12 'O' اور 'P' مرکز والے دائرے اندرونی طور پر ایک دوسرے کو نقطہ A پر مس کرتے ہیں۔ اگر BQ = 9 ،DE = 5 ہو تو دائرے کا نصف قطر معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔

حل : فرض کیجیے بڑے دائرے کا نصف قطر R اور چھوٹے دائرے کا نصف قطر 'r' ہے۔

لہٰذا OC ،OB ،OA اور OD بڑے دائرے کے نصف قطر ہیں۔

$\therefore\ OA = OB = OC = OD = R$

$PQ = PA = r$

$OQ = OB - BQ = \square$

$OE = OD - DE = \square$

P مرکز والے دائرے میں دو وتروں کے اندرونی طور پر تقسیم کرنے کی خصوصیت کی بنا پر،

$OQ \times OA = OE \times OF$

$\square \times R = \square \times \square \quad \ldots (\because\ OE = OF)$

$R^2 - 9R = R^2 - 10R + 25$

$R = \square$

$AQ = 2r = AB - BQ$

$2r = 50 - 9 = 41$

$r = \square = \square$

جوابات کی فہرست

1. متشابہت

مشقی سیٹ 1.1

1. $\frac{3}{4}$; **2.** $\frac{1}{2}$; **3.** 3 ; **4.** 1:1 ; **5.** (i) $\frac{BQ}{BC}$, (ii) $\frac{PQ}{AD}$, (iii) $\frac{BC}{DC}$, (iv) $\frac{DC \times AD}{QC \times PQ}$

مشقی سیٹ 1.2

1. (1) ناصف ہے۔ (2) ناصف نہیں ہے۔ (3) ناصف ہے۔

2. $\frac{PN}{NR} = \frac{PM}{MQ} = \frac{3}{2}$, $\therefore$ خط NM ∥ ضلع RQ   3. QP = 3.5   5. BQ = 17.5

6. QP = 22.4   7. $x = 6$; AE = 18   8. LT = 4.8   9. $x = 10$

10. دیا ہوا ہے, XQ ; PD, دیا ہوا ہے , $\frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}} = \frac{\boxed{XQ}}{\boxed{QE}}$, تناسب کا بنیادی مسئلہ , $\frac{\boxed{XP}}{\boxed{PD}} = \frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}}$

مشقی سیٹ 1.3

1. Δ ABC ~ Δ EDC ;   **2.** Δ PQR ~ Δ LMN, ضل ضل ضل متشابہت کی آزمائش کے مطابق

3. 12 میٹر;   **4.** AC = 10.5 ;   **6.** OD = 4.5

مشقی سیٹ 1.4

1. رقبوں کی نسبت = 9 : 25   **2.** $\boxed{PQ^2}$, $\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}$;   **3.** $\boxed{A(\Delta PQR)}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{4}{5}$;

4. MN = 15   5. 20 سم   6. $4\sqrt{2}$

7. $\boxed{PF}$, $\boxed{x}$ + $\boxed{2x}$, $\boxed{\angle FPQ}$, $\boxed{\angle FQP}$, $\frac{DF^2}{PF^2}$, $\boxed{20}$, $\boxed{45}$, $\boxed{45}$ - $\boxed{20}$, $\boxed{25 \text{ مربع اکائی}}$

مجموعہ سوالات - 1

1. (1) (B), (2) (B), (3) (B), (4) (D) (5) (A)

2. $\frac{7}{13}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{13}{20}$;   **3.** 9 سم ;   **4.** $\frac{3}{4}$;   **5.** 11 سم ;   **6.** $\frac{25}{81}$;   **7.** 4 ;

8. PQ = 80, QR = $\frac{280}{3}$, RS = $\frac{320}{3}$;   9. $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MQ}} = \frac{\boxed{PX}}{\boxed{XQ}}$, $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MR}} = \frac{\boxed{PY}}{\boxed{YR}}$,

10. $\frac{\boxed{AX}}{\boxed{XY}} = \frac{3}{2}$;   12. $\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{3}+\boxed{2}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$, $\boxed{\text{زا - زا}}$ $\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$, $\boxed{15}$

2. فیثا غورث کا مسئلہ

مشقی سیٹ 2.1

1. فیثا غورث کے اعداد ثلاثہ ; (1) , (3), (4), (6) ;   2. NQ = 6 ;   3. QR = 20.5 ;

