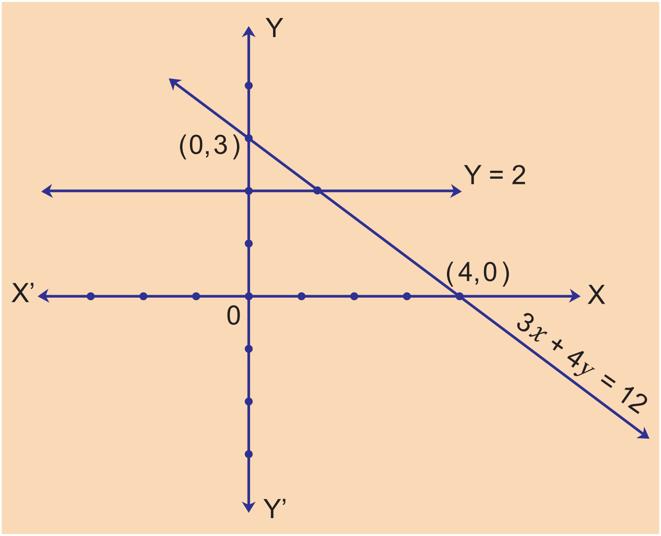
ریاضی حصّہ - I

دسویں جماعت



$1 + 2 + 3 + \cdots \cdots + 78 + 79 + 80$

$= (1 + 80) + (2 + 79) + \cdots + (39 + 42) + (40 + 41)$

بھارت کا آئین

حصہ 4 الف

بنیادی فرائض

حصہ 51 الف

بنیادی فرائض – بھارت کے ہر شہری کا یہ فرض ہوگا کہ وہ...

(الف) آئین پر کاربند رہے اور اس کے نصب العین اور اداروں، قومی پرچم اور قومی ترانے کا احترام کرے۔

(ب) ان اعلیٰ نصب العین کو عزیز رکھے اور ان کی تقلید کرے جو آزادی کی تحریک میں قوم کی رہنمائی کرتے رہے ہیں۔

(ج) بھارت کے اقتدارِ اعلیٰ، اتحاد اور سالمیت کو مستحکم بنیادوں پر استوار کرکے ان کا تحفّظ کرے۔

(د) ملک کی حفاظت کرے اور جب ضرورت پڑے قومی خدمت انجام دے۔

(ہ) مذہبی، لسانی اور علاقائی وطبقاتی تفرقات سے قطع نظر بھارت کے عوام الناس کے مابین یک جہتی اور عام بھائی چارے کے جذبے کو فروغ دے نیز ایسی حرکات سے باز رہے جن سے خواتین کے وقار کو ٹھیس پہنچتی ہو۔

(و) ملک کی ملی جلی ثقافت کی قدر کرے اور اُسے برقرار رکھے۔

(ز) قدرتی ماحول کو جس میں جنگلات، جھیلیں، دریا اور جنگلی جانور شامل ہیں محفوظ رکھے اور بہتر بنائے اور جانداروں کے تیئں محبت وشفقت کا جذبہ رکھے۔

(ح) دانشورانہ رویے سے کام لے کر انسان دوستی اور تحقیقی واصلاحی شعور کو فروغ دے۔

(ط) قومی جائداد کا تحفظ کرے اور تشدد سے گریز کرے۔

(ی) تمام انفرادی اور اجتماعی شعبوں کی بہتر کارکردگی کے لیے کوشاں رہے تاکہ قوم متواتر ترقی وکامیابی کی منازل طے کرنے میں سرگرمِ عمل رہے۔

(ک) اگر ماں باپ یا ولی ہے، چھے سال سے چودہ سال تک کی عمر کے اپنے بچے یا وارڈ، جیسی بھی صورت ہو، کے لیے تعلیم کے مواقع فراہم کرے۔

سرکاری فیصلہ نمبر : ابھیاس-۲۱۱۶/(پر۔نمبر۱۶/۴۳)ایس ڈی-۴ مؤرّخہ ۲۵/اپریل ۲۰۱۶ء کے مطابق قائم کردہ
رابطہ کارکمیٹی کی ۲۹/دسمبر ۲۰۱۷ء کو منعقدہ نشست میں اس کتاب کو تعلیمی سال ۱۹-۲۰۱۸ء سے درسی کتاب کے طور پر منظوری دی گئی۔

ریاضی

حصّہ – I

دسویں جماعت

مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی و ابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ۔

اپنے اسمارٹ فون میں انسٹال کردہ Diksha App کے ذریعے درسی کتاب کے پہلے صفحے پر درج Q.R. code اسکین کرنے سے ڈیجیٹل درسی کتاب اور ہرسبق میں درج Q.R. code کے ذریعے متعلقہ سبق کی درس و تدریس کے لیے مفید سمعی و بصری ذرائع دستیاب ہوں گے۔

N6LAWH

پہلا ایڈیشن : 2018
چوتھا اصلاح شدہ ایڈیشن : ۲۰۲۲ء
(2022)

© مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ ۴۱۱۰۰۴۔
اس کتاب کے جملہ حقوق مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ کے حق میں محفوظ ہیں۔اس کتاب کا کوئی بھی حصہ ڈائرکٹر، مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی وابھیاس کرم سنشودھن منڈل کی تحریری اجازت کے بغیر شائع نہیں کیا جاسکتا۔

مضمون ریاضی کمیٹی

- ڈاکٹر منگلا نارلیکر (صدر)
- ڈاکٹر جے شری اَترے (رکن)
- شری وِنایک گوڈبولے (رکن)
- شریمتی پراجکتی گوکھلے (رکن)
- شری رما کانت سرودے (رکن)
- شری سندیپ پنچ بھائی (رکن)
- شریمتی پوجا جادھو (رکن)
- شریمتی اُجولا گوڈبولے (رکن-سکریٹری)

مضمون ریاضی کی مجلسِ عاملہ

- شریمتی جے شری پرندرے
- شری راجندر چودھری
- شری راما وَنیالکر
- شری آنّا پا پریٹ
- جناب انصار شیخ
- شری شریپاد دیشپانڈے
- شری سریش داتے
- شری اُمیش ریلے
- شری بنسی ہاولے
- شریمتی روہینی شرکے
- شری پرکاش جھینڈے
- شری لکشمن داون کر
- شری شریکانت رتن پارکھی
- شری سنیل شری واستو
- جناب انصاری عبدالحمید عبدالمجید
- شریمتی سورنا دیشپانڈے
- شریمتی تروبین پوپٹ
- شری پرمود ٹھومبرے
- ڈاکٹر بھارتی سہستر بدھے
- شری وسنت شیوالے
- شری پرتاپ کاشد
- شری ملند بھاکرے
- شری گیانیشور ماشالکر
- شری گنیش کولتے
- شری سندیش سوناونے
- شری سدھیر پاٹل
- شری پرکاش کاپسے
- شری رَویندر کھندارے
- شریمتی سواتی دھرمادھیکاری
- شری اَروند کمار تیواری
- شری ملیشام بیتھی
- شریمتی آریا بِھڑے

Urdu Translators
Mr. Ansari Abdul Hameed Abdul Majeed
Mr. Ansari Badrudduja Shamsudduha
Mr. Momin Al-Nasir Abdus Samad

Co-ordinator (Urdu)
Khan Navedul Haque Inamul Haque,
Special Officer for Urdu,
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati

Co-ordinator (Marathi)
Smt. Ujwala S. Godbole
I/C Special Officer for Mathematics,
M.S. Bureau of Textbooks, Balbharati

Urdu D.T.P. & Layout
Asif Nisar Sayyed
Yusra Graphics,
305, Somwar Peth, Pune-11.

Cover & Computer Illustrations
Shri Sandeep Koli, Mumbai

Production
Shri. Sachin Mehta
Chief Production Officer

Shri Sanjay Kamble
Production Officer

Shri Prashant Harne
Asst. Production Officer

Paper :
70 GSM Creamvowe
Print Order :
Printer :

Publisher
Shri Vivek Uttam Gosavi
Controller,
M.S. Bureau of Textbook Production,
Prabhadevi, Mumbai - 25.

بھارت کا آئین

تمہید

ہم بھارت کے عوام متانت وسنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بھارت کو
ایک مقتدر سماج وادی غیر مذہبی عوامی جمہوریہ بنائیں
اوراس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں:

انصاف، سماجی، معاشی اور سیاسی؛

آزادی خیال، اظہار، عقیدہ، دین اور عبادت؛

مساوات بہ اعتبارِ حیثیت اور موقع،

اوران سب میں

اُخوّت کو ترقی دیں جس سے فرد کی عظمت اور قوم کے اتّحاد اور
سالمیت کا تیقّن ہو؛

اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھبیس نومبر ۱۹۴۹ء کو یہ آئین
ذریعۂ ہٰذا اختیار کرتے ہیں،
وضع کرتے ہیں اور اپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔

راشٹر گیت

جَن گَن مَن - اَدِھ نایک جَیَہ ہے
بھارَت - بھاگیَہ وِدَھاتا۔

پنجاب، سِندُھ، گجرات، مَراٹھا،
دراوِڑ، اُتکَل، بَنگ،

وِندھیہ، ہماچَل، یَمُنا، گنگا،
اُچّھل جَل دِھ تَرَنگ،

تَو شُبھ نامے جاگے، تَو شُبھ آ شِس ماگے،
گاہے تَو جَیَہ گاتھا،

جَن گَن منگل دایَک جَیَہ ہے،
بھارَت - بھاگیَہ وِدھاتا۔

جَیَہ ہے، جَیَہ ہے، جَیَہ ہے،
جَیَہ جَیَہ جَیَہ، جَیَہ ہے۔

عہد

بھارت میرا ملک ہے۔سب بھارتی میرے بھائی اور بہنیں ہیں۔

مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور مَیں اس کے عظیم و گونا گوں وِرثے پر فخر محسوس کرتا ہوں۔مَیں ہمیشہ اِس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کروں گا۔

میں اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزّت کروں گا اور ہر ایک سے خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا۔

میں اپنے ملک اور اپنے لوگوں کے لیے خود کو وقف کرنے کی قسم کھاتا ہوں۔ اُن کی بہتری اور خوش حالی ہی میں میری خوشی ہے۔

پیش لفظ

عزیز طلبہ!

دسویں جماعت میں آپ کا استقبال ہے!

ریاضی حصہ I اور ریاضی حصہ II کی درسی کتابوں کا آپ اس سال مطالعہ کریں گے۔

ریاضی حصہ I میں الجبرا، ترسیم، معاشی منصوبہ بندی اور شماریات جیسے اہم حصے شامل ہیں۔ نویں جماعت تک متعارف کرائے گئے موضوعات کا آپ کو مزید مطالعہ کرنا ہے۔ معاشی منصوبہ بندی میں ایک نئے ٹیکس نظام GST سے آپ کو متعارف کرایا گیا ہے۔ نئے باب میں جہاں ضابطے یا اطلاق ہیں وہاں آسان وضاحتیں اور تشریح کی گئی ہیں۔ ہر باب میں نمونے کی مثالیں تشریح کے ساتھ حل کی گئی ہیں۔ مشق و اعادہ کی مثالیں دی ہوئی ہیں۔ اس کے علاوہ ذہین طلبہ کے لیے بعض فکر انگیز سوالات تارے کے نشان سے نمایاں کیے گئے ہیں۔ عام طلبہ کو دسویں کے بعد ریاضی کا مطالعہ نہیں کرنا ہو تب بھی انھیں بنیادی ریاضیاتی تصورات سمجھنا چاہیے تا کہ وہ دیگر شعبوں میں کام کے دوران ضرورت کے مطابق ریاضی کا استعمال کر سکیں، انھیں اتنا علم اس کتاب کے ذریعے مل جائے گا۔ 'مزید معلومات کے لیے' عنوان کے تحت دیا ہوا مواد دسویں کے بعد بھی ریاضی کے مطالعے کے خواہش مند طلبہ کو مہارت حاصل کرنے میں فائدہ مند ثابت ہوگا۔ لہٰذا ایسے طلبہ کو اس کا مطالعہ ضرور کرنا چاہیے۔ پوری کتاب کم از کم ایک مرتبہ ضرور پڑھ کر سمجھنے کی کوشش کریں۔

دسویں کا امتحان اہمیت کا حامل مانا جاتا ہے۔ اس امتحان کا تناؤ لیے بغیر اچھا مطالعہ کر کے من چاہی کامیابی حاصل کرنے کے لیے طلبہ کو نیک خواہشات!

(ڈاکٹر سنیل مگر)
ڈائرکٹر
مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی و
ابھیاس کرم سنشودھن منڈل، پونہ

پونہ۔
تاریخ: ۱۸/ مارچ ۲۰۱۸ء، گُڈی پاڑوا
بھارتیہ سَور: ۲۷/ پھالگن ۱۹۳۹

دسویں جماعت – ریاضی حصہ I – نصاب تعلیم میں ذیل کی صلاحیتیں طلبہ میں فروغ پائیں گی۔

زمرہ	اکائی	صلاحیت کے بیان
1. اعداد کا علم	1.1 حسابی تصاعد	• حسابی تصاعد کا استعمال کر کے مثالیں حل کرنا۔ • مستقبل میں کسی امر کو حاصل کرنے کے لیے مرحلہ وار منصوبہ بنانا۔
2. الجبرا	2.1 مربعی مساواتیں 2.2 دو متغیری خطی مساواتیں	• کاروبار میں جو مسائل مربعی مساوات کی صورت میں ظاہر کر کے ان کا حل معلوم کرنا۔ • عبارتی مثالوں کا حل معلوم کرنے کے لیے کتنے متغیرات کا استعمال کرنا ہوگا، اس بات کا فیصلہ کرنا۔ • عبارتی مثالوں کی تحویل دو متغیروں میں مساوات بنا کر حل معلوم کرنا۔
3. کاروباری ریاضی	3.1 کاروباری ریاضی	• بچت اور سرمایہ کاری جیسے اُمور کا ادراک کرنا۔ • صنعت و حرفت اور پیشوں میں مالی لین دین کا زبانی تعارف حاصل کرنا۔
4. شماریات اور احتمال	4.1 احتمال 4.2 ترسیم اور مرکزی رجحان کے پیمانے	• کھیل، رائے دہی وغیرہ شعبوں میں احتمال کا استعمال کرنا۔ • خاص قسم کی معلومات اکٹھا کرنے کے بعد اسے ترسیم میں تحویل کرنا / تصویری ترسیم میں دوسری صورت اختیار کر کے خاص ترسیمات کا انتخاب کرنا۔ • جماعت بند معطیات دی ہوئی ہوں تو میانیہ، وسطانیہ، کثیریہ معلوم کرنا۔

اساتذہ کے لیے ہدایت

پہلے کتاب کا گہرا مطالعہ کر کے اسے سمجھ لیں۔ مختلف موضوعات کی وضاحت، تشریح اور ضابطوں کی تصدیق کرنے جیسی اہم باتوں کے لیے عملی کاموں کی مدد لیں۔

تجربات کے ذریعے قدر پیمائی کریں۔ اس کے لیے ان عملی کاموں کا استعمال کر سکتے ہیں۔ آزادانہ طور پر غور وفکر کرنے پر طلبہ کی حوصلہ افزائی کریں۔ مختلف طریقوں سے لیکن منطقی طریقے سے مثالیں حل کرنے والے طلبہ کو خصوصی طور پر شاباشی دیں۔

تجربات کی فہرست کا نمونہ

.1 ترسیمی کاغذ پر X - محور یا Y - محور کے متوازی خط کھینچ کر اُس پر کوئی بھی چار نقاط کے محددین لکھیے۔ تجربہ کیجیے کہ محددین کی قیمت کی مدد سے خط کی مساوات کس طرح تیار ہوتی ہے۔

(متوازی خط کی بجائے مبدا سے گزرنے والا یا X اور Y محوروں کو قطع کرنے والا خط بھی لے سکتے ہیں۔)

.2 کوئی بھی دو ہندسی عدد سوچیے۔ اسے ظاہر کیے بغیر عدد کی شناخت کرنے کے لیے معما بنائیے۔ عدد کے ہندسوں سے دو الجبری تعلق بنائیے اور معما حل کر کے دِکھائیے۔ (یہ تجربہ تین ہندسی عدد کے لیے بھی کیا جاسکتا ہے)

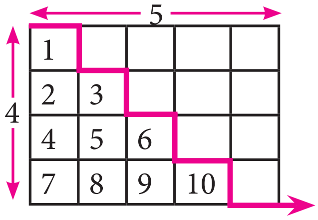
.3 کسی بھی خوردنی شے کے پیکٹ پر لکھی ہوئی معلومات پڑھیے اور اس معلومات کو ظاہر کرنے کے لیے دائروی ترسیم بنائیے۔ مثلاً فرض کیجیے بسکٹ کے پیکٹ پر پروٹین، کاربوہائیڈریٹ، حیاتین وغیرہ کی جدول دیکھیے۔ وہ کتنے وزن کے لیے دیا ہوا ہے۔ اس کی مدد سے اوزان کا پائے چارٹ کی تقسیم دِکھانے والی دائروی ترسیم بنائیے۔ مثال: کاربن، خوشبو، پروٹین اور دیگر اجزا بتانے والے چار حصے کیے جاسکتے ہیں۔

.4 دیے ہوئے تعددی تقسیمی جدول کو Excel Sheet میں تیار کیجیے۔ اس جدول کی مدد سے تعددی کثیر ضلعی اور ستونی ترسیم Excel میں بنائیے۔

.5 ایک پانسہ دس مرتبہ پھینک کر حاصل ہونے والے آموزشی ماحصل درج کیجیے اور اس کی جدول تیار کیجیے۔

.6 کاروبار میں GST ادا کیے ہوئے ٹیکس اِنوائس دیکھیے۔ اس میں تمام امور کا اندراج کیجیے۔ اس میں ٹیکس کی تحسیب کو دوبارہ محسوب کر کے دِکھائیے اور تمام حساب صحیح ہونے کا اطمینان کیجیے۔

.7 دیے ہوئے 5، 6 یا 7 متواتر طبعی اعداد کی جمع کرنے کے لیے عملی کام کر کے دیکھیے۔ مثال: فرض کیجیے 1 سے 4 تک طبعی اعداد کی جمع کیجیے۔ اس کے لیے 5 × 4 چوکون والا ایک کاغذ لیجیے اور شکل میں دِکھائے ہوئے طریقے کے مطابق کاٹ لیجیے۔ (یہاں $n = 4$) اس کی مدد سے، $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ اس ضابطے کی تصدیق کیجیے۔



$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \therefore \quad S_4 = \frac{4\ (4+1)}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

(نوٹ: یہاں $a = 1$ اور $d = 1$ ہے۔ زیادہ اعداد لے کر a اور d اعداد کو بدل کر، اسی طرح، جفت، طاق اعداد کے لیے، مکعبوں کی جمع کے لیے ایسے عملی کام کیے جاسکتے ہیں)

.8 ایک کارڈ پر سامنے کی جانب $\alpha = 6$ اور پشت کی جانب $\alpha = -6$ لکھیے۔ اسی طرح دوسرے کارڈ پر $\beta = -3$ اور $\beta = 7$ لکھیے۔ اس کی مدد سے $(\alpha + \beta)$ اور $(\alpha\beta)$ کی مختلف قیمتیں تیار ہوتی ہیں۔ ان قیمتوں کو استعمال کر کے مربعی مساوات بنائیے۔

فہرست

ابواب		صفحات
1.	دو متغیری خطی مساواتیں	1 تا 29
2.	مربعی مساواتیں	30 تا 54
3.	حسابی تصاعد	55 تا 80
4.	معاشی منصوبہ بندی	81 تا 112
5.	احتمال	113 تا 128
6.	شماریات	129 تا 168
•	جوابات کی فہرست	169 تا 176

1 دو متغیری خطی مساواتیں (Equations in two variables)

آئیے، سیکھیں۔

- دو متغیری خطی مساواتیں حل کرنے کا طریقہ - ترسیمی طریقہ، کرامر کا طریقہ
- دو متغیری خطی مساوات میں تحویل کرنے کے قابل مساوات
- ہمزاد مساواتوں کا اطلاق

آئیے، ذرا یاد کریں

دو متغیری خطی مساواتیں (Linear equations in two variables)

جس مساوات میں دو متغیروں کا استعمال ہوتا ہے اور ہر متغیر کا درجہ 1 ہوتا ہے اس مساوات کو دو متغیری خط مساوات کہتے ہیں۔ اس کا ہم سابقہ جماعتوں میں مطالعہ کر چکے ہیں۔

مساوات $ax + by + c = 0$ دو متغیری خطی مساوات کی عام صورت ہے۔ یہاں a، b، c حقیقی اعداد ہیں۔ a اور b بیک وقت صفر نہیں ہوتے۔ یہ آپ جانتے ہیں۔

مثال : مساوات $3x = 4y - 12$ کی عام صورت $3x - 4y + 12 = 0$ ہے۔

عملی کام : مندرجہ ذیل جدول مکمل کیجیے۔

نمبر شمار	مساوات	دو متغیری خطی مساوات ہے یا نہیں؟
1	$4m + 3n = 12$	ہے
2	$3x^2 - 7y = 13$	
3	$\sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 16$	
4	$0x + 6y - 3 = 0$	
5	$0.3x + 0y - 36 = 0$	
6	$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 4$	
7	$4xy - 5y - 8 = 0$	

ہمزاد خطی مساواتیں (Simultaneous linear equations)

جب دو متغیروں کی دو خطی مساواتوں کا بیک وقت خیال کرکے ان کا مشترک حل حاصل ہوتا ہے تب ان مساواتوں کو ہمزاد مساواتیں (Simultaneous equations) کہتے ہیں۔

گزشتہ جماعت میں ایک متغیر کا اخراج کرکے ہمزاد مساوات حل کرنے کے طریقے کا مطالعہ ہم کرچکے ہیں۔ آیئے، اس کا کچھ اعادہ کرتے ہیں۔

مثال (1) : درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

$$5x - 3y = 8 \quad ; \quad 3x + y = 2$$

حل :

پہلا طریقہ :

$5x - 3y = 8 \quad . \; . \quad \text{(I)}$

$3x + y = 2 \quad . \; . \quad \text{(II)}$

مساوات (II) کے طرفین کو 3 سے ضرب کریں گے۔

$9x + 3y = 6 \quad . \; . \; . \quad \text{(III)}$

$5x - 3y = 8 \quad . \; . \; . \quad \text{(I)}$

اب مساوات (I) اور (III) کی جمع کریں گے۔

$$\begin{array}{r} 5x - 3y = 8 \\ +\; 9x + 3y = 6 \\ \hline 14x = 14 \end{array}$$

$\therefore \; x = 1$

$x = 1$، مساوات (II) میں رکھیں گے۔

$3x + y = 2$

$\therefore 3 \times 1 + y = 2$

$\therefore 3 + y = 2$

$\therefore \; y = -1$

$x = 1$، $y = -1$ یہ حل ہے۔

اس حل کو اس صورت میں لکھتے ہیں۔

$(x, \; y) = (1, -1)$

دوسرا طریقہ :

$5x - 3y = 8 \quad . \; . \; . \quad \text{(I)}$

$3x + y = 2 \quad . \; . \; . \quad \text{(II)}$

مساوات (II) میں متغیر y کی قیمت متغیر x کی صورت میں لکھیں گے۔

$y = 2 - 3x \quad . \; . \; . \quad \text{(III)}$

اب y کی یہ قیمت مساوات (I) میں رکھیں گے۔

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 8 \\ \therefore \; 5x - 3(2 - 3x) &= 8 \\ \therefore \; 5x - 6 + 9x &= 8 \\ \therefore \; 14x - 6 &= 8 \\ \therefore \; 14x &= 8 + 6 \\ \therefore \; 14x &= 14 \\ \therefore \; x &= 1 \end{aligned}$$

$x = 1$ یہ قیمت مساوات (III) میں رکھیں گے۔

$y = 2 - 3x$

$\therefore y = 2 - 3 \times 1$

$\therefore y = 2 - 3$

$\therefore y = -1$

$x = 1$ ، $y = -1$ مساوات کا حل ہے۔

یعنی

$(x, \; y) = (1, -1)$

مثال (2) حل کیجیے : $3x + 2y = 29 ; \quad 5x - y = 18$

حل : $3x + 2y = 29 \quad . . . \quad (I) \quad , \quad 5x - y = 18 \quad . . . \quad (II)$

دی ہوئی مساواتوں میں y متغیر کا اخراج کرکے حل کریں گے۔ اس کے لیے مندرجہ ذیل خانوں میں مناسب اعداد لکھیے۔

مساوات (II) کو 2 سے ضرب دے کر،

$\therefore \quad 5x \times \square - y \times \square = 18 \times \square$

$\therefore \quad 10x - 2y = \square \quad . . . \quad (III)$

مساوات (I) میں مساوات (III) جمع کرنے پر

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 29 \\ + \quad \square - \square = \square \\ \hline \square = \square \end{array} \quad , \quad \therefore \quad x = \square$$

$x = 5$ مساوات (I) میں رکھنے پر

$3x + 2y = 29$

$\therefore \quad 3 \times \square + 2y = 29$

$\therefore \quad \square + 2y = 29$

$\therefore \quad 2y = 29 - \square$

$\therefore \quad 2y = \square \quad , \quad \therefore \quad y = \square$

$(x, y) = (\square , \square)$ ... (یہ مساواتوں کا حل ہے)

مثال (3) $15x + 17y = 21 ; \quad 17x + 15y = 11$

حل :

$15x + 17y = 21 \quad . . . (I)$

$17x + 15y = 11 \quad . . . (II)$

ان دونوں مساواتوں میں x اور y کے ضریب ایک دوسرے سے ادل بدل گئے ہیں۔ اس قسم کی ہمزاد مساواتیں حل کرنے کے لیے ان مساواتوں کی ایک بار جمع کرکے اور دوسری بار تفریق کرکے دونئی آسان ہمزاد مساواتیں حاصل کرتے ہیں۔ ان مساواتوں کا حل آسانی سے حاصل ہوجاتا ہے۔

مساوات (I) اور مساوات (II) کی جمع کرنے پر،

$$\begin{array}{r} 15x + 17y = 21 \\ + \quad 17x + 15y = 11 \\ \hline 32x + 32y = 32 \end{array}$$

مساوات میں طرفین کو 32 سے تقسیم کرنے پر،

$$x + y = 1 \quad . . . \quad (III)$$

مساوات (I) میں سے مساوات (II) تفریق کرنے پر،

$$\begin{array}{rrcl} & 15x + 17y & = & 21 \\ - & 17x + 15y & = & 11 \\ \hline & -2x + 2y & = & 10 \end{array}$$

مساوات کے طرفین کو 2 سے تقسیم کرنے پر،

$$-x + y = 5 \quad . . . \quad (IV)$$

مساوات (III) اور (IV) کی جمع کرنے پر،

$$\begin{array}{rrcl} & x + y & = & 1 \\ + & -x + y & = & 5 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore\ 2y = 6 \quad , \quad \therefore\ y = 3$

$y = 3$ مساوات (III) میں رکھنے پر،

$$x + y = 1$$
$$\therefore\ x + 3 = 1$$
$\therefore\ x = 1 - 3 \quad , \quad \therefore\ x = -2$

(مساواتوں کا حل) ... $(x, y) = (-2, 3)$ ہے

مشقی سیٹ 1.1

.1 درج ذیل عملی کام پورا کرتے ہوئے ہمزاد مساوات حل کیجیے۔

$5x + 3y = 9 \quad . . . \quad (I)$

$2x - 3y = 12 \quad . . . \quad (II)$

مساوات (I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$$\begin{array}{rrcl} & 5x + 3y & = & 9 \\ + & 2x - 3y & = & 12 \\ \hline & \square\, x & = & \square \end{array}$$

$x = \dfrac{\square}{\square} \quad , \quad \therefore\ x = \square$

$x = 3$ مساوات (I) میں رکھنے پر،

$5 \times \square + 3y = 9$

$3y = 9 - \square$

$3y = \square$

$y = \dfrac{\square}{3}$

$y = \square$

(مساواتوں کا حل) ... $\therefore\ (x, y) = (\square, \square)$

2. درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(1) $3a + 5b = 26;\ a + 5b = 22$ (2) $x + 7y = 10;\ 3x - 2y = 7$

(3) $2x - 3y = 9;\ 2x + y = 13$ (4) $5m - 3n = 19;\ m - 6n = -7$

(5) $5x + 2y = -3;\ x + 5y = 4$ (6) $\frac{1}{3}x + y = \frac{10}{3};\ 2x + \frac{1}{4}y = \frac{11}{4}$

(7) $99x + 101y = 499;\ 101x + 99y = 501$

(8) $49x - 57y = 172;\ 57x - 49y = 252$

آئیے، ذرا یاد کریں۔

دو متغیری خطی مساوات کی ترسیم (Graph of a linear equation in two variables)

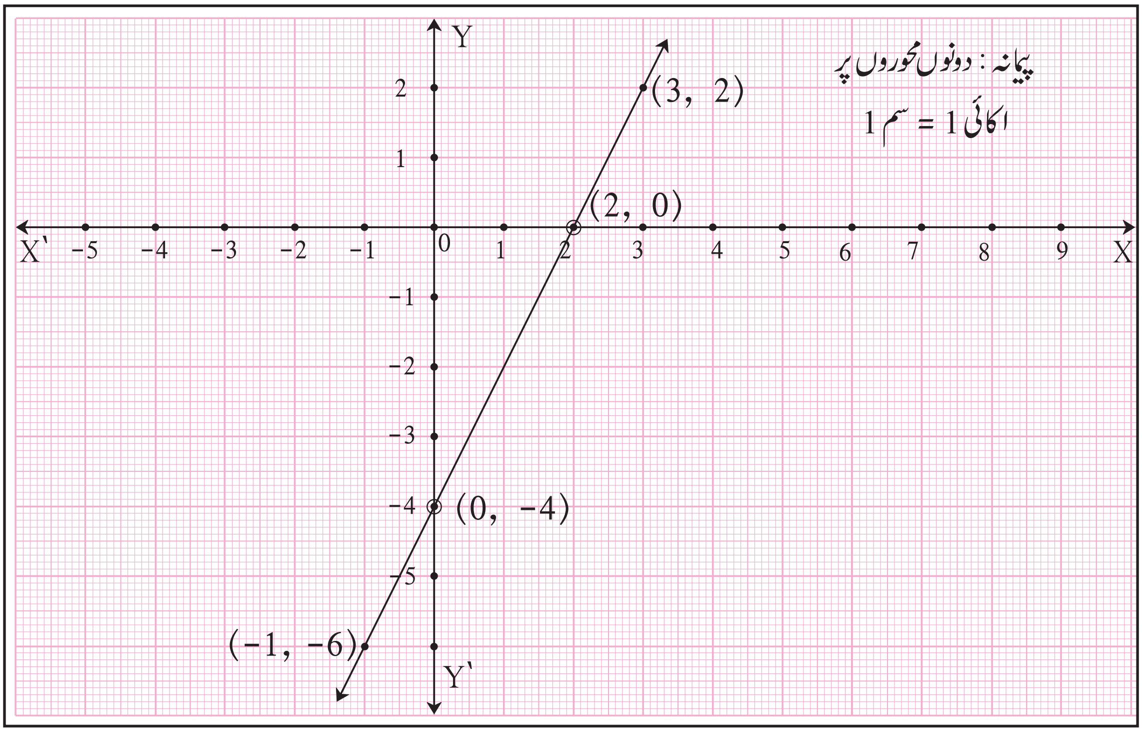
گزشتہ جماعت میں ہم مطالعہ کر چکے ہیں کہ دو متغیری خطی مساوات کی ترسیم ایک خط ہوتی ہے۔ جو مرتب جوڑی دی ہوئی مساواتوں کو مطمئن کرتی ہے وہ مرتب جوڑی ان مساواتوں کا حل ہوتی ہے۔ اسی طرح وہ مرتب جوڑی اس مساوات کی ترسیم پر ایک نقطے کو ظاہر کرتی ہے۔

مثال: مساوات $2x - y = 4$ کی ترسیم ۔

حل: مساوات $2x - y = 4$ کی ترسیم کھینچنے کے لیے $(x,\ y)$ مرتب جوڑی کی چار مرتب جوڑیاں حاصل کریں گے۔

مرتب جوڑیاں حاصل ہونے کے بعد جدول میں دِکھائے ہوئے کے مطابق لکھتے ہیں۔ x اور y کی قیمت صفر بھی لینا سہولت بخش ہوتا ہے۔

x	0	2	3	-1
y	-4	0	2	-6
$(x,\ y)$	$(0,\ -4)$	$(2,\ 0)$	$(3,\ 2)$	$(-1,\ -6)$



دو متغیری خطی مساوات کی ترسیم کھینچنے کے لیے درج ذیل مرحلوں کو بغور دیکھیے۔

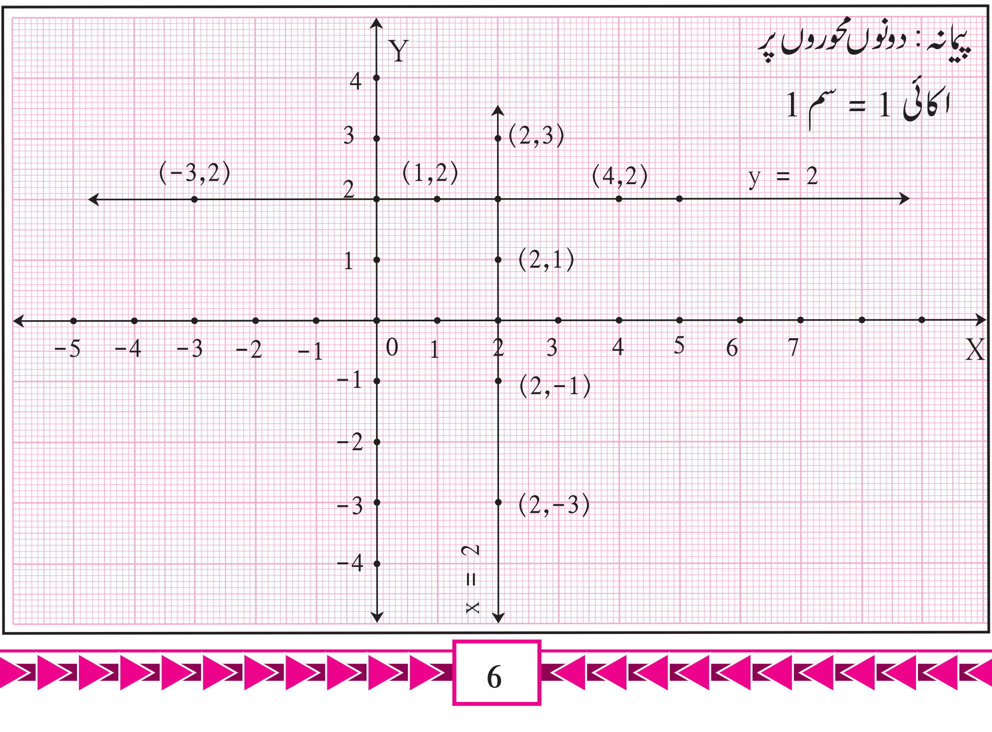
> دی ہوئی مساوات کی کم از کم 4 مرتب جوڑیاں (نقاط کے محددین) معلوم کیجیے۔
>
> ↓
>
> ترسیمی کاغذ پر X - محور اور Y - محور متعین کر کے نقاط مرتسم کیجیے۔
>
> ↓
>
> تمام نقاط ایک ہی خط میں آئیں گے۔ ان نقاط سے گزرتا ہوا خط کھینچیے۔

> خط متعین ہونے کے لیے صرف دو ہی نقاط کافی ہیں لیکن اگر ان میں سے ایک بھی نقطہ کے محددین معلوم کرنے میں غلطی ہوگئی تو اُس خط کی ترسیم غلط ہو جائے گی۔
>
> تین نقاط کے محددین معلوم کرنے میں اگر ایک نقطہ کے محددین معلوم کرنے میں غلطی ہو جائے تو تینوں نقاط ایک ہی خط پر نہیں ہوں گے۔ ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ ان میں سے کسی ایک نقطے کے محددین معلوم کرنے میں غلطی ہوئی ہے لیکن صحیح معنوں میں کون سے نقطہ کے محددین غلط ہیں اسے معلوم کرنے میں کافی وقت لگے گا۔
>
> چار نقاط کے محددین معلوم کرنے میں اگر ایک نقطے کے محددین معلوم کرنے میں غلطی ہو تو باقی تین نقطے ہم خطی ہوتے ہیں اس لیے غلطی فوراً سمجھ میں آجاتی ہے۔ اس لیے چار نقاط کے محددین معلوم کرنا فائدہ مند ہے۔

مساوات $0x + y = 2$ کو سہولت کے لیے $y = 2$ لکھتے ہیں۔ اس مساوات کی ترسیم X - محور کے متوازی ہوتی ہے کیونکہ x محدد کے لیے کوئی بھی عدد لیں تو ہر نقطے کا y محدد 2 ہی آتا ہے۔

x	1	4	-3
y	2	2	2
(x, y)	(1, 2)	(4, 2)	(−3, 2)

اسی طرح مساوات $x + 0y = 2$ کو $x = 2$ لکھتے ہیں اور اس خط کی ترسیم Y - محور کے متوازی ہوتی ہے۔



آئیے، سمجھ لیں۔

ہمزاد خطی مساواتیں حل کرنے کے لیے ترسیمی طریقہ (Solution of simultaneous equations by graphical method)

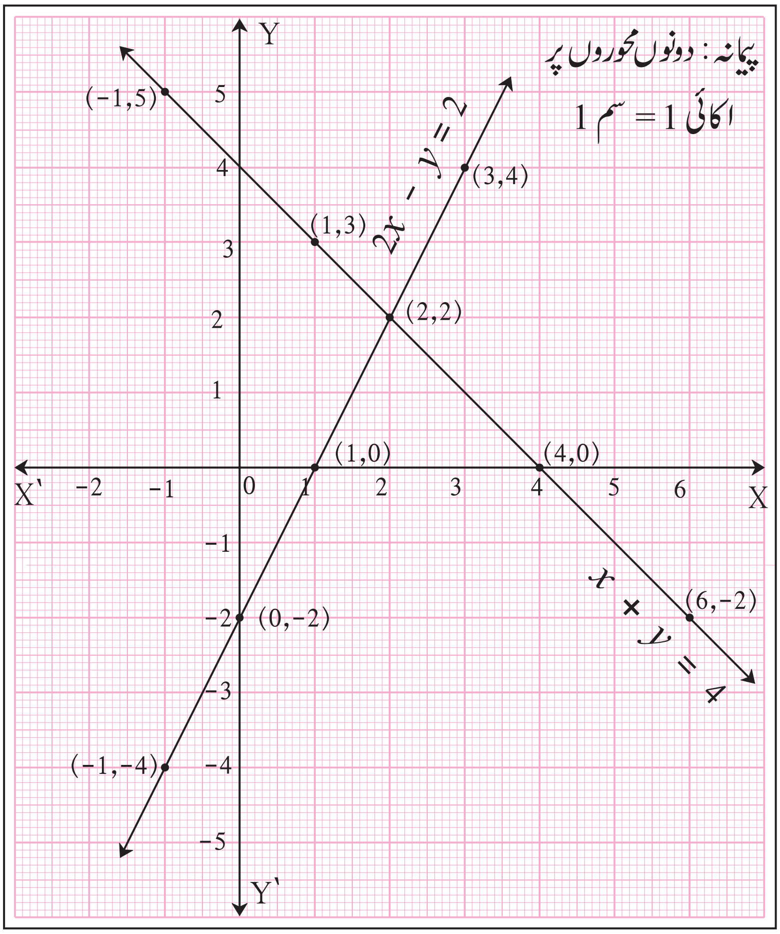
مثال : $x + y = 4$ اور $2x - y = 2$ ان مساواتوں کی ترسیمات کھینچ کر اس کا مشاہدہ کریں گے۔

$2x - y = 2$

x	0	1	3	−1
y	−2	0	4	−4
(x, y)	(0, −2)	(1, 0)	(3, 4)	(−1, −4)

$x + y = 4$

x	−1	4	1	6
y	5	0	3	−2
(x, y)	(−1, 5)	(4, 0)	(1, 3)	(6, −2)



ترسیم پر واقع ہر نقطہ اس ترسیم کی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔ دونوں خطوط ایک دوسرے کو نقطہ (2, 2) پر قطع کرتے ہیں۔

اس لیے (2, 2) مرتب جوڑی یعنی $x = 2$ اور $y = 2$ قیمتیں $x + y = 4$ اور $2x - y = 2$ ان دونوں مساواتوں کو مطمئن کرتی ہیں۔

متغیر کی جن قیمتوں کے لیے دی ہوئی ہمزاد مساواتیں مطمئن ہوتی ہیں وہ قیمتیں ان مساواتوں کا حل ہوتی ہیں۔

$2x - y = 2$ اور $x + y = 4$ ان ہمزاد مساواتوں کا حل $x = 2$ اور $y = 2$ ہے۔

آئیے، ان مساواتوں کو اخراج کے طریقے سے حل کر کے حل کی تصدیق کرتے ہیں۔

$x + y = 4 \quad \ldots \text{(I)}$

$2x - y = 2 \quad \ldots \text{(II)}$

مساوات (I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$3x = 6, \quad \therefore \quad x = 2$

مساوات (I) میں $x = 2$ رکھنے پر،

$x + y = 4$

$\therefore \quad 2 + y = 4$

$\therefore \quad y = 2$

عملی کام I : $x - y = 1$; $5x - 3y = 1$ اِن ہمزاد مساواتوں کا حل ترسیمی طریقے سے معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی جدول مکمل کرکے محددین معلوم کیجیے۔

$x - y = 1$

x	0		3	
y		0		-3
(x, y)				

$5x - 3y = 1$

x	2			-4
y		8	-2	
(x, y)				

- ایک ہی پیمانہ کا استعمال کرتے ہوئے ایک ہی ترسیمی کاغذ پر مندرجہ بالا نقاط مرتسم کیجیے۔
- مساواتوں کی ترسیمات کھینچیے۔
- خطوط کے نقطہ تقاطع کے محددین پڑھیے۔اس کی مدد سے ہمزاد مساواتوں کا حل لکھیے۔

عملی کام II : مندرجہ بالا ہمزاد مساواتوں کو اخراج کے طریقے سے حل کیجیے اور ترسیم سے حاصل ہونے والے حل کی تصدیق کیجیے۔

آئیے، غور کریں۔

$5x - 3y = 1$ کی ترسیم کھینچنے کے لیے درج ذیل جدول میں کچھ محددین معلوم کرکے لکھے ہوئے ہیں۔ان کا مشاہدہ کیجیے۔

x	0	$\frac{1}{5}$	1	-2
y	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{11}{3}$
(x, y)	$\left(0, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, 0\right)$	$\left(1, \frac{4}{3}\right)$	$\left(-2, -\frac{11}{3}\right)$

- کیا نقطہ مرتسم کرنے کے لیے محددین سہولت بخش ہیں؟
- محددین معلوم کرنے کے لیے کس بات کا دھیان رکھیں کہ نقطہ مرتسم کرنا آسان ہوجائے؟

مشقی سیٹ 1.2

.1 درج ذیل ہمزاد مساواتیں ترسیمی طریقے سے حل کرنے کے لیے جدول مکمل کیجیے۔

$x + y = 3$; $x - y = 4$

$x + y = 3$

x	3		
y		5	3
(x, y)	(3, 0)		(0, 3)

$x - y = 4$

x		-1	0
y	0		-4
(x, y)			(0, -4)

.2 درج ذیل ہمزاد مساواتیں ترسیمی طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $x + y = 6$; $x - y = 4$

(2) $x + y = 5$; $x - y = 3$

(3) $x + y = 0$; $2x - y = 9$

(4) $3x - y = 2$; $2x - y = 3$

(5) $3x - 4y = -7$; $5x - 2y = 0$

(6)★ $2x - 3y = 4$; $3y - x = 4$

آیئے، بحث کریں۔

$x + 2y = 4$; $3x + 6y = 12$ ہمزاد مساواتیں دی ہوئی ہیں۔ انھیں ترسیمی طریقے سے حل کرنے کے لیے متعین کی گئی مرتب جوڑیاں درج ذیل ہیں۔

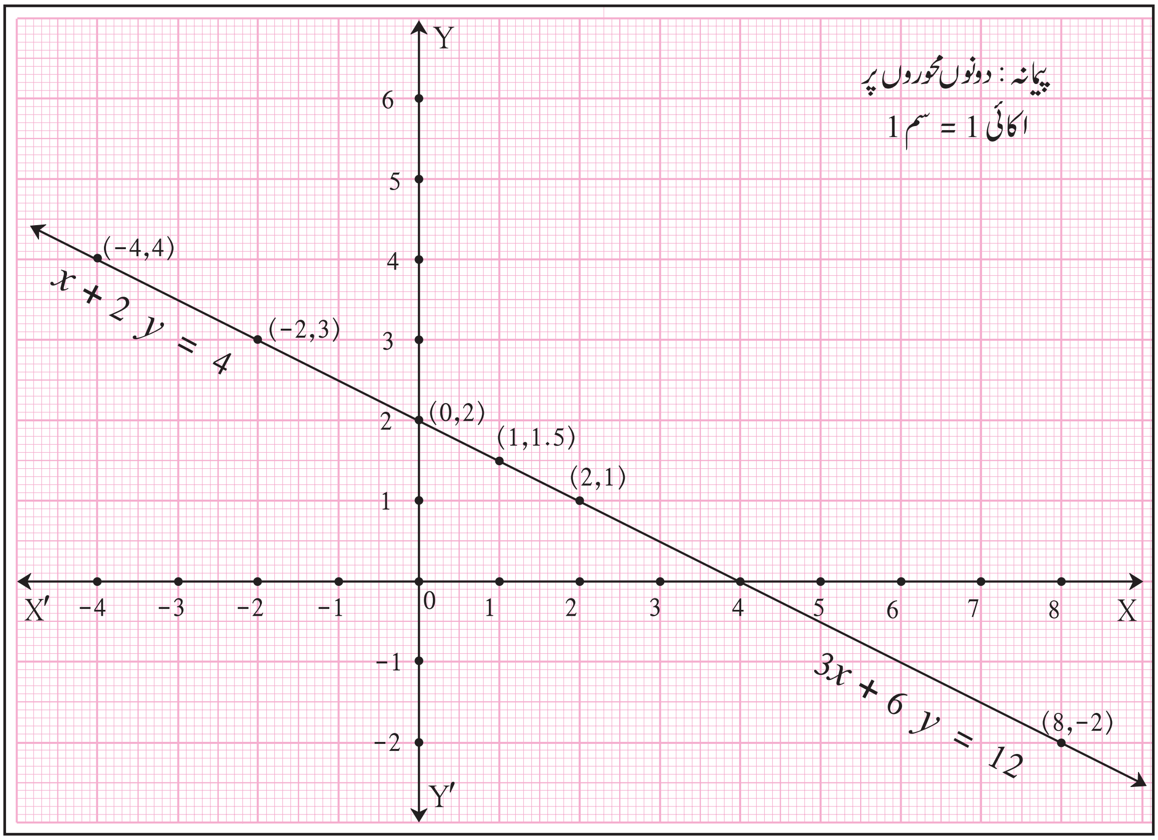
$x + 2y = 4$

x	-2	0	2
y	3	2	1
(x, y)	$(-2, 3)$	$(0, 2)$	$(2, 1)$

$3x + 6y = 12$

x	-4	1	8
y	4	1.5	-2
(x, y)	$(-4, 4)$	$(1, 1.5)$	$(8, -2)$

ان مرتب جوڑیوں کو مرتسم کرکے کھینچی ہوئی ترسیم ذیل میں دی ہوئی ہے۔ اس کا مشاہدہ کرکے اس پر مبنی سوالوں پر بحث کیجیے۔



(1) مندرجہ بالا دونوں مساواتوں کی ترسیم ایک ہی ہے یا مختلف ہے؟

(2) $x + 2y = 4$ اور $3x + 6y = 12$ ہمزاد مساواتوں کے حل کون سے ہیں؟ اور یہ کتنے ہیں؟

(3) مندرجہ بالا مساواتوں میں x کے ضریب، y کے ضریب اور مستقل عدد میں کیا تعلق دکھائی دیتا ہے؟

(4) اگر دو متغیری صورت میں دو خطی مساواتیں دی ہوئی ہوں، ان مساواتوں کی ترسیم صرف ایک ہی خط کب ہوگی اور اس کی شناخت کیسے ہوگی؟

اب دوسری مثال دیکھیے۔

$x - 2y = 4$ اور $2x - 4y = 12$ کی ترسیمات درج بالا طریقے سے ایک ہی پیمانے کا استعمال کرکے ایک ہی ترسیمی کاغذ پر کھینچیے۔ ترسیم کا مشاہدہ کیجیے۔ $x - 2y = 4$ ؛ $2x - 4y = 12$ ان ہمزاد مساواتوں کے حل پر غور کیجیے۔ x اور y کے ضریب، اسی طرح مستقل رکن ان سے متعلق غور کرتے ہوئے نتیجہ اخذ کیجیے۔

ICT Tools or Links

Geogebra software کی مدد سے X - محور اور Y - محور کھینچیے۔ مختلف ہمزاد مساواتوں کی ترسیمات کھینچیے۔ ان کے حل کی جانچ کیجیے۔

آیئے، سمجھ لیں۔

مربع قالب (Determinant)

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ یہ چار ارکان کا مربع قالب ہے۔ اس میں $(a,\ b)$ ، $(c,\ d)$ اُفقی قطاریں ہیں۔ اسی طرح $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ عمودی ستون ہیں۔ اس مربع قالب کا درجہ 2 ہے کیونکہ ہر اُفقی قطار اور عمودی ستون میں 2 ارکان ہیں۔ اس مربع قالب کو ایک عدد کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ وہ عدد $ad-bc$ ہے۔

یعنی ، $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad\text{-}bc$

مربع قالب $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ کی قیمت $ad-bc$ ہے۔

مربع قالب کو ظاہر کرنے کے لیے عام طور پر انگریزی کے بڑے حروف .... $A,\ B,\ C,\ D,$ وغیرہ استعمال کرتے ہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال : درج ذیل مربع قالب کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ (2) $N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (3) $B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix}$

حل:

$$(1)\ A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (5 \times 9) - (3 \times 7) = 45 - 21 = 24$$

$$(2)\ N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = [(-8) \times (4)] - [(-3\ ) \times 2] = -32 - (-6)$$

$$= -32 + 6 = -26$$

$$(3)\ B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = [2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}] - [2 \times 9] = 18 - 18 = 0$$

آیئے، سمجھ لیں۔

مربع قالب کا طریقہ (کرامر کا اُصول) (Determinant method (Cramer's method)

دی ہوئی ہمزاد مساواتیں آسان طریقے سے کم سے کم جگہ کا استعمال کر کے مربع قالب کی مدد سے حل کر سکتے ہیں۔ اسے مربع قالب کے طریقے سے ہمزاد مساوات حل کرنا کہتے ہیں۔ یہ طریقہ گبریل کرامر نامی سوئس ریاضی داں نے معلوم کیا تھا اس لیے اسے کرامر کا طریقہ کہتے ہیں۔

اس طریقے میں دی ہوئی ہمزاد مساواتیں لکھنے کا طریقہ یہ ہے: $a_1x + b_1y = c_1$ اور $a_2x + b_2y = c_2$

فرض کیجیے،

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad . . . \text{(I)}$$

اور،

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad . . . \text{(II)}$$

یہاں a_1، b_1، c_1 اور a_2، b_2، c_2 حقیقی اعداد ہیں۔

ہم اِن ہمزاد مساواتوں کو اخراج کے طریقے سے حل کرتے ہیں۔

مساوات (I) کو b_2 سے ضرب کرنے پر،

$$a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

مساوات (II) کو b_1 سے ضرب کرنے پر،

$$a_2b_1x + b_2b_1y = c_2b_1 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

مساوات (III) سے (IV) تفریق کرنے پر،

$$\begin{array}{l} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \\ - a_2 b_1 x \pm b_2 b_1 y = - c_2 b_1 \\ \hline (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1 \end{array}$$

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \ldots (V)$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$ . . . (اسی طرح x کا اخراج کرکے) . . . (VI)

مندرجہ بالا حل میں $c_1 b_2 - c_2 b_1,\ a_1 b_2 - a_2 b_1,\ a_1 c_2 - a_2 c_1$ عبارتوں کو دھیان میں رکھنے کے لیے مختصر جگہ میں مناسب مربع قالب کی صورت میں لکھتے ہیں۔

درج ذیل مساواتوں کے ضریب اور مستقل رکن کا مشاہدہ کیجیے۔

$a_1 x + b_1 y = c_1$

اور، $a_2 x + b_2 y = c_2$

یہاں $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ یہ تین عمودی ستون حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات (V) اور (VI) میں x اور y کی قیمت مربع قالب کی مدد سے لکھتے ہیں۔

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \; ; \; y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

یہاں، $(a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0$

انھیں ذہن میں رکھنے کے لیے ذیل کے مطابق لکھتے ہیں۔

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D, \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_x, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_y$$

یعنی مختصر طور پر $x = \frac{D_x}{D}$ اور $y = \frac{D_y}{D}$

D، D_x اور D_y اِن مربع قالبوں کو لکھنے کے لیے $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ عمودی ستون کی ترتیب دھیان میں رکھیں۔

$$\left\{\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}\right.$$ ان مساواتوں سے $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ یہ تین عمودی ستون حاصل ہوتے ہیں۔

- D میں مستقل ارکان کا عمودی ستون $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ خارج کیا گیا ہے۔
- D_x کے لیے D میں x کے ضریبوں کا عمودی ستون $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ کو خارج کر کے اس کی جگہ مستقل ارکان کا عمودی ستون $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ لیا جاتا ہے۔
- D_y کے لیے D میں y کے ضریبوں کا عمودی ستون $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ خارج کر کے اس کی جگہ مستقل ارکان کا عمودی ستون $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ لیا جاتا ہے۔

اسے دھیان میں رکھیں۔

کرامر کے طریقے سے ہمزاد مساواتیں حل کرنے کا طریقہ

دی ہوئی مساواتوں کو $ax + by = c$ صورت میں لکھیے۔

↓

D، D_x اور D_y مربع قالبوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

↓

$x = \frac{D_x}{D}$ اور $y = \frac{D_y}{D}$
کی مدد سے x اور y کی قیمت معلوم کیجیے۔

گیبریل کرامر (Gabriel Cramer)

(31 جولائی 1704 تا 4 جنوری 1752) سوئس ریاضی داں جنیوا میں پیدا ہوئے۔ انھیں بچپن ہی سے ریاضی میں برتری حاصل تھی۔ 18 سال کی عمر میں انھیں ڈاکٹریٹ کی سند ملی۔ یہ جنیوا میں پروفیسر تھے۔

حل کردہ مثالیں

مثال: کرامر کے طریقے سے مندرجہ ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

$$5x + 3y = -11 \ ; \ 2x + 4y = -10$$

حل: دی ہوئی مساواتیں

$$5x + 3y = -11$$
$$2x + 4y = -10$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (2 \times 3) = 20 - 6 = 14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = (-11) \times 4 - (-10) \times 3 = -44 - (-30)$$
$$= -44 + 30 = -14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 5 \times (-10) - 2 \times (-11) = -50 - (-22)$$
$$= -50 + 22 = -28$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{14} = -1 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{14} = -2$$

اس لیے $(x, y) = (-1, -2)$ دی ہوئی ہمزاد مساواتوں کا حل ہے۔

عملی کام 1: مربع قالب کے طریقے سے دی ہوئی ہمزاد مساواتیں حل کرنے کے لیے خانہ پُری کیجیے۔

$$y + 2x - 19 = 0 \ ; \ 2x - 3y + 3 = 0$$

حل: دی ہوئی مساواتیں $ax + by = c$ صورت میں لکھتے ہیں۔

$$2x + y = 19$$
$$2x - 3y = -3$$

$$D = \begin{vmatrix} \square & \square \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \square \times (-3) - 2 \times (\square) = (\square) - (\square)$$

$$= \square - \square = \square$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & \square \\ \square & -3 \end{vmatrix} = 19 \times (\square) - (\square) \times (\square) = \square - \square$$
$$= \square$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \square & 19 \\ 2 & \square \end{vmatrix} = [(\square) \times (\square)] - [(\square) \times (\square)]$$

$$= \square - \square = \square$$

$x = \dfrac{D_x}{D}$	$y = \dfrac{D_y}{D}$
$\therefore\ x = \dfrac{\square}{\square} = \square$	$y = \dfrac{\square}{\square} = \square$

$\therefore\ (x,\ y) = (\square,\ \square)$ ... (دی ہوئی ہمزاد مساواتوں کا حل)

عملی کام 2: درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔

$3x - 2y = 3$ $2x + y = 16$

درج بالا مساواتوں کے مربع قالبوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

$D = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$ $D_x = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$ $D_y = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$

کرامر کے طریقے کی مدد سے حل حاصل ہوتا ہے۔

$x = \dfrac{\square}{\square} = \square$ $y = \dfrac{\square}{\square} = \square$

اس لیے $(x,\ y) = (\square,\ \square)$ حل ہے۔

آیئے، غور کریں۔

- اگر $D = 0$ ہو تو حل کی نوعیت کیا ہوگی؟
- اگر مشترک حل نہ ہو تو ان مساواتوں کے خطوط کی نوعیت کیا ہوگی؟

مشقی سیٹ 1.3

.1 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \square - \square \times 4 = \square - 8 = \square$

.2 ذیل کی مربع قالبوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

.3 درج ذیل ہمزاد مساواتیں کرامر کے اُصول کا استعمال کر کے حل کیجیے۔

(1) $3x - 4y = 10$; $4x + 3y = 5$ (2) $4x + 3y - 4 = 0$; $6x = 8 - 5y$

(3) $x + 2y = -1$; $2x - 3y = 12$ (4) $6x - 4y = -12$; $8x - 3y = -2$

(5) $4m + 6n = 54$; $3m + 2n = 28$ (6) $2x + 3y = 2$; $x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$

آیئے، سمجھ لیں۔

دو متغیری خطی مساواتوں کی تحویل کے قابل مساواتیں
(Equations reducible to a pair of linear equations in two variables)

عملی کام : درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

مساواتیں	متغیر کی تعداد	خطی ہے یا نہیں
$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 8$	2	نہیں
$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 0$	$\square$	$\square$
$\frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 0$	$\square$	$\square$
$\frac{14}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5$	$\square$	$\square$

غور کیجیے۔

درج بالا جدول میں کچھ مساواتیں دو متغیروں کی صورت میں دی ہوئی ہیں۔ وہ بظاہر خطی نظر نہیں آتیں لیکن کیا ان کو خطی مساوات کی صورت میں لایا جاسکتا ہے؟

آئیے، سمجھ لیں۔

دیے ہوئے متغیروں میں مناسب تبدیلی کر کے نئے متغیر فرض کیے جاسکتے ہیں۔ ان نئے متغیروں کا استعمال کر کے دی ہوئی مساواتوں کو خطی مساواتوں کی صورت میں لکھتے ہیں۔

کسی بھی $\frac{m}{n}$ کسر کا نسب نما صفر نہیں ہوسکتا۔ اِسے بھولیے نہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال: (1) حل کیجیے۔ $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

حل: $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{y}\right) = 7 \quad . . . \quad (I)$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{y}\right) = 5 \quad . . . \quad (II)$$

مساوات (I) اور (II) میں $\left(\frac{1}{x}\right) = m$ اور $\left(\frac{1}{y}\right) = n$ فرض کرنے پر درج ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$4m + 5n = 7 \quad . . . \quad (III)$$

$$3m + 4n = 5 \quad . . . \quad (IV)$$

ان مساواتوں کو حل کرنے پر $m = 3$ اور $n = -1$ حل حاصل ہوتے ہیں۔

اب، $m = \frac{1}{x}$ ، $\therefore\ 3 = \frac{1}{x}$ ، $\therefore\ x = \frac{1}{3}$

اسی طرح، $n = \frac{1}{y}$ ، $\therefore\ -1 = \frac{1}{y}$ ، $\therefore\ y = -1$

اس لیے دی ہوئی ہمزاد مساوات کا حل $(x, y) = (\frac{1}{3}, -1)$ ہے۔

مثال: (2) حل کیجیے۔ $\dfrac{4}{x-y} + \dfrac{1}{x+y} = 3 \; ; \; \dfrac{2}{x-y} - \dfrac{3}{x+y} = 5$

حل:

$$\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3 \; ; \; \frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$$

$$4\left(\frac{1}{x-y}\right) + 1\left(\frac{1}{x+y}\right) = 3 \quad . . . \quad (I)$$

$$2\left(\frac{1}{x-y}\right) - 3\left(\frac{1}{x+y}\right) = 5 \quad . . . \quad (II)$$

مساوات (I) اور مساوات (II) میں $\left(\frac{1}{x-y}\right) = a$ اور $\left(\frac{1}{x+y}\right) = b$ رکھنے پر درج ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$4a + b = 3 \quad . . . \quad (III)$$

$$2a - 3b = 5 \quad . . . \quad (IV)$$

مساوات (III) اور (IV) حل کرنے پر $a = 1$ اور $b = -1$ حل حاصل ہوتا ہے۔

لیکن $a = \left(\frac{1}{x-y}\right)$ اور $b = \left(\frac{1}{x+y}\right)$

اس لیے $\left(\frac{1}{x-y}\right) = 1$ اور $\left(\frac{1}{x+y}\right) = -1$

$$x - y = 1 \quad . . . \quad (V)$$

$$x + y = -1 \quad . . . \quad (VI)$$

مساوات (V) اور (VI) حل کرنے پر $x = 0$ اور $y = -1$ حل حاصل ہوتا ہے

اس لیے دی ہوئی مساواتوں کا حل $(x, y) = (0, -1)$ ہے۔

آیئے، غور کریں۔

مندرجہ بالا مثال میں دی ہوئی مساواتوں کو ہمزاد مساواتوں میں تبدیل کر کے اخراج کے طریقے سے حل کیا گیا ہے۔ اگر ان مساواتوں کو کرامر کے طریقے سے یا ترسیمی طریقے سے حل کریں تو وہی حل ملتا ہے یا نہیں؟ معلوم کیجیے۔

عملی کام: خانے میں درج ہمزاد مساواتوں کا حل معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2 \; ; \; \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

$\left(\frac{1}{x-1}\right) = m$ اور $\left(\frac{1}{y-2}\right) = n$ لینے پر،

نئی مساواتیں حل کرنے پر،

$6m - 3n = 1$; $\square$

$m = \square$ اور $n = \square$

m اور n کی قیمتیں رکھنے پر حاصل ہونے والی مساواتیں

$\square$; $\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{3}$

مساواتیں حل کرنے پر،

$x = \square$ اور $y = \square$

اس لیے دی ہوئی ہمزاد مساواتوں کا حل $(x, y) = (\quad , \quad)$ ہے۔

مشقی سیٹ 1.4

.1 درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(1) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 15 \; ; \; \frac{8}{x} + \frac{5}{y} = 77$

(2) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \; ; \; \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

(3) $\frac{27}{x-2} + \frac{31}{y+3} = 85 \; ; \; \frac{31}{x-2} + \frac{27}{y+3} = 89$

(4) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4} \; ; \; \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$

آیئے، سمجھ لیں۔

ہمزاد مساواتوں کا اطلاق (Application of simultaneous equations)

عملی کام: درج ذیل خالی خانوں کے نیچے کچھ شرطیں دی ہوئی ہیں۔ان کی مدد سے حاصل ہونے والی مساوات متعلقہ خانوں میں لکھیے۔

میری موجودہ عمر x سال ہے۔ | میں سلیم ہوں۔

میری موجودہ عمر y سال ہے۔ | میں سلیمہ ہوں۔

سلیم کی موجودہ عمر سلیمہ کی موجودہ عمر کے دگنا سے 8 سال کم ہے

سلیم اور سلیمہ کی موجودہ عمروں کا مجموعہ 25 سال ہے۔

4 سال قبل سلیمہ کی عمر سلیم کی عمر سے 3 سال کم تھی۔

مثال: (1) ایک مستطیل کا احاطہ 40 سم ہے۔مستطیل کی لمبائی اس کی چوڑائی کے دگنا سے 2 سم زیادہ ہے۔مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کریں مستطیل کی لمبائی x سم اور چوڑائی y سم ہے۔

پہلی شرط کے مطابق ،

$$2(x + y) = 40$$

$$\therefore \quad x + y = 20 \quad \ldots (I)$$

دوسری شرط کے مطابق ،

$$x = 2y + 2$$

$$\therefore \quad x - 2y = 2 \quad \ldots (II)$$

مساوات (I) اور (II) مربع قالب کے طریقے پر حل کرنے پر ،

$$x + y = 20$$

$$x - 2y = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = [1 \times (-2)] - (1 \times 1) = -2 - 1 = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = [20 \times (-2)] - (1 \times 2) = -40 - 2 = -42$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2) - (20 \times 1) = 2 - 20 = -18$$

$$x = \frac{D_x}{D} \quad ; \quad y = \frac{D_y}{D}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-42}{-3} \quad ; \quad y = \frac{-18}{-3}$$

$$\therefore \quad x = 14 \quad ; \quad y = 6$$

اس لیے مستطیل کی لمبائی 14 سم اور چوڑائی 6 سم ہے۔

مثال: (2)

سیل ! سیل !! سیل!!! صرف دو دنوں کے لیے

میرے پاس سوئی والی کچھ اور کچھ ڈیجیٹل گھڑیاں ہیں۔
مجھے انھیں رعایتی نرخ سے فروخت کرنا ہے۔

پہلے دن کی فروخت

سوئی والی گھڑیاں = 11
ڈیجیٹل گھڑیاں = 6
حاصل شدہ رقم = ₹ 4330

دوسرے دن کی فروخت

سوئی والی گھڑیاں = 22
ڈیجیٹل گھڑیاں = 5
حاصل شدہ رقم = ₹ 7330

تو میری فروخت کی ہوئی ہر قسم کی ایک گھڑی کی قیمت کیا تھی؟

حل : فرض کیجیے، سوئی والی ایک گھڑی کی قیمت = x ₹

اور ایک ڈیجیٹل گھڑی کی قیمت = y ₹

پہلی شرط کے مطابق ،

$$11x + 6y = 4330 \quad . . . \quad (I)$$

دوسری شرط کے مطابق ،

$$22x + 5y = 7330 \quad . . . \quad (II)$$

مساوات (I) کو 2 سے ضرب کرنے پر،

$$22x + 12y = 8660 \quad . . . \quad (III)$$

مساوات (II) میں سے مساوات (III) تفریق کرنے پر،

$$\begin{array}{r} 22x + 5y = 7330 \\ -\ \ 22x \pm 12y = \pm 8660 \\ \hline -7y = -1330 \end{array}$$

$$\therefore \quad y = 190$$

$y = 190$ مساوات (I) میں رکھنے پر،

$$11x + 6y = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 6(190) = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 1140 = 4330$$

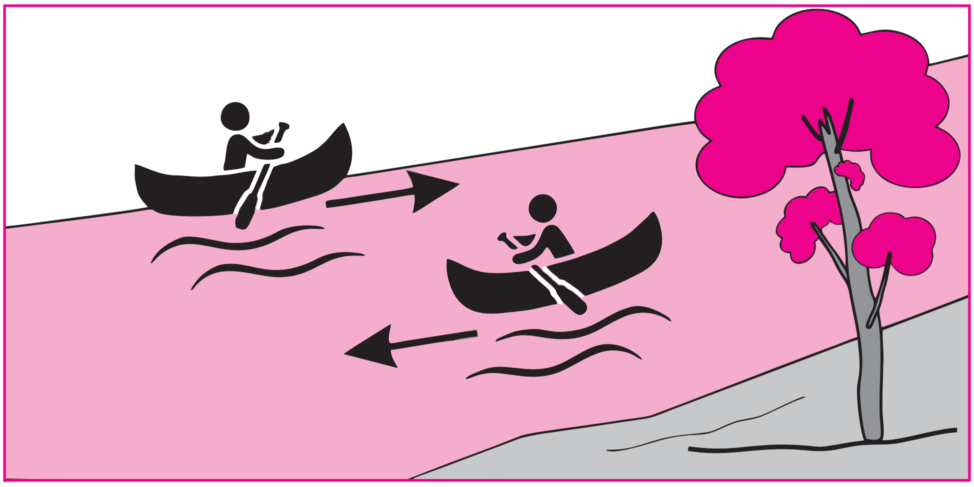
$$\therefore \quad 11x = 3190$$

$$\therefore \quad x = 290$$

اس لیے سوئی والی ایک گھڑی کی قیمت 290 ₹ اور

ایک ڈیجیٹل گھڑی کی قیمت 190 ₹ ہے۔

مثال: (3)



ایک کشتی 6 گھنٹے میں دریا کے بہاؤ کے مخالف سمت میں 16 کلومیٹر اور بہاؤ کے موافق سمت میں 24 کلومیٹر جاتی ہے۔

وہی کشتی 13 گھنٹے میں دریا کے بہاؤ کے مخالف سمت میں 36 کلومیٹر اور بہاؤ کے موافق سمت میں 48 کلومیٹر جاتی ہے۔

بتائیے کہ ساکن پانی میں کشتی کی رفتار اور دریا کے بہاؤ کی رفتار کیا ہے؟

حل: فرض کریں ساکن پانی میں کشتی کی رفتار = x کلومیٹر فی گھنٹہ اور دریا کے بہاؤ کی رفتار = y کلومیٹر فی گھنٹہ۔

اس لیے دریا کے بہاؤ کے موافق سمت میں کشتی کی رفتار = $(x + y)$ کلومیٹر فی گھنٹہ

اور دریا کے بہاؤ کے مخالف سمت میں کشتی کی رفتار = $(x - y)$ کلومیٹر فی گھنٹہ

$$\text{وقت} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}} \quad \therefore \quad , \quad \text{فاصلہ} = \text{رفتار} \times \text{وقت} \quad , \text{اب}$$

بہاؤ کے مخالف سمت میں 16 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے لیے کشتی کو درکار وقت = $\frac{16}{x-y}$ گھنٹے

بہاؤ کے موافق سمت میں 24 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے لیے کشتی کو درکار وقت = $\frac{24}{x+y}$ گھنٹے

پہلی شرط کے مطابق ،

$$\frac{16}{x-y} + \frac{24}{x+y} = 6 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

دوسری شرط کے مطابق ،

$$\frac{36}{x-y} + \frac{48}{x+y} = 13 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

مساوات (I) اور (II) میں $\frac{1}{x-y} = m$ اور $\frac{1}{x+y} = n$ رکھنے پر درج ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$16m + 24n = 6 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

$$36m + 48n = 13 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

مساوات (III) اور (IV) حل کرنے پر $m = \frac{1}{4}$ اور $n = \frac{1}{12}$

مندرجہ بالا میں m اور n کی قیمتیں دوبارہ رکھنے پر ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$x - y = 4 \quad \ldots (V)$

$x + y = 12 \quad \ldots (VI)$

مساوات (V) اور (VI) حل کرنے پر $x = 8$ اور $y = 4$ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

اس لیے ساکن پانی میں کشتی کی رفتار = 8 کلومیٹر فی گھنٹہ

اور دریا کے بہاؤ کی رفتار = 4 کلومیٹر فی گھنٹہ

مثال (4) : کچھ رقم چند لڑکوں میں مساوی طور پر تقسیم کی گئی۔ اگر 10 لڑکے زیادہ ہوتے تو ہر لڑکے کو 2 روپے کم ملتے اور اگر 15 لڑکے کم ہوتے تو ہر لڑکے کو 6 روپے زیادہ ملتے تو تقسیم کی گئی رقم کتنی ہے؟ اور وہ رقم کتنے لڑکوں میں تقسیم کی گئی؟

حل : فرض کریں، لڑکوں کی تعداد x ہے اور ہر لڑکے کو ملنے والی رقم y روپے ہے۔

اس لیے تقسیم کی گئی کل رقم xy روپے ہوگی۔

پہلی شرط کے مطابق ،

$$(x + 10)(y - 2) = xy$$

$$\therefore \quad xy - 2x + 10y - 20 = xy$$

$$\therefore \quad -2x + 10y = 20$$

$$\therefore \quad -x + 5y = 10 \quad \ldots (I)$$

دوسری شرط کے مطابق ،

$$(x - 15)(y + 6) = xy$$

$$\therefore \quad xy + 6x - 15y - 90 = xy$$

$$\therefore \quad 6x - 15y = 90$$

$$\therefore \quad 2x - 5y = 30 \quad \ldots (II)$$

مساوات (I) اور (II) کی جمع کرنے پر ،

$$\begin{array}{r} -x + 5y = 10 \\ + \quad 2x - 5y = 30 \\ \hline x = 40 \end{array}$$

$x = 40$ ، مساوات (I) میں رکھنے پر ،

$$-x + 5y = 10$$

$$\therefore \quad -40 + 5y = 10$$

$$\therefore \quad 5y = 50$$

$\therefore \quad y = 10$

$\therefore$ کل رقم $= xy = 40 \times 10 =$ ₹400

$\therefore$ 40 لڑکوں کو 400 روپے تقسیم کیے گئے۔

مثال (5) : تین ہندسی ایک عدد، اس کے ہندسوں کے مجموعے کا 17 گنا ہے۔ اصل عدد میں 198 جمع کرنے پر ہندسوں کے مقام کی آپسی تبدیلی سے دوسرا عدد حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح اکائی اور سیکڑہ کے مقام کے ہندسوں کا مجموعہ، درمیانی ہندسے سے 1 کم ہے۔ وہ تین ہندسی عدد معلوم کیجیے۔

حل : فرض کریں، اصل تین ہندسی عدد میں سیکڑہ کا ہندسہ x اور اکائی کا ہندسہ y ہے۔

سروں کے ہندسوں کے مجموعے سے ایک زیادہ = دہائی کا (درمیانی) ہندسہ

اکائی	دہائی	سیکڑہ
y	$x + y + 1$	x

$\therefore$ اصل تین ہندسی عدد $= 100x + 10(x + y + 1) + y$

$= 100x + 10x + 10y + 10 + y = 110x + 11y + 10$

اصل عدد کے ہندسوں کا مجموعہ $= x + (x + y + 1) + y = 2x + 2y + 1$

اصل تین ہندسی عدد $= 17 \times$ (ہندسوں کا مجموعہ) ... (پہلی شرط کے مطابق)

$\therefore \quad 110x + 11y + 10 = 17 \times (2x + 2y + 1)$

$\therefore \quad 110x + 11y + 10 = 34x + 34y + 17$

$\therefore \quad 76x - 23y = 7 \quad \ldots \text{(I)}$

اصل عدد کے ہندسوں کا مقام اُلٹ کر ملنے والا نیا عدد

$= 100y + 10(x + y + 1) + x = 110y + 11x + 10$

اصل عدد $= 110x + 11y + 10$

دی ہوئی دوسری شرط کے مطابق ہندسوں کے مقام کی آپسی تبدیلی سے ملنے والا عدد $=$ اصل عدد $+ 198$

$\therefore \quad 110x + 11y + 10 + 198 = 110y + 11x + 10$

$\therefore \quad 99x - 99y = -198$

$\therefore \quad x - y = -2$

یعنی، $x = y - 2 \quad \ldots \text{(II)}$

مساوات (II) میں حاصل ہونے والی x کی قیمت مساوات (I) میں رکھنے پر،

$\therefore \quad 76(y - 2) - 23y = 7$

$\therefore \quad 76y - 152 - 23y = 7$

$53y = 159$

$\therefore \quad y = 3 \qquad , \qquad \therefore$ اکائی کا ہندسہ $= 3$

$y = 3$، قیمت مساوات (II) میں رکھنے پر،

$$x = y - 2$$

$$\therefore \quad x = 3 - 2 = 1$$

$\therefore \quad x = 1 \quad , \quad \therefore$ سیکڑہ کا ہندسہ $= 1$

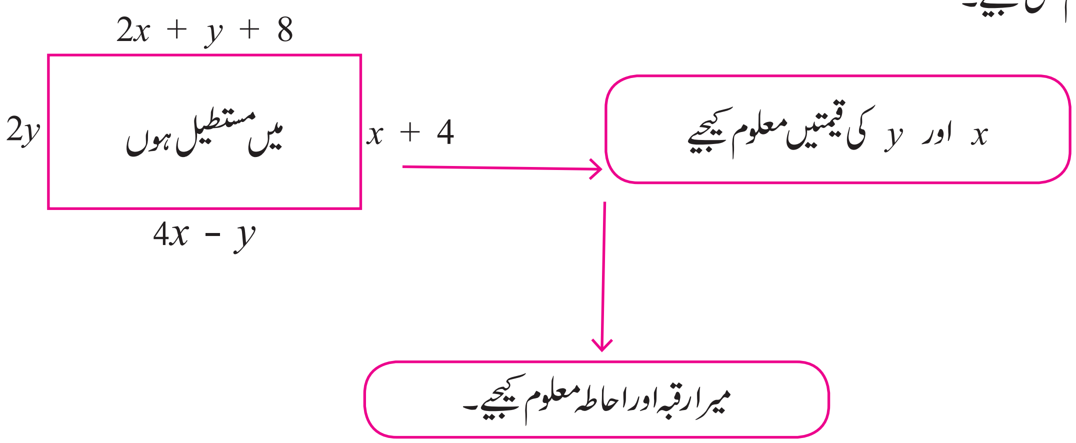
دہائی کا ہندسہ = درمیانی ہندسہ $= x + y + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$

اس لیے اصل تین ہندسی عدد = 153

مشقی سیٹ 1.5

.1 دو اعداد کا فرق 3 ہے۔ بڑے عدد کے تین گنا اور چھوٹے عدد کے دگنا کا مجموعہ 19 ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔

.2 عملی کام مکمل کیجیے۔



.3 والد کی عمر میں بیٹے کی عمر کا دگنا ملانے پر حاصل جمع 70 ہوتا ہے اور بیٹے کی عمر میں والد کی عمر کا دگنا ملانے پر حاصل جمع 95 ہوتا ہے۔ دونوں کی عمریں معلوم کیجیے۔

.4 ایک کسر کا نسب نما اس کے شمار کنندہ کے دگنا سے 4 بڑا ہے۔ اگر شمار کنندہ اور نسب نما دونوں سے 6 کم کریں تو نسب نما، شمار کنندہ کا 12 گنا ہوتا ہے۔ وہ کسر معلوم کیجیے۔

.5 10 ٹن کی گنجائش رکھنے والے باربردار ٹرک میں A اور B دو قسم کے مخصوص وزن کے بکس رکھے گئے ہیں۔ اگر A قسم کے 150 بکس اور B قسم کے 100 بکس رکھیں تو ٹرک کی گنجائش 10 ٹن پوری ہوجاتی ہے۔ اگر A قسم کے 260 بکس رکھیں تو ٹرک کی گنجائش 10 ٹن پوری ہونے کے لیے B قسم کے 40 بکس کی ضرورت ہوتی ہے تو ہر قسم کے بکس کا وزن معلوم کیجیے۔

.6★ ماجد نے 1900 کلومیٹر سفر کرنے کے دوران کچھ فاصلہ بس کے ذریعے اور باقی فاصلہ ہوائی جہاز کے ذریعے پورا کیا۔ بس کی اوسط رفتار 60 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے اور ہوائی جہاز کی اوسط رفتار 700 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔ اگر اس سفر کے لیے 5 گھنٹے لگے ہوں تو ماجد نے بس کے ذریعے کتنے کلومیٹر سفر کیا؟

مجموعۂ سوالات 1

.1 درج ذیل سوالوں کے لیے دیے ہوئے متبادل جوابات سے صحیح متبادل کا انتخاب کیجیے۔

(1) $4x + 5y = 19$ کی ترسیم بنانے کے لیے $x = 1$ ہو تو y کی قیمت کیا ہوگی؟

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) -3

(2) x اور y کی صورت میں دی ہوئی ہمزاد مساوات کے لیے اگر $D_x = 49$ ، $D_y = -63$ ، $D = 7$ ہو تو $x = ?$

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{-1}{7}$

(3) مربع قالب $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}$ کی قیمت کیا ہے؟

(A) -1 (B) -41 (C) 41 (D) 1

(4) $x + y = 3$; $3x - 2y - 4 = 0$ ہمزاد مساواتیں حل کرنے کے لیے D کی قیمت کیا ہے؟

(A) 5 (B) 1 (C) -5 (D) -1

(5) $ax + by = c$ اور $mx + ny = d$ ہمزاد مساواتوں میں اگر $an \neq bm$ ہو تو دی ہوئی ہمزاد مساواتوں کا -

(A) ایک ہی مشترک حل ہے (B) حل نہیں ہے (C) لاتعداد حل ہیں (D) صرف دو حل ہیں

.2 $2x - 6y = 3$ مساوات کی ترسیم کھینچنے کے لیے درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

x	-5	☐
y	☐	0
(x, y)	☐	☐

.3 درج ذیل ہمزاد مساواتیں ترسیمی طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $2x + 3y = 12$; $x - y = 1$

(2) $x - 3y = 1$; $3x - 2y + 4 = 0$

(3) $5x - 6y + 30 = 0$; $5x + 4y - 20 = 0$

(4) $3x - y - 2 = 0$; $2x + y = 8$

(5) $3x + y = 10$; $x - y = 2$

.4 درج ذیل مربع قالبوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

.5 درج ذیل ہمزاد مساواتیں کرامر کے طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $6x - 3y = -10$; $3x + 5y - 8 = 0$

(2) $4m - 2n = -4$; $4m + 3n = 16$

(3) $3x - 2y = \frac{5}{2}$; $\frac{1}{3}x + 3y = -\frac{4}{3}$

(4) $7x + 3y = 15$; $12y - 5x = 39$

(5) $\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x-y}{4}$

.6 درج ذیل ہمزاد مساواتیں حل کیجیے۔

(1) $\frac{2}{x}+\frac{2}{3y}=\frac{1}{6}$; $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=0$ (2) $\frac{7}{2x+1}+\frac{13}{y+2}=27$; $\frac{13}{2x+1}+\frac{7}{y+2}=33$

(3) $\frac{148}{x}+\frac{231}{y}=\frac{527}{xy}$; $\frac{231}{x}+\frac{148}{y}=\frac{610}{xy}$ (4) $\frac{7x-2y}{xy}=5$; $\frac{8x+7y}{xy}=15$

(5) $\frac{1}{2(3x+4y)}+\frac{1}{5(2x-3y)}=\frac{1}{4}$; $\frac{5}{(3x+4y)}-\frac{2}{(2x-3y)}=-\frac{3}{2}$

.7 درج ذیل عبارتی سوالات حل کیجیے۔

(1) ایک دو ہندسی عدد اور اس کے ہندسوں کے مقام کی ادل بدل کرنے سے حاصل ہونے والے عدد کا مجموعہ 143 ہے۔ اگر دیے ہوئے عدد میں اکائی کا ہندسہ، دہائی کے ہندسے سے 3 زیادہ ہو تو اصل عدد کیا ہے؟

فرض کریں، اصل عدد میں اکائی کا ہندسہ $= x$

اور دہائی کا ہندسہ $= y$

$\therefore$ اصل عدد $= \square\, y + x$

ہندسوں کے مقام کی ادل بدل کرنے سے حاصل ہونے والا عدد $= \square\, x + y$

پہلی شرط کے مطابق،

دو ہندسی عدد + ہندسوں کے مقام کی ادل بدل کرنے سے حاصل ہونے والا عدد $= 143$

$$\boxed{10y + x} + \square = 143$$

$$\square\, x + \square\, y = 143$$

$$x + y = \square \quad \ldots \text{(I)}$$

دوسری شرط کے مطابق،

اکائی کا ہندسہ = دہائی کا ہندسہ + 3

$$x = \square + 3$$

$$x - y = 3 \quad \ldots \text{(II)}$$

(I) اور (II) کی جمع کرنے پر،

$2x = \square \quad , \quad \therefore \quad x = 8$

$x = 8$ مساوات (I) میں رکھنے پر،

$x + y = 13$

$8 + \square = 13$

$\therefore \quad y = \square$

اصل دو ہندسی عدد $= 10\,y + x$

$= \square + 8 = 58$

(2) سعیدہ نے ایک دکان سے ڈیڑھ کلوگرام چائے پتی اور پانچ کلوگرام شکر خریدی۔ دکان تک جا کر واپس آنے کے لیے 50 روپے رکشے کا کرایہ لگا۔ اس کے لیے اس کے کل 700 روپے خرچ ہوئے۔ بعد میں اسے سمجھ میں آیا کہ وہی چیزیں آن لائن منگانے پر اتنی ہی قیمت میں گھر پہنچ جاتیں۔ اگلے مہینے اس نے 2 کلوگرام چائے پتی اور 7 کلوگرام شکر آن لائن منگائی۔ اس کے لیے اسے 880 روپے خرچ ہوئے تو چائے پتی اور شکر کا فی کلوگرام نرخ معلوم کیجیے۔

(3) نازیہ کے پاس 100 روپے والے x اور 50 روپے والے y نوٹ ہیں۔

نازیہ کو عابد نے مندرجہ بالا نوٹوں کی صورت میں 2500 روپے دیے۔

مساوات . . . . (I)

عابد نے ان نوٹوں کی تعداد میں آپسی تبدیلی کرکے رقم دی ہوتی تو 500 روپے کم ہو جاتے۔

مساوات . . . . (II)

مساوات حل کرکے جواب لکھیے۔

100 روپے والے نوٹوں کی تعداد = $\square$ ، 50 روپے والے نوٹوں کی تعداد = $\square$

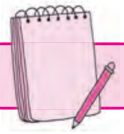
(4) منیشا اور سویتا کی موجودہ عمروں کا مجموعہ 31 سال ہے۔ 3 سال قبل منیشا کی عمر، سویتا کی اس وقت کی عمر کا چار گنا تھی تو دونوں کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

(5)* ایک کارخانے میں ہنرمند اور بے ہنر مزدوروں کی مزدوری کی نسبت 3 : 5 ہے۔ ایک ہنرمند اور ایک بے ہنر مزدور کی ایک دن کی کل مزدوری 720 روپے ہے تو ہر ہنرمند اور بے ہنر مزدوروں کی ایک دن کی مزدوری معلوم کیجیے۔

(6)* ایک سیدھے راستے پر A اور B دو مقامات ہیں۔ ان کے درمیان فاصلہ 30 کلومیٹر ہے۔ حامد موٹر سائیکل کے ذریعے مقام A سے مقام B کی جانب روانہ ہوا۔ اسی وقت جوزف مقام B سے مقام A کی جانب روانہ ہوا۔ دونوں 20 منٹ بعد ایک دوسرے سے ملے۔ اگر جوزف اسی وقت نکل کر مخالف سمت میں جاتا تو اس کو حامد 3 گھنٹے میں ملتا تو ہر ایک کی رفتار کیا ہوگی؟

N6V6P5

2 مربعی مساواتیں (Quadratic Equations)



آ یئے، سیکھیں۔

- مربعی مساوات : تعارف
- مربعی مساوات حل کرنے کے طریقے
- مربعی مساوات کے جذروں کی نوعیت
- جذر اور ضریب میں تعلق
- مربعی مساوات کا اطلاق

آ یئے، ذرا یاد کریں

عزیز طلبہ! نویں جماعت میں ہم نے کثیر رکنی کا مطالعہ کیا ہے۔ اس میں کثیر رکنی کے درجے کی بنیاد پر ہونے والی مختلف قسموں کا ہم نے مطالعہ کیا ہے۔ ایک متغیر کی جس کثیر رکنی کا درجہ ایک ہوتا ہے اسے خطی کثیر رکنی اور جس کا درجہ دو ہوا سے مربعی کثیر رکنی کہتے ہیں۔

عملی کام : درج ذیل کثیر رکنیوں کو خطی کثیر رکنی اور مربعی کثیر رکنی میں جماعت بندی کیجیے۔

$5x + 9$, $x^2 + 3x - 5$, $3x - 7$, $3x^2 - 5x$, $5x^2$

خطی کثیر رکنی	مربعی کثیر رکنی

اب ہم مربعی کثیر رکنی کی قیمت 0 رکھ کر جو مساوات حاصل ہوتی ہے اس کا مطالعہ کریں گے۔ ایسی مساوات کو مربعی مساوات کہتے ہیں۔ ہم روزمرہ کئی مرتبہ ان مربعی مساواتوں کا استعمال کرتے ہیں۔

مثال : ریحان نے 200 مربع میٹر رقبے کا ایک مستطیلی زمین کا قطعۂ اراضی خریدا۔ زمین کی لمبائی، چوڑائی سے 10 میٹر زیادہ ہے تو اس زمین کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

فرض کیجیے، قطعہ اراضی کی چوڑائی x میٹر ہے۔

$\therefore$ لمبائی $= (x + 10)$ میٹر

مستطیل نما قطعۂ اراضی کا رقبہ = لمبائی × چوڑائی

$\therefore \quad 200 = (x + 10) \times x$

$\therefore \quad 200 = x^2 + 10x$

یعنی، $x^2 + 10x = 200$

$\therefore \quad x^2 + 10x - 200 = 0$

اب مربعی مساوات $x^2 + 10x - 200 = 0$ کو حل کر کے ہم قطعۂ اراضی کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں گے۔ مربعی مساوات کس طرح حل کرنا ہے، اس کا ہم مطالعہ کریں گے۔

آئیے، ذرا یاد کریں۔

عملی کام: $x^2 + 3x - 5,\ 3x^2 - 5x,\ 5x^2$ → اِن کثیر رکنیوں کو قوت نمائی صورت میں لکھ کر ان کے ارکان کے ضریبوں کا مشاہدہ کر کے خالی چوکون میں مناسب طریقے سے لکھیں۔

$x^2 + 3x - 5,\quad 3x^2 - 5x + 0,\quad 5x^2 + 0x + 0$

- ✦ x^2 کے ضریب بالترتیب [1]، [3] اور [5] ہیں یعنی 0 نہیں ہے۔
- ✦ x کے ضریب بالترتیب 3، [ ] اور [ ] ہیں۔
- ✦ مستقل رکن بالترتیب [ ]، [ ] اور [ ] ہیں۔

یہاں دوسرے اور تیسرے کثیر رکنی میں مستقل رکن صفر (0) ہے۔

آئیے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات کی معیاری صورت (Standard form of quadratic equation)

جس متغیر کے تمام قوت نما مکمل عدد ہوں اور متغیر کا قوت نما بڑے سے بڑا 2 ہو، اس مساوات کو مربعی مساوات کہتے ہیں۔ اُسے عمومی صورت یا عام صورت میں $ax^2 + bx + c = 0$ اس طرح لکھتے ہیں۔ اس میں a، b اور c حقیقی اعداد ہیں اور a غیر صفر عدد ہے۔

$ax^2 + bx + c = 0$، اِس صورت میں مساوات کو مربعی مساوات کی عام صورت یا معیاری صورت کہتے ہیں۔

عملی کام: درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

مربعی مساوات	معیاری صورت	a	b	c
$x^2 - 4 = 0$	$x^2 + 0x - 4 = 0$	1	0	-4
$y^2 = 2y - 7$	. . . .	. . .	. . .	. . .
$x^2 + 2x = 0$	. . . .	. . .	. . .	. . .

حل کردہ مثالیں

مثال: درج ذیل میں کون سی مساواتیں مربعی مساواتیں ہیں، بتائیے۔

(1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ (2) $9y^2 + 5 = 0$

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ (4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

حل: (1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ اس میں ایک ہی متغیر ہے اور متغیر کا سب سے بڑا قوت نما 2 ہے اس لیے یہ مساوات مربعی مساوات ہے۔

(2) $9y^2 + 5 = 0$ ، اس میں ☐ متغیر ہے، متغیر کا سب سے بڑا قوت نما ☐ ہے اس لیے یہ مساوات مربعی مساوات ☐ ۔

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ ، ایک ہی متغیر ہے اس میں متغیر کا سب سے بڑا قوت نما 2 نہیں ہے اس لیے یہ مساوات مربعی مساوات ☐ ہے۔

(4)
$$(l + 2)\,(l - 5) = 0$$
$$\therefore\ l\,(l - 5) + 2\,(l - 5) = 0$$
$$\therefore\ l^2 - 5l + 2l - 10 = 0$$
$$\therefore\ l^2 - 3l - 10 = 0$$

... (اس میں صرف ☐ ایک ہی متغیر ہے اور متغیر کا سب سے بڑا قوت نما ☐ ہے)

اس لیے دی ہوئی مساوات مربعی مساوات ☐ ۔

آیئے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات کی جذریں (حل) (Roots of quadratic equation)

ہم نے سابقہ جماعت میں دیکھا ہے کہ x کی قیمت a رکھنے پر کثیر رکنی کی قیمت صفر آتی ہو تو $(x - a)$ اس کثیر رکنی کا جز ضربی ہوتا ہے، یعنی اگر $\mathrm{p}\,(x)$ کثیر رکنی ہو اور $\mathrm{p}\,(a) = 0$ ہو تو $(x - a)$ ، یہ $\mathrm{p}\,(x)$ کا جز و ضربی ہوتا ہے۔ اس صورت میں کہتے ہیں کہ $\mathrm{p}\,(x) = 0$ کا ایک حل a ہے یا $\mathrm{p}\,(x) = 0$ کا ایک جذر a ہے۔

مثال:

کثیر رکنی $x^2 + 5x - 6$ میں $x = -6$ رکھنے پر،

$$x^2 + 5x - 6 = (-6)^2 + 5 \times (-6) - 6$$
$$= 36 - 30 - 6 = 0$$

اس لیے مساوات $x^2 + 5x - 6 = 0$ کا ایک حل $x = -6$ ہے۔

یعنی مساوات $x^2 + 5x - 6 = 0$ کا ایک جذر -6 ہے۔

کثیر رکنی $x^2 + 5x - 6$ میں $x = 2$ رکھنے پر،

$$x^2 + 5x - 6 = 2^2 + 5 \times 2 - 6$$
$$= 4 + 10 - 6$$
$$= 8 \neq 0$$

اس لیے مساوات $x^2 + 5x - 6 = 0$ کا حل $x = 2$ نہیں ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال: مساوات $2x^2 - 7x + 6 = 0$ کے (i) $x = \frac{3}{2}$ اور (ii) $x = -2$ جذر ہیں یا نہیں، طے کیجیے۔

حل: (i) کثیر رکنی $2x^2 - 7x + 6$ میں $x = \frac{3}{2}$ رکھنے پر کثیر رکنی کی قیمت معلوم کریں۔

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{3}{2}\right) + 6$$

$$= 2 \times \frac{9}{4} - \frac{21}{2} + 6$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{21}{2} + \frac{12}{2} = 0$$

اس لیے دی ہوئی مساوات کا ایک حل $x = \frac{3}{2}$ ہے۔

(ii) کثیر رکنی $2x^2 - 7x + 6$ میں $x = -2$ قیمت رکھ کر کثیر رکنی کی قیمت معلوم کریں گے۔

$$2x^2 - 7x + 6 = 2(-2)^2 - 7(-2) + 6$$

$$= 2 \times 4 + 14 + 6$$

$$= 28 \neq 0$$

اس لیے $x = -2$ مساوات $2x^2 - 7x + 6$ کا حل نہیں ہے۔

عملی کام : اگر $x = 5$، مساوات $kx^2 - 14x - 5 = 0$ کا ایک جذر ہوتو k کی قیمت معلوم کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔

حل : $kx^2 - 14x - 5 = 0$ اس مساوات کا ایک جذر $\square$ ہے۔اس لیے $x = \square$، اوپر کی مربعی مساوات میں رکھنے پر،

$$\therefore \quad k\square^2 - 14\square - 5 = 0$$

$$\therefore \quad 25k - 70 - 5 = 0$$

$$\therefore \quad 25k - \square = 0$$

$$\therefore \quad 25k = \square$$

$$\therefore \quad k = \frac{\square}{\square} = 3$$

اسے ذہن میں رکھیں۔

(1) مربعی مساوات کی معیاری صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ہے۔اس میں a، b اور c حقیقی اعداد ہیں اور a غیر صفر عدد ہے۔

(2) متغیر کی جن قیمتوں سے مربعی مساوات کے دونوں بازو (طرفین) مساوی ہوتے ہیں۔ (یعنی مربعی مساوات مطمئن ہوتی ہے) ان قیمتوں کو مربعی مساوات کے حل یا مربعی مساوات کے جذر کہتے ہیں۔

مشقی سیٹ 2.1

1. کوئی دو مربعی مساواتیں لکھیے۔

2. درج ذیل مساواتوں میں سے مربعی مساواتیں پہچانیے۔

(1) $x^2 + 5x - 2 = 0$ (2) $y^2 = 5y - 10$ (3) $y^2 + \frac{1}{y} = 2$

(4) $x + \frac{1}{x} = -2$ (5) $(m+2)(m-5) = 0$ (6) $m^3 + 3m^2 - 2 = 3m^3$

3. درج ذیل مساواتیں $ax^2 + bx + c = 0$ کی صورت میں لکھیے۔ ہر ایک کے لیے a، b اور c کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $2y = 10 - y^2$ (2) $(x-1)^2 = 2x + 3$ (3) $x^2 + 5x = -(3 - x)$

(4) $3m^2 = 2m^2 - 9$ (5) $p(3 + 6p) = -5$ (6) $x^2 - 9 = 13$

4. مربعی مساواتوں کے مقابل دی ہوئی متغیر کی قیمت، ان مساواتوں کے جذر ہیں یا نہیں، طے کیجیے۔

(1) $x^2 + 4x - 5 = 0$, $x = 1, -1$ (2) $2m^2 - 5m = 0$, $m = 2, \frac{5}{2}$

5. اگر مربعی مساوات $kx^2 - 10x + 3 = 0$ کا ایک جذر $x = 3$ ہو تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

6. اگر مربعی مساوات $5m^2 + 2m + k = 0$ کا ایک جذر $\frac{-7}{5}$ ہو تو k کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ذیل کی سرگرمی (عملی کام) مکمل کیجیے۔

حل: مربعی مساوات $5m^2 + 2m + k = 0$ کا ایک جذر $\square$ ہے۔

$\therefore\ m = \square$ . . . (اوپر کی مساوات میں رکھنے پر)

$\therefore\ 5 \times \square^2 + 2 \times \square + k = 0$

$\therefore\ \square + \square + k = 0$

$\therefore\ \square + k = 0$

$\therefore\ k = \square$

آیئے، ذرا یاد کریں۔

ہم نے گزشتہ سال کثیر رکنی باب میں $x^2 - 4x - 5$, $2m^2 - 5m$, $a^2 - 25$ اس قسم کے مربعی کثیر رکنیوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے طریقے کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ درج ذیل عملی کام کے ذریعے اس کا اعادہ کرتے ہیں۔

عملی کام: درج ذیل مربعی کثیر رکنی کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(1) $x^2 - 4x - 5$

$= \underline{x^2 - 5x} + \underline{1x - 5}$

$= x(\ldots\ldots) + 1(\ldots\ldots)$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

(2) $2m^2 - 5m$

$= \ldots\ \ldots$

(3) $a^2 - 25$

$= a^2 - 5^2$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

آیئے، سمجھ لیں۔

اجزائے ضربی کے طریقے سے جذر معلوم کرنا (Solution of a quadratic equation by factorisation)

ہم نے متغیر کی مختلف قیمتیں لے کر مربعی مساوات کی جذریں معلوم کر چکے ہیں لیکن اس طریقے میں کافی وقت درکار ہوتا ہے۔ اس لیے ہم اس حصے میں مربعی مساواتوں کے جذر، اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کرنے کے طریقے کا مطالعہ کریں گے۔

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)\ (x + 1)$$

یہاں کثیر رکنی $x^2 - 4x - 5$ کے دو خطی جزو ضربی $(x - 5)$ اور $(x + 1)$ ہیں اس لیے $x^2 - 4x - 5$ اس مربعی کثیر رکنی سے حاصل ہونے والے مربعی مساوات $x^2 - 4x - 5 = 0$ کو درج ذیل کے مطابق لکھ سکتے ہیں۔

$$(x - 5)\ (x + 1) = 0$$

اگر دو اعداد کا حاصل ضرب صفر ہو تو اُن دو اعداد میں سے کم از کم ایک عدد صفر ہوتا ہے۔

$\therefore\ x - 5 = 0$ یا $x + 1 = 0$

$\therefore\ x = 5$ یا $x = -1$

اس لیے دیے ہوئے مربعی مساوات کے جذر 5 اور -1 ہیں۔

اس مثال کو حل کرتے وقت ہم نے پہلے مربعی کثیر رکنی کے دو خطی جزو ضربی حاصل کیے۔ اس طریقے کو مربعی مساوات حل کرنے کا اجزائے ضربی کا طریقہ کہتے ہیں۔

حل کردہ مثالیں

مثال: ذیل کی مربعی مساوات اجزائے ضربی کے طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$ (2) $3x^2 - x - 10 = 0$

(3) $3y^2 = 15y$ (4) $x^2 = 3$ (5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

حل: (1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

$\therefore\ \underline{m^2 - 13m} - \underline{1m + 13} = 0$

$\therefore\ m\ (m - 13) - 1\ (m - 13) = 0$

$\therefore\ (m - 13)\ (m - 1) = 0$

$\therefore\ m - 13 = 0$ یا $m - 1 = 0$

$\therefore\ m = 13$ یا $m = 1$

$\therefore$ دی ہوئی مربعی مساوات کے جذر 13 اور 1 ہیں۔

(2) $3x^2 - x - 10 = 0$

$\therefore\ \underline{3x^2 - 6x} + \underline{5x - 10} = 0$

$\therefore\ 3x\ (x - 2) + 5\ (x - 2) = 0$

$\therefore\ (3x + 5)\ (x - 2) = 0$

$\therefore\ 3x + 5 = 0$ یا $x - 2 = 0$

$\therefore\ x = -\frac{5}{3}$ یا $x = 2$

$\therefore$ دی ہوئی مربعی مساوات کے جذر $-\frac{5}{3}$ اور 2 ہیں۔

(3) $3y^2 = 15y$

$\therefore\ 3y^2 - 15y = 0$

$\therefore\ 3y(y - 5) = 0$

$\therefore\ 3y = 0$ یا $y - 5 = 0$

$\therefore\ y = 0$ یا $y = 5$

اس لیے مربعی مساوات کے جذر 0 اور 5 ہیں۔

(4) $x^2 = 3$

$\therefore\ x^2 - 3 = 0$

$\therefore\ x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

$\therefore\ (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ x + \sqrt{3} = 0$ یا $x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ x = -\sqrt{3}$ یا $x = \sqrt{3}$

اس لیے دی ہوئی مربعی مساوات کے جذر $-\sqrt{3}$ اور $\sqrt{3}$ ہیں۔

(5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

$\therefore\ 6\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ 6\sqrt{3}x^2 + 9x - 2x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ 3\sqrt{3}x(2x + \sqrt{3}) - 1(2x + \sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ (2x + \sqrt{3})(3\sqrt{3}x - 1) = 0$

$\therefore\ 2x + \sqrt{3} = 0$ یا $3\sqrt{3}x - 1 = 0$

$\therefore\ 2x = -\sqrt{3}$ یا $3\sqrt{3}x = 1$

$\therefore\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ یا $x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$6\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) = -18$

-18: 9, -2

$9 = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$\therefore$ مربعی مساوات کے جذر $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ ہیں۔

مشقی سیٹ 2.2

1. مندرجہ ذیل مربعی مساواتیں اجزائے ضربی کے طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $x^2 - 15x + 54 = 0$ (2) $x^2 + x - 20 = 0$ (3) $2y^2 + 27y + 13 = 0$

(4) $5m^2 = 22m + 15$ (5) $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$ (6) $6x - \frac{2}{x} = 1$

(7) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ اس مربعی مساوات کو اجزائے ضربی کے طریقے سے حل کرنے کے لیے درج ذیل عملی کام کیجیے۔

حل (7): $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore\ \sqrt{2}x^2 + \boxed{} + \boxed{} + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore\ x(\ .\ .\ .\ .\ .\ ) + \sqrt{2}(\ .\ .\ .\ .\ .\ ) = 0$

$\therefore\ (\ .\ .\ .\ .\ .\ )(x + \sqrt{2}) = 0$

$\therefore \quad (\,.\,.\,.\,.\,.\,) = 0$ یا $(x + \sqrt{2}\,) = 0$

$\therefore \quad x = \square$ یا $x = -\sqrt{2}$

$\therefore$ مربعی مساوات کے جذر $\square$ اور $-\sqrt{2}$ ہیں۔

(8)★ $3x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 2 = 0$ (9) $2m\,(m - 24) = 50$

(10) $25m^2 = 9$ (11) $7m^2 = 21m$ (12) $m^2 - 11 = 0$

آئیے، سمجھ لیں۔

کامل مربع کے طریقے سے مربعی مساوات حل کرنا
(Solution of a quadratic equation by completing the square)

استاد : $x^2 + 10x + 2 = 0$ ، یہ مربعی مساوات ہے یا نہیں؟

فرمان : جی سر، کیوں کہ $ax^2 + bx + c = 0$ کی صورت میں ہے۔ یہاں x متغیر کا سب سے بڑا قوت نما 2 ہے اور a کی قیمت صفر نہیں ہے۔

استاد : کیا یہ مساوات آپ حل کر سکتے ہیں؟

ورشا : نہیں سر، کیوں کہ عدد 2 کے ایسے دو اجزائے ضربی نہیں بتا سکتے جن کا مجموعہ 10 ہو۔

استاد : اسی لیے ایسی مثالوں کو حل کرنے کے لیے دوسرا طریقہ استعمال کرنا ہوگا۔ وہ طریقہ سمجھنے کی کوشش کیجیے۔

$x^2 + 10x$ اس فقرہ میں مناسب رکن جمع کر کے ایک کامل مربعی عبارت حاصل کریں گے۔

اگر $x^2 + 10x + k = (x + a)^2$

ہو تو $x^2 + 10x + k = x^2 + 2ax + a^2$

اس لیے ضریبوں کا موازنہ کرنے پر $10 = 2a$ اور $k = a^2$

$\therefore \; a = 5 \;, \quad \therefore \; k = a^2 = (5)^2 = 25$

اب, $x^2 + 10x + 2 = (x + 5)^2 - 25 + 2 = (x + 5)^2 - 23$

مربعی مساوات $x^2 + 10x + 2 = 0$ کیا اب آپ حل کر سکتے ہیں؟

آفرین : جی سر، مساوات کے بائیں جانب دو مربعوں کے فرق کی صورت حاصل ہونے کی وجہ سے اس کے اجزائے ضربی معلوم کر سکتے ہیں۔

$$(x + 5)^2 - (\sqrt{23}\,)^2 = 0$$

$$\therefore \; (x + 5 + \sqrt{23}\,)(x + 5 - \sqrt{23}\,) = 0$$

$\therefore \quad x + 5 + \sqrt{23} = 0$ یا $x + 5 - \sqrt{23} = 0$

$\therefore \quad x = -5 - \sqrt{23}$ یا $x = -5 + \sqrt{23}$

حمید : سر، حل معلوم کرنے کا دوسرا طریقہ میری سمجھ میں آ گیا۔

$$(x+5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$$

$$\therefore \quad (x+5)^2 = (\sqrt{23})^2$$

$$\therefore \quad x + 5 = \sqrt{23} \quad \text{یا} \quad x + 5 = -\sqrt{23}$$

$$\therefore \quad x = -5 + \sqrt{23} \quad \text{یا} \quad x = -5 - \sqrt{23}$$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) حل کیجیے : $5x^2 - 4x - 3 = 0$

حل : مساوات کے مربعی عبارت کی تحویل دو مربعوں کے فرق کی صورت میں لانے کے لیے x^2 کا ضریب 1 کرنا سہولت بخش ہوگا۔ اس لیے دی ہوئی مساوات کو 5 سے تقسیم کرنے پر،

$$x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$$

اب اگر $x^2 - \frac{4}{5}x + k = (x-a)^2$ ہو تو $x^2 - \frac{4}{5}x + k = x^2 - 2ax + a^2$

$x^2 - \frac{4}{5}x$ کا موازنہ $x^2 - 2ax$ سے کرنے پر،

$$\therefore \quad -2ax = -\frac{4}{5}x, \quad \therefore a = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \quad k = a^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

اب،

$$x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$$

$$\therefore \quad x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{4}{25} - \frac{3}{5} = 0$$

$$\therefore \quad \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{5}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{19}{25}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{19}{25}\right)$$

$$\therefore \quad x - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{یا} \quad x - \frac{2}{5} = -\frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{یا} \quad x = \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{2+\sqrt{19}}{5} \quad \text{یا} \quad x = \frac{2-\sqrt{19}}{5}$$

$\therefore$ مربعی مساوات کے جذر $\frac{2+\sqrt{19}}{5}$ اور $\frac{2-\sqrt{19}}{5}$ ہیں۔

> مساوات $x^2 + bx + c = 0$ کی صورت ہو تو
>
> $$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$
>
> اس صورت میں
>
> یعنی، $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$
>
> کی صورت میں لکھتے ہیں۔

مثال (2) حل کیجیے : $x^2 + 8x - 48 = 0$

طریقہ (I) : کامل مربع کا طریقہ

$x^2 + 8x - 48 = 0$

$\therefore\ x^2 + 8x + 16 - 16 - 48 = 0$

$\therefore\ (x + 4)^2 - 64 = 0$

$\therefore\ (x + 4)^2 = 64$

$\therefore\ x + 4 = 8$ یا $x + 4 = -8$

$\therefore\ x = 4$ یا $x = -12$

اس لیے مربعی مساوات کے جذر 4 یا 12– ہے۔

طریقہ (II) : اجزائے ضربی کا طریقہ

$x^2 + 8x - 48 = 0$

$\therefore\ x^2 + 12x - 4x - 48 = 0$

$\therefore\ x(x + 12) - 4(x + 12) = 0$

$\therefore\ (x + 12)(x - 4) = 0$

$\therefore\ x + 12 = 0$ یا $x - 4 = 0$

$\therefore\ x = -12$ یا $x = 4$

مشقی سیٹ 2.3

مندرجہ ذیل مربعی مساوات کامل مربع کے طریقے سے حل کیجیے۔

(1) $x^2 + x - 20 = 0$ (2) $x^2 + 2x - 5 = 0$ (3) $m^2 - 5m = -3$

(4) $9y^2 - 12y + 2 = 0$ (5) $2y^2 + 9y + 10 = 0$ (6) $5x^2 = 4x + 7$

آیئے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات حل کرنے کا ضابطہ (Formula for solving a quadratic equation)

عبارت $ax^2 + bx + c$ کو a سے تقسیم کرنے پر $(\because a \neq 0)$ عبارت $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ حاصل ہوتی ہے۔