4. RP = 12, PS = $6\sqrt{3}$ **5.** [دیا ہوا ہے] , [$45°$], [$\frac{1}{\sqrt{2}}$], [$\frac{1}{\sqrt{2}}$], [$\frac{1}{\sqrt{2}}$], [2]

6. ضلع = $5\sqrt{2}$ سم, احاطہ = $20\sqrt{2}$ سم **7.** (1) 18 (2) $4\sqrt{13}$ (3) $6\sqrt{13}$ **8.** 37 سم **10.** 8.2 سم

مشقی سیٹ 2.2

1. 12 **2.** $2\sqrt{10}$ **4.** 18 سم

مجموعہ سوالات - 2

1. (1) (B), (2) (B) (3) (A), (4) (C), (5) (D), (6) (C), (7) (B), (8) (A).

2. (1) $a\sqrt{3}$, (2) قائمۃ الزاویہ مثلث ہوگا (3) 61 سم (4) 15 سم (5) $x\sqrt{2}$ (6) $\angle$PRQ

3. RS = 6 سم, ST = $6\sqrt{3}$ سم **4.** 20 سم **5.** ضلع = 2 سم , احاطہ = 6 سم

6. 7 **7.** $2\sqrt{7}$ سم **10.** 7.5 کلومیٹر فی گھنٹہ **12.** 8 سم **14.** 8 سم

15. 192 مربع اکائی **17.** 58 **18.** 26

3. دائرہ

مشقی سیٹ 3.1

1. (1) 90°, مماس - نصف قطر مسئلہ (2) 6 سم; وجہ، عمودی فاصلہ (3) $6\sqrt{2}$ سم (4) 45°

2. (1) $5\sqrt{3}$ سم (2) 30° (3) 60° **4.** 9 سم

مشقی سیٹ 3.2

1. 1.3 سم **2.** 9.7 سم **4.** (3) 110° **5.** $4\sqrt{6}$ سم

مشقی سیٹ 3.3

1. m(قوس DE) = 90°, m(قوس DEF) = 160°

مشقی سیٹ 3.4

1. (1) 60° (2) 30° (3) 60° (4) 300° **2.** (1) 70° (2) 220° (3) 110° (4) 55°

3. $m\angle R = 92°$; $m\angle N = 88°$ **7.** 44° **8.** 121°

مشقی سیٹ 3.5

1. PS = 18; RS = 10. **2.** (1) 7.5 (2) 12 یا 6 **3.** (1) 18 (2) 10 (3) 5 **4.** 4

مجموعہ سوالات - 3

1. (1) D (2) B (3) B (4) C (5) B (6) D (7) A (8) B (9) A (10) C.

2. (1) 9 سم (2) دائرہ کا اندرون (3) 2 نقاط, 12 سم

3. (1) 6 (2) $\angle K = 30°$; $\angle M = 60°$ **5.** 10 **6.** (1) 9 سم (2) 6.5 سم

(3) 90° ; MS : SR = 2 : 1   9. $4\sqrt{3}$ سم

13. (1) 180°   (2) $\angle AQP \cong \angle ASQ \cong \angle ATQ$

(3) $\angle QTS \cong \angle SQR \cong \angle SAQ$ (4) 65°, 130°   (5) 100°   **14.** (1) 70°

(2) 130° (3) 210°   **15.** (1) 56° (2) 6 (3) 16 یا 9   **16.** (1) 15.5°

(2) 3.36 (3) 6   **18.** (1) 68° (2) OR = 16.2, QR = 13 (3) 13   **21.** 13

4. ہندسی عمل

مجموعہ سوالات - 4

1. (1) C (2) A (3) A

5. محددی علم ہندسہ

مشقی سیٹ 5.1

1. (1) $2\sqrt{2}$ (2) $4\sqrt{2}$ (3) $\frac{11}{2}$ (4) 13 (5) 20 (6) $\frac{29}{2}$

2. (1) ہم خطی ہیں (2) غیر ہم خطی ہیں (3) غیر ہم خطی ہیں (4) ہم خطی ہیں   **3.** (–1, 0)   **7.** 7 یا –5

مشقی سیٹ 5.2

1. (1, 3)   **2.** (1) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ (2) $\left(\frac{4}{7}, -\frac{11}{7}\right)$ (3) $\left(0, \frac{13}{3}\right)$ **3.** 2:7   **4.** (–6, 3)

5. 2 : 5, $k = 6$ **6.** (11, 18)   **7.** (1) (1, 3) (2) (6, –2) (3) $\left(\frac{19}{3}, \frac{22}{3}\right)$

8. (–1, –7)   **9.** $h = 7$, $k = 18$ **10.** (0, 2); (–2, –3)

11. (–9, –8), (–4, –6), (1, –4)   **12.** (16, 12), (12, 14), (8, 16), (4, 18)

مشقی سیٹ 5.3

1. (1) 1 (2) $\sqrt{3}$ (3) ڈھلان طے نہیں کر سکتے

2. (1) 2 (2) $-\frac{3}{8}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{5}{4}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) ڈھلان طے نہیں کر سکتے

3. (1) ہم خطی ہیں (2) ہم خطی ہیں (3) غیر ہم خطی ہیں (4) ہم خطی ہیں (5) ہم خطی ہیں (6) ہم خطی ہیں

4. $-5; \frac{1}{5}; -\frac{2}{3}$ 6. $k = 5$ 7. $k = 0$ 8. $k = 5$

مجموعہ سوالات - 5

1. (1) D (2) D (3) C (4) C

2. (1) ہم خطی ہیں (2) ہم خطی ہیں (3) غیر ہم خطی ہیں   **3.** (6, 13)   **4.** 3 : 1

5. $(-7, 0)$ 6. (1) $a\sqrt{2}$ (2) 13 (3) $5a$ 7. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

8. (1) ہاں، مختلف الاضلاع مثلث (2) نہیں (3) ہاں، متساوی الاضلاع مثلث 9. $k = 5$

13. $5, 2\sqrt{13}, \sqrt{37}$ 14. $(1, 3)$ 16. $\left(\frac{25}{6}, \frac{13}{6}\right)$, نصف قطر $= \frac{13\sqrt{2}}{6}$ 17. $(7, 3)$

18. متوازی الاضلاع 19. A(20, 10), P(16, 12), R(8, 16), B(0, 20) 20. $(3, -2)$

21. (7, 6) اور (3, 6) 22. 10 اور 0

6. علم مثلث

مشقی سیٹ 6.1

1. $\cos\theta = \frac{24}{25}$; $\tan\theta = \frac{7}{24}$ 2. $\sec\theta = \frac{5}{4}$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$

3. $\operatorname{cosec}\theta = \frac{41}{9}$; $\sin\theta = \frac{9}{41}$ 4. $\sec\theta = \frac{13}{5}$; $\cos\theta = \frac{5}{13}$; $\sin\theta = \frac{12}{13}$

5. $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta} = \frac{1}{2}$

مشقی سیٹ 6.2

1. چرچ کی اونچائی 80 میٹر
2. جہاز کا روشنی کے مینار سے فاصلہ 51.90 میٹر
3. دوسری عمارت کی بلندی $(10 + 12\sqrt{3})$ میٹر
4. تار سے افقی خط سے بنایا ہوا زاویہ $30°$
5. درخت کی اونچائی $(40 + 20\sqrt{3})$ میٹر
6. پتنگ کی ڈور کی لمبائی 69.20 میٹر

مجموعہ سوالات - 6

1. (1) A (2) B (3) C (4) A

2. $\cos\theta = \frac{60}{61}$ 3. $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sec\theta = \sqrt{5}$; $\cot\theta = \frac{1}{2}$

4. $\sin\theta = \frac{5}{13}$; $\cos\theta = \frac{12}{13}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$; $\tan\theta = \frac{5}{12}$; $\cot\theta = \frac{12}{5}$

6. عمارت کی اونچائی $16\sqrt{3}$ میٹر 7. جہاز کا روشنی کے مینار سے فاصلہ $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ میٹر

8. عمارت کی اونچائی $(12 + 5\sqrt{3})$ میٹر

9. سیڑھی کا دوسرا سرا زمین سے زیادہ سے زیادہ 20.80 میٹر اونچا ہوگا

10. ہوائی جہاز زمین سے زیادہ سے زیادہ 68.40 میٹر اونچا ہوگا

7. مساحت

مشقی سیٹ 7.1

1. 11.79 مکعب سم **2.** 113.04 مکعب سم **3.** 1413 مربع سم ($\pi = 3.14$ لیجیے) **4.** 616 مربع میٹر