عبارت $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ دو مربعوں کے فرق کی صورت میں لکھ کر مساوات $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

یعنی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے عام حل یا جذر حاصل کر سکتے ہیں۔

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \ldots \text{(I)}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \ldots\ldots$$ (طرفین کو a تقسیم کرنے پر)

$$\therefore\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$\therefore \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0 \quad , \quad \therefore \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$\therefore \quad x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ یا $x+\frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$\therefore \quad x = -\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ یا $x = -\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$\therefore \quad x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ یا $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

اس کو مختصر طور پر $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ، اس طرح لکھتے ہیں۔

اور اسے α (الفا) اور β (بیٹا) حروف سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\therefore \alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad , \quad \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ میں a، b، c کی قیمتیں عبارت $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ کی آسان صورت میں دیں تو مساوات کا حل حاصل ہوتا ہے۔

اس لیے $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ کو مربعی مساوات حل کرنے کا ضابطہ کہتے ہیں۔

مربعی مساوات کے دو حل میں سے کوئی بھی جذر کسی بھی علامت سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

بیان I کے بجائے درج ذیل کو بھی تسلیم کر سکتے ہیں ۔

$$\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{اور} \quad \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

یہ بات یاد رکھیں کہ $\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ہو تو $\alpha > \beta$ اور $\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ہو تو $\alpha < \beta$

حل کردہ مثالیں

ضابطے کا استعمال کر کے مندرجہ ذیل مساواتیں حل کیجیے۔

مثال (1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

حل : مساوات $m^2 - 14m + 13 = 0$

کا عام مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ سے

موازنہ کرنے پر، $a = 1, \; b = -14, \; c = 13$

$\therefore \; b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4\times 1\times 13$

$= 196 - 52$

$= 144$

$m = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-14)\pm\sqrt{144}}{2\times 1}$

$= \frac{14\pm 12}{2}$

$\therefore \; m = \frac{14+12}{2}$ یا $m = \frac{14-12}{2}$

$\therefore \; m = \frac{26}{2}$ یا $m = \frac{2}{2}$

$\therefore \; m = 13$ یا $m = 1$

$\therefore$ مربعی مساوات کے جذر 13 یا 1 ہے۔

مثال (2) $x^2 + 10x + 2 = 0$

حل: مساوات $x^2 + 10x + 2 = 0$ کا

$ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے پر،

$a = 1, \; b = 10, \; c = 2,$

$$\therefore \; b^2 - 4ac = (10)^2 - 4 \times 1 \times 2$$

$$= 100 - 8$$

$$= 92$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{4 \times 23}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2}$$

$$= \frac{2(-5 \pm \sqrt{23})}{2}$$

$$\therefore \; x = -5 \pm \sqrt{23}$$

$\therefore \; x = -5 + \sqrt{23}$ یا $x = -5 - \sqrt{23}$

$\therefore$ مربعی مساوات کے جذر $-5 + \sqrt{23}$ یا $-5 - \sqrt{23}$ ہے۔

مثال (3) $x^2 - 2x - 3 = 0$

حل: دی ہوئی مساوات کا عام مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے پر

$a = 1, \; b = -2, \; c = -3$

$$\therefore \; b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$$

$\therefore \; x = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2}$ یا $x = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2}$

$= \frac{2 + 4}{2}$ یا $= \frac{2 - 4}{2}$

$= 3$ یا $= -1$

اس لیے مربعی مساوات کا جذر 3 یا -1 ہے۔

مزید معلومات کے لیے

$x^2 - 2x - 3 = 0$ یہی مربعی مساوات ذیل میں ترسیم کے ذریعے حل کی گئی ہے۔ اسے سمجھ لیں۔

$x^2 - 2x - 3 = 0$ یعنی $x^2 = 2x + 3$

x کی جن قیمتوں سے مساوات $x^2 = 2x + 3$ مطمئن ہوتی ہے وہی قیمتیں اس مساوات کے حل ہوں گے۔

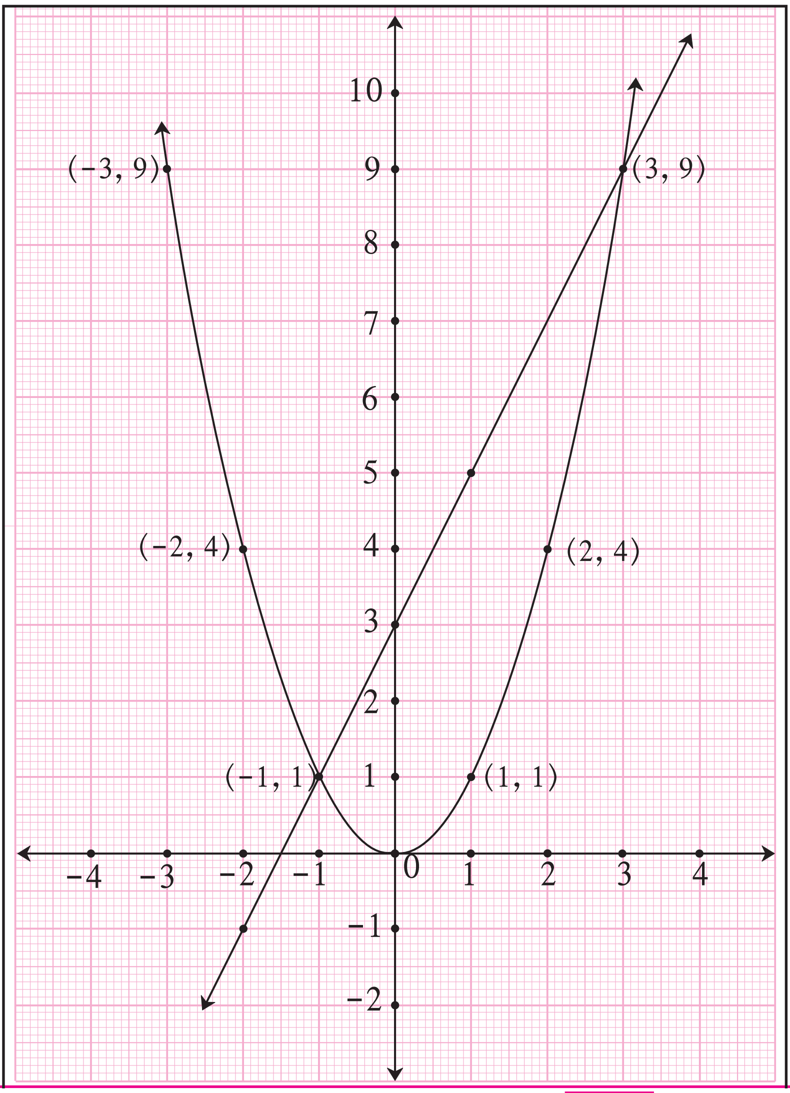
فرض کیجیے $y = x^2 = 2x + 3$, $y = x^2$ اور $y = 2x + 3$ ان مساوات کی ترسیم بنائیں گے۔

$y = x^2$

x	3	2	1	0	−1	−2	−3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y = 2x + 3$

x	−1	0	1	−2
y	1	3	5	−1



یہ ترسیمات ایک دوسرے کو $(-1, 1)$ اور $(3, 9)$ ان نقاط پر قطع کرتی ہیں۔

$\therefore$ مساوات $x^2 = 2x + 3$ یعنی،

$x^2 - 2x - 3 = 0$ کا حل $x = -1$ یا $x = 3$ ہے۔

بازو کی شکل میں مساوات $y = x^2$ اور $y = 2x + 3$ کی ترسیمات کھینچی گئی ہیں۔ ان کے نقطہ تقاطع سے مساوات $x^2 = 2x + 3$ یعنی، $x^2 - 2x - 3 = 0$ کے حل کس طرح حاصل ہوتے ہیں یہ سمجھنے کی کوشش کریں۔

مثال (4) $25x^2 + 30x + 9 = 0$

حل : مساوات $25x^2 + 30x + 9 = 0$ کا $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے پر،

$a = 25,\ b = 30,\ c = 9$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (30)^2 - 4 \times 25 \times 9$

$= 900 - 900 \quad = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-30 \pm \sqrt{0}}{2 \times 25}$$

$\therefore\ x = \frac{-30 + 0}{50}$ یا $x = \frac{-30 - 0}{50}$

$\therefore\ x = -\frac{30}{50}$ یا $x = -\frac{30}{50}$

$\therefore\ x = -\frac{3}{5}$ یا $x = -\frac{3}{5}$

دھیان میں رکھیں کہ مساوات $25x^2 + 30x + 9 = 0$ کے دونوں جذر مساوی ہیں۔

اِسی طرح $25x^2 + 30x + 9 = 0$

یعنی $(5x + 3)^2 = 0$ اسے دھیان میں رکھیں۔

مثال (5) $x^2 + x + 5 = 0$

حل : مساوات $x^2 + x + 5 = 0$ کا $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرنے پر،

$a = 1,\ b = 1,\ c = 5$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 5$

$= 1 - 20$

$= -19$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

لیکن $\sqrt{-19}$ یہ حقیقی عدد نہیں ہے اس لیے دی ہوئی مربعی مساوات کے جذر حقیقی عدد نہیں ہیں۔

عملی کام : مربعی مساوات $2x^2 + 13x + 15 = 0$ کو اجزائے ضربی کے طریقے سے، کامل مربع کے طریقے اور مربع کے ضابطے کی مدد سے حل کیجیے۔ جوابات ایک جیسے حاصل ہوتے ہیں، اس بات کی تصدیق کیجیے۔

مشقی سیٹ 2.4

1. مندرجہ ذیل مربعی مساواتوں کا معیاری صورت سے موازنہ کرکے a ، b ، c کی قیمتیں لکھیے۔

(1) $x^2 - 7x + 5 = 0$ (2) $2m^2 = 5m - 5$ (3) $y^2 = 7y$

2. مندرجہ ذیل مربعی مساواتوں کو ضابطے کا استعمال کرکے حل کیجیے۔

(1) $x^2 + 6x + 5 = 0$ (2) $x^2 - 3x - 2 = 0$ (3) $3m^2 + 2m - 7 = 0$

(4) $5m^2 - 4m - 2 = 0$ (5) $y^2 + \frac{1}{3}y = 2$ (6) $5x^2 + 13x + 8 = 0$

3. مربعی مساوات $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ کو ضابطے کا استعمال کرکے ذیل میں دیے ہوئے فلو چارٹ میں دی ہوئی معلومات کے مطابق حل کیجیے۔

حل:

مربعی مساوات $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ کا عام مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ سے موازنہ کرکے a, b, c کی قیمتیں معلوم کیجیے۔ ← $b^2 - 4ac$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ ← مربعی مساوات حل کرنے کا ضابطہ لکھیے۔ ← ضابطے میں قیمت لکھ کر حل معلوم کیجیے۔

آیئے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات کے جذروں کی نوعیت (Nature of roots of quadratic equation)

مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ہوتے ہیں، اس کا ہم مطالعہ کر چکے ہیں۔

(1) اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہو تو $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$ ،

اس لیے $x = \dfrac{-b + 0}{2a}$ یا $x = \dfrac{-b - 0}{2a}$ یعنی، $x = \dfrac{-b}{2a}$ یا $x = \dfrac{-b}{2a}$

∴ مربعی مساوات کے جذر حقیقی اور مساوی ہوتے ہیں۔

(2) اگر $b^2 - 4ac > 0$ ہو تو $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

یعنی $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ اور $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

∴ مربعی مساوات کے جذر حقیقی اور غیر مساوی ہوتے ہیں۔

(3) اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہو تو $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ حقیقی اعداد نہیں ہوتے۔ یعنی یہاں مربعی مساوات کے جذر حقیقی نہیں ہوتے ہیں۔

مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذروں کی نوعیت $b^2 - 4ac$ کی قیمت سے ظاہر ہوتی ہے اس لیے $b^2 - 4ac$ کو مربعی مساوات کا ممیّز (discrimant) کہتے ہیں۔ اسے Δ (ڈیلٹا) علامت سے ظاہر کرتے ہیں۔ (Δ لاطینی حرف ہے۔)

عملی کام : ذیل میں دی ہوئی معلومات کی بنا پر خالی جگہ مکمل کیجیے۔

	ممیّز کی قیمت		جذروں کی نوعیت
(1)	50	→	
(2)	-30	→	
(3)	0	→	

حل کردہ مثالیں

مثال (1) مربعی مساوات $x^2 + 10x - 7 = 0$ میں ممیّز کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: مربعی مساوات $x^2 + 10x - 7 = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر

$$a = 1,\ b = 10\ ,\ c = -7$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times (-7)$$
$$= 100 + 28$$
$$= 128$$

مثال (2) مندرجہ ذیل مساواتوں کے ممیّز سے جذروں کی نوعیت متعین کیجیے۔

(i) $2x^2 - 5x + 7 = 0$

حل: مساوات $2x^2 - 5x + 7 = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر،

$$a = 2,\ b = -5\ ,\ c = 7$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7$$
$$\therefore\ \Delta = 25 - 56$$
$$= -31$$
$$\therefore\ b^2 - 4ac < 0$$

اس لیے مربعی مساوات کے جذر غیر حقیقی ہیں۔

(ii) $x^2 + 2x - 9 = 0$

حل: مساوات $x^2 + 2x - 9 = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر،

$$a = \square,\ b = 2,\ c = \square$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times \square \times \square$$
$$\therefore\ \Delta = 4 + \square$$
$$= 40$$
$$\therefore\ b^2 - 4ac > 0$$

اس لیے مربعی مساوات کے جذر حقیقی اور غیر مساوی ہیں۔

(iii) $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$

حل: مساوات $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر،

یہاں، $a = \sqrt{3},\ b = 2\sqrt{3}\ ,\ c = \sqrt{3}$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$
$$= 4 \times 3 - 4 \times 3$$
$$= 12 - 12$$
$$= 0$$

اس لیے مربعی مساوات کے جذر حقیقی اور مساوی ہیں۔

آئیے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات کے جذروں اور ضریبوں کے درمیان تعلق
(Relation between the roots and coefficients of a quadratic equation)

اگر مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر α اور β ہوں تب،

$$\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= -\frac{2b}{2a}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

اسی طرح،

$$\alpha \times \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\times\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

$$\therefore \alpha\,\beta = \frac{c}{a}$$

عملی کام: ذیل میں دیے ہوئے چوکونوں میں مناسب عدد لکھیے۔

مربعی مساوات $10x^2 + 10x + 1 = 0$ کے لیے $\alpha + \beta = \boxed{}$ اور

$\alpha \times \beta = \boxed{}$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) α اور β، مربعی مساوات $2x^2 + 6x - 5 = 0$ کے جذر ہوں تب $\alpha + \beta$ اور $\alpha \times \beta$ معلوم کیجیے۔

حل: مربعی مساوات $2x^2 + 6x - 5 = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر،

$$a = 2,\ b = 6,\ c = -5$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$$

اور، $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$

مثال (2) مربعی مساوات $x^2 - 13x + k = 0$ کے جذروں کا فرق 7 ہے تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : مربعی مساوات $x^2 - 13x + k = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر ،

$$a = 1,\ b = -13\ ,\ c = k$$

فرض کیجیے، α اور β دی ہوئی مربعی مساوات کے جذر ہیں اور $\alpha > \beta$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-13)}{1} = 13 \quad \ldots (I)$$

لیکن، $\alpha - \beta = 7 \quad \ldots$ (دیا ہوا ہے) $\ldots (II)$

$2\alpha = 20 \quad \ldots$ (مساوات (I) اور (II) کی جمع کرنے پر)

$$\therefore \alpha = 10$$

$\therefore 10 + \beta = 13 \quad \ldots$ [(I) کی بنا پر]

$$\therefore \beta = 13 - 10$$

$$\therefore \beta = 3$$

لیکن ،

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$\therefore 10 \times 3 = \frac{k}{1}$$

$$\therefore k = 30$$

مثال (3) α اور β ، مربعی مساوات $x^2 + 5x - 1 = 0$ کے جذر ہوں تو

(i) $\alpha^3 + \beta^3$ اور (ii) $\alpha^2 + \beta^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : مساوات $x^2 + 5x - 1 = 0$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c = 0$ سے کرنے پر،

یہاں ، $a = 1,\ b = 5\ ,\ c = -1$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

(i) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= (-5)^3 - 3 \times (-1) \times (-5)$

$= -125 - 15$

$\alpha^3 + \beta^3 = -140$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (-5)^2 - 2 \times (-1)$

$= 25 + 2$

$\alpha^2 + \beta^2 = 27$

آیئے، سمجھ لیں۔

جذر دیے ہوئے ہوں تب مربعی مساوات حاصل کرنا
(To obtain a quadratic equation having given roots)

فرض کیجیے، x متغیر والی مربعی مساوات کے جذر α اور β ہوں تب

$\therefore\ x = \alpha$ یا $x = \beta$

$\therefore\ x - \alpha = 0$ یا $x - \beta = 0$

$\therefore\ (x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$\therefore\ x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0$

$\therefore\ x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

یعنی α اور β جذر کے مربعی مساوات کو ذیل کے ضابطے سے حاصل کر سکتے ہیں :

x^2 – (جذروں کا مجموعہ) x + جذروں کا حاصل ضرب = 0

عملی کام (I) : جذروں کا مجموعہ 10 اور جذروں کا حاصل ضرب 9 ہو تو حاصل ہونے والی مربعی مساوات لکھیے۔

$x^2 - \square\, x + \square = \square$ .... (مطلوبہ مربعی مساوات ہے)

عملی کام (II) : $\alpha = 2$ اور $\beta = 5$ جذر والی مربعی مساوات کون سی ہے؟

مربعی مساوات $x^2 - (\square + \square)\, x + \square \times \square = 0$ کو اس طرح لکھتے ہیں۔

یعنی ، $x^2 - \square\, x + \square = 0$

حل کردہ مثالیں

مثال : جس مربعی مساوات کے جذر 3– اور 7– ہوں ایسی مربعی مساوات بنائیے۔

حل : فرض کیجیے، $\alpha = -3$ اور $\beta = -7$

$\therefore\ \alpha + \beta = (-3) + (-7) = -10\ ,\ \alpha \times \beta = (-3) \times (-7) = 21$

$\therefore\ x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0$ ... (مربعی مساوات کا ضابطہ)

$\therefore\ x^2 - (-10)\, x + 21 = 0$

$\therefore\ x^2 + 10x + 21 = 0$

اسے ذہن میں رکھیں۔

(1) مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذر α اور β ہوں، تب

$$\text{(i) } \alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{اور}, \quad \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\text{(ii) } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{اور}, \quad \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

(2) مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جذروں کی نوعیت الجبرائی عبارت $b^2 - 4ac$ کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے۔اس لیے اس عبارت کو ممیّز (discriminant) کہتے ہیں اور ممیّز کو Δ لاطینی حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

(3) اگر $\Delta = 0$ ہو تو، مربعی مساوات کے دونوں جذر مساوی اور حقیقی اعداد ہوتے ہیں۔

اگر $\Delta > 0$ ہو تو، مربعی مساوات کے جذر غیر مساوی اور حقیقی اعداد ہوتے ہیں۔

اگر $\Delta < 0$ ہو تو، مربعی مساوات کے جذر غیر حقیقی عدد ہوتے ہیں۔

(4) جن مربعی مساوات کے جذر α اور β ہوتے ہیں اس مربعی مساوات کو $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مشقی سیٹ 2.5

.1 مندرجہ ذیل خالی چوکون مکمل کیجیے۔

(1) مربعی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ → $b^2 - 4ac = 5$ → .... ؛ $b^2 - 4ac = -5$ → .... (جذروں کی نوعیت)

(2) جذروں کا مجموعہ $= -7$ → مربعی مساوات .... ← جذروں کا حاصل ضرب $= 5$

(3) اگر α اور β ذیل کے مربعی مساوات کے جذر ہوں تب،

$2x^2 - 4x - 3 = 0$ → $\alpha + \beta = ...$ ؛ $\alpha \times \beta = ...$

.2 مندرجہ ذیل مربعی مساوات کے ممیّز کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $x^2 + 7x - 1 = 0$ (2) $2y^2 - 5y + 10 = 0$ (3) $\sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} = 0$

.3 ممیّز کی قیمت کی بنا پر ذیل کے مربعی مساوات کے جذروں کی نوعیت طے کیجیے۔

(1) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (2) $2y^2 - 7y + 2 = 0$ (3) $m^2 + 2m + 9 = 0$

4. جس مربعی مساوات کے جذرذیل کے مطابق ہوں ایسی مربعی مساوات بنائیے۔

(1) 0 اور 4 (2) 3 اور -10 (3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (4) $2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}$

★5. مربعی مساوات $x^2 - 4kx + k + 3 = 0$ کے جذروں کا مجموعہ، ان کے حاصلِ ضرب کے دگنا ہو تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

★6. اگر α اور β مربعی مساوات $y^2 - 2y - 7 = 0$ کے جذر ہوں تو ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\alpha^3 + \beta^3$

7. ذیل کے ہر مربعی مساوات کے جذر حقیقی اور مساوی ہوں تب k کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $3y^2 + ky + 12 = 0$ (2) $kx(x - 2) + 6 = 0$

آیئے، سمجھ لیں۔

مربعی مساوات کا اطلاق (Application of quadratic Equation)

روزمرہ زندگی میں مختلف مسائل کا حل معلوم کرنے کے لیے مربعی مساوات کارآمد ثابت ہوتی ہے۔ اس کے بارے میں ہم یہاں مطالعہ کریں گے۔

مثال (1): تیوسا کے رَتنا کرراؤ کے کھیت میں پیاز کی مستطیلی چال کے قاعدے کی لمبائی، چوڑائی سے 7 میٹر زیادہ ہے اور وتر اُس کی لمبائی سے 1 میٹر زیادہ ہے تو اس پیاز کی چالی کے قاعدے کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے، پیاز کی مستطیلی چال کے قاعدے کی چوڑائی x میٹر ہے۔

$\therefore$ لمبائی $= (x + 7)$ میٹر، وتر $= x + 7 + 1 = (x + 8)$ میٹر

فیثا غورث کے مسئلے کی رو سے،

$$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$$

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$$

$\therefore x^2 + 14x - 16x + 49 - 64 = 0$

$\therefore x^2 - 2x - 15 = 0$

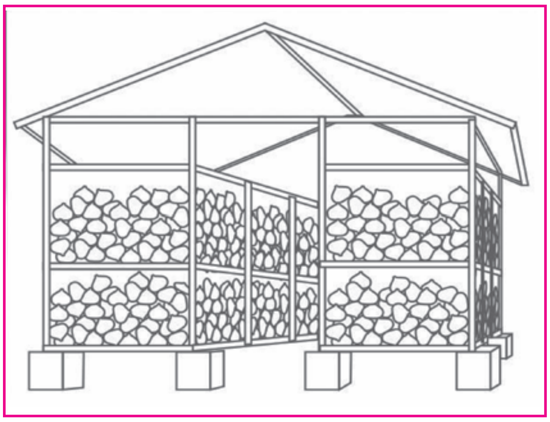
$\therefore x^2 - 5x + 3x - 15 = 0$

$\therefore x(x - 5) + 3(x - 5) = 0$

$\therefore (x - 5)(x + 3) = 0$

$\therefore x - 5 = 0$ یا $x + 3 = 0$

$\therefore x = 5$ یا $x = -3$



پیاز کی چال

لیکن چوڑائی منفی نہیں ہوتی۔ (لمبائی ہمیشہ مثبت ہوتی ہے۔)

$\therefore x \neq -3$

$\therefore x = 5$ اور $x + 7 = 5 + 7 = 12$

$\therefore$ پیاز کی چال کے قاعدے کی لمبائی 12 میٹر اور چوڑائی 5 میٹر ہے۔

مثال (2) ایک ریل گاڑی مساوی رفتار سے 360 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتی ہے لیکن اس کی رفتار 5 کلومیٹر فی گھنٹا بڑھانے پر، اسے وہی فاصلہ طے کرنے کے لیے 48 منٹ کم درکار ہوتے ہیں تو ریل گاڑی کی ابتدائی رفتار معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے، ریل گاڑی کی ابتدائی رفتار x کلومیٹر فی گھنٹا ہے۔

اس لیے رفتار میں 5 کلومیٹر فی گھنٹا کا اضافہ کرنے پر رفتار $(x + 5)$ کلومیٹر فی گھنٹا ہو جائے گی۔

360 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے لیے ابتدا میں درکار وقت $= \dfrac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}} = \dfrac{360}{x}$ گھنٹہ

رفتار میں اضافہ کرنے پر وہی فاصلہ طے کرنے کے لیے درکار وقت $= \dfrac{360}{x+5}$

دی ہوئی شرط کے مطابق،

$$\frac{360}{x+5} = \frac{360}{x} - \frac{48}{60} \quad \ldots \left(\because\ 48 \text{ منٹ} = \frac{48}{60} \text{ گھنٹے}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = \frac{48}{60}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{48}{60 \times 360} \quad \ldots \text{(طرفین کو 360 سے تقسیم کرنے پر)}$$

$$\therefore \quad \frac{x+5-x}{x(x+5)} = \frac{4}{5 \times 360}$$

$$\therefore \quad \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{5 \times 90}$$

$$\therefore \quad \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{450}$$

$$\therefore \quad x^2 + 5x = 2250$$

$$\therefore \quad x^2 + 5x - 2250 = 0$$

$$\therefore \quad x^2 + 50x - 45x - 2250 = 0$$

$$\begin{array}{c} -2250 \\ +50 \quad -45 \end{array}$$

$$\therefore \quad x(x + 50) - 45(x + 50) = 0$$

$$\therefore \quad (x + 50)(x - 45) = 0$$

$$\therefore \quad x + 50 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 45 = 0$$

$$\therefore \quad x = -50 \quad \text{یا} \quad x = 45$$

$$\therefore \quad x \neq -50 \quad \ldots \text{(لیکن رفتار منفی نہیں ہوتی۔)}$$

$$\therefore \quad x = 45$$

اس لیے ریل گاڑی کی ابتدائی رفتار 45 کلومیٹر فی گھنٹا ہے۔

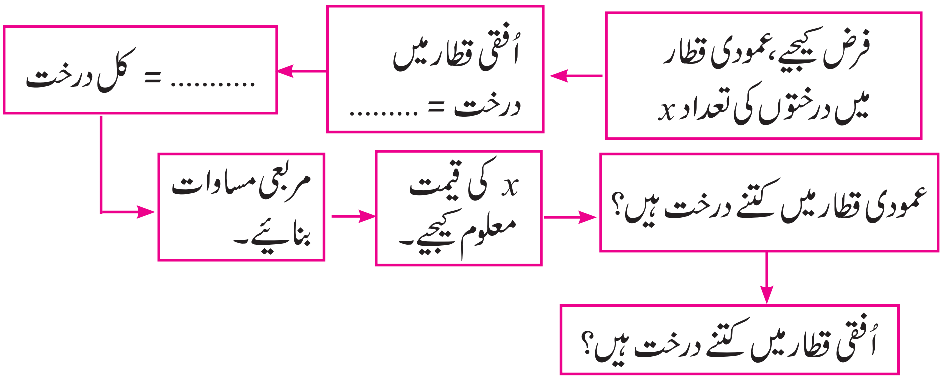
مشقی سیٹ 2.6

.1 انعم کے 2 سال پہلے اور 3 سال بعد کی عمروں کا حاصل ضرب 84 ہے تو اس کی موجودہ عمر معلوم کیجیے۔

.2 دو متواتر جفت طبعی اعداد کے مربعوں کا مجموعہ 244 ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔

.3 شری مدھوسدن کے سنترے کے باغ میں اُفقی قطاروں میں درختوں کی تعداد، عمودی قطاروں میں درختوں کی تعداد سے 5 زیادہ ہے۔ اگر سنترے کے باغ میں سنترے کے کل 150 درخت ہوں تب، اُفقی اور عمودی قطار میں درختوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

درج ذیل فلو چارٹ (رواں خاکہ) کی مدد سے مثال حل کیجیے۔



.4 ندیم، دانش سے 5 سال بڑا ہے۔ ان کی عمروں کے ضربی معکوس کا مجموعہ $\frac{1}{6}$ ہے۔ ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

.5 سفیان کو ریاضی کی پہلی آزمائش میں حاصل کردہ مارکس سے دوسرے ٹسٹ میں 10 مارکس زیادہ حاصل ہوئے۔ دوسری آزمائش کے مارکس کا 5 گنا، پہلی آزمائش کے مارکس کا مربع ہے تو اس کے پہلی آزمائش کے مارکس معلوم کیجیے۔

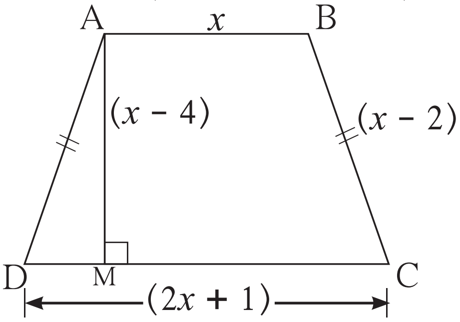
.6★ محترم قاسم صاحب مٹی کے برتن بنانے کی گھریلو صنعت کے مالک ہیں۔ وہ ہر روز مخصوص تعداد میں برتن تیار کرتے ہیں۔ ہر برتن کے بنانے کی لاگت، بنائے گئے برتن کی تعداد کے 10 گنا سے 40 روپے زیادہ ہوتی ہے۔ اگر ایک دن کی برتن بنانے کی لاگت 600 روپے ہو تو ہر برتن بنانے کی لاگت اور ایک دن میں بنائے گئے برتنوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

.7★ ایک کشتی کو دریا کے بہاؤ کے مخالف سمت 36 کلومیٹر جا کر واپس آنے کے لیے ایک چکر کو 8 گھنٹے لگتے ہیں۔ ساکن پانی میں کشتی کی رفتار 12 کلومیٹر فی گھنٹا ہو تو دریا کے بہاؤ کی رفتار معلوم کیجیے۔

.8★ ڈیوڈ کو ایک کام کرنے کے لیے شاہد سے 6 دن زیادہ لگتے ہیں۔ دونوں مل کر اس کام کو 4 دن میں مکمل کرتے ہیں تو اس کام کو مکمل کرنے کے لیے ہر ایک کو کتنے دن درکار ہوں گے؟

.9★ 460 کو ایک طبعی عدد سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت، مقسوم الیہ کے 5 گنا سے 6 زیادہ حاصل ہوتا ہے اور باقی 1 رہتا ہے تو مقسوم علیہ اور خارج قسمت معلوم کیجیے۔

.10★ مقابل کی شکل میں ذوزنقہ $\square ABCD$ میں $AB \parallel CD$ اور رقبہ 33 مربع سم ہے تو شکل میں دی ہوئی معلومات کے مطابق چاروں اضلاع کی لمبائیاں معلوم کرنے کے لیے اگلے صفحے پر دیا ہوا عملی کام مکمل کیجیے۔



حل : $\square ABCD$ ایک ذوزنقہ ہے۔ $AB \parallel CD$

$A(\square ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \times \boxed{}$

$\therefore\ 33 = \frac{1}{2}(x + 2x + 1) \times \boxed{}$

$\therefore\ \boxed{} = (3x + 1) \times \boxed{}$

$\therefore\ 3x^2 + \boxed{} - \boxed{} = 0$

$\therefore\ 3x\,(\ldots\ldots) + 10\,(\ldots\ldots) = 0$

$\therefore\ (3x + 10)\,(\ldots\ldots) = 0$

$\therefore\ (3x + 10) = 0$ یا $\boxed{} = 0$

$\therefore\ x = -\frac{10}{3}$ یا $x = \boxed{}$

لیکن لمبائی منفی نہیں ہوتی۔

$\therefore\ x \neq -\frac{10}{3}\ ,\ \therefore\ x = \boxed{}$

AB = ..., CD = ..., AD = BC = ...

مجموعۂ سوالات 2

.1 درج ذیل سوالوں کے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(1) درج ذیل میں سے کون سی مساواتیں مربعی ہیں؟

(A) $\frac{5}{x} - 3 = x^2$ (B) $x\,(x + 5) = 2$ (C) $n - 1 = 2n$ (D) $\frac{1}{x^2}\,(x + 2) = x$

(2) ذیل میں کون سی مساواتیں مربعی مساوات نہیں ہیں؟

(A) $x^2 + 4x = 11 + x^2$ (B) $x^2 = 4x$ (C) $5x^2 = 90$ (D) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(3) مربعی مساوات $x^2 + kx + k = 0$ کے جذر حقیقی اور مساوی ہوں تو k کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہوگی؟

(A) 0 (B) 4 (C) 0 یا 4 (D) 2

(4) مساوات $\sqrt{2}\,x^2 - 5x + \sqrt{2} = 0$ کے لیے ممیّز کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہوگی؟

(A) -5 (B) 17 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2} - 5$

(5) ذیل میں سے کس مربعی مساوات کے جذر 3 اور 5 ہیں؟

(A) $x^2 - 15x + 8 = 0$ (B) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(C) $x^2 + 3x + 5 = 0$ (D) $x^2 + 8x - 15 = 0$

(6) درج ذیل میں کس مربعی مساوات کے جذروں کا مجموعہ -5 ہے؟

(A) $3x^2 - 15x + 3 = 0$ (B) $x^2 - 5x + 3 = 0$

(C) $x^2 + 3x - 5 = 0$ (D) $3x^2 + 15x + 3 = 0$

(7) مربعی مساوات $\sqrt{5}\,m^2 - \sqrt{5}\,m + \sqrt{5} = 0$ کے لیے درج ذیل میں سے کون سا بیان درست ہوگا؟

(A) حقیقی اور غیر مساوی جذر (B) حقیقی اور مساوی جذر

(C) جذر غیر حقیقی عدد ہیں (D) تین جذر ہیں

(8) مربعی مساوات $x^2 + mx - 5 = 0$ کا ایک جذر 2 ہو تو m کی قیمت درج ذیل میں سے کون سی ہوگی؟

(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

2. مندرجہ ذیل میں کون سی مساوات مربعی مساوات ہیں؟

(1) $m^2 + 2m + 11 = 0$ (2) $x^2 - 2x + 5 = x^2$ (3) $(x + 2)^2 = 2x^2$

3. مندرجہ ذیل میں سے ہر مساوات کے لیے ممیّز کی قیمت معلوم کیجیے۔

(1) $2y^2 - y + 2 = 0$ (2) $5m^2 - m = 0$ (3) $\sqrt{5}x^2 - x - \sqrt{5} = 0$

4. مربعی مساوات $2x^2 + kx - 2 = 0$ کا ایک جذر -2 ہے تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

5. ایسی مربعی مساوات بنائیے جس کے جذر ذیل کے مطابق ہیں۔

(1) 10 اور -10 (2) $1-3\sqrt{5}$ اور $1+3\sqrt{5}$ (3) 0 اور 7

6. مندرجہ ذیل مربعی مساوات کے جذروں کی نوعیت طے کیجیے۔

(1) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (2) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$ (3) $m^2 - 2m + 1 = 0$

7. مندرجہ ذیل مربعی مساواتیں حل کیجیے۔

(1) $\frac{1}{x+5} = \frac{1}{x^2}$ ... $(x \neq 0, x + 5 \neq 0)$ (2) $x^2 - \frac{3x}{10} - \frac{1}{10} = 0$ (3) $(2x + 3)^2 = 25$

(4) $m^2 + 5m + 5 = 0$ (5) $5m^2 + 2m + 1 = 0$ (6) $x^2 - 4x - 3 = 0$

★8. مربعی مساوات $(m - 12)x^2 + 2(m - 12)x + 2 = 0$ کے جذر حقیقی اور مساوی ہوں تو m کی قیمت معلوم کیجیے۔

9. ایک مربعی مساوات کے دو جذروں کا مجموعہ 5 اور اس کے مکعبوں کا مجموعہ 35 ہے۔ وہ مربعی مساوات لکھیے۔

★10. ایسی مربعی مساوات بنائیے کہ جس مساوات کے جذر $2x^2 + 2(p + q)x + p^2 + q^2 = 0$ اس کے جذروں کے مجموعے کا مربع اور فرق کا مربع ہو۔

★11. مکند کے پاس ساگر کی بہ نسبت 50 روپے زیادہ ہے۔ ان کے پاس موجود رقموں کا حاصل ضرب 15000 ہو تو ہر ایک کے پاس کتنی رقم ہے؟

★12. دو اعداد کے مربعوں کا فرق 120 ہے۔ چھوٹے عدد کا مربع، بڑے عدد کا دگنا ہے۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔

★13. فردوس کو سالگرہ کے موقع پر 540 سنترے کچھ طلبہ میں مساوی طور پر تقسیم کرنا ہے۔ اگر 30 طلبہ زیادہ ہوتے تو ہر ایک کو 3 سنترے کم ملے ہوتے تو طلبہ کی تعداد معلوم کیجیے۔

★14. تلویل کے کسان شری دِنیش کے مستطیل نما کھیت کی لمبائی، چوڑائی کے دگنا سے 10 میٹر زیادہ ہے۔ انھوں نے کھیت میں بارش کا پانی جمع کرنے کے لیے کھیت کی چوڑائی کا $\frac{1}{3}$ گنا ضلع کا مربع نما چھوٹا سا تالاب بنایا۔ اصل کھیت کا رقبہ، چھوٹے تالاب کے رقبے کا 20 گنا ہے تو اس کھیت کی لمبائی اور چوڑائی نیز چھوٹے تالاب کا ضلع معلوم کیجیے۔

★15. ایک حوض دو نل کے ذریعے 2 گھنٹے میں مکمل بھرا جاتا ہے۔ صرف چھوٹے نل سے حوض کو بھرنے کے لیے درکار وقت، صرف بڑے نل کے ذریعے حوض بھرنے کے لیے درکار وقت سے 3 گھنٹا زیادہ لگتا ہے تو ہر نل سے حوض بھرنے کے لیے کتنا وقت درکار ہوگا؟

NHZJ42

3 حسابی تصاعد (Arithmetic Progression)

آیئے، سیکھیں۔

- تواتر
- حسابی تصاعد میں n واں رکن
- حسابی تصاعد
- حسابی تصاعد میں پہلے n ارکان کی جمع

آیئے، سمجھ لیں۔

تواتر (Sequence)

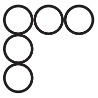
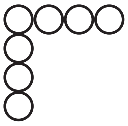
ہم $1, 2, 3, 4, \ldots$ اِن اعداد کو ترتیب سے لکھتے ہیں۔ یہ اعداد کی ایک ترتیب ہے۔ اس ترتیب میں کون سا عدد کس مقام پر ہے، یہ ہم بتا سکتے ہیں جیسے 13 عدد 13 ویں نمبر پر ہے۔ اعداد کی دوسری ترتیب $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$ دیکھیے۔ اس میں اعداد ایک خاص ترتیب سے لکھے ہوئے ہیں۔ یہاں عدد $16 = 4^2$ چوتھے نمبر پر، جبکہ عدد $25 = 5^2$ 5 ویں مقام پر ہے۔ عدد $49 = 7^2$ ساتویں مقام پر ہے یعنی اس ترتیب میں کون سا عدد کس مقام پر ہے، ہم بتا سکتے ہیں۔

طبعی اعداد کے مطابق خاص ترتیب میں لکھے ہوئے اعداد کے گروہ کو **تواتر** کہتے ہیں۔

تواتر میں خاص مقام پر ایک خاص طبعی عدد لکھا جاتا ہے۔ ان طبعی اعداد کو $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots, a_n$ اس ترتیب میں لکھتے ہیں تو سمجھ میں آتا ہے کہ a_1 پہلا، a_2 دوسرا،.... اس طرح a_n یہ n واں عدد ہے۔ اعداد کے تواتر کو $f_1, f_2, f_3, \ldots$ جیسے حروف سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہاں ایسا سمجھ میں آتا ہے کہ اس میں بھی ایک خاص ترتیب سے اعداد لکھے ہوئے ہیں۔

کسی جماعت میں بچے قواعد کے لیے میدان پر ایک قطار میں کھڑے ہوتے ہیں ان کی ترتیب طے ہوتی ہے۔ اس سے ان کا تواتر بنتا ہے۔ ہمیں تجربہ ہے کہ کچھ تواتر میں خاص ترتیبی سلسلہ ہوتا ہے۔

ذیل کے تواتر کو مکمل کیجیے۔

تواتر									
دائروں کی تعداد	1	3	5	7					

تواتر	ΔΔ Δ ΔΔ	ΔΔΔ Δ Δ ΔΔΔ	ΔΔΔΔ Δ Δ Δ ΔΔΔΔ				
مثلثوں کی تعداد	5	8	11				

اعداد کا اس طرح تیار ہونے والا تواتر دیکھیے۔ پہلے والے عدد پر کون سا عمل کریں گے کہ اگلا (بعد والا) عدد حاصل ہوتا ہے؟ اس اصول کو معلوم کیجیے۔اس اُصول سے بعد کے تمام اعداد لکھ سکتے ہیں۔

آگے دیے ہوئے اعداد کا سلسلہ دیکھیے۔ $\rightarrow$ 2, 11, −6, 0, 5, −37, 8, 2, 61

یہاں $a_1 = 2$ ، $a_2 = 11$ ، $a_3 = -6$ ، .... ان اعداد کی فہرست بھی تواتر ہے۔لیکن ایک خاص رکن اس مقام پر کیوں ہے، یہ بتا نہیں سکتے۔اسی طرح ان ترتیب وار ارکان میں کیا تعلق ہے، یہ صحیح طور پر بتا نہیں سکتے۔

عام طور پر جس ترتیب سے بعد میں آنے والا رکن بتا سکے، اس کا ایک اصول ہوتا ہے۔ آئیے، اس ترتیب پر غور کریں۔

مثال: (i) $\rightarrow$ 4, 8, 12, 16, . . . (ii) 2, 4, 8, 16, 32, . . . (iii) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \ldots$

تواتر میں ارکان (Terms in sequence)

تواتر میں ترتیب وار ارکان $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n, \ldots$ $\leftarrow$ اس طرح بھی ظاہر کرتے ہیں۔ عام طور پر تواتر کو $\{t_n\}$ لکھتے ہیں۔

تواتر غیر مختتم ہوتو اس وقت یہ فرض کرلیا جاتا ہے کہ ہر مثبت صحیح عدد n ، سے منسلک ایک عدد ہوتا ہے۔

عملی کام I : درج ذیل تواتر دیکھیے۔ اس میں ارکان کے نمبر t_1 ، t_2 ، t_3 ، . . . سے دِکھائیے۔

(1) $\rightarrow$ 9, 15, 21, 27, . . . یہاں $t_1 = 9$ ، $t_2 = 15$ ، $t_3 = 21$ ، . . .

(2) $\rightarrow$ 7, 7, 7, 7, . . . یہاں $t_1 = 7$ ، $t_2 =$ ☐ ، $t_3 =$ ☐ ، . . .

(3) $\rightarrow$ −2, −6, −10, −14, . . . یہاں $t_1 = -2$ ، $t_2 =$ ☐ ، $t_3 =$ ☐ ، . . .

عملی کام II : ذیل میں کچھ تواتر دیے ہوئے ہیں۔اُن کے ارکان میں اگر کوئی اُصول سمجھ میں آتا ہوتو وہ بتائیے۔دو تواتر میں یکسانیت تلاش کیجیے۔ان تواتر کے ارکان میں کچھ اُصول دِکھائی دیتا ہوتو اسے سمجھنے کے لیے ذیل میں دی ہوئی ترتیب کا مشاہدہ کیجیے اور اگلے صفحے پر دیے ہوئے خالی چوکون پُر کیجیے۔

(1) 1, 4, 7, 10, 13, . . . (2) 6, 12, 18, 24, . . . (3) 3, 3, 3, 3, . . .

(4) 4, 16, 64, . . . (5) −1, −1.5, −2, −2.5, . . . (6) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$

اس تواتر میں تعلق معلوم کیجیے۔اس پر غوروخوض کیجیے۔

(1) 1, 4, 7, 10, □, □, . . .

$1 \oplus 3$ $4 \oplus 3$ $7 \oplus 3$ $10 \oplus 3$ □

(2) 6, 12, 18, 24, □, □, . . .

$6 + 6$ $12 + 6$ $18 + 6$ □   □

(3) 3, 3, 3, 3, □, □, . . .

$3 + 0$ $3 + 0$ $3 + 0$ □   □

(4) 4, 16, 64, □, □, □, . . .

4×4 16×4 64×4 $□ \times 4$ $□ \times 4$

(5) −1, −1.5, −2, −2.5, □, . . .

$(-1)+(-0.5)$ $-1.5+(-0.5)$ $-2+(-0.5)$ $-2.5+(-0.5)$

(6) 1^3, 2^3, 3^3, . . .

یہاں تواتر (1) ، (3) ، (5) میں پہلے والے رکن میں متعین عدد ملا کر بعد کا رکن ملتا ہے۔ یہ یکسانیت ہے۔اس قسم کے تواتر کو حسابی تصاعد کہتے ہیں۔

اوپر دیا ہوا (4) کا تواتر حسابی تصاعد نہیں ہے۔اس تواتر میں پہلے والے رکن کو ایک متعین عدد سے ضرب دے کر بعد والا رکن حاصل ہوتا ہے۔اس قسم کے تواتر کو ہندسی تصاعد (Geometric Progression) کہتے ہیں۔

اوپر دیا ہوا (6) تواتر حسابی تصاعد نہیں ہے اور نہ ہی ہندسی تصاعد ہے۔

اس جماعت میں ہم حسابی تصاعد کا مطالعہ کرنے والے ہیں۔

حسابی تصاعد (Arithmetic Progression)

ذیل میں کچھ تواتر دیے ہوئے ہیں۔ ہر تواتر کے آگے آنے والے تین ارکان لکھیے۔

(1) 100, 70, 40, 10, . . .   (2) −7, −4, −1, 2, . . .   (3) 4, 4, 4, . . .

ذیل میں دیے ہوئے تواتر میں بعد میں آنے والے ارکان معلوم کرنے کے لیے کون سا عمل کیا گیا ہے۔ اسے سمجھ لیجیے۔

پہلا رکن   دوسرا رکن   تیسرا رکن

(1) 100, 70, 40, 10, -20, -50, . . .

100+(-30)   70+(-30)   40+(-30)   10+(-30)   (-20)+(-30)

(2) -7, -4, -1, 2, 5, 8, . . .

-7+3   -4+3   -1+3   2+3   5+3

(3) 4, 4, 4, 4, 4, . . .

4 + 0   4 + 0   4 + 0   4 + 0

مذکورہ بالا اعداد کی ہر فہرست میں ہر رکن اُس سے پہلے والے رکن میں ایک متعین عدد ملانے سے حاصل ہوتا ہے۔ دو متواتر ارکان کے درمیان فرق مستقل ہے۔

مثال (1) میں فرق منفی ہے، (2) میں فرق مثبت ہے اور (3) میں فرق 0 ہے۔

دو متواتر ارکان میں فرق مستقل ہو تب اس کو مشترک فرق (common difference) کہتے ہیں۔ اس فرق کو 'd' حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

دیے ہوئے تواتر میں کوئی بھی دو متواتر ارکان کے درمیان فرق $(t_{n+1} - t_n)$ مستقل ہو تب اس تواتر کو حسابی تصاعد کہتے ہیں۔

ایسے تواتر میں $t_{n+1} - t_n = d$ مشترک فرق ہوتا ہے۔

حسابی تصاعد کا پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہو، تب ،

$t_1 = a, \quad t_2 = a + d, \quad t_3 = (a + d) + d = a + 2d$

پہلا رکن a اور مشترک فرق d والا حسابی تصاعد ذیل میں دیا ہوا ہے۔

$a, (a + d), (a + 2d), (a + 3d), \ \ldots$

حسابی تصاعد سے متعلق کچھ مثالیں دیکھتے ہیں۔

مثال (1) عارف ہر ماہ 100 روپے کی بچت کرتا ہے۔ ایک سال میں ہر ماہ کے آخر میں کل بچت ذیل کے مطابق ہے۔

مہینہ	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
بچت (₹)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

ماہانہ کل بچت دِکھانے والے اعداد حسابی تصاعد میں ہیں۔

مثال (2) پرکاش نے اپنے دوست سے 10000 روپے قرض لیے اور ہر ماہ 1000 روپے کے حساب سے قرض کی ادائیگی طے ہوئی تو ہر ماہ کتنی رقم ادا کرنا باقی رہ جائے گی، وہ ذیل کے مطابق ہے۔

مہینے کا نمبر شمار	1	2	3	4	5	...	...	...	...
ادائیگی کے لیے باقی رقم ₹	10,000	9,000	8,000	7,000	...	...	2,000	1,000	0

مثال (3) 5 کا پہاڑہ یعنی 5 سے تقسیم پذیر اعداد ذیل میں دیے ہوئے ہیں۔

$5,\ 10,\ 15,\ 20,\ .\ .\ .\ 50,\ 55,\ 60,\ .\ .\ .$ → یہ حسابی تصاعد ہے۔

اوپر دی ہوئی مثال (1) اور مثال (2) محدود حسابی تصاعد ہے جبکہ مثال (3) لامحدود حسابی تصاعد ہے۔

اسے ذہن میں رکھیں۔

(1) اگر تواتر میں $(t_{n+1} - t_n)$ فرق مستقل ہو تب اس تواتر کو حسابی تصاعد کہتے ہیں۔

(2) حسابی تصاعد کے دو متواتر ارکان کے درمیان مستقل فرق کو d حرف سے ظاہر کرتے ہیں۔

(3) مشترک فرق 'd' مثبت، منفی یا صفر ہو سکتا ہے۔

(4) حسابی تصاعد میں پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہو تب اس حسابی تصاعد کے ارکان $a,\ (a+d),\ (a+2d),\ .\ .\ .$ ہوتے ہیں۔

عملی کام : محدود حسابی تصاعد اور لامحدود حسابی تصاعد کی ایک ایک مثال لکھیے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ذیل میں کون سا تواتر حسابی تصاعد ہے، پہچانیے۔ اگر ہو تو اس کے بعد کے دو ارکان معلوم کیجیے۔

(1) $5,\ 12,\ 19,\ 26,\ .\ .\ .$ (2) $2,\ -2,\ -6,\ -10,\ .\ .\ .$

(3) $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ .\ .\ .$ (4) $\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ .\ .\ .$

حل (1): $5,\ 12,\ 19,\ 26,\ .\ .\ .$ اِس تواتر میں،

پہلا رکن $= t_1 = 5,\quad t_2 = 12,\quad t_3 = 19,\ .\ .\ .$

$t_2 - t_1 = 12 - 5 = 7$

$t_3 - t_2 = 19 - 12 = 7$

یہاں، پہلا رکن = 5 اور مشترک فرق $= d = 7$ ہے اور یہ مستقل ہے۔

∴ یہ تواتر حسابی تصاعد ہے۔ اس حسابی تصاعد کے بعد والے دو ارکان

$26 + 7 = 33,\qquad 33 + 7 = 40$

یہاں 33 اور 40 دیے ہوئے حسابی تصاعد کے بعد کے دو ارکان ہیں۔

(2) اس تواتر میں $2, -2, -6, -10, \ldots$،

$t_1 = 2, \quad t_2 = -2, \quad t_3 = -6, \quad t_4 = -10 \ldots$

$t_2 - t_1 = -2 - 2 = -4$

$t_3 - t_2 = -6 - (-2) = -6 + 2 = -4$

$t_4 - t_3 = -10 - (-6) = -10 + 6 = -4$

اِس بنا پر ہر دو متواتر ارکان کے درمیان فرق، یعنی $t_{n+1} - t_n = -4$ ہے۔ اس لیے مشترک فرق $d = -4$ ہے۔ جو مستقل ہے۔ اس لیے یہ حسابی تصاعد ہے۔

اس حسابی تصاعد کے بعد والے دو ارکان $(-10) + (-4) = -14$ اور $(-14) + (-4) = -18$ ہیں۔

(3) تواتر $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots \rightarrow$ میں،

$t_1 = 1, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 2, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 3, \quad t_6 = 3 \ldots$

$t_2 - t_1 = 1 - 1 = 0, \qquad t_3 - t_2 = 2 - 1 = 1$

$t_4 - t_3 = 2 - 2 = 0, \qquad t_3 - t_2 \neq t_2 - t_1$

اس تواتر میں متواتر دو ارکان کے درمیان فرق مستقل نہیں ہے۔ اس لیے دیا ہوا تواتر حسابی تصاعد نہیں ہے۔

(4) تواتر $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ میں،

$t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_3 = -\frac{1}{2}, \quad t_4 = -\frac{3}{2}$

$t_2 - t_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_3 - t_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_4 - t_3 = -\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

یہاں مشترک فرق $d = -1$ ہے جو مستقل ہے۔

$\therefore$ دیا ہوا تواتر حسابی تصاعد ہے۔

اس کے بعد والے دو ارکان معلوم کریں گے۔

$-\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}, \qquad -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$

$\therefore$ بعد کے دو ارکان $-\frac{5}{2}$ اور $-\frac{7}{2}$ ہیں۔

مثال (2) پہلا رکن a اور مشترک فرق d ذیل میں دیے ہوئے ہیں۔اس کے مطابق پہلے چار ارکان معلوم کرکے حسابی تصاعد لکھیے۔

(1) $a = -3,\ d = 4$ (2) $a = 200,\ d = 7$

(3) $a = -1,\ d = -\frac{1}{2}$ (4) $a = 8,\ d = -5$

حل: (1) $a = -3, \quad d = 4$ اِس بنا پر

$a = t_1 = -3$

$t_2 = t_1 + d = -3 + 4 = 1$

$t_3 = t_2 + d = 1 + 4 = 5$

$t_4 = t_3 + d = 5 + 4 = 9$

$\therefore$ حسابی تصاعد ، $\rightarrow -3, 1, 5, 9, \dots$

(2) $a = 200, \quad d = 7$

$a = t_1 = 200$

$t_2 = t_1 + d = 200 + 7 = 207$

$t_3 = t_2 + d = 207 + 7 = 214$

$t_4 = t_3 + d = 214 + 7 = 221$

$\therefore$ حسابی تصاعد ، $200, 207, 214, 221, \dots$

(3) $a = -1, \quad d = -\frac{1}{2}$

$a = t_1 = -1$

$t_2 = t_1 + d = -1 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

$t_3 = t_2 + d = -\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{2} = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-\frac{1}{2})$

$= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ حسابی تصاعد ، $-1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \dots$

(4) $a = 8, \quad d = -5$

$a = t_1 = 8$

$t_2 = t_1 + d = 8 + (-5) = 3$

$t_3 = t_2 + d = 3 + (-5) = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-5) = -7$

$\therefore$ حسابی تصاعد ، $8, 3, -2, -7, \dots$

مشقی سیٹ 3.1

1. درج ذیل میں سے کون سا تواتر حسابی تصاعد ہے؟ اگر حسابی تصاعد ہو تو ان میں سے ہر ایک کا مشترک فرق معلوم کیجیے۔

(1) $2, 4, 6, 8, \dots$ (2) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots$ (3) $-10, -6, -2, 2, \dots$

(4) $0.3, 0.33, .0333, \dots$ (5) $0, -4, -8, -12, \dots$ (6) $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \dots$

(7) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \dots$ (8) $127, 132, 137, \dots$

2. اگر حسابی تصاعد کا پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہو تب حسابی تصاعد لکھیے۔

(1) $a = 10, d = 5$ (2) $a = -3, d = 0$ (3) $a = -7, d = \frac{1}{2}$

(4) $a = -1.25, d = 3$ (5) $a = 6, d = -3$ (6) $a = -19, d = -4$

.3 ذیل میں دیے ہوئے ہر حسابی تصاعد کا پہلا رکن اور مشترک فرق معلوم کیجیے۔

(1) $5,\ 1,\ -3,\ -7,\ \ldots$　　(2) $0.6,\ 0.9,\ 1.2,\ 1.5,\ \ldots$

(3) $127,\ 135,\ 143,\ 151,\ \ldots$　　(4) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \ldots$

آیئے، غور کریں۔

• $5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots$ کیا یہ حسابی تصاعد ہے؟ اگر ہے تو اس کا 100 واں رکن بتائیے۔
کیا اس تصاعد میں 92 ہے؟ کیا 61 ہے؟

آیئے، سمجھ لیں۔

حسابی تصاعد کا *n* واں رکن (n^{th} term of an A.P.)

تواتر $5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots$ میں دو متواتر ارکان کے درمیان فرق 3 ہے۔ اس لیے یہ تواتر حسابی تصاعد ہے۔
اس میں پہلا رکن 5 ہے۔ 5 میں 3 ملانے سے 8 دوسرا رکن حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح 100 واں رکن حاصل کرنے کے لیے کیا کرنا ہوگا؟

	پہلا رکن	دوسرا رکن	تیسرا رکن	. . .
عدد →	5,	5 + 3 = 8,	8 + 3 = 11,	. . .

اس طریقے سے 100 ویں رکن تک پہنچنے کے لیے بہت وقت درکار ہوگا۔ اس کے لیے کیا کوئی ضابطہ حاصل ہوگا؟ آیئے، دیکھتے ہیں۔

5	8	11	14	. . .	. . .	. . .	. . .
5	5 + 1× 3	5 + 2× 3	5 + 3× 3	. . .	$5 + (n-1) \times 3$	$5 + n \times 3$	. . .
پہلا رکن t_1	دوسرا رکن t_2	تیسرا رکن t_3	چوتھا رکن t_4	. . .	n واں رکن t_n	$n+1$ واں رکن $t_n + 1$	. . .

عام طور پر t_1، t_2، t_3، . . . اس حسابی تصاعد میں پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہو تو،

$$t_1 = a$$

$$t_2 = t_1 + d = a + d = a + (2 - 1)\,d$$

$$t_3 = t_2 + d = a + d + d = a + 2d = a + (3 - 1)d$$

$$t_4 = t_3 + d = a + 2d + d = a + 3d = a + (4 - 1)d$$

یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

$$t_n = a + (n - 1)\,d$$

اب اس ضابطے کا استعمال کر کے حسابی تصاعد $5, 8, 11, 14, \ldots$ کا 100 واں رکن معلوم کریں گے۔

یہاں $a = 5$ اور $d = 3$ ہے۔

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore \quad t_{100} = 5 + (100 - 1) \times 3$$

$$= 5 + 99 \times 3$$

$$= 5 + 297$$

$$= 302$$

اس لیے اس حسابی تصاعد کا 100 واں رکن 302 ہے۔

اب کیا عدد 61 اس تصاعد میں ہے؟ یہ جواب حاصل کرنے کے لیے اسی ضابطے کا استعمال کرتے ہیں۔

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$t_n = 5 + (n - 1) \times 3$$

اگر n واں رکن 61 ہو، یعنی t_n

$$61 = 5 + 3n - 3$$

$$= 3n + 2$$

$$\therefore \quad 3n = 59$$

$$\therefore \quad n = \frac{59}{3}$$

لیکن n طبعی عدد نہیں ہے۔

$\therefore$ 61 اس تصاعد میں نہیں ہے۔

آئیے، غور کریں۔

کبیر کی والدہ، اس کی ہر سالگرہ کے وقت اس کی اونچائی نوٹ کرتی ہیں۔ وہ ایک سال کا تھا تب اس کی اونچائی 70 سم تھی۔ 2 سال کی عمر کا تھا تب 80 سم اونچائی تھی۔ 3 سال کی عمر پر اونچائی 90 سم تھی۔ اُس کی خالہ جان دسویں جماعت میں پڑھتی تھی۔ اس نے کہا کبیر کی اونچائی ہر سال حسابی تصاعد کی صورت میں بڑھتی ہوئی دِکھائی دیتی ہے۔ اسے تسلیم کرتے ہوئے اس نے بتایا کہ کبیر جب 15 سال کی عمر میں دسویں میں داخل ہوگا تب اس کی اونچائی کتنی ہوگی؟ اسے تعجب ہوا۔ آپ بھی کبیر کی اونچائی حسابی تصاعد کی صورت میں بڑھتی ہے، اس بات کو تسلیم کرتے ہوئے 15 سال کی عمر میں اس کی اونچائی کتنی ہوگی، معلوم کیجیے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ذیل کے حسابی تصاعد کے لیے t_n معلوم کیجیے اور اس بنا پر اس تصاعد کا 30 واں رکن معلوم کیجیے۔

$$3,\ 8,\ 13,\ 18,\ \ldots$$

حل: $3,\ 8,\ 13,\ 18,\ \ldots$ (دیا ہوا حسابی تصاعد)

یہاں $t_1 = 3,\ t_2 = 8,\ t_3 = 13,\ t_4 = 18, \ldots$

$d = t_2 - t_1 = 8 - 3 = 5, \quad n = 30$

ہمیں معلوم ہے کہ $t_n = a + (n-1)\, d$

$\therefore\ t_n = 3 + (n-1) \times 5 \ldots (\because a = 3,\ d = 5)$

$\therefore\ t_n = 3 + 5n - 5$

$\therefore\ t_n = 5n - 2$

$\therefore$ 30 واں رکن $= t_{30} = 5 \times 30 - 2$

$= 150 - 2 = 148$

مثال (2) درج ذیل حسابی تصاعد کا 560 کون سا رُکن ہے؟

$$2,\ 11,\ 20,\ 29,\ \ldots$$

حل: دیا ہوا حسابی تصاعد $\rightarrow 2,\ 11,\ 20,\ 29, \ldots$

یہاں $a = 2$ ، $d = 11 - 2 = 9$

فرض کیجیے، اس تصاعد کا n واں رکن 560 ہے۔ $t_n = 560$

$t_n = a + (n-1)d$

$\therefore\ 560 = 2 + (n-1) \times 9$

$= 2 + 9n - 9$

$\therefore\ 9n = 567$

$\therefore\ n = \frac{567}{9} = 63$

$\therefore$ دیے ہوئے حسابی تصاعد کا 63 واں رکن 560 ہے۔

مثال (3) دیے ہوئے تواتر $5, 11, 17, 23, \ldots$ میں کیا 301 عدد ہے؟

حل: تواتر $5, 11, 17, 23, \ldots$ میں

$t_1 = 5,\ t_2 = 11,\ t_3 = 17,\ t_4 = 23, \ldots$

$t_2 - t_1 = 11 - 5 = 6$

$t_3 - t_2 = 17 - 11 = 6$

$\therefore$ یہ تواتر حسابی تصاعد ہے۔

اس تصاعد میں پہلا رکن $a = 5$ اور $d = 6$ ہے۔

فرض کیجیے، n واں رکن 301 ہے۔

$t_n = a + (n-1)\, d = 301$

$\therefore\ 301 = 5 + (n-1) \times 6$

$= 5 + 6n - 6$

$\therefore\ 6n = 301 + 1 = 302$

$\therefore\ n = \frac{302}{6} \quad \ldots$ (یہ مثبت صحیح عدد نہیں ہے۔)

اس بنا پر دیے ہوئے تواتر میں 301 عدد موجود نہیں ہے۔

مثال (4) 4 سے تقسیم ہونے والے دو ہندسی عدد کتنے ہیں؟

حل: 4 سے تقسیم پذیر دو ہندسی اعداد کی فہرست :

$$\rightarrow 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ \ldots,\ 96$$

اس طرح یہ اعداد کتنے ہیں، ہم معلوم کریں گے۔

یہاں $t_n = 96$ ، $a = 12$ ، $d = 4$ اور $n = ?$

اس کی مدد سے ہم n کی قیمت معلوم کریں گے۔

$\therefore$ ضابطے کے مطابق ،

$t_n = a + (n-1)\,d$

$96 = 12 + (n-1) \times 4$

$= 12 + 4n - 4$

$\therefore\ 4n = 88$

$\therefore\ n = 22$

$\therefore$ 4 سے تقسیم پذیر دو ہندسی اعداد کی تعداد 22 ہے۔

مثال (5) اگر ایک حسابی تصاعد کا 10 واں رکن 25 اور 18 واں رکن 41 ہو تب اس تصاعد کا 38 واں رکن معلوم کیجیے۔ اسی طرح n واں رکن 99 ہو تب n کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : دیے ہوئے حسابی تصاعد میں $t_{10} = 25$ اور $t_{18} = 41$

ہمیں ضابطہ معلوم ہے کہ $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore\ t_{10} = a + (10 - 1)\,d$

$\therefore\ 25 = a + 9d \qquad \ldots$ (I)

اِس طرح، $t_{18} = a + (18 - 1)\,d$

$\therefore\ 41 = a + 17d \qquad \ldots$ (II)

$25 = a + 9d \qquad \ldots$ [(I) سے]

$\therefore\ a = 25 - 9d$

یہ قیمت مساوات (II) میں رکھنے پر

$\therefore\ a + 17d = 41 \qquad \ldots$ (مساوات II)

$\therefore\ 25 - 9d + 17d = 41$

$\therefore\ 8d = 41 - 25 = 16$

$\therefore\ d = 2$

$d = 2$ مساوات I میں لکھنے پر،

$a + 9d = 25$

$\therefore\ a + 9 \times 2 = 25$

$\therefore\ a + 18 = 25$

$\therefore\ a = 7$

اب، $t_n = a + (n - 1)\,d$ ضابطہ لیں گے۔

$\therefore\ t_{38} = 7 + (38 - 1) \times 2$

$= 7 + 37 \times 2$

$= 7 + 74$

$= 81$

اب، n واں رکن 99 ہو تب n کی قیمت معلوم کرنا ہے۔

$t_n = a + (n - 1)\,d$

$99 = 7 + (n - 1) \times 2$

$99 = 7 + 2n - 2$

$99 = 5 + 2n$

$\therefore\ 2n = 94$

$\therefore\ n = 47$

$\therefore$ دیے ہوئے تصاعد کا 38 واں رکن 81 ہے اور 47 واں رکن 99 ہے۔

مشقی سیٹ 3.2

.1 ذیل میں دیے ہوئے حسابی تصاعد کی مدد سے چوکونوں میں صحیح عدد لکھیے۔

(1) $1, 8, 15, 22, \ldots$

یہاں $a = \square, \ t_1 = \square, \ t_2 = \square, \ t_3 = \square, \ldots$

$t_2 - t_1 = \square - \square = \square$

$t_3 - t_2 = \square - \square = \square, \ \therefore \ d = \square$

(2) $3, 6, 9, 12, \ldots$

یہاں $t_1 = \square, \ t_2 = \square, \ t_3 = \square, \ t_4 = \square, \ldots$

$t_2 - t_1 = \square, \ t_3 - t_2 = \square, \ \therefore \ d = \square$

(3) $-3, -8, -13, -18, \ldots$

یہاں $t_1 = \square, \ t_2 = \square, \ t_3 = \square, \ t_4 = \square, \ldots$

$t_2 - t_1 = \square, \ t_3 - t_2 = \square, \ \therefore \ a = \square, d = \square$

(4) $70, 60, 50, 40, \ldots$

یہاں، $t_1 = \square, \ t_2 = \square, \ t_3 = \square, \ldots$

$\therefore \ a = \square, d = \square$

.2 ذیل میں دیا ہوا تواتر حسابی تصاعد ہے یا نہیں، طے کیجیے۔ اگر ہے تو اس حسابی تصاعد کا بیسواں رکن معلوم کیجیے۔

$-12, -5, 2, 9, 16, 23, 30, \ldots$

.3 حسابی تصاعد $12, 16, 20, 24, \ldots \rightarrow$ کا 24واں رکن معلوم کیجیے۔

.4 ذیل میں دیے ہوئے حسابی تصاعد کا 19 واں رکن معلوم کیجیے۔

$7, 13, 19, 25, \ldots$

.5 ذیل میں دیے ہوئے حسابی تصاعد کا 27واں رکن معلوم کیجیے۔

$9, 4, -1, -6, -11$

.6 تین ہندسی طبعی اعداد کے سیٹ میں 5 سے تقسیم پذیر اعداد کتنے ہیں؟ انھیں معلوم کیجیے۔

.7 ایک حسابی تصاعد کا 11 واں رکن 16 اور 21 واں رکن 29 ہے تو اس تصاعد کا 41 واں رکن معلوم کیجیے۔

.8 حسابی تصاعد $11, 8, 5, 2, \ldots \rightarrow$ میں -151 عدد کون سا رُکن ہے؟

.9 10 سے 250 تک کے طبعی اعداد میں سے کتنے اعداد 4 سے تقسیم پذیر ہیں؟

.10 ایک حسابی تصاعد کا 17 واں رکن، 10 ویں رکن سے 7 زیادہ ہے تو مشترک فرق معلوم کیجیے۔

عقل مند اتالیق

ایک راجا تھا۔اس نے اپنے بچوں یشونت راج اور گیتا دیوی کو گھڑسواری سکھانے کے لیے بالترتیب تارا اور میرا نامی اتالیق کو مقرر کیا۔ ان دونوں کو سال بھر کتنی تنخواہ دی جائے، اُن سے پوچھا۔

تارا نے کہا، ''مجھے پہلے مہینے کی تنخواہ 100 سکے دیے جائیں اور بعد کے ہر مہینے میں 100 سکوں کا اضافہ کیا جائے۔'' میرا نے کہا، مجھے پہلے مہینے 10 سکے تنخواہ دیجیے اور بعد کے ہر مہینے میں قبل والے مہینے کی تنخواہ کے دُگنا تنخواہ دی جائے۔''

مہاراجا نے اسے منظور کرلیا۔تین مہینے بعد یشونت راج نے اپنی بہن سے کہا، ''میری اتالیق تیری اتالیق سے زیادہ عقل مند محسوس ہوتی ہے، اس نے زیادہ تنخواہ مانگی ہے۔'' گیتا دیوی نے کہا، ''مجھے پہلے ایسا ہی محسوس ہوا لیکن میں نے میری اتالیق سے بھی پوچھا، ''آپ نے تنخواہ کم کیوں مانگی؟'' تب اس نے مسکراتے ہوئے کہا کہ آٹھ مہینے بعد دلچسپ واقعہ وقوع پذیر ہوگا۔اس وقت دیکھنا۔میں نے آٹھویں مہینے کی تنخواہ معلوم کی۔آپ بھی معلوم کر کے دیکھیے۔''

مہینہ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
تارا کی تنخواہ	100	200	300	400	500	600	700	800	900	. . .	. . .	. . .
میرا کی تنخواہ	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	. . .	. . .	. . .

آپ یہ جدول مکمل کیجیے۔

تارا کی تنخواہ 100، 200، 300، 400، ... یہ حسابی تصاعد ہے۔کیا آپ کی سمجھ میں آیا۔

$$t_1 = 100, \quad t_2 = 200,\ t_3 = 300, \ . \ . \ . \quad ; \qquad t_2 - t_1 = 100 \ = d$$

یہاں مشترک فرق 100 ہے۔

میرا کی تنخواہ 10، 20، 40، 80، ...حسابی تصاعد نہیں ہے کیونکہ $10 = 10 - 20$ ، $20 = 20 - 40$ ، $40 = 40 - 80$

یعنی یہاں مشترک فرق d مستقل نہیں ہے حالانکہ اس تصاعد میں ہر رکن اس سے قبل کے رکن کے دُگنا ہوجاتا ہے۔

یہاں ، $\frac{t_2}{t_1} = \frac{20}{10} = 2, \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{40}{20} = 2, \qquad \frac{t_4}{t_3} = \frac{80}{40} = 2$

اس لیے $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ یعنی بعد کے رکن اور قبل کے رکن کی نسبت مساوی ہے۔اس تصاعد کو ہندسی تصاعد کہتے ہیں۔ $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ نسبت 1 سے زیادہ ہو تب ہندسی تصاعد حسابی تصاعد کی بہ نسبت تیزی سے بڑھتا ہے۔اسے معلوم کیجیے۔

اگر نسبت 1 کی بہ نسبت کم ہو تو وہ تصاعد کس طرح بدلتا ہے، اسے بھی معلوم کیجیے۔ہم ان میں سے صرف حسابی تصاعد کا مطالعہ کرنے والے ہیں۔حسابی تصاعد میں n واں رکن کس طرح معلوم کرتے ہیں، اس کا مطالعہ کر چکے ہیں۔اب پہلے n ارکان کی جمع کس طرح معلوم کریں، اس کا مطالعہ کریں گے۔

فوراً جمع

تین سو سال قبل کی بات ہے۔ جرمنی میں بیوٹنر (Buttner) نام کے ایک استاد کا یک معلّمی اسکول تھا۔ جوہان مارٹن بارٹیلس نام کا صرف ایک معاون مددگاران کے پاس تھا۔ اس کا کام بچوں کو حروفِ تہجی سکھانا اور انھیں لکھنے کے قابل بنانا تھا۔ بیوٹنر کا سخت نظم وضبط تھا۔ بیوٹنر ماسٹر کو کوئی کام پورا کرنا تھا۔ جماعت میں طلبہ شور و غل نہ کریں، اس لیے کام میں مشغول رکھنے کے لیے انھوں نے ان بچوں کو حساب دینے کا فیصلہ کیا۔ انھوں نے طلبہ سے کہا، 1 سے 100 تک اعداد سلیٹ پر لکھو اور ان کی جمع کرو۔ ماسٹر صاحب نے اپنا کام شروع کر دیا۔ بچے اعداد لکھنے لگے۔ پانچ ہی منٹ میں ایک سلیٹ نیچے رکھنے کی آواز آئی۔ انھوں نے کارل گاؤس کی طرف دیکھا اور پوچھا، یہ کیا؟ میں نے تجھے 1 سے 100 اعداد لکھنے کے لیے کہا، اُن کی جمع کرنے کے لیے بھی کہا، سلیٹ اُلٹ کر کیوں رکھ دی؟ کیا تمھیں کچھ کرنا نہیں ہے؟"

کارل گاؤس نے کہا، "میں جمع کر چکا ہوں۔"

ماسٹر صاحب نے کہا، "کیا! اتنی جلدی جمع کر لی؟ اعداد بھی نہیں لکھا ہوگا، جواب کتنا آیا؟"

کارل گاؤس نے کہا، "پانچ ہزار پچاس۔"

ماسٹر صاحب حیرت زدہ رہ گئے اور پوچھا، "کس طرح جمع کیا؟"

کارل گاؤس کا فوراً جمع کرنے کا طریقہ :

متواتر ترتیب سے اعداد	1	2	3	4	. . . .	100
	+	+	+	+		+
اُلٹ ترتیب سے اعداد	100	99	98	97	. . . .	1
جمع	101	101	101	101	. . . .	101

ہر جوڑی کے عددوں کی جمع 101 آتی ہے۔ یہ جمع 100 مرتبہ کی گئی یعنی 101×100 کا ضرب کیا۔ وہ 10100 آیا۔ یہاں 1 سے 100 تک اعداد کو دو مرتبہ لیا گیا ہے۔ اس لیے 10100 کا نصف کیا۔ وہ 5050 آیا۔ لہٰذا $1, 2, 3, \ldots, 100$ اِن اعداد کی جمع 5050 ہے۔ ماسٹر صاحب نے اسے شاباشی دی۔

اب گاؤس کی جمع کرنے کی تکنیک کا استعمال کر کے حسابی تصاعد کے n ارکان کی جمع معلوم کرنے کا ضابطہ حاصل کریں گے۔

جوہان فریڈرِچ کارل گاؤس

30 اپریل 1777 - 23 فروری 1855

کارل گاؤس ایک عظیم جرمن ریاضی داں تھے۔ وہ براؤن سوائک میں ایک غیر تعلیم یافتہ خاندان میں پیدا ہوئے۔ بیوٹنر کے اسکول میں انھوں نے اپنی ذہانت کی جھلک دِکھائی۔ اسی دوران بیوٹنر کے معاون مددگار جوہان مارٹن بارٹیلس سے گاؤس کی دوستی ہوگئی۔ دونوں نے مل کر الجبرا پر ایک کتاب شائع کی۔ بارٹیلس نے گاؤس کی غیر معمولی ذہانت کو بہت سے لوگوں کے سامنے اُجاگر کیا۔

آیئے، سمجھ لیں۔

حسابی تصاعد کے پہلے n ارکان کی جمع (Sum of first n terms of an A.P.)

حسابی تصاعد $a, \; a+d, \; a+2d, \; a+3d, \; ... a+(n-1)d$

اس تصاعد میں پہلا رکن a ہے اور مشترک فرق d ہے۔ اس تصاعد میں پہلے n ارکان کی جمع S_n سے ظاہر کریں گے۔

$$S_n = [a] + [a+d] + \; ... \; + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]$$

اِن ارکان کو اُلٹی ترتیب میں لکھنے پر،

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \; ... \; + [a+d] + [a]$$

جمع کرنے پر،

$$2S_n = [a+a+(n-1)d] + [a+d+a+(n-2)d] + \; ... \; + [a+(n-2)d+a+d] + [a+(n-1)d+a]$$

$$2S_n = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + \; ... \; + [2a+(n-1)d] \; ... \; n \text{ مرتبہ}$$

$$2S_n = n\,[2a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \quad \text{یا} \quad S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

مثال : حسابی تصاعد $14, \; 16, \; 18, \; ...$ کے پہلے 100 ارکان کی جمع معلوم کیجیے۔

یہاں $a = 14$ ، $d = 2$ ، $n = 100$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore \; S_{100} = \frac{100}{2}[2 \times 14 + (100-1) \times 2]$$

$$= 50\,[28 + 198]$$

$$= 50 \times 226 = 11300$$

$\therefore$ دیے ہوئے حسابی تصاعد کے پہلے 100 ارکان کی جمع 11,300 ہے۔

اسے ذہن میں رکھیں۔

دیے ہوئے حسابی تصاعد کا پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہو تب

$$t_n = a+(n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

حسابی تصاعد کے پہلے n ارکان کی جمع کا ایک اور ضابطہ معلوم کریں گے۔

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots [a+(n-1)d]$$

اس حسابی تصاعد میں، پہلا رکن $t_1 = a$ ہے اور n واں رکن $[a+(n-1)d]$ ہے۔

اب ، $S_n = \frac{n}{2}[\underline{a}+\underline{a+(n-1)d}]$

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n] = \frac{n}{2}$ [پہلا رکن + آخری رکن]

حل کردہ مثالیں

مثال (1) پہلے n طبعی اعداد کی جمع کیجیے۔

حل: پہلے n طبعی اعداد $1, 2, 3, \ldots, n$ ہیں۔

یہاں $a = 1$ ، $d = 1$ ، n واں رکن $= n$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$S_n = \frac{n}{2}$ [پہلا رکن + آخری رکن]

$$= \frac{n}{2}[1+n] = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\therefore$ پہلے n طبعی اعداد کی جمع $\frac{n(n+1)}{2}$ ہے۔

مثال (2) پہلے n جفت طبعی اعداد کی جمع کیجیے۔

حل: پہلے n جفت طبعی اعداد $\rightarrow 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$ ہیں۔

$t_1 =$ پہلا رکن $= 2$ ، $t_n =$ آخری رکن $= 2n$

طریقہ I

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$
$$= \frac{n}{2}[2\times 2+(n-1)2]$$
$$= \frac{n}{2}[4+2n-2]$$
$$= \frac{n}{2}[2+2n]$$
$$= \frac{n}{2}\times 2(1+n)$$
$$= n(1+n) = n(n+1)$$

طریقہ II

$$S_n = 2+4+6\ldots+2n$$
$$= 2(1+2+3+\ldots+n)$$
$$= \frac{2[n(n+1)]}{2}$$
$$= n(1+n)$$
$$= n(n+1)$$

طریقہ III

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1+t_n]$$
$$= \frac{n}{2}[2+2n]$$
$$= \frac{n}{2}\times 2(1+n)$$
$$= n(1+n)$$
$$= n(n+1)$$

$\therefore$ پہلے n جفت طبعی اعداد کی جمع $n(n+1)$ ہوتی ہے۔

مثال (3) پہلے n طاق طبعی اعداد کی جمع معلوم کیجیے۔

حل : پہلے n طاق طبعی اعداد

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ (2n-1)$$

$$a = t_1 = 1,\ t_n = (2n-1),\ d = 2$$

طریقہ I

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$$
$$= \frac{n}{2}[1 + (2n-1)]$$
$$= \frac{n}{2}[1 + 2n - 1]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2n$$
$$= n^2$$

طریقہ II

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$= \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 2]$$
$$= \frac{n}{2}[2 + 2n - 2]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2n$$
$$= n^2$$

طریقہ III

$$S_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$$
$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 2n)$$
$$- (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n)$$
$$= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{2n(n+1)}{2}$$
$$= (2n^2 + n) - (n^2 + n)$$
$$= n^2$$

اس لیے پہلے n طاق طبعی اعداد کا مجموعہ n^2 ہوتا ہے۔

مثال (4) : 1 سے 150 تک تمام طاق اعداد کی جمع کیجیے۔

حل : 1 سے 150 تک تمام طاق اعداد $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 149$ یہ حسابی تصاعد ہے۔

یہاں $a = 1$، $d = 2$، پہلے 1 سے 150 تک طاق اعداد کتنے ہیں معلوم کریں گے یعنی n کی قیمت معلوم کریں گے۔

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$149 = 1 + (n-1)2 \quad , \quad \therefore\ 149 = 1 + 2n - 2 \quad , \quad \therefore\ n = 75$$

اب $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 149$ ان 75 اعداد کا مجموعہ معلوم کریں گے۔

$$a = 1,\ d = 2,\ n = 75$$

طریقہ I

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$S_n = \square$

$S_n = \square \times \square$

$S_n = \square$

طریقہ II

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$$

$$S_n = \frac{75}{2}[1 + 149]$$

$S_n = \square \times \square$

$S_n = \square$

مشقی سیٹ 3.3

.1 ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن 6 اور مشترک فرق 3 ہے تو S_{27} معلوم کیجیے۔

$a = 6,\ d = 3,\ S_{27} = ?$

$S_n = \frac{n}{2}\ [\square + (n-1)\ d]$

$S_{27} = \frac{27}{2}\ [12 + (27-1)\ \square]$

$= \frac{27}{2} \times \square$

$= 27 \times 45 \quad = \square$

.2 پہلے 123 جفت طبعی اعداد کی جمع کیجیے۔

.3 1 اور 350 کے درمیان تمام جفت اعداد کی جمع کیجیے۔

.4 ایک حسابی تصاعد کا 19 واں رکن 52 اور 38 واں رکن 128 ہے۔اس کے پہلے 56 ارکان کی جمع معلوم کیجیے۔

.5 درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے۔ 1 اور 140 کے درمیان، 4 سے تقسیم پذیر طبعی اعداد کتنے ہیں،معلوم کیجیے۔ان اعداد کی جمع کیجیے۔جمع کرنے کے لیے درج ذیل عمل کیجیے۔

1 اور 140 کے درمیان 4 سے تقسیم پذیر اعداد

↓

$4,\ 8,\ \ldots\ \ldots\ \ldots,\ 136$

↓

یہ کل کتنے اعداد ہیں؟ $\therefore\ n = \square$

↓

$a = \square,\ d = \square,\ t_n = \square$

↓

$t_n = a + (n-1)d$

↓

$136 = \square + (n-1) \times \square$

→ $n = \square$ → $S_n = \frac{n}{2}\ [2a + (n-1)d]$

$S_{\square} = \frac{\square}{2}\ [\qquad]\quad = \square$

$\therefore$ 1 اور 140 کے درمیان 4 سے تقسیم پذیر اعداد کی جمع $= \square$

.6★ ایک حسابی تصاعد کے پہلے 55 ارکان کی جمع 3300 ہے،اس کا 28 واں رکن معلوم کیجیے۔

7.★ ایک حسابی تصاعد کے متواتر تین ارکان کی جمع 27 اور ان کا حاصل ضرب 504 ہے۔ وہ ارکان معلوم کیجیے۔ [فرض کیجیے تین مسلسل اعداد $a-d,\ a,\ a+d$ ہے]

8.★ ایک حسابی تصاعد کے متواتر چار ارکان کی جمع 12 ہے۔ ان چار متواتر ارکان میں سے تیسرے اور چوتھے ارکان کی جمع 14 ہے۔ وہ چار ارکان معلوم کیجیے۔ (فرض کیجیے، چار متواتر ارکان $a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$ ہیں۔)

9.★ ایک حسابی تصاعد کا 9واں رکن صفر ہے تو دِکھائیے کہ 29واں رکن، 19 ویں رکن کا دُگنا ہے۔

آئیے، سمجھ لیں۔

حسابی تصاعد کا اطلاق (Application of A.P.)

مثال (1) مکسر بنانے والی ایک کمپنی نے تیسرے سال 600 مکسر تیار کیے اور ساتویں سال 700 مکسر بنائے۔ ہر سال تیار ہونے والے مکسر کی تعداد میں مخصوص اضافہ ہو تو ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) پہلے سال کی پیداوار (ii) 10 ویں سال کی پیداوار (iii) پہلے سات سال میں کل پیداوار

حل : کمپنی ہر سال مخصوص مقدار (تعداد) میں مکسر کی پیداوار میں اضافہ کرتی ہے۔

اس بنا پر لگاتار ہر سال میں تیار کیے گئے مکسروں کی تعداد حسابی تصاعد میں ہوگی۔

(i) فرض کیجیے، کمپنی نے n ویں سال t_n مکسر کی پیداوار کی ہے۔ دی ہوئی معلومات کی بنا پر $t_3 = 600,\ \ t_7 = 700$

ہم جانتے ہیں کہ $t_n = a+(n-1)d$

$$t_3 = a+(3-1)d$$

$$= 600 = a+2d \qquad \ldots \text{(I)}$$

$$t_7 = a+(7-1)d$$

$$= a+6d = 700 \qquad \ldots \text{(II)}$$

$a+2d = 600\ ,\quad \therefore\ a = 600 - 2d$ (مساوات (II) میں مساوات (I) رکھنے پر)

$600 - 2d + 6d = 700$

$4d = 100\ ,\quad \therefore\ d = 25$

$a+2d = 600\ ,\quad \therefore\ a + 2\times 25 = 600$

$a + 50 = 600\ ,\quad \therefore\ a = 550$

اس لیے پہلے سال کی پیداوار 550 ہوگی۔

(ii)

$$t_n = a+(n-1)d$$

$$t_{10} = 550+(10-1)\times 25$$

$$= 550 + 225 = 775$$

اس لیے 10 ویں سال پیداوار 775 ہوگی۔

(iii) پہلے 7 سال میں کل پیداوار کے لیے S_n کا ضابطہ استعمال کریں گے۔

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore\ S_7 = \frac{7}{2}[1100 + 150] = \frac{7}{2}[1250] = 7 \times 625 = 4375$$

اس لیے پہلے سات سالوں میں 4375 مکسر تیار کیے گئے۔

مثال (2) قرض لی گئی رقم 3,25,000 روپے واپس ادا کرنے کے لیے اَجے شرما پہلے مہینے میں 30,500 روپے دیتا ہے۔ اس کے بعد انھیں ہر ماہ پہلے مہینے میں ادا کی گئی رقم سے 1500 روپے کم دینے ہوتے ہیں تو قرض لی گئی رقم کو ادا کرنے کے لیے انھیں کتنے مہینے درکار ہوں گے؟

حل : فرض کیجیے قرض لی گئی رقم ادا کرنے کے لیے n مہینے درکار ہوں گے۔ 30,500 روپے میں سے ہر ماہ 1500 روپے کم دینے ہیں۔

$\therefore\ 30500,\ 30500 - 1500,\ 30500 - 2 \times 1500\ \ldots$ (ادا کی جانے والی رقمیں حسابی تصاعد میں ہوں گی)

پہلا رکن $= a = 30500,\ d = -1500,$ قرض لی گئی رقم $= S_n = 3{,}25{,}000$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$325000 = \frac{n}{2}[2 \times 30500 + (n-1) \times (-1500)]$$

$$= \frac{n}{2}[2 \times 30500 - 1500n + 1500]$$

$$325000 = 30500n - 750n^2 + 750n$$

$$\therefore\ 750n^2 - 31250n + 325000 = 0$$

$$\therefore\ 3n^2 - 125n + 1300 = 0 \quad \ldots$$ (طرفین کو 250 سے تقسیم کرنے پر)

$$\therefore\ 3n^2 - 60n - 65n + 1300 = 0$$

$$\therefore\ 3n(n-20) - 65(n-20) = 0$$

$$\therefore\ (n-20)(3n-65) = 0$$

$\therefore\ n - 20 = 0$ یا $3n - 65 = 0$

$n = 20$ یا $n = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$

n حسابی تصاعد کے ارکان کا نمبر شمار ہے اس لیے n طبعی عدد ہے۔

$$\therefore\ n \neq \frac{65}{3}, \quad \therefore\ n = 20$$

(یا، 20 مہینے بعد $S_{20} = 3{,}25{,}000$ اس لیے اس وقت قرض لی گئی تمام رقم ادا کی جائے گی۔ اس کے بعد کی قسط کا خیال کرنا ضروری نہیں ہے۔)

$\therefore$ قرض لی گئی رقم، واپس ادا کرنے کے لیے 20 مہینے درکار ہوں گے۔

مثال (3) انور ہر ماہ مخصوص رقم کی بچت کرتا ہے۔ پہلے مہینے میں وہ 200 روپے کی بچت کرتا ہے۔ دوسرے مہینے میں 250 روپے، تیسرے مہینے میں 300 روپے بچت کرتا ہو تو بتائیے 1000 روپے کی بچت کس نمبر کے مہینے میں ہوگی؟ اور اس مہینے میں اس کی کل کتنی بچت ہوئی ہوگی؟

حل : پہلے مہینے میں بچت 200 روپے، دوسرے مہینے میں بچت 250 روپے، . . .

اس طرح ہر ماہ ہونے والی بچت $200, 250, 300, \ldots$ یہ حسابی تصاعد ہے۔

یہاں $a = 200$ ، $d = 50$ ، t_n کے ضابطے کی مدد سے پہلے n معلوم کریں گے۔ بعد میں S_n معلوم کریں گے۔

$$t_n = a+(n-1)d$$
$$= 200 + (n-1)50$$
$$= 200 + 50n - 50$$
$$\therefore \quad 1000 = 150 + 50n$$
$$150 + 50n = 1000$$
$$50n = 1000 - 150$$
$$50n = 850$$
$$\therefore \quad n = 17$$

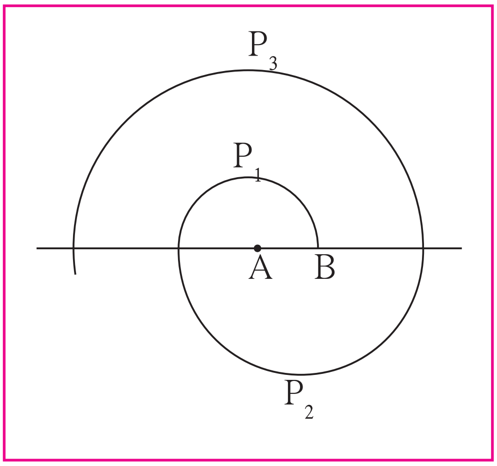
اس لیے 1000 روپے کی بچت 17 ویں مہینے میں ہوگی۔

اب ، 17 مہینوں میں کل کتنی بچت ہوئی، معلوم کرتے ہیں۔

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$
$$= \frac{17}{2}[2\times 200+(17-1)\times 50]$$
$$= \frac{17}{2}[400 + 800]$$
$$= \frac{17}{2}[1200]$$
$$= 17\times 600$$
$$= 10200$$

اس لیے 17 مہینوں میں کل بچت 10200 روپے ہوگی۔

مثال (4) مندرجہ ذیل کے مطابق ایک خط پر A مرکز لے کر 0.5 سم نصف قطر کا P_1 نصف دائرہ بنایا گیا۔ وہ خط کو نقطہ B پر قطع کرتا ہے۔ اب B مرکز لے کر 1 سم نصف قطر کا P_2 نصف دائرہ خط کے مخالف پہلو میں بنایا گیا۔



اب دوبارہ نقطہ A کو مرکز مان کر 1.5 سم نصف قطر لے کر نصف دائرہ P_3 بنایا گیا۔ اسی طرح A اور B مرکز مان کر بالترتیب 0.5 سم، 1 سم، 1.5 سم، 2 سم، ...... نصف قطروں کے نصف دائرے بنانے پر ایک پیچ دار (spiral) شکل بن جاتی ہے تو اس ترتیب سے 13 نصف دائروں سے بنی پیچ دار شکل (منحنی) کی کل لمبائی کتنی ہوگی۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

حل : فرض کیجیے، A، B، A، B، ... اس ترتیب سے مرکز مان کر نکالے گئے نصف دائروں کے محیط کی لمبائی بالترتیب P_1 ، P_2 ، P_3 ، ... ہے۔

پہلے نصف محیط کا نصف قطر 0.5 سم ہے۔ دوسرے نصف محیط کا نصف قطر 1.0 سم، ... اس طرح اس معلومات کی بنا پر P_1 ، P_2 ، P_3 ، ...، P_{13} معلوم کریں گے۔

$$\text{پہلے نصف محیط کی لمبائی} = P_1 = \pi r_1 = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$P_2 = \pi r_2 = \pi \times 1 = \pi$$

$$P_3 = \pi r_3 = \pi \times 1.5 = \frac{3}{2}\pi$$

P_1 ، P_2 ، P_3 ، ... یہ نصف محیط ہیں یعنی $\frac{1}{2}\pi, 1\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots \rightarrow$ یہ اعداد حسابی تصاعد ہیں۔

یہاں $a = \frac{1}{2}\pi$ ، $d = \frac{1}{2}\pi$ اس بنا پر S_{13} معلوم کریں گے۔

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}[2 \times \frac{\pi}{2} + (13-1) \times \frac{\pi}{2}]$$

$$= \frac{13}{2}[\pi + 6\pi]$$

$$= \frac{13}{2} \times 7\pi$$

$$= \frac{13}{2} \times 7 \times \frac{22}{7}$$

$$= 143 \text{ سم}$$

اس لیے 13 نصف دائروں سے بنی ہوئی پیچ دار شکل (منحنی) کی کل لمبائی 143 سم ہے۔

مثال (5) ایک گاؤں کی آبادی میں سال 2010ء میں 4000 لوگ خواندہ تھے۔ اس میں ہر سال 400 کا اضافہ ہوتا ہے تو سال 2020ء میں کتنے لوگ خواندہ ہوجائیں گے؟

حل:

سال	2010ء	2011ء	2012ء	. . .	2020ء
خواندہ لوگ	4000	4400	4800	. . .	

$a = 4000, \quad d = 400, \quad n = 11$

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$= 4000 + (11-1)400$$

$$= 4000 + 4000$$

$$= 8000$$

سال 2020ء میں 8000 خواندہ لوگ ہوجائیں گے۔

مثال (6) محترمہ رقیہ شیخ کو 2015ء کی سالانہ تنخواہ 1,80,000 روپے کی نوکری ملی۔ آفس کی جانب سے انھیں سالانہ 10,000 روپے اضافہ دینا منظور کیا گیا تو بتائیے کس سن میں ان کی سالانہ تنخواہ 2,50,000 روپے ہوجائے گی؟

حل:

سال	پہلے سال (2015)	دوسرے سال (2016)	تیسرے سال (2017)	. . .
تنخواہ	[1,80,000]	[1,80,000 + 10,000]	. . .	. . .

$a = 1,80,000, \qquad d = 10,000, \qquad n = ? \qquad t_n = 2,50,000$ روپے

$$t_n = a + (n-1)d$$

$\therefore \quad 250000 = 180000 + (n-1) \times 10000$

$\therefore \quad (n-1) \times 10000 = 70000$

$\therefore \quad n - 1 = 7$

$\therefore \quad n = 8$

$\therefore$ 8 ویں سال یعنی 2023ء میں ان کی تنخواہ 2,50,000 روپے ہوجائے گی۔

مشقی سیٹ 3.4

.1 صائمہ نے 1 جنوری 2016 کو طے کیا کہ وہ آج 10 روپے، دوسرے دن 11 روپے، تیسرے دن 12 روپے اس طرح بچت کرتی رہے گی تو بتائیے 31 دسمبر 2016 تک اس کی کل کتنی بچت ہوئی؟

.2 ایک صاحب خانہ نے 8000 روپے بطورقرض لیا اوراس پر 1360 روپے سود ادا کرنا قبول کیا۔ ہر ایک قسط پہلی والی قسط سے 40 روپے کم دے کر کل 12 ماہانہ قسطوں میں رقم ادا کی تو اس نے پہلی قسط اور آخری قسط کتنی ادا کی تھی؟

.3 سچن نے قومی بچت سرٹیفکیٹ میں پہلے سال 5000 روپے، دوسرے سال 7000 روپے، تیسرے سال 9000 روپے؛ اس طرح سرمایہ کاری کی تو 12 سال میں اس نے کل کتنی سرمایہ کاری کی؟

.4 ایک تماشہ گاہ (تھیٹر) میں کرسیوں کی کل 27 قطاریں ہیں۔ پہلی قطار میں 20 کرسیاں ہیں، دوسرے قطار میں 22 کرسیاں، تیسری قطار میں 24 کرسیاں ہیں تو 15 ویں قطار میں کل کتنی کرسیاں ہوں گی اور تھیٹر میں کل کتنی کرسیاں ہیں؟

.5 کارگل میں ایک ہفتے کے پیر سے سنیچر تک کا درجۂ حرارت نوٹ کیا گیا۔ وہ درجۂ حرارت حسابی تصاعد میں ہے۔ پیر اور سنیچر کے درجۂ حرارت کا مجموعہ، منگل اور سنیچر کے درجۂ حرارت کے مجموعے سے 5° سیلسی اَس زیادہ ہے۔ اگر بدھ کا درجۂ حرارت -30° سیلسی اَس ہو تو ہر روز کا درجۂ حرارت معلوم کیجیے۔

.6 'عالمی یومِ ماحولیات' کے موقع پر ایک اسکول کے میدان میں مثلثی شکل میں درخت لگانے کا پروگرام ترتیب دیا گیا۔ پہلی قطار میں ایک درخت، دوسری قطار میں 2 درخت، تیسری قطار میں 3 درخت اور اسی طرح آگے بھی۔ اگر کل 25 قطاریں ہوں تو درختوں کی کل تعداد معلوم کیجیے۔

مجموعۂ سوالات 3

.1 درج ذیل متبادل میں سے درست جواب تلاش کیجیے۔

(1) تواتر . . . $-10, \ -6, \ -2, \ 2,$ ← .... ہے۔

(A) حسابی تصاعد ہے کیونکہ $d = -16$ (B) حسابی تصاعد ہے کیونکہ $d = 4$

(C) حسابی تصاعد ہے کیونکہ $d = -4$ (D) حسابی تصاعد نہیں ہے۔

(2) ایسا حسابی تصاعد جس کا پہلا رکن -2 اور مشترک فرق -2 ہے اس کے پہلے چار ارکان .... ہیں۔

(A) $-2, 0, 2, 4$ (B) $-2, 4, -8, 16$

(C) $-2, -4, -6, -8$ (D) $-2, -4, -8, -16$

(3) پہلے 30 طبعی اعداد کی جمع درج ذیل میں سے کیا ہے؟

(A) 464   (B) 465   (C) 462   (D) 461

(4) دیے ہوئے حسابی تصاعد میں $t_n = 4,\ n = 7,\ d = -4$ ہو تو $a = . . .$

(A) 6 (B) 7 (C) 20 (D) 28

(5) ایک حسابی تصاعد کے لیے $a = 3.5$، $d = 0$ ہو تو $t_n = ...$

(A) 0 (B) 3.5 (C) 103.5 (D) 104.5

(6) ایک حسابی تصاعد کے پہلے دو ارکان -3 اور 4 ہیں تو 21 واں رکن .... ہے۔

(A) -143 (B) 143 (C) 137 (D) 17

(7) اگر ایک حسابی تصاعد کے لیے $d = 5$ ہو تو $t_{18} - t_{13} =$ ....

(A) 5 (B) 20 (C) 25 (D) 30

(8) 3 کے پہلے 5 ضعف کی جمع .... ہے۔

(A) 45 (B) 55 (C) 15 (D) 75

(9) حسابی تصاعد $15, 10, 5, . . .$ کے پہلے 10 ارکان کی جمع .... ہے۔

(A) -75 (B) -125 (C) 75 (D) 125

(10) ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن 1 اور n واں رکن 20 ہے۔ اگر $S_n = 399$ ہو تو $n =$ ....

(A) 42 (B) 38 (C) 21 (D) 19

2. حسابی تصاعد $-11, -8, -5, . . . , 49$ کا آخر سے چوتھا رکن معلوم کیجیے۔

3. ایک حسابی تصاعد کا 10 واں رکن 46 ہے۔ 5 ویں اور 7 ویں ارکان کی جمع 52 ہے تو وہ حسابی تصاعد لکھیے۔

4. ایک حسابی تصاعد کا چوتھا رکن -15 اور 9 واں رکن -30 ہے تو پہلے 10 ارکان کی جمع معلوم کیجیے۔

5. دو حسابی تصاعد $9, 7, 5, . . .$ اور $24, 21, 18, . . .$ اس طرح دیے ہوئے ہیں۔ اگران دو حسابی تصاعد کا n واں رکن مساوی ہو تو n کی قیمت معلوم کیجیے اور n واں رکن بھی معلوم کیجیے۔

6. اگر ایک حسابی تصاعد کے تیسرے اور آٹھویں رکن کی جمع 7 ہو اور ساتویں اور 14 ویں ارکان کی جمع -3 ہو تو 10 واں رکن معلوم کیجیے۔

7. ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن -5 اور آخری رکن 45 ہے۔ اگر ان تمام ارکان کی جمع 120 ہو تو وہ کتنے ارکان ہیں؟ اور ان کا مشترک فرق معلوم کیجیے۔

.8 1 سے n تک طبعی اعداد کی جمع 36 ہو تو n کی قیمت معلوم کیجیے۔

.9 عدد 207 کے تین حصے اس طرح کیجیے کہ وہ اعداد حسابی تصاعد میں ہوں اور دونوں چھوٹے حصوں کا حاصل ضرب 4623 ہو۔

.10 ایک حسابی تصاعد میں 37 ارکان ہیں۔ وسط کے تین ارکان کی جمع 225 ہے اور آخر کے تین ارکان کی جمع 429 ہے۔ وہ حسابی تصاعد لکھیے۔

.11★ ”ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن a ہے۔ دوسرا رکن b ہے اور تیسرا رکن c ہے تو اس حسابی تصاعد کے ان تینوں ارکان کی جمع $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ ہے۔“ ثابت کیجیے۔

.12★ اگر کسی حسابی تصاعد (A.P.) میں پہلے p ارکان کی جمع اور پہلے q ارکان کی جمع مساوی ہو تو دِکھائیے کہ پہلے (p + q) ارکان کی جمع صفر ہوتی ہے۔ $(p \neq q)$

.13★ اگر ایک حسابی تصاعد کے m ویں رکن کا m گنا اور n ویں رکن کا n گنا مساوی ہوں تب دِکھائیے کہ حسابی تصاعد کا $(m+n)$ واں رکن صفر ہے۔ $(m \neq n)$

.14 تصدیق کیجیے کہ 1000 روپے کی رقم %10 مفرد سود کی شرح سے سرمایہ کاری کی گئی ہو تو ہر سال کے آخر میں حاصل ہونے والی رقم حسابی تصاعد میں ہوگی۔ اگر وہ حسابی تصاعد ہو تو 20 سال بعد حاصل ہونے والا سود معلوم کیجیے۔ اس کے لیے درج ذیل عملی کام کیجیے۔

مفرد سود $= \frac{P \times R \times N}{100}$

1 سال بعد حاصل ہونے والا سود $= \frac{1000 \times 10 \times 1}{100} = \square$

2 سال بعد حاصل ہونے والا سود $= \frac{1000 \times 10 \times 2}{100} = \square$

3 سال بعد حاصل ہونے والا سود $= \frac{\square \times \square \times \square}{100} = 300$

اس طرح 4، 5، 6 سال بعد حاصل ہونے والا سود بالترتیب 400، □، □ ہوگا۔

ان اعداد کی بنا پر $a = \square$ اور $d = \square$

20 سال بعد حاصل ہونے والا سود،

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$t_{20} = \square + (20-1)\square$$

$$t_{20} = \square$$

$\therefore$ 20 سال بعد حاصل ہونے والا سود $= \square$

NI9F5P

□□□

4 معاشی منصوبہ بندی (Financial planning)

آیئے، سیکھیں۔

- جی ایس ٹی کا تعارف
- ٹیکس اِنوائس
- جی ایس ٹی کی تحسیب اور اِن پٹ ٹیکس کریڈٹ
- شیئرس، میچول فنڈ اور SIP

آیئے، بحث کریں۔

معلّمہ : پیارے بچو! ہمارے ملک میں تجارت کے لیے ٹیکس کا کون سا نظام جاری ہے؟

عارف : ہمارے ملک میں 'جی ایس ٹی' یعنی اشیا اور خدمات ٹیکس نامی محصولاتی نظام جاری ہے۔

معلّمہ : شاباش! اس کے بارے میں آپ کو کیا کیا معلوم ہے؟

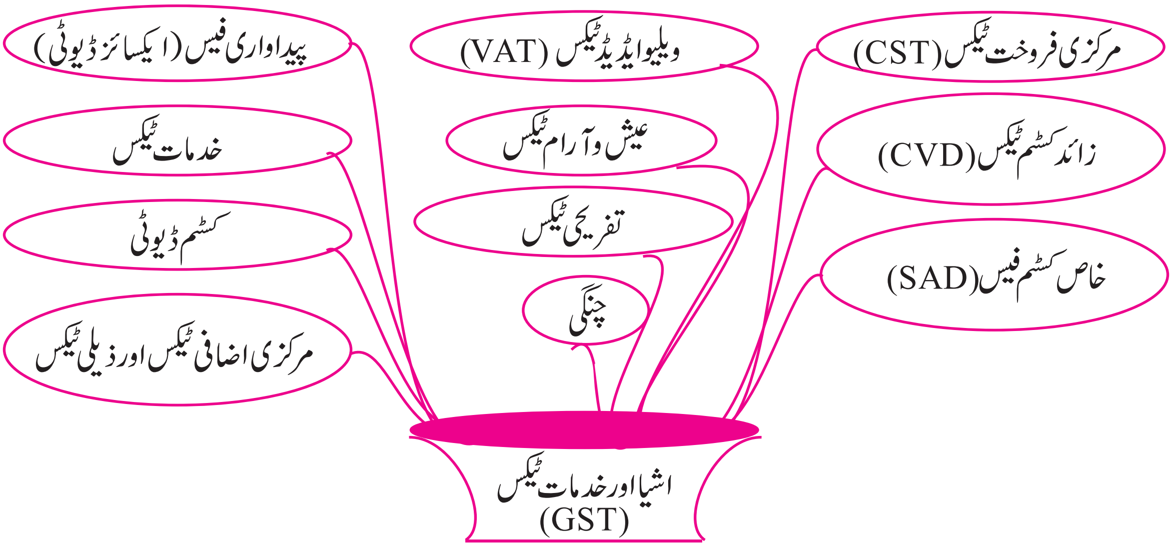
ریحان : GST یعنی Goods and Services Tax

عائشہ : پورے ملک میں صرف ایک ٹیکس کا نظام روبہ عمل آیا ہے۔

معلّمہ : بالکل صحیح، اس سے قبل مختلف ریاستوں میں مختلف ٹیکس مختلف اوقات میں دینے پڑتے تھے۔ اس سے قبل کے ٹیکسوں میں سے کون سے ٹیکس 'اشیا اور خدمات ٹیکس' میں شامل کیے گئے ہیں، انھیں ذیل میں دی ہوئی تصویر دیکھ کر بتایئے۔

شفیق : پیداوار فیس، سرحد فیس، VAT، تفریحی ٹیکس، مرکزی فروخت ٹیکس (CST)، خدمات ٹیکس، چنگی وغیرہ۔

معلّمہ : یہ تمام ٹیکس رد کرکے اب صرف 'اشیا اور خدمات' یہی ایک ٹیکس خرید و فروخت پر محسوب کیا جاتا ہے۔ اس لیے کہتے ہیں، 'ایک ملک، ایک ٹیکس، ایک بازار'۔ محصول کا یہ نظام 1 جولائی 2017 سے روبہ عمل آیا ہے۔



آیئے، سمجھ لیں۔

ٹیکس اِنوائس Tax Invoice

اشیا کی خریدی کا ٹیکس اِنوائس (نمونہ)										
SUPPLIER : A to Z SWEET MART 143, Shivaji Rasta, Mumbai : 400001 Maharashtra Mob. No. 92636 92111 email : atoz@gmail.com							GSTIN :27ABCDE1234H1Z5			
Invoice No. GST/110							Invoice Date: 31-Jul-2017			
S. No.	HSN code	Name of Product	Rate	Quantity	Taxable Amount	CGST		SGST		Total
						Rate	Tax	Rate	Tax	Rs.
1	210690	پیڑے	₹ 400 فی کلو	500 گرام	200.00	2.5%	5.00	2.5%	5.00	210.00
2	210691	چاکلیٹ	₹ 80	1 لاڈی	80.00	14%	11.20	14%	11.20	102.40
3	2105	آئس کریم	₹ 200	1 پیکٹ (500 گرام)	200.00	9%	18.00	9%	18.00	236.00
4	1905	بریڈ	₹ 35	1 پیک	35.00	0%	0.00	0%	0.00	35.00
5	210690	اچار	₹ 500 فی کلو	250 گرام	125.00	6%	7.50	6%	7.50	140.00
کل رقم							41.70		41.70	723.40

ولی : ہمیں تو اس بل میں کچھ نئے الفاظ دِکھائی دے رہے ہیں۔ اُن کا مطلب بتائیے۔

معلّمہ : **CGST** اور **SGST** یہ GST کے دو حصے ہیں۔ CGST یعنی Central Goods and Services Tax یعنی **مرکزی اشیا اور خدمات ٹیکس** ۔ یہ ٹیکس مرکزی حکومت کے پاس جمع ہوتا ہے۔ **SGST** یعنی State Goods & Services Tax یعنی **ریاستی اشیا اور خدمات ٹیکس**۔ یہ ریاستی حکومت کے پاس جمع ہوتا ہے۔

رعنا : ٹیکس اِنوائس کے اوپر دائیں کونے میں ہندسے اور حروف کی ایک بڑی لائن دِکھائی دیتی ہے۔ وہ کیا ہے؟

معلّمہ : یہ GSTIN ہے یعنی تاجروں کا شناختی نمبر (GSTIN - GST Identification Number)۔ جس تاجر نے گزشتہ مالیاتی سال میں 20 لاکھ روپے سے زائد کا کاروبار/ لین دین کیا ہے، اسے یہ نمبر لینا لازمی ہے۔ PAN میں جس طرح 10 حرفی ہندسی عدد ہوتا ہے، ویسے ہی ہر تاجر کو دیے ہوئے GSTIN میں 15 حرفی ہندسی عدد ہوتا ہے۔ اس پندرہ حرفی ہندسی عدد میں اس تاجر کے PAN کا 10 حرفی ہندسی عدد شامل ہوتا ہے۔