5. 21 سم **6.** 12 جگ **7.** 9 سم **8.** 273 π مربع سم **9.** 20 گولیاں

10. 94.20 مکعب سم , 103.62 مربع سم **11.** 5538.96 مربع سم , 38772.72 مکعب سم

12. 14.68.67 π مکعب سم

مشقی سیٹ 7.2

1. 10.780 لٹر **2.** (1) 628 مربع سم (2) 1356.48 مربع سم (3) 1984.48 مکعب سم

مشقی سیٹ 7.3

1. 47.1 مربع سم **2.** 25.12 سم **3.** 3.85 مربع سم **4.** 214 مربع سم **5.** 4 سم

6. (1) 154 مربع سم (2) 25.7 مربع سم (3) 128.3 مربع سم **7.** 10.2 مربع سم

8. 7.3 سم; 22 سم **9.** (1) 90° (2) 22 سم

10. (1) 12.83 مربع سم (2) 89.83 مربع سم (3) 115.5 مربع سم 11. 3.5 سم

12. $x = 154$ مربع سم ; $y = 38.5$ مربع سم ; $z = 101.5$ مربع سم

13. (1) 84.87 مربع سم (2) 25.67 مربع سم (3) 77.01 مربع سم (4) 7.86 مربع سم

مشقی سیٹ 7.4

1. 3.92 مربع سم **2.** 9.08 مربع سم **3.** 0.65625 مربع اکائی **4.** 20 سم **5.** 20.43 مربع سم ; 686.07 مربع سم

مجموعہ سوالات - 7

1. (1) A (2) D (3) B (4) B (5) A (6) A (7) D (8) C.

2. 20.35 لٹر **3.** 7830 گولیاں **4.** 2800 سکے ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے) **5.** 6336 روپے

6. 452.16 مربع سم ; 3383.19 گرام **7.** 2640 مربع سم **8.** 243 میٹر

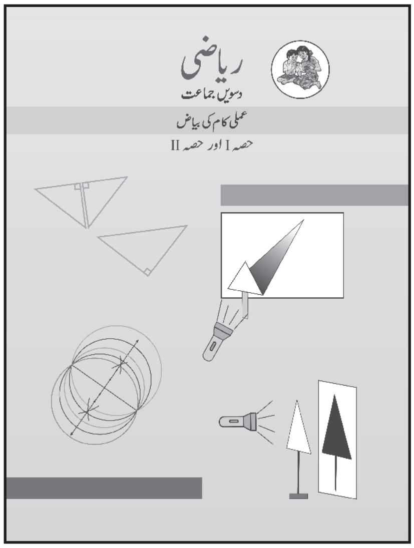
9. 150° ; 5 π سم **10.** 39.28 مربع سم

عملی کام کی بیاض دسویں جماعت

ریاضی (حصہ I اور حصہ II)

اُردو
ذریعۂ تعلیم

قیمت
۵۴ روپے



- حکومت سے منظور شدہ نصاب اور درسی کتاب پر مبنی۔
- قدر پیمائی کے طریقے کے مطابق تمام اسباق پر مبنی عملی کاموں کی شمولیت۔
- مختلف سرگرمیوں، تصویروں، شکلوں وغیرہ سے مزین۔
- معروضی اور کثیر متبادل سوالوں کے ساتھ۔
- زبانی امتحان کے لیے کارآمد سوالوں کی شمولیت۔
- مشق کے لیے مزید سوالوں کے جواب لکھنے کے لیے زیادہ سے زیادہ جگہ دستیاب۔