مثلاً :→ 27 A B C D E 1 2 3 4 H 1 Z 5

- 27 → ریاست کا دو ہندسی اشاریہ
- ABCDE1234H → 10 حروف و ہندسوں پر مشتمل PAN کا نمبر
- 1 → ایک اندراج کے لیے 1 ہندسہ
- Z → سب کے لیے یکساں (بائے ڈِفالٹ)
- 5 → چیک سم ڈجٹ (آخر میں ہندسہ یا حرف میں سے کوئی ایک ہوتا ہے۔)

'27' مہاراشٹر ریاست کا اشاراتی نمبر (State Code) ہے۔ 27 کے اشاراتی نمبر سے یہ سمجھ میں آتا ہے کہ اس تاجر کا اندراج مہاراشٹر میں ہوا ہے۔

(چیک سم ڈجٹ یعنی GST کی ویب سائٹ پر GSTIN لکھتے ہی یہ سمجھ میں آتا ہے کہ یہ نمبر قابلِ قبول ہے یا نہیں۔)

جویریہ : اِنوائس میں HSN کوڈ، بھی تو لکھا ہوا ہے۔

معلّمہ : HSN کوڈ یعنی اشیا کی جماعت بندی میں مخصوص نمبر ہوتا ہے۔ ٹیکس اِنوائس میں اس کو شامل کرنا ہوتا ہے۔ HSN یعنی Harmonized System of Nomenclature

جعفر : ٹیکس انوائس میں دکان کا نام، پتا، تاریخ، اِنوائس نمبر، موبائل نمبر اور ای-میل آئی ڈی بھی لکھا ہوا ہے۔

معلّمہ : اب اس اِنوائس میں اشیا اور خدمات ٹیکس کی تحسیب کیسے کی جاتی ہے، اسے سمجھیں گے۔ اس کے لیے ذیل کے دیے ہوئے جملوں میں خالی چوکون پُر کیجیے۔ انوائس میں پیڑے کا نرخ 400 روپے فی کلوگرام ہے۔ آدھا کلوگرام پیڑے خریدے گئے ہیں۔ اس کی قیمت 200 روپے ہے۔

- ✦ پیڑے پر مرکزی ٹیکس 2.5% کی شرح سے ☐ روپے، اسی طرح ریاستی ٹیکس ☐ شرح سے 5 روپے۔
- ✦ اس کی مدد سے پیڑے پر اشیا اور خدمات ٹیکس کی شرح 5% = 2.5% + 2.5% اور کل ٹیکس 10 روپے۔
- ✦ اسی طرح چاکلیٹ پر اشیا اور خدمات ٹیکس کی شرح ٪ ☐ ہے۔ لہٰذا اس پر کل ٹیکس ☐ روپے۔
- ✦ آئس کریم پر اشیا اور خدمات ٹیکس کی شرح ٪ ☐ ہے۔ اس لیے آئس کریم کی قیمت ☐ روپے۔
- ✦ اچار پر مرکز کی شرح ٪ ☐ اور ریاست کی شرح ٪ ☐، کل ملا کر اشیا - خدمات ٹیکس کی شرح ٪ ☐ ہے۔

عادل : بریڈ پر ٹیکس کی شرح 0% ہے۔ اسی طرح مرکز اور ریاست کے ٹیکس کی شرح مساوی ہے۔

ناہید : اشیا کے مطابق ٹیکس کی شرحیں مختلف ہیں جیسے 0%، 5%، 12%، 18% اور 28%

معلّمہ : ہر شے پر ٹیکس کی شرح حکومت طے کرتی ہے۔ اب خدمات کی اِنوائس کا ایک نمونہ دیکھیں گے۔

دی ہوئی معلومات کی مدد سے خالی جگہ پُر کر کے خدمات ٹیکس اِنوائس مکمل کیجیے۔

خدمات مہیا کرنے کا ٹیکس اِنوائس (نمونہ)								
Aahar Soneri, Khed Shivapur, Pune — **Invoice No. 58**								
Mob. No. 7588580000 email - ahar.khed@yahoo.com								
GSTIN : 27 AAAAA5555B1ZA — **Invoice Date : 25-Dec-2017**								
S A Code (SAC)	Food items	Qty	Rate (in Rs.)	Taxable amount	CGST		SGST	
9963	Coffee	1	20	20.00	2.5%	₹ 0.50	2.5%	. . .
9963	Masala Tea	1	10	10.00	. . . .	. . .	2.5%	. . .
9963	Masala Dosa	2	60	. . . .	2.5%	. . .	. . .	. . .
			Total	. . .		. . .		. . .
Grand Total = Rs. ________								

معلّمہ : اشیا اور خدمات، اِن دونوں بِلوں کا بغور مطالعہ کر کے دونوں بِلوں کے کوڈ میں فرق معلوم کیجیے۔

پرویز : اشیا کی بل پر HSN کوڈ دیا ہوا ہے لیکن ہوٹل کے بل پر SAC کوڈ دیا ہوا ہے۔

معلّمہ : SAC یعنی خدمات کی جماعت بندی میں مخصوص نمبر ہوتا ہے۔ اسے **SAC** یعنی **S**ervice **A**ccounting **C**ode کہتے ہیں۔

ذیل کی جدول میں کچھ اشیا، خدمات اور ان پر محصول ٹیکس کی شرحیں بطور نمونہ دی ہوئی ہیں۔

نمبر شمار	قسم	ٹیکس کی شرح	اشیا اور خدمات کی اقسام
I	صفر والی (Nil rated)	0%	**اشیا** - اناج کے ساتھ زندگی کے لازمی اشیا، سبزی ترکاری، پھل، دودھ، نمک، مٹی کے برتن وغیرہ۔ **خدمات** - امدادِ باہمی اداروں کی سرگرمیاں، پانی کا نقل و حمل (آب رسانی)، راستے اور پُل کا استعمال، تعلیم اور صحت کی خدمت، عوامی لائبریری، کاشتکاری سے منسلک خدمت وغیرہ
II	ادنیٰ شرح	5%	**اشیا** - عام استعمال کی اشیا جیسے LPG سلنڈر، چائے، تیل، شہد، سردائی ہوئی سبزیاں، لونگ، مرچ، مسالے، مٹھائی، وغیرہ۔ **خدمات** - ریل کے ذریعے نقل و حمل، بس کے ذریعے نقل و حمل، ٹیکسی خدمت، ہوائی جہاز کے ذریعے نقل و حمل (ایکونومی کلاس)، ہوٹل میں اشیاءِ خورد و نوش دستیاب کرنا وغیرہ۔
III	متناسب شرح (سطح I)	12%	**اشیا** - گاہک کے استعمال کی چیزیں، اچار، گھی، خشک میوہ، سبزیوں اور پھل سے بنائے گئے اچار، مربّہ، جام، جیلی، چٹنیاں، موبائل وغیرہ۔ **خدمات** - چھپائی کے کام، گیسٹ ہاؤس، تعمیراتی پیشے سے منسلک خدمت وغیرہ۔
IV	متناسب شرح (سطح II)	18% (بڑے پیمانے پر اشیا اور خدمات کی شمولیت	**اشیا** - ماربل، گرینائٹ، پرفیومس، دھاتی اشیا، کمپیوٹر، پرنٹر، مانیٹر، سی سی ٹی وی وغیرہ **خدمات** - کوریئر سرویس، آوٹ ڈور کیٹرنگ، سرکس، ناٹک، نمائش، سنیما، خدمت تبادلۂ زر، شیئر خرید و فروخت میں بچولیا کی خدمت وغیرہ۔
V	اعلیٰ شرح	28%	**اشیا** - عیش و آرام کی چیزیں (لکژری آئیٹم)، موٹر سائیکل کے پارٹس، لکژری کار، پان مسالہ، ویکیوم کلینر، ڈِش واشر، AC یونٹ، واشنگ مشین، تمباکو کی پیداوار، کولڈ ڈرِنکس وغیرہ۔ **خدمات** - فائیو اسٹار ہوٹل میں رہائش کا انتظام، امیوزمنٹ پارک، واٹر پارک، تھیم پارک، قمار خانہ، ریس کورس، IPL جیسے کھیل، ہوائی آمد و رفت/نقل و حمل (بزنس کلاس) وغیرہ

حوالہ : www.cbec.gov.in (Central Board of Excise & Customs کی ویب سائٹ)

اس کے علاوہ 0% سے 5% کے درمیان کن چیزوں پر GST ہے، معلوم کیجیے۔

نوٹ : اس باب میں لکھنے کے دوران حکومت کے طے کردہ GST کی قسمیں اور شرح لی گئی ہیں۔ اس میں تبدیلی ہو سکتی ہے۔ بجلی، پٹرول، ڈیزل وغیرہ GST کے دائرے میں نہیں ہیں۔

عملی کام I : آپ کی استعمال کی کم سے کم دس چیزوں کی فہرست بنائیے اور اس پر GST کی شرح کتنی ہے، اسے دی ہوئی فہرست، اخبارات، انٹرنیٹ سے GST پر دستیاب کتابوں یا چیزوں کی خریداری کی بلوں سے معلوم کر کے لکھیے۔ اپنے دوستوں سے معلومات کی تصدیق کیجیے۔

اشیا	جی ایس ٹی کی شرح	اشیا	جی ایس ٹی کی شرح
1. اسکیچ بک		6.	
2. کمپاس بکس		7.	
3.		8.	
4.		9.	
5.		10.	

عملی کام II : عملی کام I کے مطابق کم سے کم دس مختلف خدمات (جیسے ریل اور ایس ٹی بس بکنگ خدمت وغیرہ) حاصل کرنے کے لیے جی ایس ٹی کی شرح معلوم کیجیے یا خدمت مہیا کرانے کی بل حاصل کیجیے۔ اس کی مدد سے ذیل کے مطابق جدول بنائیے۔

خدمات	جی ایس ٹی کی شرح	خدمات	جی ایس ٹی کی شرح
1. ریلوے بکنگ		6.	
2. کوریئر سروس		7.	
3.		8.	
4.		9.	
5.		10.	

عملی III : درج ذیل جدول دیکھیے اور مزید اشیا اور خدمات کے کوڈ معلوم کر کے لکھیے۔

خدمات	SAC	GST کی شرح	اشیا	HSN Code	GST کی شرح
ریلوے حمل و نقل خدمت	996511	....	ڈیولکس پینٹ	3208	28%
ہوائی جہاز آمدورفت خدمت (اکیونومی)	996411	....	بال بیئرنگ	84821011	28%
تبادلہ زر کی خدمت	997157	....	اسپیڈو میٹر	8714	28%
بروکر (دلالی) خدمت	997152	....	آلو	0701	0%
ٹیکسی سروس	996423	....	....	....	....
فائیو اسٹار ہوٹل خدمت	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....

عملی کام IV : کوئی بھی 5 چیزوں اور 5 خدمات کے لیے HSN اور SAC کی جدول تیار کیجیے۔ اس جدول میں اشیا اور خدمات کی تصاویر چسپاں کیجیے۔ ان اشیا اور خدمات کے لیے GST کی شرح معلوم کر کے لکھیے۔

نوٹ : اشیا اور خدمات پر شرح، اسی طرح HSN ، SAC کوڈ پر عملی کام وغیرہ کی معلومات دی ہوئی ہے۔ انھیں زبانی یاد کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

سرگرمی : آپ مختلف قسم کے بل حاصل کیجیے جیسے چیزیں مہیا کرانے کا بل، خدمت دستیاب کیا گیا بل وغیرہ۔ ان بلوں کا GST کے حوالے سے مختلف نظریات سے مطالعہ کیجیے اور جماعت میں بحث کیجیے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) آرتی گیس ایجنسی نے 545 ₹ قابل ٹیکس قیمت کا ایک LPG سلنڈر گاہک کو فروخت کیا۔ جی ایس ٹی کی شرح 5% ہے تو گاہک کو دیے ہوئے ٹیکس اِنوائس میں مرکز کا اور ریاست کا ٹیکس کتنے روپے ہوگا؟ گاہک کو کل ملا کر کتنے روپے ادا کرنے ہوں گے؟ آرتی گیس ایجنسی کو اشیا کی خدمت کا کل کتنا ٹیکس ادا کرنا ہوگا؟

حل : جی ایس ٹی ٹیکس کی شرح = 5% ، اس لیے CGST کی شرح 2.5% اور SGST کی شرح 2.5%

$\therefore$ CGST $= \frac{2.5}{100} \times 545 = 13.625 = 13.63$ روپے

$\therefore$ SGST = CGST = 13.63 روپے

گاہک کو کل رقم ادا کرنی ہوگی = قابل ٹیکس قیمت + مرکزی ٹیکس + ریاستی ٹیکس

= 545 + 13.63 + 13.63 = 572.26 روپے

آرتی گیس ایجنسی مرکز کو 13.63 روپے اور ریاست کو 13.63 روپے ادا کرے گی۔

یعنی کل اشیا اور خدمات ٹیکس 27.26 روپے ادا کرے گی۔

مثال (2) کوریئر سروس دینے والے ایک ایجنٹ نے ایک پارسل ناشک سے ناگپور بھیجنے کے لیے گاہک سے کل 590 روپے لیے۔ اس میں 500 روپے قابل ٹیکس قیمت پر مرکز کو ٹیکس 45 روپے اور ریاست کا ٹیکس 45 روپے ادا کرتا ہے تو اس کاروبار میں محسوب کیے گئے اشیا اور خدمات ٹیکس کی شرح معلوم کیجیے۔

حل : کل اشیا و خدمات ٹیکس = مرکز کا ٹیکس + ریاست کا ٹیکس = 45 + 45 = 90 روپے

$\therefore$ اشیا و خدمات ٹیکس کی شرح $= \frac{90}{500} \times 100 = 18\%$

کوریئر سروس دینے والے ایجنٹ نے اشیا و خدمات ٹیکس کی شرح 18% محسوب کی۔

مثال (3) شریدھر نے 50,000 روپے چھپی ہوئی قیمت کا لیپ ٹاپ خریدنا چاہا۔ دکاندار نے اس قیمت پر اسے 10% رعایت دی۔ لیپ ٹاپ پر اشیا و خدمات ٹیکس کی شرح 18% ہے تو دکاندار کے ذریعے محسوب کیے ہوئے مرکز کا ٹیکس اور ریاست کا ٹیکس معلوم کیجیے۔ شریدھر کو یہ لیپ ٹاپ کتنے روپے میں ملا؟

حل : یہاں پہلے رعایت معلوم کریں گے۔ اُسے دی ہوئی قیمت سے منہا کر کے باقی ماندہ رقم پر 18% شرح سے اشیا و خدمات ٹیکس محسوب کریں گے۔

رعایت = 50,000 روپے پر 10% = 5,000 روپے

$\therefore$ لیپ ٹاپ کی قابل ٹیکس قیمت = 50,000 − 5,000 = 45,000 روپے

$\therefore$ جی ایس ٹی شرح سے مرکز کا ٹیکس 18% = 9%

$\therefore$ 45,000 روپے پر 9% سے مرکز کا ٹیکس $= \frac{9}{100} \times 45,000 = 4,050$ روپے

$\therefore$ ریاست کا ٹیکس = 4050 روپے

∴ لیپ ٹاپ کی قیمت = 45000 + 4050 + 4050 = 53,100 روپے

جواب : شریدھر کو لیپ ٹاپ 53,100 روپے کا ملے گا۔

نوٹ : قابل ٹیکس قیمت یعنی جس قیمت پر ٹیکس محسوب کیا جاتا ہے وہ قیمت۔ اِنوائس قیمت یعنی بشمول ٹیکس دی جانے والی کل قیمت۔ مثال میں رعایت نہیں دی گئی ہو تب فروخت قیمت کو قابل ٹیکس قیمت سمجھنا چاہیے۔ جتنا مرکز کا ٹیکس ہوتا ہے اتنا ہی ریاست کا بھی ٹیکس ہوتا ہے۔

مشقی سیٹ 4.1

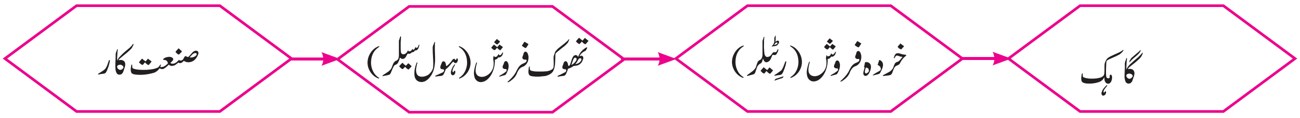
1. 'پون میڈیکل اسٹور' دوائیاں فراہم کرتا ہے۔ اس کی دکان میں بعض دوائیوں پر GST کی شرح 12% ہے تو CGST اور SGST کی شرح کتنی ہوگی؟
2. ایک چیز پر CGST کی شرح 9% ہو تو SGST کی شرح کتنی ہے؟ اسی طرح GST کی شرح کتنی ہے؟
3. 'میسرز رِیئل پینٹ' نے ہر ₹ 2800 قابل ٹیکس قیمت کے لسٹر پینٹ کے 2 ڈبے فروخت کیے۔ GST کی شرح 28% ہو تو ٹیکس اِنوائس میں CGST اور SGST کتنے روپے محسوب کیے جائیں گے؟
4. ایک ہاتھ گھڑی کے بیلٹ کی قابل ٹیکس قیمت 586 روپے ہے۔ GST کی شرح 18% ہے تو وہ بیلٹ گاہک کو کتنے روپے میں ملے گا؟
5. کھلونے میں ایک ریموٹ کنٹرول کار کی GST ٹیکس کے ساتھ کل قیمت 1770 روپے ہے۔ GST کی شرح 18% ہے تو اس کار کی قابل ٹیکس قیمت، اس پر CGST اور SGST محسوب کیجیے۔
6. 'ٹیپ ٹاپ الیکٹرانکس' نے ایک کمپنی کو ڈیڑھ ٹن کا ایئرکنڈیشنر مع ٹیکس 51,200 روپے میں مہیا کیا۔ ایئرکنڈیشنر پر CGST کی شرح 14% محسوب کیا تو ٹیکس اِنوائس میں درج ذیل اُمور میں سے کون کون سے اُمور ظاہر کیے جائیں گے، اسے معلوم کیجیے۔

(1) SGST کی شرح	(2) AC پر GST کی شرح	(3) AC کی قابل ٹیکس قیمت
(4) GST کی کل رقم	(5) CGST کی رقم	(6) SGST کی رقم

7. پرساد نے 'مہاراشٹر الیکٹرونکس گُڈس' سے 40,000 روپے چھپی ہوئی قیمت کی واشنگ مشین خریدا۔ اس پر دکاندار نے 5% رعایت دی۔ GST کی شرح 28% ہے تو پرساد کو وہ واشنگ مشین کتنے روپے میں ملی؟ ٹیکس اِنوائس میں CGST اور SGST کتنے روپے ہوں گے، معلوم کیجیے۔

آئیے، سمجھ لیں۔

کاروبار کی زنجیر میں جی ایس ٹی (GST in trading chain)

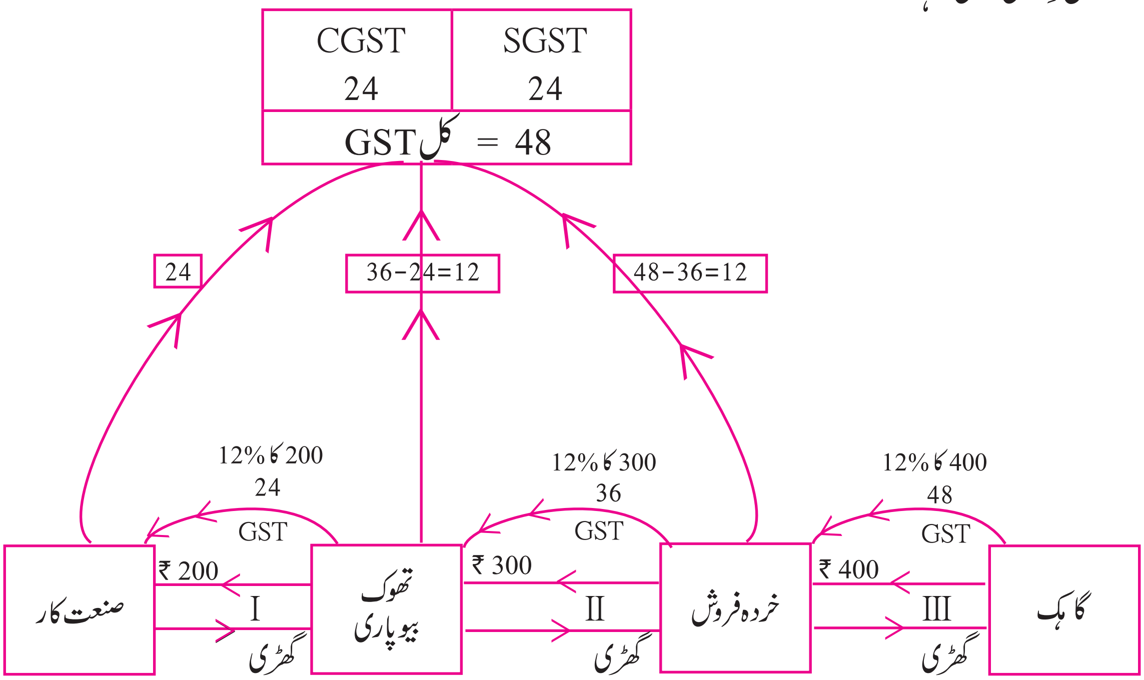


کاروباری زنجیر (Trading Chain)

کاروباری زنجیر میں GST کس طرح تحسیب کرتے ہیں اور اسے حکومت کے پاس جمع کرتے ہیں، اسے ایک مثال کے ذریعے سمجھیں گے۔

مثال : فرض کیجیے ایک صنعت کار نے تھوک بیوپاری کو ایک گھڑی منافع سمیت 200 روپے میں فروخت کی۔ تھوک بیوپاری نے خردہ فروش کو 300 روپے میں اور خردہ فروش نے گاہک کو وہ گھڑی 400 روپے میں فروخت کی۔ GST کی شرح 12% ہے تو صنعت کار، تھوک بیوپاری اور خردہ فروش ذیل کے مطابق ادا کیا ہوا ٹیکس [اِن پٹ ٹیکس کریڈٹ (ITC)] منہا کرکے باقی ماندہ ٹیکس کس طرح ادا کرتے ہیں، اس کا ذیل کے فلو چارٹ (رواں خاکہ) کی مدد سے مطالعہ کیجیے۔

وضاحت : صنعت کار کے پاس سے گھڑی گاہک کے پاس پہنچنے تک تین کاروبار ہوتے ہیں۔ ہر کاروبار میں ٹیکس کی تحسیب، جمع کیا ہوا ٹیکس ریاستی حکومت کو اور مرکزی حکومت کو کس طرح پہنچتا ہے، یہ ذیل کے رواں خاکے میں دِکھایا گیا ہے۔ اس کی مکمل جدول ذیل میں دِکھائی ہوئی ہے۔



مذکورہ بالا کاروبار میں تین مختلف مالیاتی کاروبار ایک ہی ریاست میں ہوئے ہیں۔ ان کے ہر ایک کے ٹیکس اِنوائس میں GST کی تحسیب کاری سمجھنے کے لیے مختصر طور پر ذیل میں دی ہوئی ہے۔

I کی بل اِنوائس میں GST کی تحسیب	
گھڑی کی قیمت	= ₹ 200
CGST 6%	= ₹ 12
SGST 6%	= ₹ 12
کل رقم	= ₹ 224

صنعت کار کا ٹیکس اِنوائس
(B2B)

II کی بل اِنوائس میں GST کی تحسیب	
گھڑی کی قیمت	= ₹ 300
CGST 6%	= ₹ 18
SGST 6%	= ₹ 18
کل رقم	= ₹ 336

تھوک بیوپاری کا ٹیکس انوائس
(B2B)

III کی بل اِنوائس میں GST کی تحسیب	
گھڑی کی قیمت	= ₹ 400
CGST 6%	= ₹ 24
SGST 6%	= ₹ 24
کل رقم	= ₹ 448

خردہ فروش کا ٹیکس اِنوائس
(B2C)

اسے ذہن میں رکھیں۔

دو GSTIN رکھنے والے تاجروں میں ہونے والے کاروبار کو Business to Business مختصراً B2B کہتے ہیں۔ چیز کی پیداوار ہونے سے لے کر وہ گاہک تک پہنچتی ہے، اس زنجیر میں آخری کڑی میں ہونے والے کاروبار کو Business to Consumer مختصراً B2C کہتے ہیں۔

کاروباری زنجیر میں ہر تاجر (بیوپاری) کے ادا کیے گئے GST کے خلاصہ ذیل کے مطابق ہے۔

	CGST		SGST		کل GST
• صنعت کار نے	₹ 12	+	₹ 12	=	₹ 24 ...(ادا کیے)
• تھوک بیوپاری نے	₹ 6	+	₹ 6	=	₹ 12 ...(ادا کیے)
• خردہ فروش نے	₹ 6	+	₹ 6	=	₹ 12 ...(ادا کیے)
کل ادائیگی	₹ 24	+	₹ 24	=	₹ 48

نوٹ : کیا یہ آپ کو سمجھ میں آ گیا؟ ہر بیوپاری نے اپنی سطح پر جمع کیے ہوئے ٹیکس میں سے اِن پٹ ٹیکس کریڈٹ یعنی خریداری کے وقت ادا کیے ہوئے ٹیکس کو منہا کر کے باقی ماندہ GST ادا کرتا ہے۔ آخر میں گاہک کو وہ گھڑی 448 روپے میں ملی۔ اس میں سے 48 روپے اصل ٹیکس اوپر دِکھائے ہوئے کے مطابق گاہک نے ہی بالواسطہ ٹیکس ادا کیا۔ لہٰذا GST بالواسطہ ٹیکس (Indirect Tax) ہے۔ اس سے قبل تھوک بیوپاری اور خردہ فروش دونوں کو اپنی خرید کے وقت ادا کردہ ٹیکس انھیں واپس ملتا ہے۔

خریدی کے وقت ادا کردہ ٹیکس کا منہا کرنا (اِن پٹ ٹیکس کریڈٹ - ITC)

اشیا کی پیداوار سے اسے استعمال کرنے والے گاہک تک پہنچنے تک، درمیان میں ہر کاروبار میں GST تحسیب کیا جاتا ہے۔ اشیا فروخت کرتے وقت بیوپاری کے ذریعے وصول کیا گیا ٹیکس یعنی آؤٹ پٹ ٹیکس اسی بیوپاری کو اشیا کی خریداری کے وقت دیا گیا ٹیکس یعنی اِن پٹ ٹیکس۔ لہٰذا بیوپاری جمع کردہ ٹیکس میں سے اپنا ادا کردہ ٹیکس منہا کر لیتا ہے۔ اسے اِن پٹ ٹیکس کریڈٹ کہتے ہیں۔

∴ ادا کرنے والا GST ← = آؤٹ پٹ ٹیکس − اِن پٹ ٹیکس کریڈٹ (ITC)

نوٹ : مختصر طور پر حکومت کے پاس ٹیکس ادا کرتے وقت زنجیر میں موجود ہر بیوپاری، اس کی خریداری کے وقت ادا کیا ہوا ٹیکس، فروخت کرتے وقت جمع کیے گئے ٹیکس میں سے منہا کر کے باقی ماندہ ٹیکس ادا کرتا ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) شری روہیت خردہ فروش ہیں۔ انھوں نے اشیا کی خریداری کے وقت 6500 روپے GST دیا اور فروخت کے وقت 8000 روپے GST جمع کیا تو (i) اِن پٹ ٹیکس اور آؤٹ ٹیکس کتنا؟ (ii) شری روہیت کو اِن پٹ ٹیکس کریڈٹ کتنے روپے ملیں گے؟ (iii) انھیں کتنا GST ادا کرنا ہے، معلوم کیجیے۔ (iv) مرکز کا اور ریاست کا قابل ادا ٹیکس معلوم کیجیے۔

حل : شری روہیت کو ٹیکس ادا کرنا ہے یعنی حکومت کو ادا کیا جانے والا ٹیکس۔

(i) آؤٹ پٹ ٹیکس (فروخت کے وقت لیا جانے والا ٹیکس) = 8000 روپے

(ii) اِن پٹ ٹیکس (خریدی کے وقت ادا کیا گیا ٹیکس) = 6500 روپے

اِن پٹ ٹیکس کریڈٹ یعنی (ITC) = 6500 روپے

(iii) ادا کیا جانے والا ٹیکس = آؤٹ پٹ ٹیکس (فروخت کے وقت لیا جانے والا ٹیکس) − اِن پٹ ٹیکس کریڈٹ (ITC)

$= 8000 - 6500 = 1500$ روپے

(iv) $\therefore$ مرکز کو ادا کیا جانے والا ٹیکس $= \frac{1500}{2} = 750$ روپے اور ریاست کو ادا کیا جانے والا ٹیکس = 750 روپے

مثال (2) میسرز جے کیمیکلز نے 8,000 روپے کا قابل ٹیکس قیمت کا لیکوِڈ سوپ خریدا اور گاہک کو وہ 10,000 روپے قابل ٹیکس قیمت میں فروخت کیا۔ GST کی شرح 18% ہے تو میسرز جے کیمیکلز کا مرکز کو ادا کیا جانے والا ٹیکس اور ریاست کو ادا کیا جانے والا ٹیکس معلوم کیجیے۔

حل : اِن پٹ ٹیکس (خریداری کے وقت ادا کیا گیا ٹیکس) = 8000 روپے پر 18% کی شرح سے ادا کیا گیا ٹیکس

$= \frac{18}{100} \times 8000$

= 1440 روپے

$\therefore$ ITC = 1440 روپے

آؤٹ پٹ ٹیکس = فروخت کے وقت گاہک سے جمع کیا گیا ٹیکس

$= \frac{18}{100} \times 10000$

= 1800 روپے

ادا کیا جانے والا ٹیکس = آؤٹ پٹ ٹیکس − ITC

$= 1800 - 1440 = 360$ روپے

$\therefore$ میسرز جے کیمیکلز مرکز کو 180 روپے ٹیکس ادا کرے گا اور ریاست کو 180 روپے ٹیکس ادا کرے گا۔

مثال (3) میسرز جے کیمیکلز نے 8000 روپے کا (مع ٹیکس قیمت) لیکوِڈ صابن خریدا اور گاہک کو 10,000 روپے میں (مع ٹیکس قیمت) فروخت کیا تو جے کیمیکلز کو مرکز کو ادا کیا جانے والا ٹیکس اور ریاست کو ادا کیا جانے والا ٹیکس معلوم کیجیے۔ یہاں ٹیکس کی شرح 18% ہے۔

حل : یہاں شے کی قیمت مع ٹیکس دی ہوئی ہے۔اسے دھیان میں رکھیے۔

ٹیکس + قابل ٹیکس قیمت = اشیا کی ٹیکس کے ساتھ قیمت

فرض کیجیے، لیکوِڈ صابن کی قابل ٹیکس قیمت 100 روپے ہے تو مع ٹیکس قیمت 118 روپے ہوگی۔

(مع ٹیکس قیمت) / (قابل ٹیکس قیمت) ، یہ نسبت مستقل ہے۔

118 کل قیمت کے لیے اگر 100 روپے قابل ٹیکس قیمت ہے تو 8000 روپے کل قیمت کے لیے فرض کریں x روپے قابل ٹیکس قیمت ہے۔

$$\therefore \quad \frac{x}{8000} = \frac{100}{118}$$

$$\therefore \quad x = \frac{8000}{118} \times 100 = 6779.66$$ روپے

$\therefore$ خریداری کے وقت ادا کیا ہوا GST $= 8000 - 6779.66$

$\therefore$ ادا کیا جاچکا ٹیکس (اِن پٹ ٹیکس) $= 1220.34$ روپے، $\quad \therefore$ ITC $= 1220.34$ روپے

اسی طرح 10,000، روپے کل قیمت کے لیے، فرض کریں، y روپے قابل ٹیکس قیمت ہے۔

$$\therefore \quad \frac{y}{10000} = \frac{100}{118}$$

$$\therefore \quad y = \frac{10,00,000}{118} = 8474.58$$ روپے

$\therefore$ فروخت کے وقت جمع کیا گیا ٹیکس (آؤٹ پٹ ٹیکس) $= 10000.00 - 8474.58$

$= 1525.42$ روپے

$\therefore$ ادا کیا جانے والا ٹیکس = آؤٹ پٹ ٹیکس − ادا کیا جاچکا ٹیکس $= 1525.42 - 1220.34$

$= 305.08$ روپے

$\therefore$ مرکز کو ادا کیا جانے والا ٹیکس = ریاست کو ادا کیا جانے والا ٹیکس $= 305.08 \div 2 = 152.54$ روپے

جواب : جے کیمیکلز مرکز اور ریاست ہر ایک کو 152.54 روپے ادا کرے گا۔

نوٹ : مثال 2 اور 3 کا بغور مطالعہ کیجیے۔کاروبار میں آپ کو اِن دونوں قسم کی بل اِنوائس سے سابقہ پڑے گا۔لہٰذا دکاندار نے چیز کی چھپی ہوئی قیمت مع ٹیکس دی ہے یا چھپی ہوئی قیمت پر ٹیکس محسوب کرنے والا ہے، اسے سمجھ لیجیے اور اس کے بعد خریداری کیجیے۔

ICT Tools or Links

طے شدہ تاریخ کو ٹیکس ادا کرکے اس کے بعد دی ہوئی تاریخ کے اندر ٹیکس کا ریٹرن (GST Returns) داخل کرنا ضروری ہے۔ یہ تمام باتیں 'آن لائن' کرسکتے ہیں۔ www.gst.gov.in ویب سائٹ پر آپ تمام ریٹرن فارم دیکھ سکتے ہیں۔ GST ریٹرن فارم بنانے کے لیے آپ 'آف لائن یوٹلٹی' بھی استعمال کرسکتے ہیں۔

مثال (4) ایک سائیکل کے صنعت کار نے تھوک تاجر کو 4000 روپے قابل ٹیکس قیمت سے سائیکل فروخت کی۔ تھوک تاجر نے وہ سائیکل 4800 روپے قابل ٹیکس قیمت سے دکاندار کو فروخت کر دیا اور دکاندار نے وہ سائیکل 5200 روپے قابل ٹیکس قیمت سے گاہک کو فروخت کیا۔ GST کی شرح 12% ہو تو فروخت کے ہر مرحلے پر ادا کیا جانے والا CGST اور SGST معلوم کیجیے۔
اس کے لیے ذیل کا عملی کام مکمل کیجیے۔

حل : کاروباری زنجیر

[ ] —₹ 4000, 12%→ [ ] —₹ 4800, 12%→ [ ] —₹ 5200, 12%→ [ ]

صنعت کار نے فروخت کے وقت ٹیکس جمع کیا = 4000 کا 12% = [... × ... / ...] = [ ]

صنعت کار کا قابل ادا ٹیکس = 480 روپے

تھوک تاجر کے ذریعے فروخت کے وقت جمع کردہ ٹیکس = 4800 کا 12% = [576 روپے]

∴ تھوک تاجر کے ذریعے ادا کردہ ٹیکس = (آؤٹ پٹ) تھوک تاجر کے ذریعے جمع کردہ ٹیکس – ادا کیا جا چکا ٹیکس

= [576] – [480]

= [96] روپے

دکاندار نے فروخت کے وقت جمع کیا ہوا ٹیکس = 5200 کا 12% = [ ]

∴ دکاندار پر قابل ادا جی ایس ٹی = (آؤٹ پٹ) ٹیکس دکاندار کے ذریعے جمع کردہ – ادا کیا جا چکا ٹیکس

= [ ] – [ ]

= [ ]

کاروباری زنجیر میں GST کا ادا کیا گیا تفصیلی ریٹرن :

شخص	GST ادا کیا	CGST ادا کیا	SGST ادا کیا
صنعت کار	₹ 480	₹ 240	₹ [ ]
تھوک تاجر	₹ 96	₹ [ ]	₹ [ ]
دکاندار (خردہ فروش)	₹ [ ]	₹ [ ]	₹ [ ]
کل	₹ [ ]	₹ [ ]	₹ [ ]

آئیے، غور کریں۔

- فرض کیجیے ایک تاجر کا جولائی مہینے میں وصول کردہ ٹیکس (آؤٹ پٹ ٹیکس) اُس کے ادا کردہ ٹیکس (ان پٹ ٹیکس) سے کم ہے تو اس وقت ٹیکس محسوب کس طرح کیا جاتا ہے؟
- فرض کیجیے ایک تاجر کا جمع کردہ جولائی مہینے میں وصول کردہ ٹیکس، اس کے ادا کردہ ٹیکس کے مساوی ہے۔ ایسے وقت ٹیکس کتنا ہوگا؟

مشقی سیٹ 4.2

(1) چیتنا اسٹورس نے 01 جولائی 2017 سے 31 جولائی 2017 تک کی ہوئی خریداری پر 1,00,500 روپے GST دیا اور فروخت پر 1,22,500 روپے GST جمع کیا تو اس دوران چیتنا اسٹورس کے ذریعے ادا کیا جانے والا GST معلوم کیجیے۔

(2) نجمہ، GST قانون کے مطابق رجسٹرڈ دکاندار مالکن ہے۔ اس نے خریداری کے وقت کل جی ایس ٹی 12,500 روپے ادا کیا اور فروخت پر کل جی ایس ٹی 14,750 روپے جمع کیا تو بتائیے اسے کتنے روپے ان پٹ ٹیکس کریڈٹ ملے گی اور اس کا ادا کیا جانے والا GST معلوم کیجیے۔

(3) امیر اینٹرپرائز نے چاکلیٹ سیرپ کی بوتلیں خریدتے وقت 3800 روپے GST ادا کیا اور اسے اکبری بردرس کو فروخت کرتے وقت 4100 روپے GST جمع کیا۔ مینک فوڈ کارنر نے اکبری بردرس سے وہ بوتلیں 4500 روپے GST ادا کرکے خریدیں تو ہر کاروبار میں ادا کیا جانے والا GST معلوم کیجیے۔ اس پر سے مرکز کو ادا کیا جانے والا ٹیکس (CGST) اور ریاست کو ادا کیا جانے والا ٹیکس (SGST) معلوم کیجیے۔

(4) چندی گڑھ وفاقی ریاست ہے۔ یہاں ملک گیس ایجنسی نے پیشہ ورانہ استعمال کے کچھ گیس سلنڈر 24,500 روپے میں خریدے اور وہاں کے گاہکوں کو 26,500 روپے میں فروخت کیے۔ اس کاروبار میں 5% شرح سے ادا کیا جانے والا کل GST معلوم کیجیے۔ وہ اس پر سے مرکز کو ادا کیا جانے والا ٹیکس (CGST) اور وفاقی ریاست کو ادا کیا جانے والا ٹیکس (UTGST) معلوم کیجیے۔ (وفاقی ریاست میں SGST کی بجائے UTGST نافذ ہوتا ہے۔)

(5) میسرز بیوٹی پروڈکٹس نے 6000 روپے پر 18% شرح سے GST ادا کرکے آرائش و زیبائش کا سامان خریدا اور صرف ایک گاہک کو وہ تمام 10,000 روپے میں فروخت کیا تو اس کاروبار کے لیے میسرز بیوٹی پروڈکٹس نے تیار کیے ہوئے ٹیکس اِنوائس میں مرکز کا اور ریاست کا (SGST اور CGST) ادا کیا جانے والا اشیا و خدمات ٹیکس کی رقم کتنی بتائے گا، معلوم کیجیے۔

(6) ذیل میں دی ہوئی معلومات کی مدد سے دکاندار سے گاہک کو (B2C) کے لیے ٹیکس انوائس (Tax Invoice) تیار کیجیے۔ نام، پتا، تاریخ وغیرہ آپ اپنی مرضی و پسند کے مطابق لیں۔

سامان مہیا کرنے والا : میسرز.................... پتا .... ریاست .... تاریخ ....

اِنوائس نمبر : .... GSTIN ....

اشیا کی تفصیل : موبائل بیٹری کا نرخ - ₹ 200 GST کی شرح 12% HSN 8507، ایک عدد

ہیڈفون کا نرخ - ₹ 750 GST کی شرح 18% HSN 8518، ایک عدد

(7) نیچے دی ہوئی معلومات کی مدد سے ایک تاجر نے دوسرے تاجر کے لیے (B2B) ٹیکس اِنوائس تیار کیجیے۔

نام، پتا، تاریخ وغیرہ اپنی پسند سے لیجیے۔

سامانِ تجارت مہیا کرنے والا تاجر : نام، پتا، ریاست، GSTIN، بل نمبر اور تاریخ

سامانِ تجارت حاصل کرنے والا تاجر : نام، پتا، ریاست، GSTIN

اشیا کی تفصیل: (i) پنسل بکس 100 عدد	HSN-3924	نرخ 20 روپے	GST 12%
(ii) جگ سا پزل 50 عدد	HSN-9503	نرخ 100 روپے	GST 12%

مزید معلومات کے لیے

کمپوزیشن اسکیم (Composition Scheme)

جس شخص کا کاروبار گزشتہ مالیاتی سال میں 20 لاکھ سے زیادہ اور 1.5 کروڑ روپے سے کم ہے ان کے لیے کمپوزیشن اسکیم (Composition Scheme) ہے۔اس اسکیم کے تحت ٹیکس دہندہ حکومت کے طے کردہ شرح سے ٹیکس ادا کرتا ہے۔

کمپوزیشن اسکیم مع ٹیکس کی شرح (GST rates for Composition Scheme)

نمبر شمار	اشیا مہیا کرانے والا	GST کی شرح	CGST + SGST
1	ہوٹل	5%	2.5% + 2.5%
2	صنعت کار اور فروخت کنندہ	1%	0.5% + 0.5%

کمپوزیشن اسکیم میں تاجروں کے لیے اُصول:

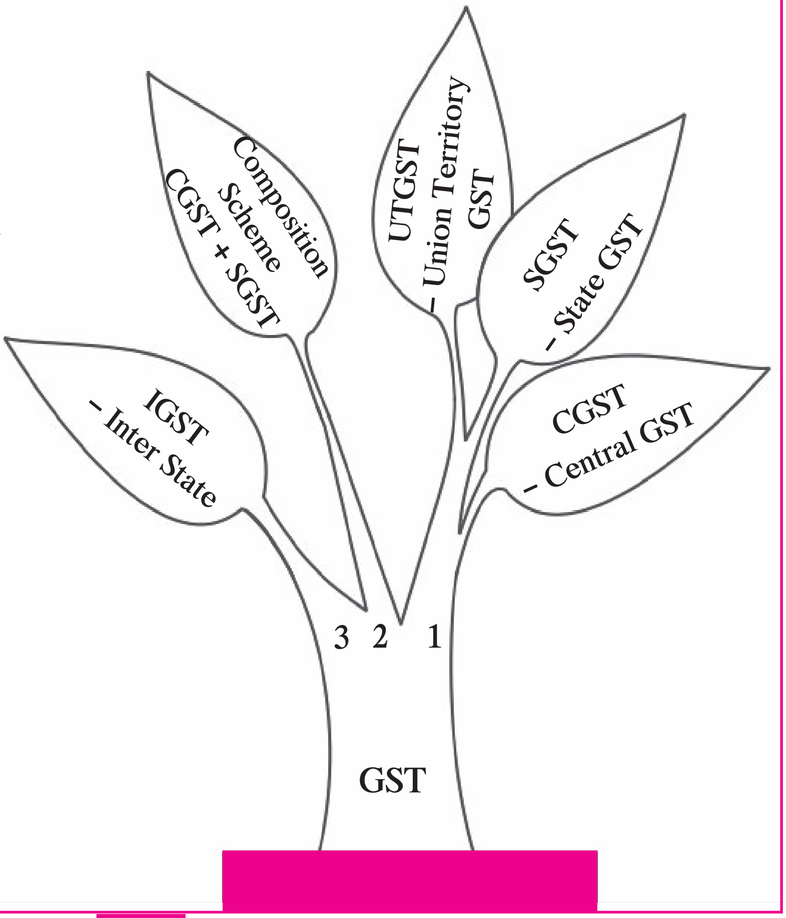
- کمپوزیشن اسکیم میں تاجر کو گاہک سے کوئی بھی ٹیکس وصول کرنا نہیں ہوتا اس لیے اس اسکیم میں تاجر بل اِنوائس نہیں دے سکتا۔اسے صرف سامان مہیا کرنے کا بل (Bill of supply) دینا ہے۔
- تاجر کو ہر 3 مہینوں میں مذکورہ بالا دی ہوئی جدول کے مطابق حکومت کے پاس فروخت پر ٹیکس ادا کرنا ہوتا ہے۔
- اس اسکیم میں تاجر کو دوسری ریاست میں اشیا فروخت کرنا منع ہوتا ہے لیکن وہ دوسری ریاست سے اشیا خرید سکتا ہے۔
- اس اسکیم میں تاجروں کو خریدی پر اِن پٹ ٹیکس یعنی ITC کا فائدہ نہیں ملے گا۔
- اس اسکیم میں تاجروں کو اپنی دکان کے بورڈ پر ’کمپوزیشن اسکیم کا تاجر‘ (Composition taxable person) لکھنا ہوتا ہے۔
- اس اسکیم میں تاجر کو سامان مہیا کرنے کا بل (Bill of supply) پر واضح حروف میں کمپوزیشن اسکیم کا تاجر فروخت پر ٹیکس محسوب کرنے کے ناقابل (Composition taxable person - not eligible to collect tax on supplies) چھپانا ہوتا ہے۔

GST کی اہم خصوصیات (Features of GST)

- مختلف بالواسطہ ٹیکس ختم ہو گئے۔
- اشیا اور خدمات ٹیکس کے بارے میں اختلاف ختم ہو گیا۔
- تاجروں کے لیے ریاستوں کے لحاظ سے رجسٹری۔
- GSTIN والے تاجروں کو کاروبار کی ٹھیک ٹھیک اندراج رکھ کر وقت پر GST ادا کرنا ہوتا ہے۔
- کاروبار میں شفافیت۔
- سادہ اور سمجھنے کے لیے آسان ٹیکس نظام۔
- ٹیکس پر ٹیکس ادا نہیں کیا جاتا۔ اس کی وجہ سے اشیا اور خدمات کی قیمت قابو میں رہے گی۔
- اشیا اور خدمات کی بین الاقوامی بازار سے موازنہ کی وجہ سے معیار میں اضافہ۔
- میک اِن اِنڈیا' میں ترقی۔
- تکنیک پر مبنی ٹیکس کے نظام کی وجہ سے فوراً فیصلہ لینے میں مدد۔
- اشیا و خدمات ٹیکس ؛ یہ دوئی نمونہ/ دہرا نمونہ (Dual model) ہے یعنی مرکز اور ریاست کے لیے ایک ہی وقت ٹیکس کی تحسیب کی جاتی ہے۔

اشیا و خدمات ٹیکس کے تحت آنے والے ٹیکس

1. CGST-SGST (UTGST)
ایک ریاست میں خرید و فروخت کا کاروبار کرنے والے تاجروں کے لیے۔
2. کمپوزیشن اسکیم (Composition Scheme)
جن کا کاروباری لین دین 20 لاکھ سے 1.5 کروڑ روپے تک ہے ایسے تاجروں کو اس اسکیم کا فائدہ ملتا ہے۔ انھیں SGST اور CGST مختلف شرح سے دیا جاتا ہے۔
3. IGST :
بین ریاستی (Inter State) کاروبار کرنے والے تاجروں کے لیے۔



مزید معلومات کے لیے

اکٹھا اشیا و خدمات ٹیکس IGST (Integrated GST)

جس وقت فروخت کا کاروبار دو ریاستوں میں (Inter state) ہوتا ہے اس وقت جو GST محسوب کیا جاتا ہے اسے اکٹھا اشیا و خدمات ٹیکس (IGST) کہتے ہیں اور وہ مکمل طور پر مرکزی حکومت کو ادا کیا جاتا ہے۔

ایک ریاست کے تاجر نے دوسری ریاست کے تاجر سے اشیا خریدیں اور اپنی ریاست میں فروخت کیں تب اس IGST کے طور پر ادا کیے ہوئے ٹیکس (ITC) کو منہا کس طرح کیا جاتا ہے، آئیے سمجھتے ہیں۔

مثال: تاجر M (مہاراشٹر کا) نے 20,000 روپے کے اسکوٹر کے اسپیئر پارٹ تاجر P (پنجاب کا) سے خریدا۔ اس وقت 28% شرح سے 5600 روپے IGST یعنی اکٹھا اشیا و خدمات ٹیکس تاجر P کو ادا کیا۔

M نے یہ تمام اسپیئر پارٹ یہاں (مہاراشٹر میں) مقامی گاہکوں کو 25,000 روپے میں فروخت کیا اس وقت 28% شرح سے 7000 روپے GST وصول کیا۔

(گاہک سے وصول کیا) ... 3500 روپے SGST + 3500 روپے CGST = 7000 روپے GST

اب حکومت کے پاس ٹیکس ادا کرتے وقت 5600 روپے ادا کردہ ٹیکس کو کیسے حاصل کرتا ہے، دیکھیں گے۔

نوٹ: IGST کی کریڈٹ لیتے وقت پہلے تو IGST کے لیے، اس کے بعد CGST کے لیے اور باقی ماندہ کریڈٹ SGST کے لیے لیتا ہے۔ یہاں M کی فروخت کے کاروبار میں IGST نہیں ہے اس لیے پہلے CGST کے لیے کریڈٹ لینا ہے اور باقی ماندہ SGST کے لیے کریڈٹ لینا ہے۔

∴ CGST ٹیکس = 3500 − 3500 = 0 روپے

یعنی 5600 روپیوں میں سے 3500 روپے کریڈٹ لینے پر، باقی ماندہ 2100 = 3500 − 5600 روپے کا کریڈٹ SGST کے لیے لیا جائے گا۔

∴ ادا کرنا ہے SGST = 3500 − 2100 = 1400 روپے

M کو 1400 روپے SGST ادا کرنا ہوگا۔

یاد رکھیے کہ تاجر M نے خریداری کے وقت دیا ہوا 5600 روپے ادا کیے ہوئے ٹیکس (ITC) کو منہا کر لیا گیا ہے۔ (یعنی اِن پٹ ٹیکس کی مکمل کریڈٹ مل گئی ہے۔)

ITC اس طرح لیا جاتا ہے

(ITC) خریداری کے وقت ادا کیا گیا ٹیکس | وصول/جمع کیا گیا ٹیکس (Output Liability)

ISGT (₹ 5600) کی کریڈٹ لیتے وقت →

- پہلے (₹ 0) → ISGT کے لیے استعمال کیا
- بعد میں (₹ 3500) → CGST کے لیے استعمال کیا
- آخر میں باقی ماندہ (₹ 2100) → SGST کے لیے استعمال کیا

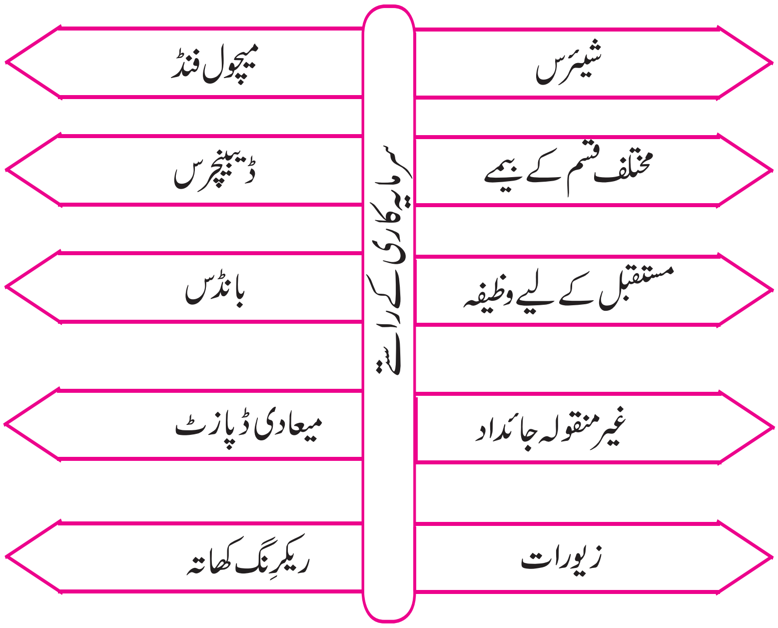
(اس لیے ₹1400 SGST ادا کرنا ہوگا۔)

آ یئے، ذرا یاد کریں۔

ہم گزشتہ سال بچت اور سرمایہ کاری کی اہمیت سے واقف ہو چکے ہیں۔ اس کے مطابق جو ممکن ہو سکا، اس پر آپ نے عمل درآمد بھی شروع کر دیا ہوگا کیونکہ ہمیشہ صحت وتندرست رہنے کے لیے جس طرح صحت منداور اچھی عادتیں اپنے اندر پیدا کرنے کی ضرورت ہوتی ہے ویسے ہی معاشی اور مالیاتی صحت مندی کے لیے بچت اور سرمایہ کاری کی عادت اپنے اندر پیدا کرنے کی بھی ضرورت ہوتی ہے۔ فی الحال سرمایہ کاری کی اقسام اتنی زیادہ مختلف النوع ہیں کہ اس کا مطالعہ اور تجربہ دونوں ہونا اہمیت کا حامل ہے۔

آ یئے، بحث کریں۔

سویتا ایک کمپنی میں کام کرتی ہے۔ اس مہینے سے اس کی تنخواہ میں 5% اضافہ ہوا اور آئندہ مہینے میں بونس بھی ملنے والا ہے۔ اس لیے وہ تنخواہ سے یہ اضافی رقم مناسب جگہ سرمایہ کاری کرنے پر غور کر رہی ہے۔ اس کی سہیلی نیہا مالیاتی مشورہ دینے والی فرم میں نوکری کرتی ہے۔ اس لیے وہ سرمایہ کاری سے متعلق اپنی سہیلی کو مناسب مشورہ دے سکتی ہے۔ نیہا کہتی ہے، ''اپنی سرمایہ کاری میں تنوع ہونا سب سے زیادہ اہم ہے۔ جیوَن بیما، صحت کا بیما، خود اپنا ذاتی گھر ہونا، بینک میں ایف۔ ڈی اور متوالی (ریکرِنگ) کھاتا ہو۔ ان سب پر غور کرنا ہوگا۔'' سویتا نے کہا، ''میرا بیما ہے اور بینک میں ایف۔ ڈی بھی ہے۔ اس کے علاوہ تنخواہ سے پراویڈنٹ فنڈ کی قسط بھی منہا ہوتی ہے۔ پھر بچت کے اور بھی کچھ راستے ہیں؟'' نیہا نے کہا، ''فی الحال شیئرس، میچول فنڈ (MF)، ڈبینچرس، بانڈ وغیرہ میں سرمایہ کاری کرنے والوں کی تعداد میں اضافہ ہوا ہے۔ اسی طرح ایس۔ آئی۔ پی کرنے کی طرف بھی لوگوں کے رجحان میں اضافہ ہوا ہے۔ اب تجھے ہر مہینہ ایک متعین رقم زیادہ ملنے والی ہے، اس لیے مسلسل متوالی سرمایہ کاری (SIP - Systematic Investment Plan) میں تو ہر ماہ متعین رقم جمع کر سکتی ہے۔''



ایسے مکالمے ہم جگہ جگہ سنتے رہتے ہیں اور اس کے بارے میں بالکل صحیح معلومات ہونا چاہیے۔ 'سب کا فائدہ – سب کا سکھ وچین'۔

اس باب میں ہم شیئرس، میچول فنڈ، SIP کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

آیئے، سمجھ لیں۔

شیئرس (Shares)

فرد کی اپنی دکان ہونا یعنی دکان کی اپنی ملکیت ہونا (مالک ہونا)۔ دو- چار افراد اکٹھا ہو کر تجارت کرنا یعنی شراکت داری، اس کے لیے کم سرمایہ درکار ہوتا ہے لیکن کسی کمپنی، صنعت یا کارخانہ شروع کرنا ہو تو بہت زیادہ سرمایہ کی ضرورت ہوتی ہے۔ یہ سرمایہ سماج سے جمع کرنا پڑتا ہے۔

کارخانہ یا کمپنی شروع کرنے کے لیے خواہش مند/ دلچسپی رکھنے والے افراد یکجا ہوتے ہیں اور سماج کے افراد سے سرمایہ جمع کرکے کمپنی کی بنیاد ڈالتے ہیں۔ بھارتی کمپنی قانون 1956 کے تحت کمپنی رجسٹرڈ ہوتی ہے۔ کمپنی کی بنیاد ڈالنے والے افراد کو کمپنی کے **اعانت کار** (promoter) کہتے ہیں۔ ایسی کمپنی پبلک لمیٹڈ (public limited) کمپنی ہوتی ہے۔

کمپنی شروع کرنے کے لیے جتنی رقم درکار ہوتی ہے اسے **سرمایہ** (capital) کہتے ہیں۔ اس سرمایے کے چھوٹے چھوٹے مساوی حصے کرتے ہیں۔ یہ حصہ عام طور پر 1 ₹ ، 2 ₹ ، 5 ₹ ، 10 ₹ یا 100 ₹ وغیرہ قیمت کے ہوتے ہیں۔ ہر حصے کو شیئر کہتے ہیں۔ یہ شیئر فروخت کرکے کمپنی کے لیے سرمایہ جمع کیا جاتا ہے۔

شیئر (Share) : کمپنی کا حصہ۔ سرمایہ کا ایک حصہ یعنی ایک شیئر۔ شیئر سرٹیفکیٹ (share certificate) پر ایک شیئر کی قیمت، شیئر کی تعداد، نمبر شمار وغیرہ پرنٹ (چھپے ہوئے) ہوتے ہیں۔

حصہ دار یا شیئر رکھنے والا (Share holder) : کمپنی کا شیئر خریدنے والا فرد کمپنی کا شراکت دار (حصہ دار) ہوتا ہے۔ شراکت دار کے پاس موجود شیئر کے تناسب میں وہ کمپنی کا مالک ہوتا ہے۔

اسٹاک ایکسچینج (Stock Exchange) : جہاں شیئر کی خرید فروخت ہوتی ہے اسے شیئر بازار (اسٹاک ایکسچینج) یا اسٹاک مارکیٹ یا اِکویٹی مارکیٹ، کیپٹل مارکیٹ یا شیئر مارکیٹ کہتے ہیں۔ سماج سے سرمایہ جمع کرکے شروع کی گئی یعنی پبلک لمیٹڈ کمپنی شیئر بازار میں رجسٹرڈ (listed company) ہونا ضروری ہے۔

درشنی قیمت (Face Value - FV) : کمپنی کے شیئر سرٹیفکیٹ پر چھپی ہوئی ایک شیئر کی قیمت کو شیئر کی درشنی قیمت (FV) کہتے ہیں۔

بازار بھاؤ (Market Value - MV) : جس قیمت سے شیئر بازار میں شیئر کی خرید و فروخت ہوتی ہے اس قیمت کو اس شیئر کا بازار بھاؤ (MV) کہتے ہیں۔

کمپنی کے قائم ہونے پر اگر اُس کی کارکردگی اُمید سے زیادہ اچھی ہوتی ہے تو شیئر کی **مانگ** بازار میں بڑھ جاتی ہے۔ شیئر کی تعداد مقرر و معین ہوتی ہے یعنی اُس کی تعداد بڑھائی نہیں جاسکتی۔ اس لیے اس کمپنی کے شیئر کے بھاؤ میں اضافہ ہونے لگتا ہے۔ اس کے برعکس اگر کمپنی کی کارکردگی زوال کی طرف مائل ہو تو شیئر کا بھاؤ گر جاتا ہے۔ اس چڑھاؤ- اُتار کو بالترتیب ▲ ، ▼ اِن علامتوں سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس چڑھاؤ- اُتار کے نتیجے میں بازار پیٹھ میں اِنڈیکس بڑھتا یا کم ہوتا ہے۔

شیئر بازار میں شیئر کا بھاؤ ہر لمحہ بدلتا رہتا ہے۔

منافع (Dividend) : کمپنی کے مالی سال میں ہونے والے نفع کی تقسیم شیئر کی تعداد کے مطابق شیئر کے شراکت داروں میں کی جاتی ہے۔شیئر ہولڈروں کو ملنے والے نفع کو Part of dividend یعنی منافع کا حصہ کہتے ہیں۔

کمپنی کی کارکردگی اچھی ہوتی جاتی ہے تو نتیجتاً کمپنی کی جائداد میں اضافہ ہوتا رہتا ہے یعنی شیئرس پر ڈیوڈنڈ (منافع) بھی اچھا ملتا ہے۔

شیئر ہولڈر کو ملنے والے ڈیویڈنڈ پر انکم ٹیکس ادا نہیں کرنا ہوتا ہے۔

اسے ذہن میں رکھیں۔

شیئر کا بازار بھاؤ کتنا بھی کم - زیادہ ہوتا ہے لیکن سال کے آخر میں اعلان شدہ ڈیویڈنڈ ہمیشہ شیئر کی تعداد کے تناسب میں (درشنی قیمت پر) ہی ملتا ہے۔

مزید معلومات کے لیے :

ممبئی میں ممبئی شیئر بازار (بامبے اسٹاک ایکسچینج BSE) اور قومی شیئر بازار (نیشنل اسٹاک ایکسچینج NSE) بھارت کے دو بڑے شیئر بازار ہیں۔ممبئی شیئر بازار ایشیا کا سب سے قدیم شیئر بازار ہے۔نیشنل شیئر بازار بھارت کا سب سے بڑا شیئر بازار ہے۔

شیئر بازار میں چڑھ-اُتار سمجھنے کے لیے SENSEX (سینسیکس) اور NIFTY (نفٹی) اس طرح کے دو انڈیکس (Index) ہیں۔ SENSEX = SENSitive + indEX اِن دو الفاظ سے بنایا گیا ہے۔ BSE نے 1-1-1986 میں SENSEX دینے کی ابتدا کی۔سب سے زیادہ سرمایہ والی مشہور و قائم 30 کمپنیوں کے بازار بھاؤ میں چڑھ-اُتار کے مطابق SENSEX طے کیا جاتا ہے۔

نفٹی جیسا کہ اس لفظ سے ظاہر ہے دو الفاظ سے بنا ہے ؛ **NIFTY = NSE + FIFTY**۔ نفٹی NSE میں سب سے بہترین کارکردگی کرنے والی 50 کمپنیوں پر سے طے کیا جاتا ہے۔

ICT Tools or Links

SEBI کی ویب سائٹ کو دیکھیے، اسی طرح ممبئی شیئر بازار، نیشنل شیئر بازار اور ٹی وی کے چینل یا نیٹ پر شیئر بازار کی معلومات دینے والے ویڈیو دیکھیے اور شیئر بازار کو سمجھیے۔شیئر کے بھاؤ میں چڑھ-اُتار ٹی وی پر مسلسل دِکھائے جاتے ہیں۔اسے دیکھیے۔ عام طور پر اوپر کی پٹی میں ممبئی شیئر بازار میں اور نیچے کی پٹی میں نیشنل شیئر بازار میں شیئر کے بازار بھاؤ دِکھائے جاتے ہیں۔شیئرس کی بک ویلیو (Book Value) یعنی کیا، اس کی معلومات حاصل کیجیے۔

درشنی قیمت اور بازار بھاؤ میں موازنہ (Comparison of FV and MV)

(1) اگر درشنی قیمت > بازار بھاؤ $\rightarrow$ ہو تو وہ شیئر (share is at premium) یعنی زائد قیمت پر ہے، کہتے ہیں۔

(2) اگر درشنی قیمت = بازار بھاؤ $\rightarrow$ ہو تو وہ شیئر ہم قیمت پر ہے (share is at par) کہتے ہیں۔

(3) اگر درشنی قیمت < بازار بھاؤ $\rightarrow$ ہو تو وہ شیئر کم قیمت یا تخفیفی قیمت پر ہے یعنی (share is at discount) کہتے ہیں۔

مثال (1) فرض کیجیے شیئر کی درشنی قیمت 10 ₹ اور بازار بھاؤ 15 ₹ ہو تو یہ شیئر روپے 5 = 10-15 زائد قیمت پر ہے یعنی پریمیم پر ہے۔

(2) فرض کیجیے، شیئر کی درشنی قیمت 10₹ اور بازار بھاؤ 10₹ ہو تو یہ شیئر 0 = 10 – 10 ہم قیمت پر ہے۔ یعنی 'at par' ہے۔

(3) فرض کیجیے شیئر کی درشنی قیمت 10 ₹ اور بازار بھاؤ 7 ₹ ہو تو یہ شیئر روپے 3 = 7 – 10 کم قیمت پر ہے یعنی وہ discount پر ہے۔

کل سرمایہ (Sum invested) : شیئر کی خریدی کے لیے درکار کل رقم یعنی کل سرمایہ۔

ایک شیئر کا بازار بھاؤ × شیئر کی تعداد = کل سرمایہ

مثال : 100 روپے درشنی قیمت والا ایک شیئر 120 روپے بازار بھاؤ سے خریدا۔ پھر ایسے 50 شیئر لینے کے لیے کتنے روپے کی سرمایہ کاری کرنا ہوگی؟

حل : ایک شیئر کی بازاری قیمت × شیئر کی تعداد = کل سرمایہ

$= 50 \times 120 = 6000$ روپے

شیئر پر واپسی کی شرح (Rate of Return)

شیئرس میں سرمایہ کاری کی رقم زمانے کے گزرنے کے ساتھ کتنی واپس ملتی ہے، اسے سمجھنا بہت اہم ہے۔

مثال (1) شری لیش نے 100 ₹ درشنی قیمت والا ایک شیئر بازار بھاؤ 120 ₹ تھا تب خریدا۔ اس پر اس کو کمپنی نے 15% ڈیویڈنڈ (منافع) دیا تو سرمایہ کاری پر ملنے والی رقم کی واپسی کی شرح معلوم کیجیے۔

حل : درشنی قیمت = 100 روپے، بازار بھاؤ = 120 روپے، منافع (ڈیویڈنڈ) = 15%

فرض کیجیے فی شیئر واپسی کی شرح $x\%$ ہے۔ اسے ذہن میں رکھیے کہ 120 روپے سرمایہ کاری کرنے پر 15 روپے واپس ملے ہیں۔

اگر،	120	:	15
تو،	100	:	x

$$\therefore \quad \frac{15}{120} = \frac{x}{100}$$

$$\therefore \quad x = \frac{15 \times 100}{120} = \frac{25}{2} = 12.5\%$$

جواب : شری لیش کو سرمایہ کاری کی واپسی کی شرح 12.5% ہے۔

مثال (2) درشنی قیمت = 100 روپے، زائد قیمت = 65 روپے ہو تو اس شیئر کا بازار بھاؤ معلوم کیجیے۔

حل : بازار بھاؤ = درشنی قیمت + زائد قیمت = 100 + 65 = 165 روپے

∴ شیئر کا بازار بھاؤ 165 روپے فی شیئر

مثال(3) درج ذیل جدول میں مناسب عدد لکھ کر مکمل کیجیے۔

بازار بھاؤ	قیمت کی قسم	درشنی قیمت	مثال نمبر
	زائد قیمت 7 ₹	₹ 10	(i)
₹ 16		₹ 25	(ii)
₹ 5	ہم قیمت		(iii)

حل : (i) بازار بھاؤ روپے 17 = 7 + 10 (ii) کم قیمت روپے 9 = 16 – 25 (iii) درشنی قیمت 5 روپے

مثال(4) نیل بھائی نے ذیل کے مطابق شیئروں میں سرمایہ کاری کی تو انھوں نے کل کتنی سرمایہ کاری کی؟

کمپنی A : 350 شیئرس ، درشنی قیمت = 10 روپے ، فی شیئر زائد قیمت = 7 روپے

کمپنی B : 2750 شیئرس ، درشنی قیمت = 5 روپے ، بازار بھاؤ = 4 روپے

کمپنی C : 50 شیئرس ، درشنی قیمت = 100 روپے ، بازار بھاؤ = 150 روپے

حل : کمپنی A : زائد قیمت = 7 روپے, ∴ بازار بھاؤ = درشنی قیمت + زائد قیمت = 10 + 7 = 17 روپے

∴ کمپنی A میں سرمایہ کاری = شیئر کی تعداد × بازار بھاؤ = 350 × 17 = 5950 روپے

کمپنی B : درشنی قیمت = 5 روپے , بازار بھاؤ = 4 روپے

∴ کمپنی B میں سرمایہ کاری = شیئر کی تعداد × بازار بھاؤ = 2750 × 4 = 11,000 روپے

کمپنی C = درشنی قیمت = 100 روپے , بازار بھاؤ = 150 روپے

∴ کمپنی C میں سرمایہ کاری = شیئر کی تعداد × بازار بھاؤ = 50 × 150 = 7500 روپے

جواب : ∴ نیل بھائی کی تینوں کمپنیوں میں کل سرمایہ کاری = 5950 + 11000 + 7500 = 24,450 روپے

مثال(5) سیما نے 12,000 روپے سرمایہ کاری کرکے 10 روپے درشنی قیمت کے شیئر کے لیے 2 روپے زائد قیمت ادا کی تو اسے کتنے شیئر ملیں گے؟ اسے معلوم کرنے کے لیے ذیل کا عملی کام پورا کیجیے۔

حل : درشنی قیمت = 10 روپے ، زائد قیمت = 2 روپے

∴ بازار بھاؤ = درشنی قیمت + ☐ = ☐ + ☐ = ☐

∴ شیئر کی تعداد = کل سرمایہ کاری / بازار بھاؤ = 12000 / ☐ = ☐ شیئرس

جواب : سیما کو ☐ شیئرس ملیں گے۔

مثال(6) 10 روپے درشنی قیمت کے 50 شیئرس 25 روپے بازار بھاؤ سے خریدے۔اس پر کمپنی نے 30% منافع (ڈیویڈنڈ) ادا کرنے کا اعلان کیا تو (i) کل سرمایہ کاری (ii) ملنے والا منافع (ڈیویڈنڈ) (iii) سرمایہ کاری پر واپس ملنے والی رقم کی شرح معلوم کیجیے۔

حل : شیئر کی درشنی قیمت = 10 روپے ، بازار بھاؤ = 25 روپے ، شیئرس کی تعداد = 50

∴ کل سرمایہ کاری = $25 \times 50 = 1250$ روپے

منافع (ڈیویڈنڈ) فی شیئر = $10 \times \frac{30}{100} = 3$ روپے

∴ 50 شیئر پر کل منافع = $50 \times 3 = 150$ روپے

$$\text{واپس ملنے والی رقم کی شرح} = \frac{\text{ملنے والا کل ڈیویڈنڈ}}{\text{کل سرمایہ کاری}} \times 100$$

$$= \frac{150}{1250} \times 100 = 12\%$$

جواب : (i) کل سرمایہ کاری 1250 روپے، (ii) 50 شیئرس پر ملنے والا ڈیویڈنڈ 150 روپے، (iii) سرمایہ کاری پر واپس ملنے والی رقم کی شرح 12%

مشقی سیٹ 4.3

.1 ذیل میں دی ہوئی جدول مناسب عدد لکھ کر مکمل کیجیے۔

بازار بھاؤ	قیمت کی قسم	درشنی قیمت	مثال نمبر
. . .	ہم قیمت	₹ 100	(1)
₹ 575	زائد قیمت = ₹ 500	. . .	(2)
₹ 5	. . .	₹ 10	(3)

.2 بازار بھاؤ 80 روپے تھا جب اُمول نے 100 روپے درشنی قیمت کے 50 شیئرس خریدے۔اس سال کمپنی نے 20% منافع دیا تو سرمایہ کاری پر واپس ملنے والی رقم کی شرح معلوم کیجیے۔

.3 جوزف نے ذیل کے مطابق شیئرس میں سرمایہ کاری کی تو اُس کی کل سرمایہ کاری معلوم کیجیے۔

کمپنی A : درشنی قیمت 2 روپے اور زائد قیمت 18 روپے والے 200 شیئرس

کمپنی B : بازار بھاؤ 500 روپے والے 45 شیئرس

کمپنی C : بازار بھاؤ سے 10,540 روپے والا 1 شیئر

.4 شریمتی دیشپانڈے نے 20,000 روپے سرمایہ کاری کرکے 5 روپے درشنی قیمت کے شیئر 20 روپے زائد قیمت دے کر خریدے تو انھیں کتنے شیئرس ملیں گے؟

.5 شری شانتی لال نے 100 روپے درشنی قیمت کے 150 شیئرس 120 روپے بازار بھاؤ سے خریدے۔بعد میں کمپنی نے 7% ڈیوڈنڈ

دیا۔ سرمایہ کاری پر واپس ملنے والی رقم کی شرح کتنی ہے؟

.6 درج ذیل میں سے کون سی سرمایہ کاری فائدہ مند ہے؟ دونوں کمپنیوں کے شیئر کی درشنی قیمت مساوی ہے۔ کمپنی A کے لیے بازار بھاؤ 80 روپے ہے اور منافع (ڈیویڈنڈ) 16% اور کمپنی B کے لیے بازار بھاؤ 120 روپے اور منافع 20% ہے۔

ICT Tools or Links

کسی بھی پانچ کمپنیوں کے شیئرس کی درشنی قیمت اور بازار بھاؤ انٹرنیٹ کی مدد سے یا دیگر ذرائع سے معلوم کیجیے اور اس کا متصل ستونی ترسیم بنائیے اور موازنہ کیجیے۔ (ممکن ہو تو ▲ ، ▼ یہ دونوں قسم کے شیئرس لیجیے۔)

آیئے، سمجھ لیں۔

شیئرس کی خرید و فروخت پر دلالی اور ٹیکس (Brokerage and taxes on share trading)

دلالی (بروکریج - Brokerage): شیئرس کی خرید و فروخت نجی طرز پر نہیں کر سکتے۔ اسے شیئر بازار میں رجسٹرڈ شخص یا اداروں کی معرفت کیا جاتا ہے۔ ان کو **'شیئر دلال'** (Share Broker) کہتے ہیں۔ دلال معرفت شیئر خریدتے وقت اور فروخت کرتے وقت، جس شرح سے رقم دلال لیتا ہے، اسے **'دلالی'** کہتے ہیں۔ یعنی شیئر فروخت کرنے والا اور خریدار دونوں ہی دلالی دیتے ہیں۔

مثال (1) فرض کیجیے، 100 روپے درشنی قیمت کا بازار بھاؤ 150 روپے ہے۔ دلالی کی شرح 0.5% ہے۔ ایسے 100 شیئرس لیتے وقت کتنی رقم دینا ہوگی؟ ایسے 100 شیئرس فروخت کرنے پر کتنی رقم ملے گی؟

شیئر خریدتے وقت -

ایک شیئر کی خرید قیمت = بازار بھاؤ + دلالی

= 150 روپے + 150 روپے کی 0.5% دلالی = 150 + 0.75

∴ ایک شیئر کی خرید قیمت = 150.75 روپے

ایسے 100 شیئرس کی خرید پر کل سرمایہ کاری،

کل سرمایہ کاری = 100 × 150.75 = 15075 روپے

اس میں 15000 روپے شیئرس کے اور 75 روپے دلالی ہے۔

شیئر فروخت کرتے وقت -

ایک شیئر کی فروخت قیمت = بازار بھاؤ - دلالی

= 150 روپے - 150 روپے پر 0.5% دلالی = 150 - 0.75

∴ ایک شیئر کی فروخت قیمت = 149.25 روپے

∴ 100 شیئر کی فروخت قیمت = 149.25 × 100 = 14925 روپے

∴ 100 شیئرس کی فروخت پر 14925 روپے ملیں گے۔

اسے ذہن میں رکھیں۔

- دلالی ہمیشہ شیئرس کے بازار بھاؤ پر محسوب کی جاتی ہے۔
- شیئر کی خرید وفروخت کی روداد (اسٹیٹمنٹ) میں دلالی اور ٹیکس ملا کر ایک شیئر کی قیمت طے کی جاتی ہے۔

سرگرمی-I : آپ کے علاقے میں شیئر دلالی کی خدمت فراہم کرنے والے فرد یا ادارے کی معلومات حاصل کیجیے اور محسوب کرنے والی دلالی کی شرحوں کی معلومات حاصل کیجیے اور موازنہ کیجیے۔

سرگرمی-II : ڈیمیٹ کھاتے (Demat A/c) اور ٹریڈنگ کھاتے کی روداد (اسٹیٹمنٹ) حاصل کیجیے۔اس میں کون کون سی باتیں شامل ہیں اس کی معلومات نیٹ سے/ دلال سے ملاقات کرکے/ بزرگوں سے حاصل کیجیے۔دوستوں کے ساتھ بحث کیجیے۔

مزید معلومات کے لیے : ہر شیئر دلال سیبی (SEBI - Securities and Exchange Board of India) کے قانون-1992 کے تحت رجسٹرڈ ہوتا ہے اور اس پر سیبی کی نگرانی ہوتی ہے۔

شیئرس، بانڈس، میچول فنڈ وغیرہ کا اندراج رکھنے کے لیے ڈی-میٹ کھاتے (Dematerialized Account) اور ان کی خرید وفروخت کرنے کے لیے ٹریڈنگ کھاتے (Trading Account) کھولنا ضروری ہے۔ یہ کھاتے بینک میں یا شیئر دلال کے پاس کھولے جاتے ہیں۔ DP یعنی Depository Participants۔ NSDL اور CDSL نامی دو Depositories کے ماتحت DPs ہوتے ہیں۔ ڈی-میٹ کھاتے میں شیئرس کی خرید وفروخت کا حساب رکھا جاتا ہے۔ یہ بینک کے کھاتے جیسا ہوتا ہے۔فروخت کیے ہوئے شیئرس، خرچ کی جانب (Debit) لکھے جاتے ہیں۔خریدے ہوئے شیئرس جمع کی جانب (Credit) لکھے جاتے ہیں۔ ان کی روداد (statement) مانگنے پر ملتی ہے۔اس کے لیے متعین فیس ادا کرنا ہوتی ہے۔اس کھاتے میں آپ کے شیئرس الکٹرانک فارم میں جمع رہتے ہیں۔ ان دونوں کھاتوں کو آپ کے بینک کے سیونگ کھاتے سے جوڑنا ہوتا ہے۔شیئرس کی خریداری کے وقت درکار رقم ضرورت کے مطابق اس سے منتقل کی جاتی ہے۔اسی طرح فروخت کے بعد ملنے والی رقم اس میں جمع ہوتی ہے۔شیئر دلال اور بینک یہ تمام باتوں کے لیے خواہش منداور طلب گار لوگوں کی رہنمائی کرتے ہیں۔

آیئے، سمجھ لیں۔

دلالی پر اشیا وخدمات ٹیکس (GST on brokerage services)

شیئر دلال اپنے کھاتے داروں کے لیے شیئرس کی خرید وفروخت کی خدمت انجام دیتے ہیں۔ دلالی خدمت پر ٹیکس کی شرح 18% ہے۔ان کا SAC نمبر تلاش کیجیے۔

نوٹ : اشیا وخدمات ٹیکس کے علاوہ گاہکوں کی حفاظت کے لیے شیئرس کی خرید وفروخت پر مزید کچھ معمولی شرح کے ٹیکس ہیں مثلاً سیکوریٹی ٹرانزیکشن ٹیکس (STT)، SEBI فیس، اسٹامپ ڈیوٹی وغیرہ۔ اس پر ہم یہاں غور نہیں کریں گے۔صرف بروکریج (دلالی) کے لیے اشیا وخدمات ٹیکس پر غور کریں گے۔

مثال (2) فرض کیجیے مثال (1) کے مطابق ایک شخص نے 15075 روپے شیئرس کی خریداری کے لیے دیے۔ اس رقم میں 75 روپے دلالی ہے تو اسے 75 روپے پر 18% سے کتنی دلالی دینی ہوگی؟ یہ معلوم کیجیے اور اس کا روداد (اسٹیٹمنٹ) تیار کیجیے۔

حل:

$$\text{GST} \text{ روپے پر } 75 \text{ شرح سے } 18\% = \frac{18}{100} \times 75$$

$$= 13.50 \text{ روپے}$$

شیئر خریدی کی روداد (معاہدہ نوٹ :Contract Note)

شیئرس کی تعداد	شیئرس کا بازار بھاؤ	شیئر کی درشنی قیمت	دلالی 0.5%	دلالی پر CGST 9%	دلالی پر SGST 9%	شیئر کی کل خرید قیمت
100 (B)	150 روپے	15000 روپے	75 روپے	6.75 روپے	6.75 روپے	15088.50 روپے

مثال (3) بشیر خان نے 40 روپے بازار بھاؤ سے 100 شیئر خریدے۔ دلالی کی شرح 0.5% اور دلالی پر GST کی شرح 18% ہے تو انھیں 100 شیئر کے لیے کل کتنا خرچ کرنا ہوگا؟

حل:

100 شیئرس کی بازار بھاؤ کے مطابق قیمت $= 40 \times 100 = 4000$ روپے

ایک شیئر پر دلالی $= \frac{0.5}{100} \times 40 = 0.20$ روپے

$\therefore$ ایک شیئر کی خرید قیمت = بازار بھاؤ + دلالی

$= 40 + 0.20 = 40.20$ روپے

$\therefore$ 100 شیئر کی خرید قیمت $= 40.20 \times 100 = 4020$ روپے

100 شیئرس پر کل دلالی $= 0.20 \times 100 = 20$ روپے

$\therefore$ اشیا و خدمات ٹیکس (GST) $= \frac{18}{100} \times 20 = 3.60$ روپے

بشیر خان کو 100 شیئرس خریدنے کے لیے کل خرچ $= 4020 + 3.60 = 4023.60$ روپے

مثال (4) پرویز پٹیل نے 1,25,295 روپے سرمایہ کاری کر کے 10 ₹ درشنی قیمت کے 125 ₹ بازار بھاؤ سے 100 شیئر خریدے۔ اس کاروبار میں دلالی کی شرح 0.2% اور دلالی پر 18% GST ادا کیا تو (i) کتنے شیئر خریدے؟ (ii) کل کتنی دلالی ادا کی؟ (iii) اس کاروبار میں کتنا اشیا و خدمات ٹیکس (جی ایس ٹی) ادا کیا؟

حل: سرمایہ کاری = 1,25,295 روپے ، بازار بھاؤ = 125 روپے ، دلالی = 0.2% ، ٹیکس کی شرح = 18%

ایک شیئر پر دلالی $= 125 \times \frac{0.2}{100} = 0.25$

ایک شیئر کی دلالی پر جی ایس ٹی = 0.25 کا 18% = 0.045 روپے

$\therefore$ ایک شیئر کی خرید قیمت = بازار بھاؤ + دلالی + ٹیکس

$= 125 + 0.25 + 0.045 = 125.295$ روپے

∴ شیئرز کی تعداد $= \frac{125295}{125.295} = 1000$

کل دلالی = فی شیئر دلالی + شیئرز کی تعداد

∴ کل دلالی $= 0.25 \times 1000 = 250$ روپے

کل ٹیکس $= 1000 \times 0.045 = 45$ روپے

جواب : (i) 1000 شیئرس خریدے (ii) دلالی 250 روپے ادا کیے (iii) دلالی پر 45 روپے ٹیکس ادا کیے۔

مثال (5) نلینی تائی نے 6024 روپے سرمایہ کاری کر کے 10 روپے درشنی قیمت والے شیئرز خریدے۔ جبکہ شیئرز کا بازار بھاؤ 60 روپے تھا تو اس پر 60% منافع (ڈیویڈنڈ) ملنے کے بعد 50 روپے بازار بھاؤ سے تمام شیئرس فروخت کردیے۔ ہر کاروبار میں 0.4% دلالی ادا کی تو اس کاروبار میں ان کا کتنا نفع یا نقصان ہوا؟ اسے معلوم کرنے کے لیے ذیل میں دیے ہوئے خالی خانوں کو مکمل کیجیے۔

حل : یہاں ٹیکس کی شرح دی ہوئی نہیں ہے اس لیے شیئرس کی خرید و فروخت کے وقت ادا کیے جانے ٹیکس پر غور نہیں کیا جائے گا۔

10 ₹ درشنی قیمت کا شیئر 60 روپے میں خریدا گیا۔

فی شیئر دلالی $= \frac{0.4}{100} \times 60 = \square$ روپے

∴ ایک شیئر کی قیمت $= 60 + 0.24 = \square$ روپے

6024 روپے میں خریدے گئے شیئرس کی تعداد $= \frac{6024}{60.24} = 100$

10 روپے درشنی قیمت کے شیئر 50 روپے بازار بھاؤ سے سے فروخت کیے۔

∴ فی شیئر دلالی $= \frac{0.4}{100} \times 50 = 0.20$ روپے

∴ ایک شیئر کی فروخت قیمت $= 50 - 0.20 = \square$ روپے

∴ 100 شیئروں کی فروخت قیمت $= 100 \times 49.80 = \square$ روپے

(ڈیویڈنڈ) منافع 60% ملا۔ (دیا ہوا ہے)

∴ ایک شیئر پر منافع $= \frac{60}{100} \times 10 = 6$ روپے

∴ 100 شیئرس پر منافع $= 6 \times 100 = \square$ روپے

نلینی تائی کے شیئر فروخت کرنے سے اور منافع ملنے سے حاصل ہونے والی کل آمدنی $= \square + \square = 5580$ روپے

لیکن نلینی تائی کی کل سرمایہ کاری 6024 روپے تھی

∴ نلینی تائی کا کل نقصان $= \square - \square = \square$ روپے

جواب : نلینی تائی کو اس خرید و فروخت کے کاروبار میں 444 روپے کا نقصان ہوا۔

عملی کام : مثال (5) میں خرید وفروخت کے وقت دلالی پرٹیکس 18% کی شرح سے دیا ہوتا تو نقصان کتنا ہوا ہوتا، اسے معلوم کیجیے۔ کیا آپ کا جواب 451.92 روپے ہے؟ اس کی جانچ کیجیے۔

آیئے، سمجھ لیں۔

میچول فنڈ (Mutual Fund - MF)

شیئرز کا مطالعہ کرتے وقت ہم نے دیکھا کہ کمپنی قائم کرنے کے خواہش مند افراد یکجا ہوتے ہیں اور سماج سے معاونت لے کر بڑا سرمایہ جمع کرتے ہیں۔ کمپنی کی کارکردگی بہترین ہوتی ہے تو ان تمام افراد کو اس کا فائدہ ہوتا ہے۔ انھیں منافع ملتا ہے۔ شیئر کے بازار بھاؤ میں اضافہ ہوتا ہے اس لیے فائدہ ہوتا ہے۔ کمپنی کا سرمایہ بڑھتا ہے۔ نتیجے میں ملک کی ترقی میں پیش رفت ہوتی ہے۔ مختصراً سماجی علوم کا نظریہ ہے 'Together we can progress!' لیکن ہر سکے کے دو پہلو ہوتے ہیں۔ شیئر میں فائدہ ہونے کی بجائے کبھی کبھی نقصان بھی ہوسکتا ہے۔ کیا ہم یہ نقصان کم کر سکتے ہیں؟ کیا سرمایہ کاری کرنے والے فرد کا یہ خطرہ کم کیا جاسکتا ہے؟ اس کے لیے آج کل بہت سے لوگ میچول فنڈ میں سرمایہ کاری کرتے ہیں۔

میچول فنڈ یعنی کئی سرمایہ کاری کرنے والے افراد کے سرمایے کو اکٹھا کر کے جمع کی ہوئی رقم۔ اس رقم کو ایک طرح کے شیئر میں نہ لگاتے ہوئے سرمایہ کاری کی مختلف قسموں میں سرمایہ کاری کرتے ہیں۔ اس لیے خطرہ کم ہوجاتا ہے اور منافع سب سرمایہ داروں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ میچول فنڈ میں سرمایہ کاری کس طرح کریں؟ اس میں رقم کی واپسی کیسے ملتی ہے؟ کتنی میعاد کے لیے سرمایہ کاری کریں؟ اس میں مختلف قسم کون سی ہیں؟ ایسے کئی سوالات کے تفصیلی جواب مالی مشورہ دینے والے افراد دے سکتے ہیں۔

> Investments in Mutual Funds are subject to Market risks. Read all scheme related documents carefully.
>
> یہ جملے آپ نے اکثر سنے یا پڑھے ہوں گے۔ اس کا مطلب ٹھیک طور پر سمجھ لیجیے۔ بعض مواقع پر میچول فنڈ میں کی گئی سرمایہ کاری پر نفع کی بجائے نقصان بھی ہوتا ہے اور اسے شراکت داروں کو برداشت کرنا ہوتا ہے۔

میچول فنڈ یعنی ماہر پیشہ ور لوگوں کے ذریعے بنائی گئی فنڈ کی اسکیم۔ ان ماہروں کو AMC یعنی 'اسیٹ مینجمنٹ کمپنی' کہتے ہیں۔ وہ بازار کا اندازہ لگا کر خواہش مند لوگوں کی رقم جمع کر کے مختلف اسکیموں (جیسے اِکویٹی فنڈ (شیئرس)، ڈیبٹ فنڈ (ڈِبینچرس، بانڈس وغیرہ) یا دونوں کے بیلنس فنڈ وغیرہ) میں سرمایہ داروں کی ہدایت کے مطابق سرمایہ کاری کرتے ہیں۔

ہم شیئر بازار میں رقم کی سرمایہ کاری کرتے ہیں تو شیئر ملتا ہے۔ اسی طرح میچول فنڈ میں رقم کی سرمایہ کاری کرتے ہیں تو '**Units**' ملتے ہیں۔

فی یونٹ جو بازار بھاؤ ہوتا ہے اس کو اس یونٹ کا نقد جائیدادی قیمت (Net asset value - NAV) کہتے ہیں۔

یونٹ کی تعداد × ایک یونٹ کی نقد قیمت = میچول فنڈ کمپنی کے کل سرمایہ کاری کی قیمت

نوٹ : شیئرس کے بھاؤ کی طرح میچول فنڈ میں یونٹ کی نقد قیمت بھی مسلسل بدلتی رہتی ہے۔ضرورت پڑنے پر وہ یونٹ فروخت کی جاسکتی ہے۔

قومی (نیشنل) بینک ہو یا بھارتی پوسٹ سیوا ہو، اس میں سرمایہ کاری زیادہ محفوظ ہوتی ہے لیکن اس سرمایہ کاری سے واپس ملنے والی رقم عام طور پر مہنگائی کا مقابلہ کرنے میں ناکافی ہوتی ہے۔اسے ذہن میں رکھنا چاہیے کہ مناسب اور صحیح طریقے سے سرمایہ کاری کی گئی رقم بھی رقم پیدا کرسکتی ہے۔اس کے لیے سرمایہ کاری کی کی جانے والی منصوبہ بندی یعنی معاشی منصوبہ بندی (Financial Planning) ہوشیاری اور عاقبت اندیشی سے غور کرکے سرمایہ کاری کا صحیح فیصلہ لینا اہمیت کا حامل ہوتا ہے۔اس کا ہمیشہ مطالعہ کرنے کی عادت لگانی چاہیے۔

مسلسل متوالی سرمایہ کاری اسکیم (SIP - Systematic Investment Plan)

فرض کیجیے ہمیں میچول فنڈ میں یکمشت بڑی رقم کی سرمایہ کاری کرنا ممکن نہیں ہے تو ہم چھوٹی قسطوں میں ہر ماہ سرمایہ کاری کرسکتے ہیں۔ کم سے کم 500 روپے ہر ماہ میچول فنڈ میں سرمایہ لگا سکتے ہیں۔اس طرح مسلسل طور پر ماہانہ یا سہ ماہی سرمایہ کاری کرسکتے ہیں۔اس اسکیم کی وجہ سے بچت کرنے کی عادت پروان چڑھتی ہے۔مستقبل میں مالی مقاصد آسانی سے پورے ہوسکتے ہیں۔یہ اسکیم بھی طویل مدتی فائدہ بخش ہوسکتی ہے۔اس کی وجہ یہ ہے کہ شیئر بازار میں چڑھ-اُتار کا اس اسکیم میں سرمایہ کاری پر اثر کم پڑتا ہے۔کم سے 3 سے 5، ممکن ہو تو 10 سے 15 سال کے لیے اس اسکیم میں سرمایہ کاری کرنا زیادہ بہتر ہوتا ہے۔

میچول فنڈ کے فائدے

- تجربہ کار، ماہر فنڈ منیجر
- سرمایہ کاری میں زیادہ تنوع (diversifications of funds)
- شفافیت، سرمایہ کاری کا اطمینان بخش تحفظ
- لچک - جب ضرورت ہوتب فروخت کرنے کی سہولت
- محدود خطرہ
- مختصر اور طویل میعادی فائدے ملتے ہیں۔
- بعض متعین فنڈ (ELSS) میں سرمایہ کاری پر انکم ٹیکس دفعہ 80C کے تحت منہا کی رعایت۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) فرض کیجیے میچول فنڈ اسکیم کی بازار میں قیمت 200 کروڑ روپے ہے۔کمپنی نے 8 کروڑ یونٹ بنائی ہے تو ایک یونٹ کا نقد جائیدادی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : 25 روپے فی یونٹ $= \dfrac{\text{200 کروڑ روپے}}{\text{8 کروڑ یونٹ}} =$ ایک یونٹ کی نقد جائیدادی قیمت

مثال (2) مثال (1) میں فرض کیجیے کمپنی میں آپ نے 10,000 روپے سرمایہ کاری کی تو آپ کو کتنے یونٹ ملیں گے؟

حل : یونٹ 400 $= \dfrac{10,000}{25} = \dfrac{\text{کی گئی کل سرمایہ کاری}}{\text{ایک یونٹ کی نقد قیمت}} =$ یونٹ کی تعداد

مشقی سیٹ 4.4

1. ایک شیئر کا بازار بھاؤ 200 روپے ہے۔ اسے خریدتے وقت 0.3% دلالی ادا کی تو اس شیئر کی خرید قیمت کتنی ہے؟
2. ایک شیئر کا بازار بھاؤ 1000 روپے ہے۔ وہ شیئر فروخت کر دیا اور اس پر 0.1% دلالی دیا تو فروخت کے بعد کتنی رقم ملے گی؟
3. ذیل کے شیئر خریدی کے روداد (اسٹیٹمنٹ) میں خالی جگہ پُر کیجیے۔ (خریدے = B، فروخت کیے = S)

شیئرس کی تعداد	شیئرس کا بازار بھاؤ	شیئر کی درشنی قیمت	دلالی 0.2%	دلالی پر CGST 9%	دلالی پر SGST 9%	شیئر کی کل قیمت
100 B	₹ 45					
75 S	₹ 200					

4. دیسائی نے 100 روپے درشنی قیمت کے شیئرس، جب بازار بھاؤ 50 روپے تھا تب فروخت کیے۔ انھیں 4988.20 روپے ملے۔ دلالی 0.2% اور دلالی پر GST کی شرح 18% ہے تو معلوم کیجیے کہ انھوں نے کتنے شیئرس فروخت کیے؟
5. بشریٰ نے 50 روپے درشنی قیمت کے 200 شیئرس، 100 روپے زائد قیمت پر خریدے۔ اس پر کمپنی نے 50% منافع دیا۔ نفع ملنے کے بعد اس میں سے 100 شیئرس 10 روپے کم قیمت پر اور بقیہ شیئرس 75 روپے زائد قیمت پر فروخت کیا۔ ہر کاروبار میں 20 روپے دلالی دی تو انھیں اس کاروبار میں کتنے روپے نفع ہوا یا نقصان؟

مجموعۂ سوالات 4 A

1. درج ذیل سوالوں کے متبادلات میں سے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

(1) زندگی کے لیے لازمی اشیا پر اشیا و خدمات ٹیکس کی شرح .... ہے۔

(A) 5% (B) 12% (C) 0% (D) 18%

(2) ایک ہی ریاست میں کیے جانے والے کاروبار پر مرکزی حکومت کی جانب سے .... محسوب کیا جاتا ہے۔

(A) IGST (B) CGST (C) SGST (D) UTGST

(3) ہمارے ملک میں .... تاریخ سے اشیا و خدمات ٹیکس کا نظام نافذ کیا گیا ہے۔

(A) 31 مارچ 2017 (B) یکم اپریل 2017 (C) یکم جنوری 2017 (D) یکم جولائی 2017

(4) اسٹیل کے برتنوں پر اشیا و خدمات ٹیکس کی شرح 18% ہے تو اس پر ریاست کو اشیا و خدمات ٹیکس کی شرح .... محسوب کرتے ہیں۔

(A) 18% (B) 9% (C) 36% (D) 0.9%

(5) GSTIN میں کل .... حرفی ہندسی نمبر ہوتا ہے۔

(A) 15 (B) 10 (C) 16 (D) 9

(6) جب کوئی رجسٹرڈ تاجر دوسرے تاجر کو اشیا فروخت کرتا ہے تو اسے GST کے تحت .... کاروبار کہتے ہیں۔

(A) BB (B) B2B (C) BC (D) B2C

.2 25,000 روپے کے ایک شوپیس پر تاجر نے 10% رعایت دے کر باقی ماندہ رقم پر 28% جی ایس ٹی محسوب کیا تو کل بل کتنے روپے کا ہوگا؟ اس میں CGST اور SGST مدوں کے تحت کتنی رقم ہونی چاہیے؟

.3 ایک ریڈی میڈ کپڑے کی دکان میں 1000 روپے قیمت کے ملبوس پر 5% رعایت دے کر باقی رقم پر 5% GST لگا کر اسے فروخت کیا تو وہ کتنے روپے میں گاہک کو ملے گا؟

.4 سورت، گجرات میں ایک تاجر نے 2.5 لاکھ قابل ٹیکس قیمت کے سوتی کپڑے راجکوٹ، گجرات کے تاجر کو فروخت کیا تو اس کاروبار میں راجکوٹ کے تاجر کو 5% شرح سے کتنا اشیا و خدمات ٹیکس ادا کرنا ہوگا؟

.5 شریمتی ملہوترا نے 85,000 روپے قابل ٹیکس قیمت کا شمسی توانائی سیٹ خریدا اور 90,000 روپے میں فروخت کیا۔ اشیا و خدمات ٹیکس کی شرح 5% ہو تو اسے اس کاروبار میں کتنا ٹیکس منہا ہوگا اور کتنا ٹیکس ادا کرنا ہوگا؟

.6 Z سیکوریٹی خدمت مہیا کرنے والی کمپنی نے 64,500 روپے قابل ٹیکس قیمت کی خدمت مہیا کی۔ اشیا وخدمات ٹیکس کی شرح 18% ہے۔ اس سیکوریٹی خدمت مہیا کرنے کے لیے کمپنی نے لانڈری خدمت اور یونیفارم وغیرہ امور پر کل 1550 روپے اشیا و خدمات ٹیکس ادا کیا تو اس کمپنی کا ITC کتنا؟ اس پر ادا کیا جانے والا اشیا وخدمات ٹیکس میں CGST اور SGST معلوم کیجیے۔

.7 ایک تاجر نے پولس بندوبست کے لیے اشیا و خدمات ٹیکس کے ساتھ 84,000 روپے قیمت کا واکی - ٹاکی سیٹ فراہم کیا۔ اشیا وخدمات ٹیکس کی شرح 12% ہو تو اس کے محسوب کیے ہوئے ٹیکس میں مرکزی GST اور ریاست کا GST معلوم کیجیے۔ واکی-ٹاکی سیٹ کی قابل ٹیکس قیمت معلوم کیجیے۔

.8★ ایک تھوک تاجر نے 1,50,000 روپے قابل ٹیکس قیمت کے بجلی کا سامان خریدا اور وہ تمام سامان خردہ فروش کو 1,80,000 روپے قابل ٹیکس قیمت میں فروخت کر دیا۔ خردہ فروش نے وہ تمام سامان گاہکوں کو 2,20,000 روپے قابل ٹیکس قیمت میں فروخت کر دیا تو 18% شرح سے ہر کاروبار میں ٹیکس اِنوائس میں مرکز اور ریاست کے ٹیکس کے حصوں کو محسوب کیجیے۔ اسی طرح ہر تاجر کے ذریعے ادا کیا جانے والا CGST اور SGST معلوم کیجیے۔

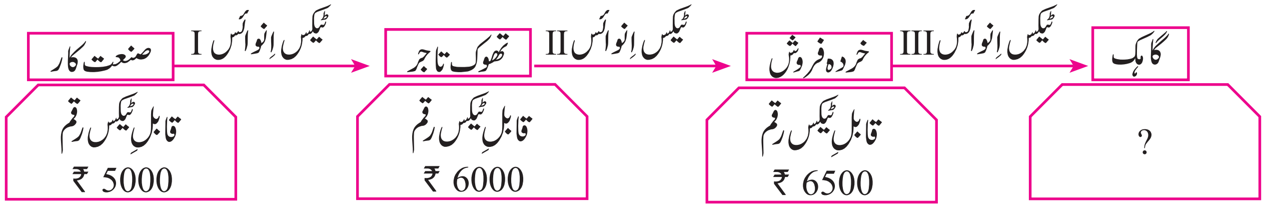
.9★ انعام قریشی (تھانہ، مہاراشٹر) نے 14000 روپے قابل ٹیکس قیمت کا ایک ویکیوم کلینز وسئی (ممبئی) کے ایک تاجر کو 28% GST کی شرح سے فروخت کیا۔ وسئی کے تاجر نے گاہک کو وہ ویکیوم کلینز 16,800 روپے قابل ٹیکس قیمت میں فروخت کیا تو اس کاروبار میں درج ذیل قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) انعام قریشی کی دی ہوئی بل اِنوائس میں مرکز اور ریاست کا ٹیکس کتنے روپے دِکھایا گیا ہوگا؟

(ii) وسئی کے تاجر نے گاہک سے کتنا مرکز اور ریاست کا ٹیکس محسوب کیا ہوگا؟

(iii) وسئی کے تاجر کے لیے حکومت کو ٹیکس ادا کرتے وقت مرکز کو دیا جانے والا اور ریاست کو ادا کیا جانے والا ٹیکس کتنا ہوگا؟ معلوم کیجیے۔

10.★ ذیل میں ایک شے کی تقسیم (پھیلاؤ) کی پیشہ ورانہ زنجیر میں ٹیکس اِنوائس A ، B ، C میں اشیا اور خدمات ٹیکس کی تحسیب کیجیے۔ GST کی شرح 12% ہے۔



(i) صنعت کار نے، تھوک تاجر اور خردہ فروش بالترتیب حکومت کے پاس کتنے روپے اشیا و خدمات ٹیکس ادا کرتے ہیں اور کس مد کے تحت، اس کو ظاہر کرنے والی اسٹیٹمنٹ تیار کیجیے۔

(ii) بالکل آخر میں گاہک کو وہ شے کتنے روپے میں ملے گی؟

(iii) اس زنجیر میں B2B اور B2C اِنوائس کون سے ہیں؟ لکھیے۔

مجموعۂ سوالات 4 B

1. ذیل کے ہر سوال کے لیے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(i) درشنی قیمت 100 روپے والے شیئر کا بازار بھاؤ 75 روپے ہے تو ذیل میں سے کون سا جملہ صحیح ہے؟

(A) یہ شیئر 175 روپے زائد قیمت والا ہے۔ (B) یہ شیئر 25 روپے کم قیمت والا ہے۔

(C) یہ شیئر 25 روپے زائد قیمت والا ہے۔ (D) یہ شیئر 75 روپے کم قیمت والا ہے۔

(ii) 50% منافع ظاہر کرنے والی کمپنی کا 10 روپے درشنی قیمت کے ایک شیئر پر کتنا منافع ملے گا؟

(A) 50 روپے (B) 5 روپے (C) 500 روپے (D) 100 روپے

(iii) ایک میچول فنڈ کے ایک یونٹ کی نقد قیمت 10.65 روپے ہو تو 500 یونٹ خریدنے کے لیے درکار رقم کتنے روپے ہوگی؟

(A) 5325 (B) 5235 (C) 532500 (D) 53250

(iv) دلالی پر اشیا و خدمات ٹیکس کی شرح .... ہے۔

(A) 5% (B) 12% (C) 18% (D) 28%

(v) شیئر فروخت کرتے وقت ایک شیئر کی قیمت معلوم کرنے کے لیے بازار بھاؤ، دلالی اور GST اِن کی ....

(A) جمع کرنا پڑتی ہے۔ (B) تفریق کرنا پڑتی ہے۔ (C) ضرب کرنا پڑتی ہے۔ (D) تقسیم کرنا ہوتی ہے۔

2. 100 روپے درشنی قیمت کا شیئر 30 روپے زائد قیمت پر خریدا۔ دلالی کی شرح 0.3% ہے تو ایک شیئر کی خرید قیمت معلوم کیجیے۔

3. پرشانت نے 100 روپے درشنی قیمت کے 50 شیئر 180 روپے بازار بھاؤ سے خریدے۔ اس پر کمپنی نے 40% منافع دیا تو پرشانت کو سرمایہ کاری سے واپس ملنے والی رقم کی شرح معلوم کیجیے۔

4. اگر 100 روپے درشنی قیمت کے 300 شیئرس 30 روپے کم قیمت پر فروخت کیے تو کتنے روپے ملیں گے؟

5. 100 روپے درشنی قیمت والے اور 120 روپے بازار بھاؤ کے شیئر میں 60,000 روپے سرمایہ کاری کی تو کتنے شیئر ملیں گے؟

6. شریمتی بیتا اگروال نے 100 روپے بازار بھاؤ سے 10,200 روپے کے شیئرز خریدے۔ ان میں سے 60 شیئرز 125 روپے بازار بھاؤ سے فروخت کیے اور باقی ماندہ شیئرس 90 روپے بازار بھاؤ سے فروخت کیے۔ ہر مرتبہ 0.1% دلالی ادا کی تو اس کاروبار میں انھیں کتنا فائدہ ہوا یا نقصان؟

7. شیئرز بازار میں 100 روپے درشنی قیمت کے دو کمپنیوں کے شیئرس ذیل کے مطابق بازار بھاؤ اور منافع کی شرح سے ہیں تو کون سی کمپنی میں سرمایہ کاری کرنا فائدہ مند ہوگا؟ وجہ بتائیے۔

(1) کمپنی A - 132 روپے 12% (2) کمپنی B - 144 روپے 16%

★8. شری آدتیہ سنگھوی نے 100 روپے درشنی قیمت کے شیئرز 50 روپے بازار بھاؤ میں 50118 روپے سرمایہ کاری کرکے خریدے۔ اس کاروبار میں اس نے 0.2% دلالی دی۔ دلالی پر 18% شرح سے GST دیا تو آدتیہ کو 50118 روپے میں کتنے شیئرز ملیں گے؟

★9. شری باٹلی والا نے ایک دن میں کل 30350 روپے قیمت کے شیئرز فروخت کیے اور 69650 روپے قیمت کے شیئرز خریدے۔ اُس دن کی کل خرید و فروخت پر 0.1% شرح سے دلالی دی اور دلالی پر 18% اشیا و خدمات ٹیکس ادا کیا۔ اس کاروبار میں دلالی اور اشیا و خدمات ٹیکس پر کل خرچ معلوم کیجیے۔

★10. شریمتی ارونا ٹھاکرے نے ایک کمپنی کے 100 روپے درشنی قیمت کے 100 شیئرس 1200 روپے بازار بھاؤ سے خریدے۔ فی شیئرز 0.3% دلالی دی اور دلالی پر 18% سے GST دیا تو

(i) شیئرس کے لیے کتنے روپے کی کل سرمایہ کاری کی؟

(ii) سرمایہ کاری پر دلالی کتنی دی؟

(iii) دلالی پر جی ایس ٹی معلوم کیجیے۔

(iv) 100 شیئرس کے لیے کل کتنے روپے خرچ ہوں گے؟

★11. شریمتی اُنگھا دوشی نے 100 روپے درشنی قیمت کے 660 روپے بازار بھاؤ سے 22 شیئرس خریدیں تو انھوں نے کل کتنے روپے کی سرمایہ کاری کی؟ ان شیئرز وں پر 20% منافع حاصل کرنے کے بعد 650 روپے بازار بھاؤ سے فروخت کردیا۔ ہر کاروبار میں 0.1% دلالی دی تو اس کاروبار میں انھیں کتنے فی صدی نفع یا نقصان ہوا؟ معلوم کیجیے۔ (جواب قریب کے مکمل عدد میں لکھیے۔)

احتمال (Probability)

آیئے، سیکھیں۔

- احتمال : تعارف
- بے ترتیب تجربات اور ماحصل
- نمونہ وسعت اور وقوعہ
- وقوعہ کا احتمال

آیئے، بحث کریں۔

استاد : عزیز طلبہ! اپنی جماعت میں طلبہ کی تعداد کے مساوی چٹھیاں اس بکس میں رکھی ہوئی ہیں۔ ہر ایک طالب علم کو ایک چٹھی اُٹھانی ہے۔ چٹھیوں پر الگ الگ پودوں کے نام لکھے ہوئے ہیں۔ ایک ہی پودے کا نام کوئی بھی دو چٹھیوں پر نہیں ہے۔ آیئے، دیکھیں تلسی نام کے پودے کی چٹھی کسے ملتی ہے؟ تمام طلبہ رول نمبر کی ترتیب سے قطار میں کھڑے ہو جائیں۔ آخری چٹھی اُٹھانے تک کوئی بھی چٹھی کھول کر نہ دیکھے۔

اریبہ : سر، قطار میں مَیں پہلی ہی ہوں لیکن میں پہلے چٹھی نہیں اُٹھاؤں گی کیونکہ اتنی تمام چٹھیوں میں سے وہ چٹھی مجھے ہی ملے گی اس کا امکان بہت کم ہے۔

زرینہ : سر، قطار میں سب سے آخر میں مَیں ہوں، میں آخر میں چٹھی نہیں نکالوں گی کیونکہ تلسی نام کی چٹھی شاید میرے اُٹھانے سے قبل ہی اُٹھالی گئی ہوگی۔

مختصراً پہلے اور آخری طالب علم کو محسوس ہوتا ہے کہ انھیں تلسی نام والی چٹھی ملنے کا امکان بہت ہی کم ہے۔ مذکورہ بالا مکالمے میں امکان کم یا زیادہ ہونے پر غور ہوا ہے۔ ہم روزمرہ گفتگو میں امکان کے لیے ذیل کے الفاظ استعمال کرتے ہیں۔

- احتمال
- غالباً
- ناممکن
- یقیناً
- قریب قریب
- 50 - 50

مستقبل میں امکانات سے متعلق ذیل کے بیان دیکھیے۔

- غالباً آج بارش ہوگی۔
- مہنگائی میں اضافے کا امکان زیادہ ہے۔
- بھارت کو آئندہ کرکٹ کے مقابلے میں شکست دینا ناممکن ہے۔
- یقیناً مجھے پہلا درجہ ملے گا۔
- بچے کو وقت پر پولیو ڈوز دیں تو اس کو پولیو ہونے کا امکان نہیں ہوتا۔

یہاں دی ہوئی تصویر میں کرکٹ کے کھلاڑی سکّہ اُچھال رہے ہیں۔ اس میں کون کون سے امکانات ہیں؟

[ ] یا [ ]

یعنی، سکہ اُچھالنے کے [ ] امکانات ہیں۔

عملی کام 1: جماعت کا ہر طالب علم ایک سکہ صرف ایک مرتبہ اُچھال کر دیکھے۔ آپ کو کیا محسوس ہوتا ہے؟
(استاد تختۂ سیاہ پر درج ذیل جدول بناتے ہیں اور اسے پُر کرواتے ہیں؟)

امکانات	چت (H)	پٹ (T)
طلبہ کی تعداد	. . .	. . .