پاٹھیہ پستک منڈل کے تمام علاقائی ڈپو میں عملی بیاض برائے فروخت دستیاب ہیں۔

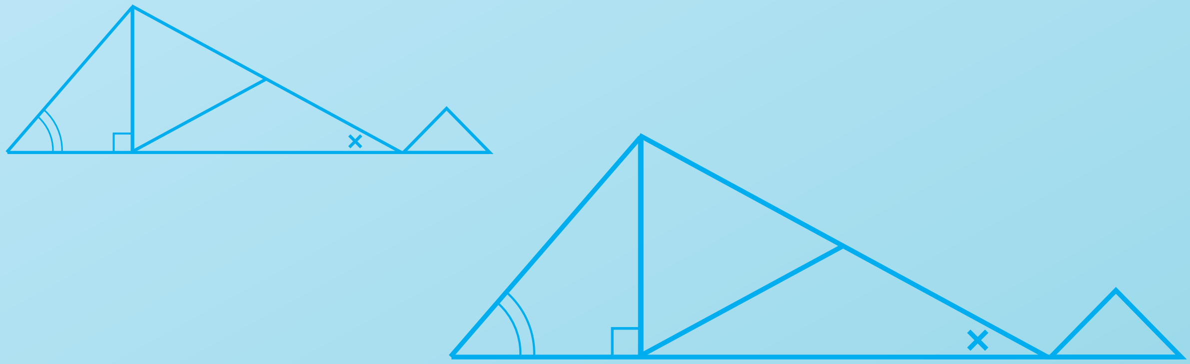
(1) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Senapati Bapat Marg, Pune 411004 ☎ 25659465 (2) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, P-41, Industrial Estate, Mumbai - Bengaluru Highway, Opposite Sakal Office, Kolhapur 416122 ☎ 2468576 (3) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, 10, Udyognagar, S. V. Road, Goregaon (West), Mumbai 400062 ☎ 28771842 (4) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, CIDCO, Plot no. 14, W-Sector 12, Wavanja Road, New Panvel, Dist. Rajgad, Panvel 410206 ☎ 274626465 (5) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Near Lekhanagar, Plot no. 24, 'MAGH' Sector, CIDCO, New Mumbai-Agra Road, Nashik 422009 ☎ 2391511 (6) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, M.I.D.C. Shed no. 2 and 3, Near Railway Station, Aurangabad 431001 ☎ 2332171 (7) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Opposite Rabindranath Tagore Science College, Maharaj Baug Road, Nagpur 440001 ☎ 2547716/2523078 (8) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Plot no. F-91, M.I.D.C., Latur 413531 ☎ 220930 (9) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Shakuntal Colony, Behind V.M.V. College, Amravati 444604 ☎ 2530965

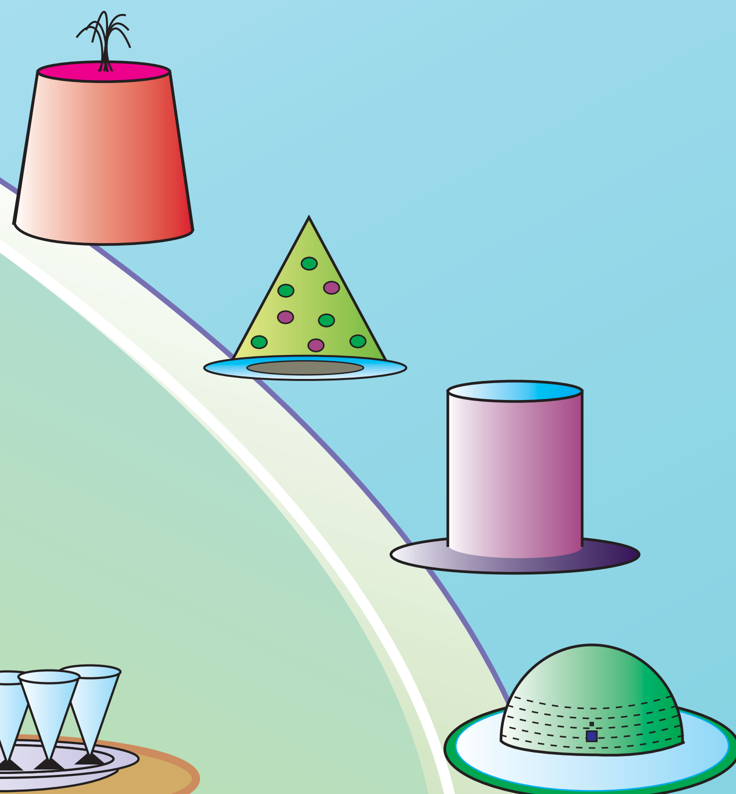
پاٹھیہ پستک منڈل، بال بھارتی کے توسط سے دسویں جماعت کے لیے
ای-لرننگ (Audio-Visual) مواد دستیاب

- بازو میں دیا ہوا .Q.R کوڈ اسکین کرکے ای-لرننگ مواد حاصل کرنے کے لیے اندراج کریں۔
- Google Play Store سے ebalbharati ایپ ڈاؤن لوڈ کرکے ای-لرننگ مواد کے لیے مطالبہ درج کریں۔

ebalbharati

www.ebalbharati.in | www.balbharati.in





مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل،
پونہ - ۴۱۱۰۰۴

उर्दू गणित इ. १०वी भाग-२

₹ 77.00