عملی کام 2: اب ہر طالب علم ایک سکہ دو مرتبہ اُچھال کر دیکھے۔ کون کون سے امکانات ہیں؟

امکانات	HH	HT	TH	TT
طلبہ کی تعداد				

عملی کام 3: آپ کے پاس کے پانسہ کو ایک دفعہ پھینکیے۔ اوپری رُخ پر نقطے آنے کے کون کون سے امکانات ہیں، اس پر غور کیجیے۔

یہاں ہر امکان یعنی پانسہ پھینکنے کا ممکنہ احتمال نتیجہ صرف ایک ہے۔

آیئے، سمجھ لیں۔

بے ترتیب تجربات (Random Experiment)

جس تجربے میں تمام احتمالی نتائج پہلے ہی سے معلوم ہوتے ہیں لیکن ان میں سے کسی بھی نتیجے کو یقینی طور پر بتایا نہیں جاسکتا۔ تمام نتائج کے صحیح ہونے کا امکان مساوی ہوتا ہے، ایسے تجربے کو 'بے ترتیب تجربہ' کہتے ہیں۔

مثال: سکّہ اُچھالنا، پانسہ پھینکنا، 1 سے 50 تک عدد لکھے ہوئے کارڈ کے سیٹ سے ایک کارڈ نکالنا، کھیل میں تاش کے پتوں کو مناسب طریقے سے خلط ملط کر کے پتوں میں سے ایک پتہ نکالنا وغیرہ۔

ماحصل (Outcomes)

بے ترتیب تجربہ کے نتائج کو 'ماحصل' کہتے ہیں۔

مثال (1) ایک سکہ اُچھالنے کے بے ترتیب تجربے کے دو ہی ماحصل ہوتے ہیں۔

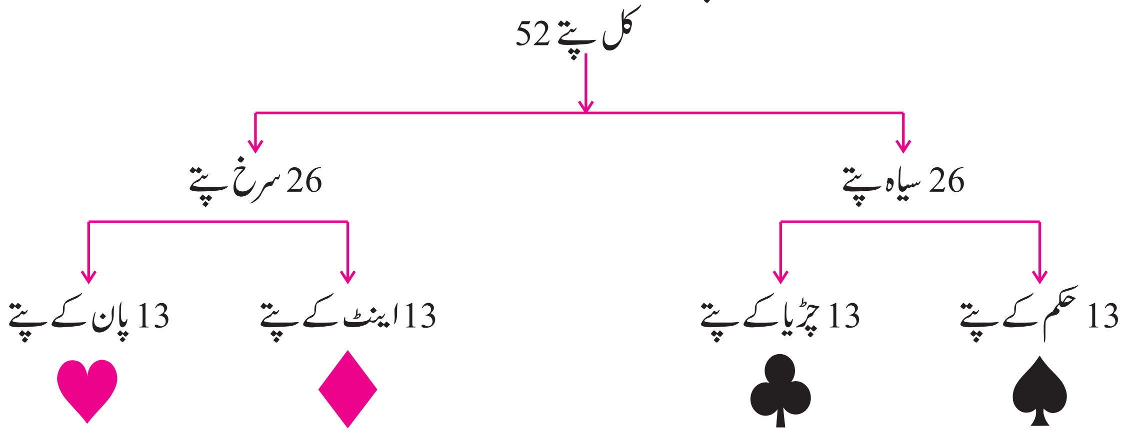
چت (H) یا پٹ (T)

(2) ایک پانسہ پھینکنے کے بے ترتیب تجربہ میں پانسہ کے اوپری رُخوں پر دھبوں کی تعداد سے 6 ماحصل ممکن ہیں۔

1 یا 2 یا 3 یا 4 یا 5 یا 6

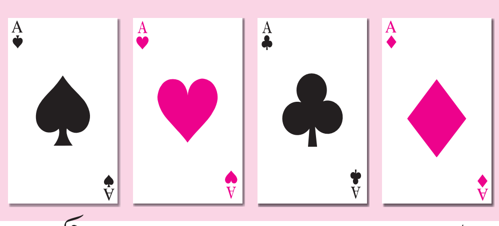
(3) 1 سے 50 تک اعداد لکھے ہوئے کارڈ کے سیٹ سے ایک کارڈ نکالنا، اس تجربے میں 50 ماحصل ممکن ہیں۔

(4) تاش کے کھیل میں پتوں کو مناسب طریقے سے خلط ملط کر کے ایک پتہ نکالنے کے بے ترتیب تجربے میں 52 ماحصل ہوتے ہیں۔ تاش کی گڈی میں 52 پتے ہوتے ہیں۔ وہ درج ذیل کے مطابق ہیں۔



پتوں کی گڈی میں ایک اینٹ (Diamond)، پان (Heart)، چڑیا (Club) اور حکم (Spade) کے چار قبیل (suit) ہوتے ہیں۔ ہر سیٹ میں بادشاہ، رانی، غلام، 10، 9، 8، 7، 6، 5، 4، 3، 2 اور اِکّا (A) اس طرح 13 پتے ہوتے ہیں۔

بادشاہ، رانی، غلام انھیں تصویری پتے کہتے ہیں۔ ہر گڈی میں بادشاہ کے چار، رانی کے چار اور غلام کے چار، اس طرح کل 12 تصویری پتے ہوتے ہیں۔



حکم اِکّا | پان اِکّا | چڑیا اِکّا | اینٹ اِکّا

مساوی ممکنہ حاصلات (Equally Likely Outcomes)

اگر ہم ایک پانسہ پھینکیں تو پانسے کے اوپری رُخ پر 1، 2، 3، 4، 5، 6 اِن میں سے کوئی ایک عدد حاصل ہونے کا امکان مساوی ہوتا ہے۔ لہٰذا 1 سے 6 میں سے کوئی بھی ایک عدد اوپری رُخ پر حاصل ہوسکتا ہے۔ پھر بھی اگر پانسہ ایسا بنا ہو کہ کوئی خاص عدد ہی اوپری رُخ پر بار بار حاصل ہوتا ہے تو وہ پانسہ نقص والا (biased) ہوتا ہے۔ ایسی حالت میں ماحصل مساوی ممکنہ واقع نہیں ہوتے۔ آئندہ ہم بے ترتیب تجربات میں استعمال ہونے والے بے عیب، نقائص سے پاک (unbiased یا fair) پانسہ تصور کریں گے۔

دیے ہوئے حاصلات میں سے کوئی بھی ما حصل اولیت کی ترتیب میں حاصل نہیں ہوتا ہو یا تمام حاصلات مساوی ممکنہ ہوں تو وہ احتمالی ما حصل ہوتے ہیں۔مثال: اگر ہم ایک سکہ اُچھالیں تو پٹ یا چت حاصل ہونے کے مساوی ممکنہ حاصلات ہوتے ہیں۔اسی طرح 1 سے 6 عدد مختلف رُخوں پر ہونے کی وجہ سے پانسہ پھینکنے پر اس میں کوئی بھی ایک عدد اوپری رُخ پر آنے کے ممکنات کی جانچ کیجیے۔ یہاں تمام حاصلات کے مساوی احتمال ہیں۔

مشقی سیٹ 5.1

1. ذیل کے تجربات میں ہر ایک سے متعلق کتنے امکانات ہیں؟

(1) وِنیتا کو مہاراشٹر میں ذیل کے قابل دید مقامات کی معلومات ہے۔اس میں سے ایک مقام پر مئی مہینے کی تعطیل میں وہ جانے والی ہے۔اجنتا،مہابلیشور،لونار جھیل،تڑوبا چڑیا گھر،آمبولی،رائے گڑھ،ماتھیران،آنندوَن۔

(2) ایک ہفتے کے دنوں کو بے ترتیب تجربہ کے طریقے سے منتخب کرنا ہے۔

(3) تاش کی گڈی سے ایک پتہ بے ترتیب تجربے کے طریقے سے نکالنا ہے۔

(4) ہر کارڈ پر ایک عدد، اس طرح 10 سے 20 تک اعداد لکھے ہوئے ہیں۔اس میں سے ایک کارڈ بے ترتیب تجربے سے نکالنا ہے۔

آئیے،غور کریں۔

ذیل کے تجربات میں سے کون سے تجربے میں ما حصل کے امکانات زیادہ ہیں؟

(1) ایک پانسہ پھینکنے پر (اوپری رُخ پر) عدد 1 حاصل ہونا۔

(2) ایک سکہ اُچھال کر چت حاصل ہونا۔

آئیے، سمجھ لیں۔

نمونہ وسعت (Sample Space)

بے ترتیب تجربے کے تمام ممکنہ حاصلات کے سیٹ کو نمونہ وسعت کہتے ہیں۔نمونہ وسعت 'S' یا 'Ω' (Ω یونانی حرف ہے،اس کا تلفظ 'اومیگا' ہے۔) اِن علامتوں سے سیٹ کی نوعیت کو ظاہر کرتے ہیں۔نمونہ وسعت میں ہر رکن کو 'نمونہ نقطہ' (Sample Point) کہتے ہیں۔نمونہ وسعت 'S' میں کل ارکان کی تعداد n (S) سے ظاہر کرتے ہیں۔اگر n (S) محدود ہو تو اس کو محدود نمونہ وسعت کہتے ہیں۔
محدود نمونہ وسعت کی بعض مثالیں ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہیں۔

نمبر شمار	بے ترتیب تجربہ	نمونہ وسعت	نمونہ نقاط (ارکان) کی تعداد
1	ایک سکہ اُچھالنا	S = {H, T}	n(S) = 2
2	دو سکے اُچھالنا	S = { HH, HT, TH, TT}	n(S) = ☐
3	تین سکے اُچھالنا	S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}	n(S) = 8
4	ایک پانسہ پھینکنا	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}	n(S) = ☐
5	2 پانسے پھینکنا	S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}	n(S) = 36
6	1 سے 25 اعداد لکھے ہوئے کارڈوں کے سیٹ سے ایک کارڈ نکالنا	S = {1, 2, 3, 4, ..., 25}	n(S) = ☐
7	مناسب طریقے سے خلط ملط کیے گئے تاش کے 52 پتوں سے ایک پتہ نکالنا	اینٹ = اِکّا, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , 10, غلام, رانی, بادشاہ حکم = اِکّا, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , 10, غلام, رانی, بادشاہ پان = اِکّا, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , 10, غلام, رانی, بادشاہ چڑیا = اِکّا, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , 10, غلام, رانی, بادشاہ	n(S) = 52

اسے ذہن میں رکھیں۔

(1) ایک سکہ دو مرتبہ اُچھالیں یا دو سکے ایک مرتبہ اُچھالیں، اِن دونوں بے ترتیب تجربات کا نمونہ وسعت ایک جیسا ہے۔
یہی تین سکوں کے بارے میں بھی صحیح ہے۔

(2) 'ایک پانسہ دو دفعہ پھینکنا' یا 'دو پانسے بیک وقت پھینکنا' اِن دونوں کے لیے نمونہ وسعت یکساں ہے۔

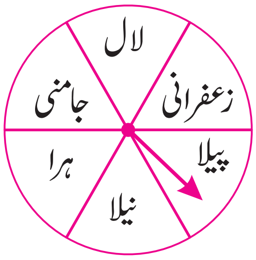
مشقی سیٹ 5.2

1. ذیل میں سے ہر ایک تجربات کے لیے نمونہ وسعت 'S' اور اس کے نمونہ نقاط کی تعداد n (S) لکھیے۔

(1) بیک وقت ایک پانسہ اُچھالنا اور ایک سکہ پھینکنا

(2) 2، 3، 5 اِن ہندسوں سے، ہندسوں کے دہرائے بغیر دو ہندسی عدد بنانا۔

.2 چھ رنگوں کی پھرکی پر تیر گھمانے پر وہ کس رنگ پر ٹھہرتی ہے، اس کا مشاہدہ کیجیے۔



.3 سال 2019ء کے مارچ کے مہینے میں 5 کے ضعف میں آنے والی تاریخوں کا دن حاصل کرنا (بازو میں دیے ہوئے کیلنڈر کا صفحہ دیکھیے۔)

MARCH - 2019

M	T	W	T	F	S	S
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

.4 2 لڑکے (B_1, B_2) اور دو لڑکیاں (G_1, G_2) ان میں سے دو رُکنی محافظِ راہ کمیٹی بنانا ہے تو اس کے لیے نمونہ وسعت لکھنے کے لیے درج ذیل عملی کام پورا کیجیے۔

(1) دو لڑکوں کی کمیٹی = ☐ (2) دو لڑکیوں کی کمیٹی = ☐

(3) ایک لڑکا اور ایک لڑکی سے مل کر بننے والی کمیٹی = B_1, G_1 ☐ ☐ ☐

∴ نمونہ وسعت = { ( ), ( ), ( ), ( ), ( ), ( ) }

آیئے، سمجھ لیں۔

وقوعہ (Event)

مخصوص شرط پورا کرنے والے حاصلات کو موافق ماحصل (favourable outcome) کہتے ہیں۔

نمونہ وسعت دیا ہوا ہو تو موافق حاصلات کے سیٹ کو 'وقوعہ' کہتے ہیں۔ وقوعہ، نمونہ وسعت کا ضمنی سیٹ ہوتا ہے۔

وقوعہ کو انگریزی بڑے حروف A، B، C، D جیسے حروف سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال : دو سکے اُچھالیں تو، فرض کیجیے وقوعہ A ، کم سے کم ایک پٹ حاصل ہوتا ہے۔

یہاں موافق ماحصل ذیل کے مطابق ہے۔

$$A = \{TT, TH, HT\}$$

وقوعہ A میں نمونہ نقاط (ارکان) کی تعداد کو n (A) سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہاں n (A) = 3

مزید معلومات کے لیے — وقوعوں کی اقسام

(i) یقینی وقوعہ (Certain event)

(ii) ناممکن وقوعہ (Impossible event)

(iii) یک رکنی وقوعہ (Simple event)

(iv) ایک وقوعے کا مکملہ (Complement of an event)

(v) باہم غیر مشمولی وقوعہ (Mutually exclusive event)

(vi) جامع وقوعہ (Exhaustive event)

حل کردہ مثالیں

مثال(1) دو سکے بیک وقت اُچھالنے کے تجربہ کے لیے نمونہ وسعت 'S' لکھیے۔ اس میں نمونہ نقاط کی تعداد n (S) لکھیے۔ اس تجربہ سے متعلق درج ذیل وقوعہ کو سیٹ کی صورت میں لکھیے اور اس کے نمونہ نقاط معلوم کیجیے۔

(i) وقوعہ A کے لیے شرط، کم سے کم ایک چت حاصل ہو۔

(ii) وقوعہ B کے لیے شرط، صرف ایک چت حاصل ہو۔

(iii) وقوعہ C کے لیے شرط ، زیادہ سے زیادہ ایک پٹ حاصل ہو۔

(iv) وقوعہ D کے لیے شرط ، ایک بھی چت حاصل نہ ہو۔

حل : دو سکے بیک وقت اُچھالے گئے،

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$, $n(S) = 4$

(i) وقوعہ A کے لیے شرط، کم سے کم ایک چت حاصل ہو۔

$A = \{HH, HT, TH\}$, $n(A) = 3$

(ii) وقوعہ B کے لیے شرط، صرف ایک چت حاصل ہو۔

$B = \{ HT, TH\}$, $n(B) = 2$

(iii) وقوعہ C کے لیے شرط ، زیادہ سے زیادہ ایک پٹ حاصل ہو۔

$C = \{HH, HT, TH\}$, $n(C) = 3$

(iv) وقوعہ D کے لیے شرط، ایک بھی چت حاصل نہ ہو۔

$D = \{TT\}$, $n(D) = 1$

مثال(2) ایک تھیلی میں 50 کارڈ ہیں۔ ہر کارڈ پر 1 سے 50 میں سے ایک عدد لکھا ہوا ہے۔ اس میں سے کوئی بھی ایک کارڈ بے ترتیب تجربے سے نکالا گیا تو نمونہ وسعت 'S' لکھیے۔

وقوعہ A ، B کے نمونہ نقاط (ارکان) کی تعداد لکھیے۔

(i) وقوعہ A کے لیے شرط، کارڈ پر کا عدد 6 سے تقسیم پذیر ہے۔

(ii) وقوعہ B کے لیے شرط، کارڈ پر کا عدد کامل مربع عدد ہے۔

حل : نمونہ وسعت 'S' ہے : $n(S) = 50$, $S = \{1, 2, 3, \ldots, 49, 50\}$

وقوعہ A کے لیے شرط، کارڈ پر کا عدد 6 سے تقسیم پذیر ہے۔

$A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$, $n(A) = 8$

وقوعہ B کے لیے شرط، کارڈ پر کا عدد کامل مربع عدد ہے۔

$B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$, $n(B) = 7$

مثال (3) 3 لڑکے اور 2 لڑکیوں سے دو طلبہ پر مشتمل شجرکاری مہم کی کمیٹی ذیل کی شرط کے مطابق بنانا ہے۔ نمونہ وسعت 'S' اور نمونہ نقاط کی تعداد لکھیے۔ اسی طرح درج ذیل کو سیٹ کی صورت میں لکھ کر نمونہ نقاط کی تعداد لکھیے۔

(i) وقوعہ A کے لیے شرط ، کمیٹی میں کم سے کم ایک لڑکی ہونا چاہیے۔

(ii) وقوعہ B کے لیے شرط، کمیٹی میں ایک لڑکا اور ایک لڑکی ہونا چاہیے۔

(iii) وقوعہ C کے لیے شرط، کمیٹی میں صرف لڑکے ہونے چاہیے۔

(iv) وقوعہ D کے لیے شرط، کمیٹی میں زیادہ سے زیادہ ایک لڑکی ہونا چاہیے۔

حل : فرض کیجیے، B_1، B_2، B_3 تین لڑکے ہیں اور G_1، G_2 دو لڑکیاں ہیں۔ ان لڑکے لڑکیوں سے دو ممبران کی شجرکاری مہم کی کمیٹی بنانا ہے۔

$S = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$, $n(S) = 10$

(i) وقوعہ A کے لیے شرط ، کمیٹی میں کم سے کم ایک لڑکی ہونا چاہیے۔

$A = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$, $n(A) = 7$

(ii) وقوعہ B کے لیے شرط، کمیٹی میں ایک لڑکا اور ایک لڑکی ہونا چاہیے۔

$B = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$, $n(B) = 6$

(iii) وقوعہ C کے لیے شرط، کمیٹی میں صرف لڑکے ہونے چاہیے۔

$C = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3\}$, $n(C) = 3$

(iv) وقوعہ D کے لیے شرط، کمیٹی میں زیادہ سے زیادہ ایک لڑکی ہونا چاہیے۔

$D = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$, $n(D) = 9$

مثال (4) دو پانسے پھینکے گئے تو نمونہ وسعت 'S' اور نمونہ وسعت میں ارکان کی تعداد n (S) لکھیے۔

درج ذیل شرائط پوری کرنے والے وقوعہ کو سیٹ کی صورت میں لکھیے اور ان کے نمونہ نقاط کی تعداد لکھیے۔

(i) اوپری رُخ پر آنے والے اعداد کی جمع مفرد عدد ہو۔

(ii) اوپری رُخ پر آنے والے اعداد کی جمع 5 کے ضعف میں ہو۔

(iii) اوپری رُخ پر آنے والے اعداد کی جمع 25 ہو۔

(iv) پہلے پانسے پر ملنے والا عدد، دوسرے پانسے پر کے عدد سے چھوٹا ہو۔

حل : نمونہ وسعت

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$
$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$
$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$, $n(S) = 36$

(i) فرض کیجیے E ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخوں پر آنے والے اعداد کا مجموعہ مفرد عدد ہے۔

$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4),$
$(4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\}$, $n(E) = 15$

(ii) فرض کیجیے F ایسا وقوعہ ہے جس کے اوپری رُخوں پر آنے والے اعداد کا مجموعہ 5 کا ضعف ہے۔

$F = \{ (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4) \}$, $n(F) = 7$

(iii) فرض کیجیے G ایسا وقوعہ ہے کہ اوپری رُخوں پر آنے والے اعداد کا مجموعہ 25 ہے۔

$G = \{ \ \} = \phi$, $n(G) = 0$

(iv) فرض کیجیے H ایسا وقوعہ ہے کہ پہلے پانسے پر آنے والا عدد، دوسرے پانسے پر آنے والے عدد سے چھوٹا ہے۔

$H = \{(1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)$
$(3, 4) (3, 5) (3, 6) (4, 5) (4, 6) (5, 6)\}$, $n(H) = 15$

مشقی سیٹ 5.3

1. مندرجہ ذیل تجربات میں نمونہ وسعت 'S' کے ارکان کی تعداد n(S) اسی طرح وقوعہ A، B، C سیٹ کی صورت میں لکھیے اور n(A)، n(B) اور n(C) لکھیے۔

(1) ایک پانسہ پھینکا گیا ہے

A ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخ پر آنے والا عدد جفت ہے۔

B ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخ پر آنے والا عدد طاق ہے۔

C ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخ پر آنے والا عدد مفرد ہے۔

(2) دو پانسے ایک ہی وقت میں پھینکے گئے،

A ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخوں پر آنے والے اعداد کا مجموعہ 6 کا ضعف ہے۔

B ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخوں پر آنے والے اعداد کا مجموعہ کم از کم 10 ہے۔

C ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخوں پر آنے والے عدد یکساں ہیں۔

(3) تین سکے بیک وقت اُچھالے گئے۔

A ایسا وقوعہ ہے جس میں کم از کم دو چت حاصل ہوں۔

B ایسا وقوعہ ہے جس میں ایک بھی چت حاصل نہ ہو۔

C ایسا وقوعہ ہے جس میں دوسرے سکے پر چت حاصل ہو۔

(4) 0, 1, 2, 3, 4, 5 ہندسوں کی مدد سے کسی بھی ہندسے کو دہرائے بغیر دو ہندسی عدد بنایا گیا ہے۔

A ایسا وقوعہ ہے جس میں حاصل ہونے والا عدد جفت ہے۔

B ایسا وقوعہ ہے جس میں حاصل ہونے والا عدد 3 سے تقسیم پذیر ہے۔

C ایسا وقوعہ ہے جس میں حاصل ہونے والا عدد 50 سے بڑا ہے۔

(5) تین مرد اور دو خواتین ہیں۔ ان کے ذریعے دو رکنی ماحولیاتی کمیٹی بنانا ہے۔

A ایسا وقوعہ ہے کہ کمیٹی میں کم از کم ایک خاتون ہو۔

B ایسا وقوعہ ہے کہ کمیٹی میں ایک مرد اور ایک خاتون ہو۔

C ایسا وقوعہ ہے کہ کمیٹی میں ایک بھی خاتون نہ ہو۔

(6) بیک وقت ایک سکہ اُچھالا گیا اور ایک پانسہ پھینکا گیا۔

A ایسا وقوعہ ہے جس میں چت اور طاق عدد حاصل ہو۔

B ایسا وقوعہ ہے جس میں H یا T اور جفت عدد حاصل ہو۔

C ایسا وقوعہ ہے جس میں پانسے پر 7 سے بڑا عدد اور سکے پر ایک پٹ حاصل ہو۔

آیئے، سمجھ لیں۔

وقوعہ کا احتمال (Probability of an event)

ایک آسان سے تجربے پر غور کرتے ہیں۔ ایک تھیلی میں چار گیندیں مساوی حجم کی ہیں۔ ان میں تین گیندیں سفید ہیں اور چوتھی گیند سیاہ ہے۔ آنکھیں بند کرکے تھیلی میں سے ایک گیند نکالنا ہے۔

نکالے گئے گیندوں میں سے سفید گیند کے امکانات زیادہ ہوں گے۔ ایسا سمجھ میں آتا ہے۔

ریاضی کی زبان میں ایسے ممکنہ متوقع وقوعے کے امکان کو ظاہر کرنے والے عدد کو احتمال کہتے ہیں۔ اسے ذیل کا ضابطہ استعمال کرکے عدد میں یا فیصد میں ظاہر کرتے ہیں۔

کسی بے ترتیب تجربے میں اگر نمونہ وسعت S ہو اور A اس تجربے میں ممکنہ وقوعہ ہو تو اس وقوعہ کا احتمال ‘P(A)’ سے ظاہر کرتے ہیں اور اسے مندرجہ ذیل ضابطے کے ذریعے معلوم کرتے ہیں۔

$$P(A) = \frac{\text{وقوعہ A میں نمونہ ارکان کی تعداد}}{\text{نمونہ وسعت میں ارکان کی تعداد}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مندرجہ بالا تجربے میں نکالی گئی گیند سفید ہے۔ اگر یہ وقوعہ A ہو تو $n(A) = 3$ کیونکہ تین سفید گیندیں ہیں اور کل چار گیندیں ہیں اس لیے $n(S) = 4$

نکالی گئی سفید گیند کا احتمال ، $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{4}$

اسی طرح نکالی گئی گیند سیاہ ہے اسے وقوعہ B سے ظاہر کریں تو $n(B) = 1$ اس لیے $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{1}{4}$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک سکہ اُچھالا گیا ہے۔ درج ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(i) چت حاصل ہوتا ہے (ii) پٹ حاصل ہوتا ہے۔

حل : فرض کریں نمونہ وسعت S ہے۔

$$S = \{H, T\} \quad , \quad n(S) = 2$$

(i) فرض کیجیے A ایسا وقوعہ ہے جس میں چت حاصل ہوتا ہے۔

$$A = \{H\} \quad , \quad n(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

(ii) فرض کیجیے B ایسا وقوعہ ہے جس میں پٹ حاصل ہوتا ہے۔

$$B = \{T\} \quad , \quad n(B) = 1$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

مثال (2) ایک پانسہ پھینکا گیا ہے۔ درج ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(i) اوپری رُخ پر مفرد عدد حاصل ہو۔ (ii) اوپری رُخ پر جفت عدد حاصل ہو۔

حل : فرض کیجیے نمونہ وسعت S ہے۔

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad , \quad n(S) = 6$$

(i) فرض کیجیے A ایسا وقوعہ ہے کہ اوپری رُخ پر مفرد عدد حاصل ہوتا ہے۔

$$A = \{2, 3, 5\} \quad , \quad n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) فرض کیجیے B ایسا وقوعہ ہے جس میں اوپری رُخ پر جفت عدد حاصل ہوتا ہے۔

$B = \{2, 4, 6\}$, $n(B) = 3$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال (3) 52 پتوں کی تاش کی گڈی کو اچھی طرح سے خلط ملط کرنے کے بعد اس سے ایک پتہ نکالا گیا ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔ (i) سرخ پتہ حاصل ہوتا ہے۔ (ii) تصویری پتہ حاصل ہوتا ہے۔

حل : فرض کیجیے نمونہ وسعت S ہے۔ $\therefore\ n(S) = 52$

(i) فرض کیجیے A ایسا وقوعہ ہے جس میں نکالا گیا پتہ سرخ ہے۔

13 پان کے پتے + 13 اینٹ کے پتے = کل سرخ پتے

$n(A) = 26$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) فرض کیجیے B ایسا وقوعہ ہے جس میں نکالا گیا پتہ تصویری ہے۔

تاش کی گڈی میں بادشاہ، رانی اور غلام کے کل 12 تصویری پتے ہوتے ہیں۔

$\therefore\ n(B) = 12$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

مثال (4) ایک بکس میں 5 اسٹرابیری، 6 کافی اور 2 پیپرمنٹ چاکلیٹ ہیں۔ اس بکس میں سے ایک چاکلیٹ نکالا گیا ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ (i) نکالا گیا چاکلیٹ کافی کا ہے، اور

(ii) نکالا گیا چاکلیٹ پیپرمنٹ ہے۔ اور ان کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے نمونہ وسعت 'S' ہے۔ $\therefore\ n(S) = 5 + 6 + 2 = 13$

(i) وقوعہ A = نکالا گیا چاکلیٹ کافی کا ہے۔

$n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{6}{13}$$

(ii) نکالا گیا چاکلیٹ پیپرمنٹ کا ہے۔

$n(B) = 2$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{2}{13}$$

اسے ذہن میں رکھیں۔

- احتمال کہتے یا لکھتے وقت کسر یا فیصدی کا استعمال کرتے ہیں۔
- کسی بھی وقوعے کا احتمال 0 (صفر) سے 1 تک یا 0% سے 100% تک ہوتا ہے۔

فرض کیجیے، وقوعہ E ہو تو، $0 \leq P(E) \leq 1$ یا $0\ \% \leq P(E) \leq 100\ \%$ ۔ مثلاً $\frac{1}{4}$ احتمال کو 25% بھی لکھتے ہیں۔

- سبق کی ابتدا میں جماعت میں طلبہ کو چھٹی پر پودوں کے نام لکھ کر ہر طالب علم سے ایک چھٹی اُٹھانے کے لیے کہا گیا۔ اس وقت تلسی لکھی ہوئی چھٹی نکالنے کے احتمال پر غور کیا گیا جبکہ ایک ہی چھٹی پر تلسی لکھا ہوا ہے۔ اگر 40 طلبہ ہیں۔ ہر ایک کو ایک ہی چھٹی نکالنا ہے۔ ہر طالب علم کو 'تلسی' لکھی ہوئی چھٹی نکلنے کا احتمال $\frac{1}{40}$ ہے۔ پہلی یا درمیانی یا آخری چھٹی نکالنے والے کے لیے وہ چھٹی ملنے کا احتمال اتنا ہی ہے۔

مشقی سیٹ 5.4

.1 بیک وقت دو سکے اُچھالے گئے۔ درج ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) کم از کم ایک چت حاصل ہو۔ (2) ایک بھی چت حاصل نہ ہو۔

.2 دو پانسے بیک وقت پھینکے گئے ہیں۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) اوپری رُخوں کے اعداد کا مجموعہ کم سے کم 10 ہے۔

(2) اوپری رُخوں کے اعداد کا مجموعہ 33 ہے۔

(3) پہلے پانسے کا عدد، دوسرے پانسے کے عدد سے بڑا ہے۔

.3 ایک بکس میں 1 سے 15 تک اعداد والے 15 کارڈ ہیں۔ اس بکس سے ایک کارڈ بے ترتیب طریقے سے نکالا گیا ہے تو احتمال معلوم کیجیے جبکہ

(1) جفت عدد ہو۔ (2) عدد 5 کے ضعف میں ہو۔

.4 2, 3, 5, 7, 9 ہندسوں کا استعمال کر کے کسی بھی ہندسے کو دوہرائے بغیر دو ہندسی عدد بنایا گیا ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) طاق عدد ہو۔ (2) وہ عدد 5 کا ضعف ہو۔

.5 52 پتوں کی گڈی کو اچھی طرح خلط ملط کرنے کے بعد اس سے ایک پتہ نکالا گیا ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) اِکا حاصل ہوتا ہے۔ (2) حکم کا پتہ حاصل ہوتا ہے۔

مجموعۂ سوالات - 5

.1 مندرجہ ذیل سوالوں کے لیے صحیح متبادل جواب کا انتخاب کیجیے۔

(1) درج ذیل میں دیے ہوئے متبادل میں سے کون سا احتمال ممکن نہیں ہے؟

(A) $\frac{2}{3}$ (B) 1.5 (C) 15% (D) 0.7

(2) ایک پانسہ پھینکا گیا ہے تو اوپری رُخ پر 3 سے چھوٹا عدد حاصل ہوتا ہے۔اس وقوعے کا احتمال .... ہے۔

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

(3) 1 سے 100 کے درمیان لیے گئے مفرد اعداد کا احتمال .... ہے۔

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{6}{25}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{13}{50}$

(4) ایک تھیلی میں 1 سے 40 تک اعداد والے 40 کارڈ ہیں۔اس تھیلی سے ایک کارڈ نکالا گیا ہے۔کارڈ کا عدد 5 کا ضعف ہے۔اس وقوعے کا احتمال .... ہے۔

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

(5) اگر $n(A) = 2$ ، $P(A) = \frac{1}{5}$ ہو تو $n(S) = \ ?$

(A) 10 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

.2 باسکٹ بال کھلاڑی جان، وسیم اور آرکاش ایک مخصوص جگہ سے باسکٹ جالی میں گیند ڈالنے کی مشق کر رہے تھے۔باسکٹ میں گیند جانے کا احتمال جان کے لیے $\frac{4}{5}$ ، وسیم کے لیے 0.83 اور آرکاش کے لیے 58% ہے۔کس کا احتمال سب سے زیادہ ہے۔

.3 ایک ہاکی ٹیم میں 6 کھلاڑی مدافعت کرنے والے، 4 کھلاڑی حملہ آور اور ایک کھلاڑی گول کیپر ہے۔ان میں سے ایک کھلاڑی کو کپتان کے لیے بے ترتیب طریقے سے منتخب کرنا ہے۔مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) گول کیپر ٹیم کا کپتان ہے۔ (2) مدافعت کرنے والا کھلاڑی ٹیم کا کپتان ہے۔

.4 جوزف نے ایک ٹوپی میں 26 کارڈ رکھے۔ہر کارڈ پر انگریزی کے حروفِ تہجی میں سے ایک حرف لکھا گیا ہے۔اس میں سے ایک کارڈ بے ترتیب طریقے سے نکالا گیا ہے۔نکالے گئے کارڈ پر 'حرفِ علت' ہونے کا احتمال معلوم کیجیے۔

.5 ایک غبارے والے کو 2 سرخ، 3 نیلے اور 4 سبز غباروں میں سے ایک غبارہ بے ترتیب طریقے سے دینا ہے۔مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) ملنے والا غبارہ سرخ ہے۔

(2) ملنے والا غبارہ نیلا ہے۔

(3) ملنے والا غبارہ سبز ہے۔

.6 ایک بکس میں 5 سرخ قلم، 8 نیلے قلم اور 3 سبز قلم ہیں۔ بے ترتیب طریقے سے مجتبیٰ کو ایک قلم نکالنا ہے تو نکالا گیا پین نیلا ہے اس کا احتمال معلوم کیجیے۔

.7 ایک پانسے کے چھے رخ درج ذیل کے مطابق ہیں۔

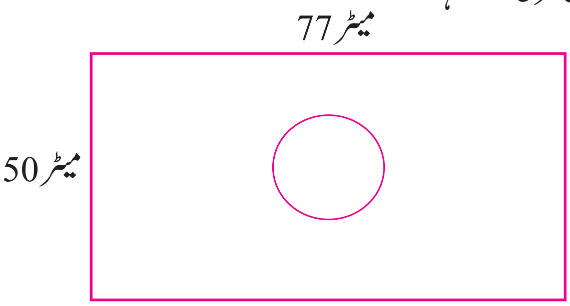
A B C D E A

پانسہ ایک مرتبہ پھینکا جائے تو درج ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) اوپری رُخ پر A حاصل ہوتا ہے۔ (2) اوپری رُخ پر D حاصل ہوتا ہے۔

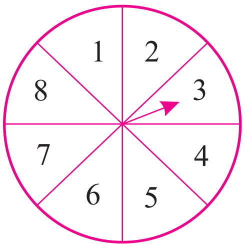
.8 ایک بکس میں 30 کارڈ ہیں۔ ہر کارڈ پر 1 سے 30 میں سے صرف ایک ہی عدد لکھا گیا ہے۔ بکس میں سے ایک کارڈ بے ترتیب طریقے سے نکالا گیا ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) کارڈ کا عدد طاق ہے۔ (2) کارڈ کا عدد کامل مربع عدد ہے۔



.9 ایک باغ کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب 77 میٹر اور 50 میٹر ہے۔ باغ میں 14 میٹر قطر کا تالاب ہے۔ باغ کے قریب عمارت کی چھت پر ایک تولیہ سوکھنے کے لیے پھیلایا گیا ہے۔ تیز ہوا کی وجہ سے تولیہ باغ میں گر گیا۔ باغ کے تالاب میں تولیے کے گرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

.10 چکری گھمانے کے کھیل میں جب چکری گھماتے ہیں تو چکری پر لکھے ہوئے اعداد 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 میں سے چکری ساکن ہونے کے بعد کسی ایک عدد پر اشاریہ (تیر) رُکتا ہے اور وہ ممکنہ وقوعہ ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔



(1) اشاریہ 8 پر رُکتا ہے۔

(2) اشاریہ طاق عدد پر رُکتا ہے۔

(3) اشاریہ کے ذریعے ظاہر کیا گیا عدد 2 سے بڑا ہے۔

(4) اشاریہ کے ذریعے ظاہر کیا گیا عدد 9 سے کم ہے۔

.11 6 کارڈ ہیں۔ ہر کارڈ پر 0 سے 5 اعداد میں سے صرف ایک عدد لکھا گیا اور انھیں ایک بکس میں رکھا گیا ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) نکالے گئے کارڈ کا عدد طبعی عدد ہے۔

(2) نکالے گئے کارڈ کا عدد 1 سے کم ہے۔

(3) نکالے گئے کارڈ کا عدد مکمل عدد ہے۔

(4) نکالے گئے کارڈ کا عدد 5 سے بڑا ہے۔

.12 ایک تھیلی میں 3 سرخ، 3 سفید اور 3 سبز گیندیں ہیں۔ تھیلی سے ایک گیند بے ترتیب طریقے سے نکالا گیا ہے۔ مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) نکالی گئی گیند سرخ ہے۔ (2) نکالی گئی گیند سرخ نہیں ہے۔ (3) نکالی گئی گیند سرخ یا سفید ہے۔

.13 ہر کارڈ پر لفظ mathematics کے حروف سے صرف ایک حرف لکھ کر انھیں اوندھا کر کے رکھا گیا ہے۔ ان میں سے ایک کارڈ نکالا گیا ہو تو وہ حرف 'm' حاصل ہونے کا احتمال معلوم کیجیے۔

.14 ایک اسکول میں 200 طلبہ میں سے 135 طلبہ کو کبڈی کا کھیل پسند ہے۔ باقی طلبہ کو یہ کھیل پسند نہیں ہے۔ تمام طلبہ میں سے ایک طالب علم کا انتخاب کریں اس طرح کہ اسے کبڈی کا کھیل پسند نہیں ہے تو اس کا احتمال معلوم کیجیے۔

.15★ 0, 1, 2, 3, 4 اعداد سے دو ہندسی عدد تیار کرنا ہے اس طرح کہ اعداد کو دہرایا بھی جاسکتا ہے تو مندرجہ ذیل وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

(1) وہ مفرد عدد ہے۔ (2) وہ عدد 4 کا ضعف ہے۔ (3) وہ عدد 11 کا ضعف ہے۔

.16★ ایک پانسے کے رُخوں پر 0, 1, 2, 3, 4, 5 اعداد لکھے ہوئے ہیں۔ پانسہ دو مرتبہ پھینکا گیا ہے تو اوپری رُخ پر آنے والے اعداد کا حاصلِ ضرب صفر ہے۔ اس وقوعے کا احتمال معلوم کیجیے۔

درج ذیل عملی کام مکمل کیجیے،

عملی کام I : $n(S) = \square$ = آپ کی جماعت کے طلبہ کی کل تعداد

$n(A) = \square$ = جماعت میں عینک استعمال کرنے والے طلبہ کی تعداد

$P(A) = \square$ = تمام طلبہ میں سے عینک پہننے والے ایک طالب علم کے بے ترتیب طریقے سے انتخاب کا احتمال

$P(B) = \square$ = تمام طلبہ میں سے عینک نہیں پہننے والے ایک طالب علم کے بے ترتیب طریقے سے انتخاب کا احتمال

عملی کام II : نمونہ وسعت خود طے کر کے درج ذیل خالی چوکونوں کو پُر کیجیے۔

وقوعہ A کے لیے شرط جفت عدد حاصل ہو → $A = \{\quad\}$ → $n(A) = \square$

نمونہ وسعت → $S = \{\quad\}$ → $n(S) = \square$

$$P(A) = \frac{\square}{\square} = \square$$

6 شماریات (Statistics)

آیئے، سیکھیں۔

- مرکزی رجحان کی پیمائش - جماعت بند تعددی جدول کے لیے میانیہ، وسطانیہ، کثیریہ
- شماریاتی معطیات کی ترسیم کے ذریعے اظہار - مستطیلی ترسیم، تعددی کثیر ضلعی، دائروی ترسیم

انسانی زندگی میں شماریات کئی شعبوں کے لیے مفید ہے جیسے کھیتی، معاشیات، کامرس، علمِ ادویات، علمِ نباتات، بائیوٹیکنالوجی، طبیعات، کیمیا، ایجوکیشن، سماجی علوم، انتظام وغیرہ۔ کسی تجربے کے بعد حاصل ہونے والے نتائج کے کئی ممکنات ہوتے ہیں۔ جب ان کے ممکنات کی جانچ کرنے کی ضرورت ہوتی ہے تب بڑے پیمانے پر تجربہ کرکے، تمام اُمور کو ٹھیک طور پر لکھ لیا جاتا ہے۔ اس اندراج کا استعمال کرکے مختلف نتائج کے احتمال کی جانچ کی جاتی ہے۔ اس کے لیے اعداد و شمار کا علم یعنی شماریات کا اُصول بنایا گیا ہے۔

فرانسس گالٹن (1822-1911) نامی برطانوی ماہرِ علوم نے شماریات میں بنیادی کام کیے ہیں۔ وہ سوالنامہ تیار کرکے لوگوں میں تقسیم کرتا تھا اور اسے پُر کرنے کی گزارش کرتا تھا۔ اس طریقے سے انھوں نے کئی لوگوں سے معلومات جمع کرکے ان کی سابقہ معلومات، معاشی حالت، پسند ناپسند، صحت وغیرہ کا بڑے پیمانے پر اندراج کرتا رہتا تھا۔ یہ ثابت ہو چکا تھا کہ مختلف لوگوں کی اُنگلیوں کے نشان مختلف ہوتے ہیں۔ گالٹن نے کئی لوگوں کی اُنگلیوں کے نشانات کی جانچ کرکے اُن کی جماعت بندی کرنے کا طریقہ طے کیا۔ علم اعداد و شمار کا استعمال کرکے انھوں نے ثابت کرکے دِکھایا کہ مختلف لوگوں کے نشانات یکساں ہونے کے امکانات تقریباً صفر ہوتے ہیں۔ انھوں نے دِکھایا کہ اُنگلیوں کے نشانات پر سے کسی شخص کی شناخت کرنا ممکن ہے، گنہگاروں کو تلاش کرنے کا یہ طریقہ عدالتوں میں منظور ہوا۔ جانوروں اور انسانوں کے نسیج کے بارے میں بہت زیادہ کام کیا۔

فرانسس گالٹن

آیئے، ذرا یاد کریں۔

سروے کے ذریعے حاصل ہونے والے اعدادی شماروں میں عام طور پر ایک خصوصیت دِکھائی دیتی ہے، وہ یہ کہ تمام شماروں کا ایک خاص شمارے کے گرد یا اُس کے آس پاس مرکوز ہونے کا رجحان ہوتا ہے۔ یہ خاص شمارہ اس گروہ کا نمائندہ عدد ہوتا ہے۔ اس عدد کو مرکزی رجحان کی پیمائش کہتے ہیں۔

غیر جماعت بند جدول کے لیے میانیہ، وسطانیہ اور کثیریہ کا مطالعہ ہم اس سے قبل کر چکے ہیں۔

تجربہ 1 : آپ کی جماعت میں تمام طلبہ کی اونچائی ناپ کر سینٹی میٹر میں درج کیجیے۔ آپ محسوس کریں گے کہ کئی طلبہ کی اونچائی کسی خاص عدد کے گرد یا اس کے آس پاس مرکوز ہے۔

تجربہ 2 : پیپل کے درخت کے نیچے گرے ہوئے پتوں کو جمع کیجیے۔ ہر طالب علم کو ایک پتّا دیجیے۔ تمام طلبہ پتّے کی لمبائی ڈنٹھل سے اوپری سرے تک ناپیے اور اندراج کیجیے۔ تمام مشاہدات (شمارے) اندراج کرنے کے بعد ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ایک خاص عدد کے اردگرد یہ مشاہدات مرکوز ہو رہے ہیں۔

اب ہم تمام شماروں کی مرکزی رجحان کی پیمائش کا میانیہ، وسطانیہ اور کثیریہ کا مزید مطالعہ کریں گے۔ اس کے لیے اس میں استعمال ہوئی اصطلاحات اور علامتوں کی معلومات حاصل کریں گے۔

$$\text{شماروں کا میانیہ} = \frac{\text{تمام شماروں کی جمع}}{\text{کل شمارے}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

(یہاں x_i ، i واں شمارہ ہے۔)

میانیہ $\overline{X}$ سے ظاہر کرتے ہیں اور وہ دیے ہوئے شماروں کا اوسط ہے۔

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

آیئے، سمجھ لیں۔

جماعت بند تعددی تقسیمی جدول کا میانیہ
(Mean for grouped frequency distribution)

جب شماروں کی تعداد زیادہ ہوتی ہے تب مذکورہ بالا ضابطے میں تمام اعداد لکھ کر ان کی جمع کرنا دشوار ہوتا ہے۔ اس کے لیے ہم کوئی دوسرا طریقہ استعمال کرتے ہیں۔

کبھی کبھی بڑے پیمانے پر کیے گئے تجربات کی معلومات کی جماعت بندی جدول میں دی ہوئی ہوتی ہے۔ ایسے وقت معلومات کی جانچ کی تعداد کا میانیہ صحیح معلوم نہیں کیا جا سکتا۔ اس لیے اس کے تقریباً قریب کا عدد معلوم کرنے کی یا اندازاً میانیہ معلوم کرنے کے طریقے کا مطالعہ کریں گے۔

راست طریقہ (Direct Method)

اب ہم جماعت بند شماروں کا میانیہ معلوم کرنے کے طریقے کی مثال کا مطالعہ کریں گے۔

مثال : ذیل میں ایک کام مکمل کرنے کے لیے ہر مزدور کو درکار وقت کے تعدد کی تقسیمی جدول دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے وہ کام پورا کرنے کے لیے ایک مزدور کو درکار وقت کا میانیہ معلوم کیجیے۔

ہر ایک کو کام پورا کرنے کے لیے درکار وقت (گھنٹے)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
مزدوروں کی تعداد	10	15	12	8	5

حل :

(1) جدول میں دِکھائے ہوئے کے مطابق عمودی ستون لیے گئے ہیں۔

(2) پہلے ستون میں 'جماعت' لکھا گیا ہے۔

(3) دوسرے ستون میں وسط جماعت x_i لکھا گیا ہے۔

(4) تیسرے ستون میں اس وقفۂ جماعت کے مزدوروں کی تعداد (تعدد) (f_i) لکھا گیا ہے۔

(5) چوتھے ستون میں ہر جماعت کے لیے $(x_i \times f_i)$ کا حاصل ضرب لکھا گیا ہے۔

(6) چوتھے ستون میں $\sum_{i=1}^{N} x_i f_i$ لکھا گیا ہے۔

(7) ضابطے کی مدد سے میانیہ معلوم کیا گیا ہے۔

جماعت (وقت گھنٹے میں)	وسط جماعت x_i	تعدد (مزدوروں کی تعداد f_i)	تعدد × وسط جماعت $x_i f_i$
15-19	17	10	170
20-24	22	15	330
25-29	27	12	324
30-34	32	8	256
35-39	37	5	185
کل		$\sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 1265$

میانیہ $= \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{1265}{50} = 25.3 \cdots \because \sum f_i = N$

ایک مزدور کے کام مکمل کرنے کے لیے درکار وقت کا میانیہ 25.3 گھنٹے (اندازاً)

حل کردہ مثالیں

مثال (1) درج ذیل جدول میں 50 طلبہ کے آزمائشی امتحان کے مارکس کا فی صد دیا ہوا ہے۔اس کی مدد سے مارکس کے فی صد کا میانیہ معلوم کیجیے۔

مارکس کا فی صد	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
طلبہ کی تعداد	3	7	15	20	5

حل : مراحل کے لحاظ سے درج ذیل جدول تیار کی گئی ہے۔

جماعت (مارکس کا فی صد)	وسط جماعت x_i	تعدد (طلبہ کی تعداد) f_i	تعدد × وسط جماعت $x_i f_i$
0-20	10	3	30
20-40	30	7	210
40-60	50	15	750
60-80	70	20	1400
80-100	90	5	450
		$N = \sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 2840$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{2840}{50}$$

$$= 56.8$$

$\therefore$ مارکس کے فی صد کا میانیہ $= 56.8$

مثال (2) گزشتہ موسمِ گرما میں مہاراشٹر میں 30 شہروں کے ایک دن کا اعلیٰ درجۂ حرارت °C میں درج ذیل جدول میں دیا ہوا ہے۔ اس کی مدد سے درجۂ حرارت کا میانیہ معلوم کیجیے۔

اعلیٰ درجۂ حرارت	24-28	28-32	32-36	36-40	40-44
شہروں کی تعداد	4	5	7	8	6

حل :

جماعت (درجۂ حرارت °C)	وسط جماعت x_i	شہروں کی تعداد (تعدد) f_i	تعدد × وسط جماعت $x_i f_i$
24-28	26	4	104
28-32	30	5	150
32-36	34	7	238
36-40	38	8	304
40-44	42	6	252
کل		$N = \sum f_i = 30$	$\sum x_i f_i = 1048$

$$\text{میانیہ} = \bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{1048}{30} = 34.9\ ^\circ C$$

مفروضہ میانیہ کا طریقہ (Assumed Mean Method)

مذکورہ بالا حل کردہ مثالوں کی مدد سے ہمیں سمجھ میں آتا ہے کہ کبھی کبھی x_i اور f_i کا حاصل ضرب $(x_i f_i)$ بہت بڑا عدد آتا ہے۔ اس کی وجہ سے آسان طریقے سے میانیہ معلوم کرنا ذرا دشوار ہوجاتا ہے۔ اس کے لیے مزید ایک طریقے 'مفروضہ میانیہ کا طریقہ' کو ہم سمجھیں گے۔ اس طریقے سے میانیہ معلوم کرتے وقت چھوٹے اعداد کی جمع اور تقسیم کرنے سے کام آسان ہوجاتا ہے۔

مثلاً 40, 42, 43, 45, 47, 48 شمارے دیے ہوئے ہیں۔ ان کا میانیہ معلوم کرنا ہے۔

اس مثال میں اعداد کا مشاہدہ کرتے ہیں تو ہمیں ایسا پتا چلتا ہے کہ شماروں کا میانیہ 40 سے زیادہ ہے۔ اس لیے ہم عدد 40 کو میانیہ فرض کریں گے۔ $40 - 40 = 0$، $42 - 40 = 2$، $43 - 40 = 3$، $45 - 40 = 5$، $47 - 40 = 7$، $48 - 40 = 8$ یہ فرق حاصل ہوا۔ انھیں انحراف کرنے والا کہتے ہیں۔ ان کا میانیہ معلوم کریں گے۔ اسے مفروضہ میانیہ 40 میں ملانے پر ہمیں دیے ہوئے تمام معطیات کا میانیہ حاصل ہوجائے گا۔

یعنی، میانیہ = مفروضہ میانیہ + مفروضہ میانیہ سے انحراف کے فرق کا میانیہ

$$\bar{X} = 40 + \left(\frac{0+2+3+5+7+8}{6}\right) = 40 + \frac{25}{6} = 40 + 4\frac{1}{6} = 44\frac{1}{6}$$

مفروضہ میانیہ کے لیے A ، مفروضہ میانیہ سے انحراف کے لیے d اور انحرافی اعداد کے میانیہ کے لیے $\overline{d}$ کی علامت فرض کرتے ہیں۔ اس طرح ضابطہ حاصل ہوتا ہے: $\overline{X} = A + \overline{d}$

اسی مثال کو ہم مفروضہ میانیہ 43 لے کر حل کریں گے۔ ہر شمارے سے 43 تفریق کریں گے۔ یعنی مفروضہ میانیہ سے انحراف معلوم کریں گے۔

$40 - 43 = -3,\ 42 - 43 = -1,\ 43 - 43 = 0,\ 45 - 43 = 2,\ 47 - 43 = 4,\ 48 - 43 = 5$

مفروضہ میانیہ سے انحرافی اعداد کی جمع $= -3 - 1 + 0 + 2 + 4 + 5 = 7$

اب ، $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 43 + \left(\frac{7}{6}\right)$ ...(یہاں انحرافی اعداد کی تعداد 6 ہے)

$= 43 + 1\frac{1}{6}$

$= 44\frac{1}{6}$

ہمیں یہ پتا ہے کہ اس طرح سے مفروضہ میانیہ کا استعمال کرنے سے حسابی عمل کم ہو جاتا ہے۔ اسی طرح شماروں میں سے یا سہولت کے مطابق دیگر کوئی بھی عدد میانیہ مفروضہ مان کر بھی معطیات کا میانیہ تبدیل نہیں ہوتا۔

اب ہم دی ہوئی تعددی جدول کے لیے اس طریقے کو کس طرح استعمال کر سکتے ہیں اس کی ایک مثال کا مطالعہ کریں گے۔

مثال : 100 سبزی فروشوں کی روزانہ کی فروخت کا تعدد ذیل کی جدول میں دیا ہوا ہے۔ مفروضہ میانیہ کے طریقے سے روزانہ کی فروخت کا میانیہ معلوم کیجیے۔

روزانہ کی فروخت (روپے)	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
سبزی فروشوں کی تعداد	15	20	35	30

حل : مفروضہ میانیہ A = 2250 لیں گے ، انحراف $= d_i = x_i - A$

جماعت روزانہ کی فروخت (روپے میں)	وسط جماعت x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2250$	تعدد (سبزی فروشوں کی تعداد) f_i	انحراف × تعدد $f_i d_i$
1000-1500	1250	−1000	15	−15000
1500-2000	1750	−500	20	−10000
2000-2500	2250→A	0	35	0
2500-3000	2750	500	30	15000
کل			$N = \sum f_i = 100$	$\sum f_i d_i = -10000$

درج ذیل مراحل کی مدد سے جدول بنایا گیا ہے۔

(1) مفروضہ میانیہ $A = 2250$ لیا گیا ہے (عام طور پر جدول میں زیادہ تعدد والے وسط جماعت کا مفروضہ میانیہ فرض کرتے ہیں۔)

(2) پہلے ستون میں فروخت کی جماعت بنا کر اسے پہلے ستون میں لکھا گیا ہے۔

(3) دوسرے ستون میں وسط جماعت لکھا گیا ہے۔

(4) تیسرے ستون میں $d_i = x_i - A = x_i - 2250$ کی قیمت لکھی گئی ہے۔

(5) چوتھے ستون میں ہر جماعت کے سبزی فروشوں کی تعداد لکھی گئی ہے اور اُن کی جمع $\sum f_i$ لکھی گئی ہے۔

(6) پانچویں ستون میں $(f_i \times d_i)$ حاصل ضرب لکھ کر ان کی جمع $\sum f_i d_i$ کی گئی ہے۔

ضابطے کا استعمال کرکے $\overline{d}$ اور $\overline{X}$ معلوم کیا گیا۔

$$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = \frac{-10000}{100} = -100 \quad , \quad \text{میانیہ } \overline{X} = A + \overline{d} = 2250 - 100 = 2150$$

∴ روزانہ کی فروخت کا میانیہ 2150 روپے ہے۔

عملی کام : اسی مثال کو راست طریقے سے حل کیجیے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) درج ذیل جدول میں ایک ٹھیکیدار کے پاس 50 مزدوروں کی روزانہ کی مزدوری کا تعددی تقسیمی جدول دیا ہوا ہے۔اس کی مدد سے ایک مزدور کی روزانہ کی مزدوری کا میانیہ، مفروضہ میانیہ کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

ہر مزدور کی روزانہ کی مزدوری (روپے)	200-240	240-280	280-320	320-360	360-400
مزدوروں کی تعداد (تعدد)	5	10	15	12	8

حل : فرض کیجیے، مفروضہ میانیہ $A = 300$

جماعت مزدوری (روپے میں)	وسط جماعت x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 300$	تعدد (مزدوروں کی تعداد) f_i	انحراف × تعدد $f_i d_i$
200-240	220	−80	5	−400
240-280	260	−40	10	−400
280-320	300→A	0	15	0
320-360	340	40	12	480
360-400	380	80	8	640
کل			$\sum f_i = 50$	$\sum f_i d_i = 320$

$$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = \frac{320}{50} = 6.4$$

میانیہ ، $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 300 + 6.4$

$= 306.40$

مزدوروں کی روزانہ کی مزدوری کا میانیہ 306.40 روپے ہے۔

گریز مرحلے کا طریقہ (Step deviation method)

ہم نے میانیہ معلوم کرنے کے لیے راست طریقہ اور مفروضہ میانیہ کے طریقے کا مطالعہ کیا۔ زیادہ آسانی سے میانیہ معلوم کرنے کے طریقے کی مزید ایک مثال کا مطالعہ کریں گے۔

- پہلے A مفروضہ میانیہ کو تفریق کر کے d_i ستون بنائیں گے۔
- تمام d_i کا م ذا 'g' آسانی سے مل جاتا ہے تو $u_i = \frac{d_i}{g}$ کا ستون تیار کریں گے۔
- تمام u_i اعداد کا میانیہ $\overline{u}$ معلوم کریں گے۔
- $\overline{X} = A + \overline{u}\,g$ ضابطہ حاصل کریں گے۔

مثال : 100 خاندانوں کی صحت کے بیمہ کے لیے سرمایہ کاری کی سالانہ رقم تعددی جدول میں دی ہوئی ہے۔ گریز مرحلہ کے طریقے سے خاندانوں کی سالانہ سرمایہ کاری کا میانیہ معلوم کیجیے۔

ہر خاندان کے بیمہ کی رقم (روپے)	800-1200	1200-1600	1600-2000	2000-2400	2400-2800	2800-3000
خاندانوں کی تعداد	3	15	20	25	30	7

حل : فرض کیجیے، A = 2200 ، تمام d_i دیکھ کر $g = 400$ ہے۔

جماعت بیمے کی رقم (روپے)	وسط جماعت x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2200$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	تعدد (خاندانوں کی تعداد) f_i	$f_i u_i$
800-1200	1000	−1200	−3	3	−9
1200-1600	1400	−800	−2	15	−30
1600-2000	1800	−400	−1	20	−20
2000-2400	2200→A	0	0	25	0
2400-2800	2600	400	1	30	30
2800-3200	3000	800	2	7	14
کل				$\sum f_i = 100$	$\sum f_i u_i = -15$

مذکورہ بالا جدول کے مراحل ذیل کے مطابق بنائے گئے ہیں۔

(1) جدول کے پہلے ستون میں بیما میں سرمایہ کاری کرنے والوں کی جماعت لکھی ہوئی ہے۔

(2) دوسرے ستون میں وسط جماعت x_i لکھا ہوا ہے۔

(3) تیسرے ستون میں $d_i = x_i - A$ کی قیمت لکھی ہوئی ہے۔

(4) d_i اس ستون میں تمام اعداد 400 کے گنا میں ہیں اس لیے $g = 400$ لیا گیا ہے۔

چوتھے ستون میں $u_i = \frac{d_i}{g} = \frac{d_i}{400}$ کی قیمت لکھی ہوئی ہے۔

(5) پانچویں ستون میں ہر جماعت کا تعدد (خاندانوں کی تعداد) لکھی ہوئی ہے۔

(6) چھٹے ستون میں $f_i \times u_i$ حاصل ضرب ہر جماعت کے لیے لکھا گیا ہے۔

u_i کا میانیہ ضابطے کی مدد سے معلوم کریں گے۔

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{-15}{100} = -0.15$$

$$\overline{X} = A + \overline{u}\, g$$

$$= 2200 + (-0.15)(400)$$

$$= 2200 + (-60.00)$$

$$= 2200 - 60 = 2140$$

∴ خاندانوں کی بیما کی سالانہ سرمایہ کاری کا میانیہ 2140 روپے ہے۔

عملی کام : راست طریقہ سے اور مفروضہ میانیہ طریقے میں سے کسی بھی طریقے سے معلوم کیے گئے میانیہ یکساں آتے ہیں اس کی تصدیق کیجیے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ذیل میں ایک اسکول کے 50 طلبہ نے سیلاب زدگان کے لیے جمع کیے گئے عطیات کی تعددی جدول دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے جمع کی گئی عطیات کا میانیہ معلوم کیجیے۔

عطیات (روپے)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
طلبہ کی تعداد	2	4	24	18	1	1

دو متواتر جماعت میں بہت کم شمارے ہوں، تو ان کو ملا کر ایک جماعت بنانا سہولت بخش ہوتا ہے۔اس مثال میں 500-0 اور 1000-500 کی ایک جماعت 2500-2000 اور 3000-2500 کی ایک جماعت بنائیں گے۔

عطیات کی رقم (روپے)	0-1000	1000-1500	1500-2000	2000-3000
طلبہ کی تعداد	6	24	18	2

حل : فرض کیجیے، A = 1250 ، تمام d_i کا مطالعہ کرنے سے پتا چلتا ہے کہ $g = 250$

جماعت عطیات (روپے)	وسط جماعت x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 1250$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	تعدد f_i	$f_i u_i$
0-1000	500	–750	–3	6	–18
1000-1500	1250→A	0	0	24	0
1500-2000	1750	500	2	18	36
2000-3000	2500	1250	5	2	10
				$\sum f_i = 50$	$\sum f_i u_i = 28$

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{28}{50} = 0.56,$$

$$\overline{u}\, g = 0.56 \times 250 = 140$$

$$\overline{X} = A + g\overline{u} = 1250 + 140 = 1390$$

$\therefore$ جمع کی گئی عطیات کا میانیہ 1390 روپے ہے۔

عملی کام -

1. اس مثال کو راست طریقے سے حل کیجیے۔
2. اوپر دی ہوئی مثال میں معلوم کیا گیا میانیہ، مفروضہ میانیہ کے طریقے سے معلوم کر کے تصدیق کیجیے۔
3. A = 1750 رکھ کر مذکورہ بالا مثال حل کیجیے۔

مشقی سیٹ 6.1

.1 ذیل میں دسویں جماعت کے 50 طلبہ کے لیے روزانہ مطالعہ کے لیے تفویض کیے گئے گھنٹے اور طلبہ کی تعداد کی تعددی تقسیمی جدول دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے طلبہ کے مطالعے کے لیے دیے ہوئے وقت کا میانیہ راست طریقے سے معلوم کیجیے۔

وقت (گھنٹے)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10
طلبہ کی تعداد	7	18	12	10	3

.2 ذیل میں ایک شاہراہ پر ٹول پلازا پر صبح 6 سے شام 6 کے درمیان آنے جانے والی سواریوں سے جمع ہونے والے ٹیکس (روپے) اور سواریوں کی تعداد کی تعددی جدول دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے جمع ہونے والے ٹیکس کا میانیہ مفروضہ میانیہ کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

جمع ہونے والا ٹیکس (روپے)	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
سواریوں کی تعداد	80	110	120	70	40

.3 ذیل میں ایک دن میں ملک سینٹر سے 50 گاہکوں کو تقسیم کیے گئے دودھ کی تعددی تقسیم کی جدول دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے تقسیم کیے گئے دودھ کا میانیہ راست طریقے سے معلوم کیجیے۔

دودھ کی تقسیم (لٹر)	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
گاہکوں کی تعداد	17	13	10	7	3

.4 ذیل میں بعض باغبانوں کے سنترے کی پیداوار کی تعددی تقسیم کی جدول دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے پیداوار کا میانیہ 'مفروضہ میانیہ' کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

پیداوار (ہزار روپے)	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
باغبانوں کی تعداد	20	25	15	10	10

.5 ذیل میں ایک کمپنی کے 120 ملازمین سے قحط زدگان کے لیے جمع کیے گئے عطیات کی تعددی تقسیم کی جدول دی ہوئی ہے۔ ملازمین کی جمع کیے ہوئے عطیات کا میانیہ 'گریز مرحلہ طریقہ' سے معلوم کیجیے۔

جمع عطیات (روپے)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500
ملازمین کی تعداد	35	28	32	15	10

.6 ذیل میں ایک کارخانے کے 150 مزدوروں کی ہفتہ واری مزدوری کی تعددی تقسیم کی جدول دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے مزدوروں کی ہفتہ واری مزدوری کا میانیہ 'گریز مرحلہ طریقے' سے معلوم کیجیے۔

ہفتہ واری مزدوری (روپے)	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
مزدوروں کی تعداد	25	45	50	30

آیئے، ذرا یاد کریں۔

سائنس کی نمائش میں حصہ لینے کے لیے ایک اسکول سے دو طالب علم اور دو طالبات دونوں کے لیے ایک شہر میں گئے تھے۔ انھیں اپنا شام کا کھانا کہاں کھانا ہے، یہ طے کرنا تھا۔ کام کی جگہ سے ایک کلومیٹر کے فاصلے پر طعام دینے والی دس ہوٹلیں تھیں۔ ان کے طعام کا نرخ روپے میں، صعودی ترتیب میں ذیل کے مطابق دیا ہوا ہے۔

$$40,\ 45,\ 60,\ 65,\ 70,\ 80,\ 90,\ 100,\ 500$$

تمام ہوٹلوں میں طعام کی اوسط قیمت $= \frac{1130}{10} = 113$ روپے

طلبہ نے کس ہوٹل میں کھانے کا فیصلہ کیا ہوگا؟ 500 روپے نرخ کا طعام دینے والی ہوٹل کو چھوڑ کر دیگر سب ہوٹلوں میں نرخ 113 روپے سے کم تھا۔ طلبہ نے اوسط دام والے ہوٹل کو منتخب کرنا طے کیا۔ پہلے دن 70 روپے نرخ والے اور دوسرے دن 80 روپے نرخ والے ہوٹل میں کھانا کھایا۔ بعض مرتبہ شماروں کے اوسط کی بہ نسبت اُن کا وسطانیہ استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ اس کی ایک مثال ہے۔

گزشتہ جماعت میں غیر جماعت بند معطیات کے لیے وسطانیہ کے تصور کا ہم مطالعہ کر چکے ہیں۔

- دیے ہوئے معطیات میں اعداد صعودی یا نزولی ترتیب میں لکھیں تو اس ترتیب میں وسط میں آنے والے عدد کو معطیات کا وسطانیہ کہتے ہیں۔
- وسطانیہ دیے ہوئے معطیات کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے یعنی دیے ہوئے معطیات کے لیے وسطانیہ کے اوپر اور نیچے دونوں طرف مساوی تعداد میں شمارے ہوتے ہیں۔
- دیے ہوئے شمارے $k_1 \leq k_2 \leq k_3 \ldots\ldots \leq k_n$ اس طریقے سے لکھتے ہیں۔
- معطیات میں شمارے طاق ہوں تو $\frac{n+1}{2}$ واں شمارہ وسطانیہ ہوتا ہے کیونکہ $k_{\frac{n+1}{2}}$ سے قبل $\frac{n-1}{2}$ شمارے اور اُس کے بعد بھی $\frac{n-1}{2}$ شمارے ہوتے ہیں۔ $n = 2m+1$ لے کر اس کی تصدیق کیجیے۔
- معطیات میں شمارہ n اگر جفت ہو تو معطیات کا وسطانیہ درمیانی دو اعداد کا اوسط ہوتا ہے کیونکہ $k_{\frac{n}{2}}$ سے قبل اور $k_{\frac{n+2}{2}}$ کے بعد ہر طرف $\frac{n-2}{2}$ شمارہ ہوتا ہے۔ $n = 2m$ لے کر تصدیق کیجیے۔
- یعنی $\frac{n}{2}$ واں عدد اور $\frac{n+2}{2}$ واں عدد کا اوسط لینے پر آنے والا عدد اس معطیات کا وسطانیہ ہوتا ہے۔

مثال (1) 32, 33, 38, 40, 43, 48, 50 اِن شماروں کی ترتیب میں چوتھا عدد وسط میں ہے، اس لیے دیے ہوئے معطیات کا وسطانیہ $= 40$ ہے۔

مثال (2) 61, 62, 65, 66, 68, 70, 74, 75 یہاں شماروں کی تعداد 8 یعنی جفت ہے۔ اس لیے چوتھا اور پانچواں یہ دونوں شمارے درمیان میں ہیں، جو 66 اور 68 ہیں، اس لیے اس معطیات کا وسطانیہ $= \frac{66+68}{2} = 67$

آ یئے، سمجھ لیں۔

جماعت بند تعددی تقسیم کے لیے وسطانیہ (Median for grouped frequency distribution)

شماروں کی تعداد زیادہ ہوتی ہے تو اس طرح ترتیب دے کر وسطانیہ معلوم کرنا دشوار ہوتا ہے، اس لیے اب ہم جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول سے اندازاً وسطانیہ معلوم کرنے کا طریقہ مثال کی مدد سے سمجھیں گے۔

مثال 1: 8, 12, 15.5, 11, 10.4, 8, 6 اِن شماروں کی جماعت بند جدول ذیل میں دی ہوئی ہے۔

<table>
<tr><th>جماعت</th><th>شماریاتی نشان</th><th>تعدد</th></tr>
<tr><td>6 - 10</td><td>| |</td><td>2</td></tr>
<tr><td>11 - 15</td><td>| |</td><td>2</td></tr>
<tr><td>16 - 20</td><td>|</td><td>1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>جماعت</th><th>شماریاتی نشان</th><th>تعدد</th></tr>
<tr><td>5.5 - 10.5</td><td>| | |</td><td>3</td></tr>
<tr><td>10.5 - 15.5</td><td>| |</td><td>2</td></tr>
<tr><td>15.5 - 20.5</td><td>| |</td><td>2</td></tr>
</table>

پہلی جدول میں 10.4 اور 15.5 ، یہ دو شمارے شامل نہیں کیے جا سکے کیونکہ یہ عدد 6-10 ، 11-15 ، 16-20 ان میں سے کسی بھی جماعت میں شامل نہیں ہیں۔

ایسے وقت جماعت کو مسلسل کر لیتے ہیں، یہ ہمیں معلوم ہے۔

اس جدول میں نچلی حد میں سے 0.5 سے کم کرتے ہیں اور اوپری حد میں 0.5 سے بڑھا لیتے ہیں تو مسلسل جماعتیں حاصل ہوجاتی ہیں۔

اس طرح مسلسل جماعتیں حاصل کرکے دوسری جدول تیار کی گئی۔ یہاں 15.5 شمارہ کو 20.5 - 15.5 جماعت میں شامل کیا گیا ہے۔

یہاں شمارہ 15.5 کو جماعت 15.5 - 10.5 میں شامل نہیں کریں گے کیونکہ جماعت کی اوپری حد اس جماعت میں شامل نہیں ہوتی۔

مسلسل کرنے کے طریقے بدلیں تو تعدد بدل سکتا ہے۔ یہ ہمیں اوپر دی ہوئی جدول سے سمجھ میں آتا ہے۔

اسے ذہن میں رکھیں۔

اوپر کی جدول میں 6-10 اِس جماعت کے لیے وسط جماعت ← $= \frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8$ ہے۔

اسی طرح 10.5 - 5.5 اس جماعت کے لیے وسط جماعت ← $= \frac{5.5+10.5}{2} = \frac{16}{2} = 8$ ہے۔

یعنی جماعت کی تشکیل مختلف طریقے سے کرتے ہیں تب بھی وسط جماعت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

تشریحی مثال

دسویں جماعت کے داخلہ امتحان میں حاصل کردہ 100 طلبہ کے مارکس کی تعددی جدول ذیل میں دی ہوئی ہے۔ طلبہ کے مارکس کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

امتحان میں حاصل کردہ مارکس	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
طلبہ کی تعداد	4	20	30	40	6

حل : N = 100

$50 = \frac{N}{2}$ اس کے لیے 50 واں عدد اندازاً وسطانیہ ہوگا۔ اب 50 نمبر کا شمارہ کس جماعت میں آئے گا یہ ہمیں معلوم کرنا ہے۔ جماعت کی اوپری حد 'سے کم قسم' کی اجتماعی تعددی جدول سے یہ معلوم کرسکتے ہیں۔

اس لیے ہم اوپر دی ہوئی تعددی جدول سے 'سے کم قسم کی' اجتماعی تعددی تقسیمی جدول بنائیں گے۔

جماعت (طلبہ کے حاصل کردہ مارکس)	طلبہ کی تعداد fi	اجتماعی تعدد (سے کم قسم) cf
0-20	4	4
20-40	20	24
40-60	30	54
60-80	40	94
80-100	6	100

اس جدول سے،

- $50 = \frac{N}{2}$ ، اس نمبر کا شمارہ 40-60 جماعت میں ہے۔ جس جماعت میں وسطانیہ آتا ہے، اس جماعت کو **وسطانیہ جماعت** کہتے ہیں۔ یہاں پر 40-60 وسطانیہ جماعت ہے۔
- 40-60 جماعت کی نچلی حد 40 ہے اور تعدد 30 ہے۔
- پہلے 50 شماروں میں سے شروع کے 24 شمارے 40 سے کم ہیں۔ باقی ماندہ 26 $(= 50 - 24)$ شمارے $(40 - 60)$ جماعت میں ہیں۔ اس میں سے 50 ویں شمارہ کا اندازہ ذیل کے مطابق کرتے ہیں۔
- اس جماعت میں کل 30 شماروں میں سے 26 شمارے 50 ویں شمارہ تک ہیں۔ اور طول جماعت 20 ہے۔ اس لیے 50 واں شمارہ 40 سے $20 \times \frac{26}{30}$ بڑا ہے، ایسا مان لیا جاتا ہے۔

وہ اندازاً ، $40 + \frac{26}{30} \times 20 = 40 + \frac{52}{3} = 57\frac{1}{3}$ ہے۔

$\therefore$ وسطانیہ $= 57\frac{1}{3}$

• ضابطے کے لحاظ سے ہم ذیل کے مطابق لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{وسطانیہ} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

اِس ضابطے میں،

L = وسطانیہ جماعت کی نچلی حد، N = کل تعداد

h = وسطانیہ جماعت کا طول جماعت، f = وسطانیہ جماعت کا تعدد

cf = وسطانیہ جماعت سے قبل کی جماعت کا اجتماعی تعدد

مذکورہ مثال میں، $\frac{N}{2} = 50$ ، $cf = 24$ ، $h = 20$ ، $f = 30$ ، $L = 40$

(ضابطہ) . . .
$$\text{وسطانیہ} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{50 - 24}{30}\right) \times 20$$

$$= 40 + \frac{26 \times 20}{30}$$

$$= 40 + 17\frac{1}{3}$$

$$= 57\frac{1}{3}$$

اسے ذہن میں رکھیں۔

✦ وسطانیہ معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی جماعت مسلسل نہیں ہو تو اسے مسلسل کرنا ہوتا ہے۔

✦ شماروں کی تعداد بہت زیادہ ہو تو صعودی ترتیب میں ہر شمارہ لکھنا مشکل ہوتا ہے، اس لیے معطیات کی ترتیب جماعت بند کی صورت میں کرتے ہیں۔ ایسے جماعت بند معطیات کا وسطانیہ بالکل صحیح معلوم کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے لیکن اندازاً وسطانیہ معلوم کرنے کے لیے ذیل کا ضابطہ استعمال کرتے ہیں۔

$$\text{وسطانیہ} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) خدمات برائے عوامی آمد ورفت کرنے والی 60 بسوں کا ایک دن میں طے کردہ فاصلوں کا تعدد ذیل کی جدول میں دیا ہوا ہے۔ بسوں کے ذریعے ایک دن میں طے کردہ فاصلوں کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

240-249	230-239	220-229	210-219	200-209	روزانہ طے کردہ فاصلہ (کلومیٹر)
6	10	26	14	4	بسوں کی تعداد

حل : (1) جدول میں دیے ہوئے جماعت مسلسل نہیں ہیں۔

یہاں ایک جماعت کی اوپری حد اور اگلی جماعت کی نچلی حد کے درمیان فرق 1 ہے۔

$\therefore\ 1 \div 2 = 0.5$ ، اس قیمت کو ہر ایک جماعت کی نچلی حد سے تفریق کریں گے اور جماعت کی اوپری حد میں ملا کر جماعت کی حدود کا تعین کریں گے۔ اس کے مطابق جماعت مسلسل کریں گے اور نئی جدول لکھیں گے۔

(2) بعد میں اس میں 'سے کم قسم' کا اجتماعی تعدد کا ستون بنائیں گے۔

دی ہوئی جماعت	مسلسل کی گئی جماعت	تعدد f_i	اجتماعی تعدد (سے کم قسم)
200 - 209	199.5 - 209.5	4	4
210 - 219	209.5 - 219.5	14	$18 \rightarrow cf$
220 - 229	219.5 - 229.5	$26 \rightarrow f$	44
230 - 239	229.5 - 239.5	10	54
240 - 249	239.5 - 249.5	6	60

یہاں ، $\sum f_i = N = 60$ = کل تعداد ، $\therefore\ \frac{N}{2} = 30$

$\therefore$ وسطانیہ 30 واں شمارہ ہے۔

پہلے 18 شمارے 219.5 سے کم اور باقی ماندہ $30 - 18 = 12$ شمارے جماعت 219.5 - 229.5 میں ہیں، اس لیے یہ وسطانیہ جماعت ہے۔

219.5 - 229.5 جماعت کا اجتماعی تعدد (سے کم قسم) 44 ہے۔

ضابطے کی رو سے ،

L = وسطانیہ جماعت کی نچلی حد = 219.5 ، h = وسطانیہ جماعت کا طول جماعت = 10 ،

cf = وسطانیہ جماعت سے قبل کی جماعت کا اجتماعی تعدد = 18

f = وسطانیہ جماعت کا تعدد = 26

$$\text{وسطانیہ} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$\therefore \quad \text{وسطانیہ} = 219.5 + \left(\frac{30-18}{26}\right)\times 10$$

$$= 219.5 + \left(\frac{12\times 10}{26}\right)$$

$$= 219.5 + 4.62$$

$$= 224.12$$

∴ بسوں کے روزانہ فاصلہ طے کرنے کا وسطانیہ 224.12 کلومیٹر ہے۔

مثال (2) ذیل کی جدول میں ایک دن میں ایک میوزیم میں آنے والے افراد کی عمریں دی ہوئی ہیں۔ اس بنا پر افراد کی عمروں کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

افراد کی تعداد	عمر (سال)
3	10 سے کم
10	20 سے کم
22	30 سے کم
40	40 سے کم
54	50 سے کم
71	60 سے کم

حل : یہاں 'سے کم قسم' کی اجتماعی تعددی تقسیم کی جدول دی ہوئی ہے۔ سب سے پہلے ہم جماعت کی اصل حدود حاصل کریں گے۔ ہمیں پتا ہے کہ 'سے کم قسم' کی اجتماعی تعدد، جماعت کی اوپری حد سے منسلک ہوتی ہے۔ پہلی جماعت کی اوپری حد 10 ہے۔ ہر شخص کی عمر مثبت عدد ہوتی ہے اس لیے پہلی جماعت 0-10 ہوگی۔ دوسری جماعت کی اوپری حد 20 ہے۔ اس لیے دوسری جماعت 10-20 ہوگی۔ اس طرح طول جماعت 10 لے کر ترتیب وار جماعت تیار کریں گے۔ اس کے مطابق آخری جماعت 50-60 ہوگی۔ اس طرح ہم ذیل کے مطابق جماعت لکھ سکتے ہیں۔

اجتماعی تعدد (سے کم قسم)	تعدد (افراد کی تعداد)	جماعت	عمر (سال)
3	3	0-10	10 سے کم
10	$10-3=7$	10-20	20 سے کم
$22 \rightarrow cf$	$22-10=12$	20-30	30 سے کم
40	$40-22=18 \rightarrow f$	30-40	40 سے کم
54	$54-40=14$	40-50	50 سے کم
71	$71-54=14$	50-60	60 سے کم

یہاں، $N = 71, \quad \therefore \quad \frac{N}{2} = 35.5, \; h = 10$

جماعت 40-30 میں 35.5 واقع ہے،اس لیے یہ وسطانیہ جماعت ہے۔اس سے قبل کی جماعت کا اجتماعی تعدد 22 ہے

یعنی $cf = 22$ ، $L = 30$ ، $f = 18$

$$\text{وسطانیہ} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 30 + (35.5-22) \times \frac{10}{18}$$

$$= 30 + (13.5) \times \frac{10}{18}$$

$$= 30 + 7.5$$

$$= 37.5$$

$\therefore$ میوزیم میں آنے والے افراد کی عمروں کا وسطانیہ 37.5 سال ہے۔

مشقی سیٹ 6.2

.1 ذیل میں دی ہوئی جدول میں ایک سافٹ ویئر کمپنی میں روزانہ کام کے گھنٹوں اور اتنا وقت کام کرنے والے ملازمین کی تعداد دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے ملازمین کے روزانہ کام کے گھنٹوں کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

روزانہ کام کے گھنٹے	8-10	10-12	12-14	14-16
ملازمین کی تعداد	150	500	300	50

.2 ایک امرئی میں آم کے درخت اور ہر درخت سے ملنے والے آموں کی تعداد کی تعددی تقسیم کی جدول دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے دیے ہوئے معطیات کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

آموں کی تعداد	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300
درختوں کی تعداد	33	30	90	80	17

.3 ممبئی - پونے ایکسپریس وے ٹریفک کی نگرانی کرنے والے پولس چوکی پر کیے گئے سروے میں ذیل کا مشاہدہ دِکھائی دیا۔دیے ہوئے اندراج سے وسطانیہ معلوم کیجیے۔

سواریوں کی رفتار (کلو میٹر فی گھنٹا)	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89
سواریوں کی تعداد	10	34	55	85	10	6

.4 مختلف کارخانوں میں بنائے جانے والے بلبوں کی تعداد درج ذیل جدول میں دی ہوئی ہے۔اس بنا پر بلبوں کی پیداوار کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

بلبوں کی تعداد (ہزار میں)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
کارخانوں کی تعداد	12	35	20	15	8	7	8

آیئے، سمجھ لیں۔

جماعت بند تعددی تقسیم سے کثیریہ (Mode for grouped frequency distribution)

ہم جانتے ہیں کہ دیے ہوئے شماروں میں سب سے زیادہ مرتبہ آنے والا شمارہ، اس گروہ کا کثیریہ ہوتا ہے۔

مثال: دو پہیہ کی سواری بنانے والی کمپنی مختلف رنگوں میں دو پہیہ والی سواریاں بناتی ہیں۔کس رنگ کی سواری کی پسند سب سے زیادہ ہے، اسے معلوم کرنا اس کمپنی کو بہت ضروری ہے یعنی رنگ کا کثیریہ معلوم ہونا بہت اہم اور ضروری ہے۔اسی طرح مختلف پیداواری کمپنیوں کو سب سے زیادہ مانگ کس پیداوار کی ہے، اسے معلوم کرنا بہت ضروری ہوتا ہے۔ایسے وقت پیداوار کا کثیریہ معلوم کرنا ہوتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ غیر جماعت بند تعددی تقسیم سے کثیریہ کس طرح معلوم کرتے ہیں۔

اب ہم جماعت بند تعددی تقسیم سے کثیریہ کس طرح معلوم کرتے ہیں، اس کا مطالعہ کریں گے۔

ذیل کے ضابطے کی مدد سے اندازاً کثیریہ معلوم کرنے کے طریقے کا مطالعہ کریں گے۔

$$\text{کثیریہ} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

اوپر دیے ہوئے ضابطے میں،

L = کثیریہ جماعت کی نچلی حد

f_1 = کثیریہ جماعت کا تعدد

f_0 = کثیریہ جماعت سے قبل کی جماعت کا تعدد

f_2 = کثیریہ جماعت کے بعد کی جماعت کا تعدد

h = کثیریہ جماعت کا طولِ جماعت

اس ضابطے کو استعمال کر کے اندازاً کثیریہ کس طرح معلوم کرتے ہیں، مثالوں کے ذریعے سمجھیں گے۔

حل کردہ مثالیں

مثال(1) درج ذیل تعددی تقسیم کی جدول میں میدان پر کھیلنے کے لیے آنے والے لڑکوں کی تعداد اور اُن کی عمروں کی جماعت دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے میدان پر کھیلنے والے لڑکوں کی عمر کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

لڑکوں کی عمروں کی جماعت (سال)	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
لڑکوں کی تعداد	43	$58 \rightarrow f_0$	$70 \rightarrow f_1$	$42 \rightarrow f_2$	27

اوپر دی ہوئی جدول سے یہ سمجھ میں آتا ہے کہ 12-10 عمروں کی جماعت میں طلبہ کی تعداد سب سے زیادہ ہے۔

حل : یہاں $f_1 = 70$ اور اس کی کثیریہ جماعت 12-10 ہے۔یعنی جماعت 12-10 کثیریہ جماعت ہے۔

دی ہوئی مثال میں،

L = کثیریہ جماعت کی نچلی حد = 10

h = کثیریہ جماعت کا طولِ جماعت = 2

f_1 = کثیریہ جماعت کا تعدد = 70

f_0 = کثیریہ جماعت سے قبل کی جماعت کا تعدد = 58

f_2 = کثیریہ جماعت کے بعد کی جماعت کا تعدد = 42

کثیریہ $= L + \left[\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$= 10 + \left[\dfrac{70-58}{2(70)-58-42}\right] \times 2$

$= 10 + \left[\dfrac{12}{140-100}\right] \times 2$

$= 10 + \left[\dfrac{12}{40}\right] \times 2$

$= 10 + \dfrac{24}{40}$

$= 10 + 0.6$

$= 10.6$

جواب : $\therefore$ میدان پر کھیلنے والے لڑکوں کی عمروں کا کثیریہ 10.6 سال ہے۔

مثال (2) ذیل کی تعددی تقسیم کی جدول میں ایک پٹرول پمپ پر پٹرول بھروانے والی سواریوں کی تعداد اور سواریوں میں بھرے گئے پٹرول کی معلومات دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے بھرے گئے پٹرول کے حجم کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

پٹرول بھروایا گیا (لٹر)	1-3	4-6	7-9	10-12	13-15
سواریوں کی تعداد	33	40	27	18	12

حل : یہاں دی ہوئی جماعت مسلسل نہیں ہے،اس لیے ہم جماعت کو مسلسل بنائیں گے اور تعددی جدول تیار کریں گے۔

جماعت	اصل جماعت کے حدود	تعدد
1 - 3	0.5 - 3.5	$33 \rightarrow f_0$
4 - 6	3.5 - 6.5	$40 \rightarrow f_1$
7 - 9	6.5 - 9.5	$27 \rightarrow f_2$
10 - 12	9.5 - 12.5	18
13 - 15	12.5 - 15.5	12

یہاں ، f_1 = کثیریہ جماعت کا تعداد = 40 ، متعلقہ کثیریہ جماعت 6.5 - 3.5

کثیریہ $= L + \left[\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

کثیریہ $= 3.5 + \left[\dfrac{40-33}{2(40)-33-27}\right] \times h$

$= 3.5 + \left[\dfrac{7}{80-60}\right] \times 3$

$= 3.5 + \dfrac{21}{20}$

$= 3.5 + 1.05$

$= 4.55$

$\therefore$ سواریوں میں بھرے گئے پٹرول کے حجم کا کثیریہ 4.55 لٹر ہے۔

مشقی سیٹ 6.3

.1 دودھ جمع کرنے کے ایک مرکز پر کسانوں سے جمع کیے گئے گائے کے دودھ اور لیکٹو میٹر سے ناپے گئے دودھ میں موجود چربی (fat) کا تناسب دیا ہوا ہے۔اس کی مدد سے دودھ میں چربی کے تناسب کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

دودھ میں موجود چربی (%)	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
جمع کیا گیا دودھ (لٹر)	30	70	80	60	20

.2 کچھ خاندانوں کا ماہانہ بجلی کا استعمال ذیل کی جماعت بند تعددی تقسیمی جدول میں دیا ہوا ہے۔اس کی مدد سے بجلی کے استعمال کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

بجلی کا استعمال (یونٹ)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
خاندانوں کی تعداد	13	50	70	100	80	17

.3 چائے کی 100 ہوٹلوں کو مہیا کیے گئے دودھ اور ہوٹلوں کی تعداد کی جماعت بند تعددی جدول دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے مہیا کیے گئے دودھ کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

دودھ (لٹر)	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
ہوٹلوں کی تعداد	7	5	15	20	35	18

.4 ذیل کی تعددی تقسیمی جدول میں 200 مریضوں کی عمریں اور ایک ہفتے میں علاج کرانے والے مریضوں کی تعداد دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے مریضوں کی عمر کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

عمر (سال)	5 سے کم	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29
مریضوں کی تعداد	38	32	50	36	24	20

عملی کام :

- آپ کی جماعت میں 20 لڑکوں کے اوزان کا میانیہ معلوم کیجیے۔
- آپ کی جماعت میں لڑکوں کی قمیص کی ناپ کا کثیریہ معلوم کیجیے۔
- جماعت کا ہر طالب علم اپنی نبض کی ایک منٹ میں ہونے والی رفتار کو شمار کرے اور اس کا اندراج کرے۔اس اندراج کا جدول بنائیے اور اس سے نبض کے دباؤ کا کثیریہ معلوم کیجیے۔
- جماعت کے ہر طالب علم کی اونچائی کا اندراج کیجیے۔اس اندراج کی جماعت بندی کیجیے۔اونچائی کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

اسے ذہن میں رکھیں۔

ہم نے مرکزی رجحان کا میانیہ، وسطانیہ اورکثیریہ کی پیمائش کا مطالعہ کیا۔ مرکزی رجحان کی کون سی پیمائش منتخب کرنا، اسے منتخب کرنے کے مقصد سے ہمیں واضح طور پر معلوم ہونا بہت ضروری ہے۔

فرض کیجیے، ایک اسکول میں دسویں جماعت کی پانچ فریقوں میں سے کون سی فریق داخلہ امتحان میں زیادہ کامیاب ہے، اسے طے کرتے وقت اِن پانچ فریقوں کے داخلی امتحان میں مارکس کا 'میانیہ' معلوم کرنا ہوگا۔

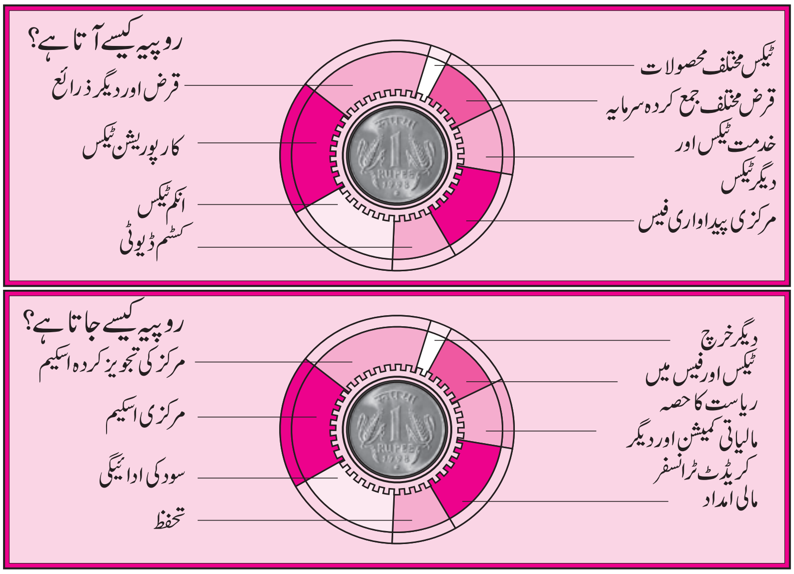
کسی جماعت میں لڑکوں کا امتحان میں حاصل کردہ مارکس کی بنیاد پر دو گروہ بنانا ہو تو اس جماعت کے لڑکوں کے حاصل کردہ مارکس کا 'وسطانیہ' منتخب کرنا ہوگا۔

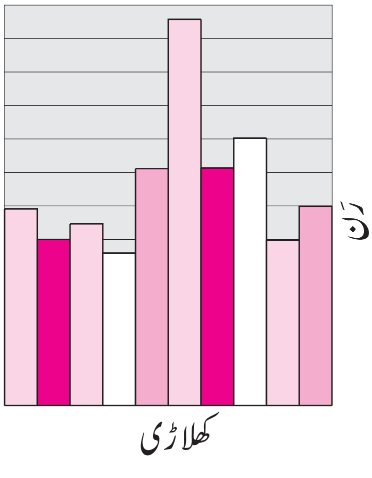
کھریا بنانے والے کسی بچت گٹ کو یہ معلوم کرنا ہو کہ کس رنگ کے کھریے کی سب سے زیادہ مانگ ہے، تو اسے مرکزی رجحان کے 'کثیریہ' کی ضرورت پیش آئے گی۔

شماریاتی معطیات کا اشکالی اظہار (Pictorial representation of statistical data)

شماریاتی معطیات کا میانیہ، وسطانیہ اورکثیریہ کی مدد سے یا معطیات کا تجزیہ کرکے اس کا استعمال بعض مخصوص نتائج حاصل کرنے کے لیے کرتے ہیں۔

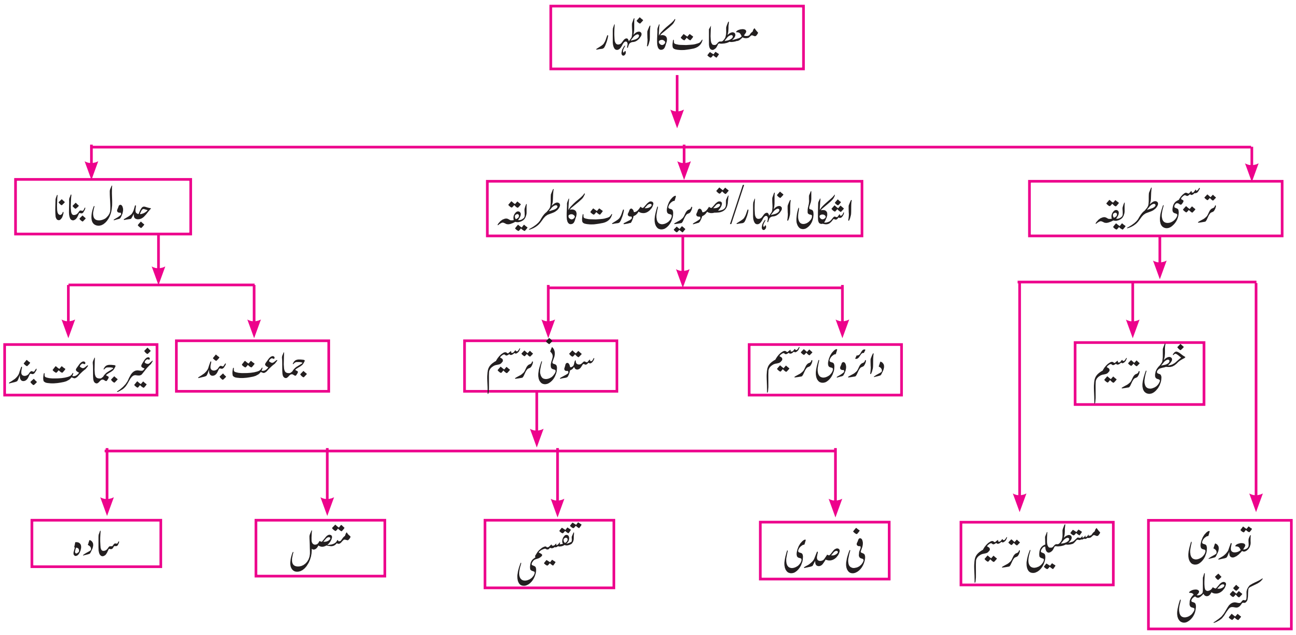
شماریاتی معطیات مختصر صورت میں پیش کرنے کا ایک طریقہ ہمیں معلوم ہے کہ جدول کی صورت میں معطیات کو ترتیب دینا ہے۔ لیکن جدول کی صورت میں ہونے کی وجہ سے بعض باتیں ہمیں فوراً سمجھ میں نہیں آتیں۔ عام انسانوں کو اسے سمجھنے کے لیے، یعنی تمام عام لوگوں کی توجہ معطیات کی اہم باتوں کی طرف مبذول کرانے کے لیے، کیا اس معلومات کا اظہار مختلف طریقوں سے کیا جاسکتا ہے؟ اس سوال پر ہم غور کریں گے۔ مثلاً مالی بجٹ کے بارے میں، کھیل کی معلومات وغیرہ۔





معطیات کی پیش کش (Presentation of Data)

تصویری صورت اور ترسیمی صورت میں اظہار سے معطیات کا مطلب سمجھنے کے لیے مزید توجہ مبذول کرنے والی قسمیں ہیں۔ معطیات کے اظہار کے مختلف طریقوں کو دِکھانے والا شجری خاکہ ذیل میں دِکھایا گیا ہے۔



گزشتہ جماعتوں میں ہم نے اِن میں سے چند طریقوں اور ترسیموں کا مطالعہ کیا ہے۔ اب ہم مستطیلی ترسیم، تعددی کثیر ضلعی اور دائروی ترسیم کی مدد سے معطیات کا اظہار کس طرح کرتے ہیں، اس کا مطالعہ کریں گے۔

فلورینس نائیٹنگیل (Florence Nightingale) (1820-1910) یہ عظیم خاتون بہترین اور بامقصد عظیم کے طور پر مشہور ہے۔ کریمیائی جنگ میں زخمی فوجیوں کی بے لوث خدمت کرکے اس نے کئی فوجیوں کی جان بچائی۔ علمِ اعداد و شمار (شماریات) میں بھی فلورینس نائیٹنگیل نے بنیادی کام کیا ہے۔ کئی فوجیوں کی حالت، ان پر کیا جانے والا علاج اور اس کا استعمال، ان تمام کا ٹھیک ٹھیک طور پر اندراج کرکے، اس نے بہت اہم نتیجہ اخذ کیا۔ فوجیوں کی اموات کا زیادہ سبب انھوں نے ان کے زخم سے زیادہ ٹائیفائڈ، کالرا جیسی بیماریوں کو مانا۔ اس کی وجہ اطراف کے ماحول کی گندگی، پینے کے آلودہ پانی، مریضوں کا بھیڑ بھاڑ میں رہنا تھا۔ یہ وجوہات فوراً دھیان میں آجائیں اس لیے فلورینس نے پائے چارٹ بنایا۔ مناسب علاج اور صفائی کے اُصول کو اپنا کر اس نے فوجیوں کی اموات کی شرح کو بہت کم کیا۔ شہروں کو صحت مند رکھنے کے لیے، ٹھیک طور پر فضلات کی نکاسی کرنے والے ڈرینیج اور پینے کے لیے صاف پانی ضروری ہے۔ اسے نگر پالیکاؤں نے منظور کیا ہے۔ کئی نگرانیوں اور مشاہدوں کے ذریعے کیے گئے بہترین اندراجات، شماریات کی مدد سے بھروسہ مند نتیجہ اخذ کرنے میں مدد دیتا ہے۔ یہ سب اس خاتون کے کاموں سے سمجھ میں آتا ہے۔

آ یئے، سمجھ لیں۔

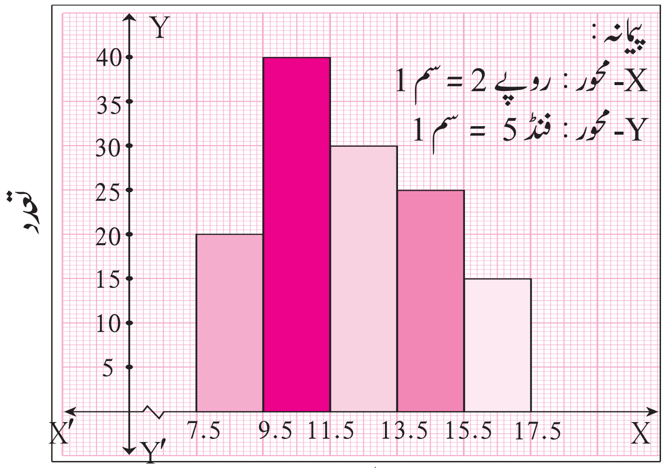
مستطیلی ترسیم (Histogram): مستطیلی ترسیم اور اسے بنانے کا طریقہ ہم ایک مثال سے سمجھیں گے۔

مثال : ذیل کی جدول میں مختلف کمپنیوں کے میچول فنڈ کی ایک یونٹ کی نقد جائیداد کی قیمت (Net asset value) دی ہوئی ہے۔
اس کی مدد سے مستطیلی ترسیم بنائیے۔

نقد جائیداد کی قیمت (روپے)(NAV)	8-9	10-11	12-13	14-15	16-17
میچول فنڈ کی تعداد	20	40	30	25	15

حل : اوپر دی ہوئی جدول میں جماعتیں مسلسل نہیں ہیں۔ان کی سب سے پہلے مسلسل جماعتیں بنائیں گے۔

مسلسل کی ہوئی جماعت	7.5 - 9.5	9.5 - 11.5	11.5 - 13.5	13.5 - 15.5	15.5 - 17.5
تعدد	20	40	30	25	15



شکل 6.1

مستطیلی ترسیم بنانے کا عملی کام

(1) جماعت مسلسل نہ ہو تو جماعتوں کو مسلسل بنائیے۔ایسی جماعتوں کو توسیع شدہ وقفہ جماعت (extended class intervals) کہتے ہیں۔

(2) توسیع جماعتوں کو X - محور پر مناسب پیمانہ لے کر دکھائیے۔

(3) Y - محور پر مناسب پیمانہ لے کر تعدد کو دِکھائیے۔

(4) X - محور پر ہر توسیع جماعت کا قاعدہ لے کر اس پر مستطیل بنائیے۔ مستطیل کی اونچائی نظیری تعدد کے مطابق لیجیے۔

دھیان دیجیے۔

X - محور پر مبدا اور پہلی جماعت کے درمیان ’ ‘، ایسا نشان ہے۔(اس نشان کو محور کا سکڑنا krink mark کہتے ہیں)اس کا مطلب ہے مبدا سے پہلی جماعت تک کوئی بھی مشاہدہ نہیں ہوا۔اس لیے X - محور کو تہہ کاری کے جیسا نشان ہے۔ضرورت پڑنے پر Y - محور پر بھی یہ نشان استعمال کر سکتے ہیں۔اس کی وجہ سے مناسب شکل کی ترسیم بنائی جاسکتی ہے۔

مشقی سیٹ 6.4

1. ذیل کی معطیات کو مستطیلی ترسیم کے ذریعے دِکھایئے۔

طلبہ کی اونچائی (سینٹی میٹر)	135-140	140-145	145-150	150-155
طلبہ کی تعداد	4	12	16	8

2. ذیل کی جدول میں جوار کی فی ایکڑ پیداوار دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے مستطیلی ترسیم بنایئے۔

فی ایکڑ پیداوار (کوئنٹل)	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11
کسانوں کی تعداد	30	50	55	40	20

3. ذیل کی جدول میں 210 خاندانوں کی سالانہ سرمایہ کاری دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے مستطیلی ترسیم بنایئے۔

سرمایہ کاری (ہزار روپے)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
خاندانوں کی تعداد	30	50	60	55	15

4. ذیل کی جدول میں طلبہ کا امتحان کی تیاری کے لیے دیا ہوا وقت دِکھایا گیا ہے۔اس کی مدد سے مستطیلی ترسیم بنایئے۔

وقت (منٹ)	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160
طلبہ کی تعداد	14	20	24	22	16

آیئے، سمجھ لیں۔

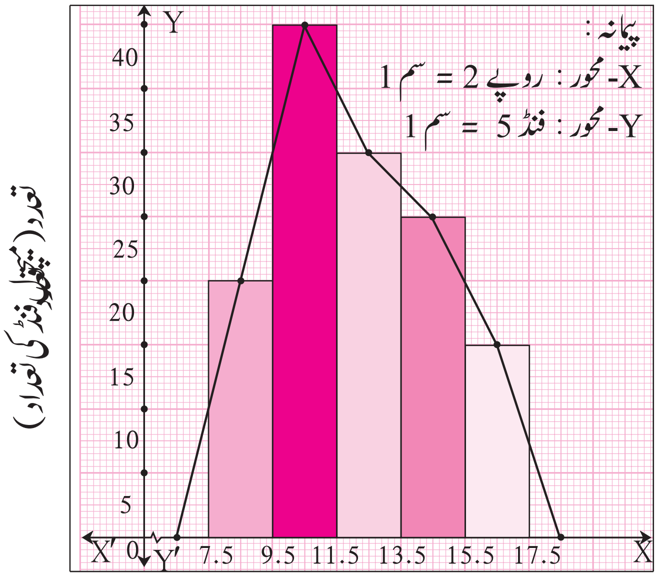
تعددی کثیر ضلعی (Frequency polygon)

تعددی جدول میں معلومات (معطیات) مختلف طرح سے دِکھائی جاتی ہے۔ہم مستطیلی ترسیم کا مطالعہ کر چکے ہیں۔دوسری قسم ’تعددی کثیر ضلعی‘ ہے۔

تعددی کثیر ضلعی بنانے کے لیے دو طریقوں کا مطالعہ کریں گے۔

(1) مستطیلی ترسیم کی مدد سے (2) مستطیلی ترسیم استعمال کیے بغیر

(1) مستطیلی ترسیم کی مدد سے تعددی کثیر ضلعی بنانے کا طریقہ سمجھنے کے لیے ہم شکل 6.1 میں دِکھائے ہوئے طریقے سے مستطیلی ترسیم کا ہی استعمال کریں گے۔



جماعت (نقد سرمایہ قیمت)

شکل 6.2

1. مستطیلی ترسیم میں ہر مستطیل کے اوپری حصے کا وسطی نقطہ لیجیے۔

2. پہلے مستطیل سے قبل صفر اونچائی کا مستطیل ہے۔ ایسا فرض کر کے اس کا وسطی نقطہ لیجیے۔ اسی طرح آخری مستطیل کے بعد ایک صفر اونچائی کا مستطیل فرض کر کے اس کا بھی وسطی نقطہ لیجیے۔ یہ نقاط X - محور پر ہی ہیں۔

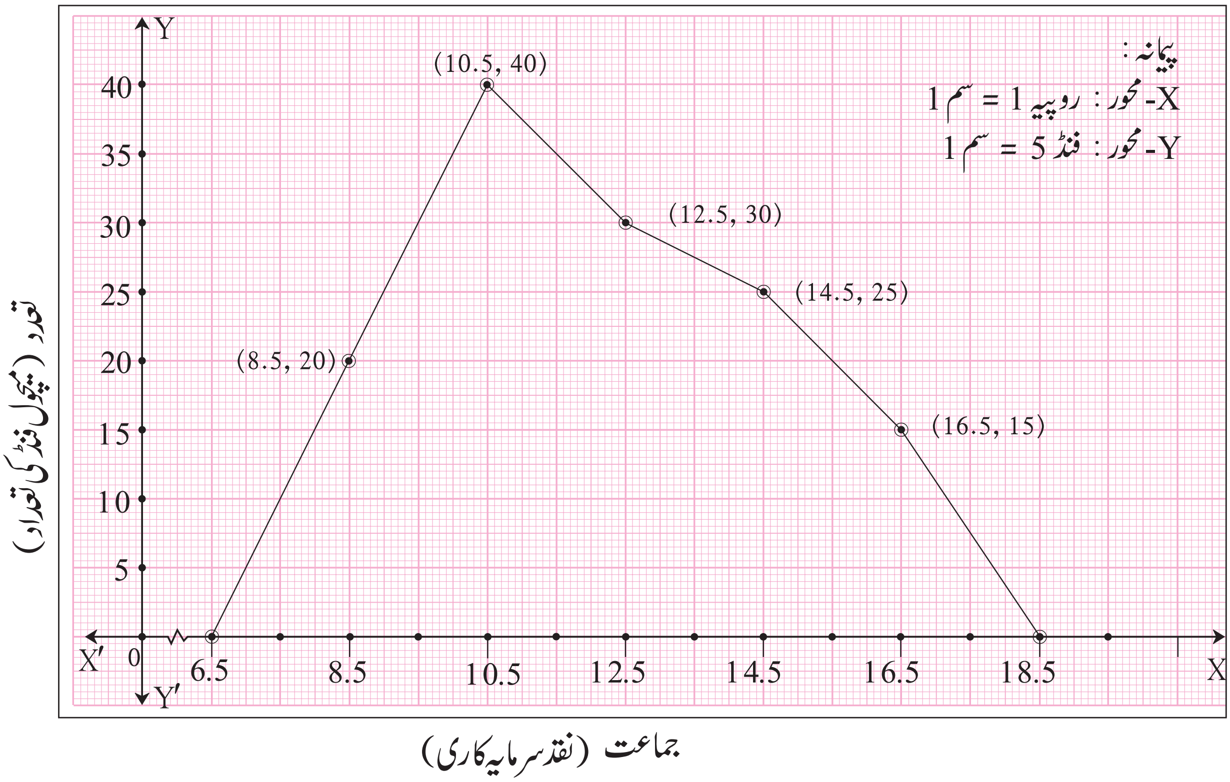
3. تمام وسطی نقاط کو ترتیب سے مستقیم خط سے جوڑیے۔

اس طرح بننے والی بند شکل یعنی تعددی کثیر ضلعی ہے۔

(2) بغیر مستطیلی ترسیم بنائے، تعددی کثیر ضلعی بنانے کے لیے نقاط کے محددین کس طرح طے کرتے ہیں، اسے ذیل کی جدول سے سمجھ لیں۔ یہاں نقاط کے محددین ؛ (تعدد , وسط جماعت) کے مطابق لکھے گئے ہیں۔

جماعت	مسلسل جماعتیں	وسط جماعت	تعدد	نقاط کے محددین
6 - 7	5.5 - 7.5	6.5	0	(6.5, 0)
8 - 9	7.5 - 9.5	8.5	20	(8.5, 20)
10 - 11	9.5 - 11.5	10.5	40	(10.5, 40)
12 - 13	11.5 - 13.5	12.5	30	(12.5, 30)
14 - 15	13.5 - 15.5	14.5	25	(14.5, 25)
16 - 17	15.5 - 17.5	16.5	15	(16.5, 15)
18 - 19	17.5 - 19.5	18.5	0	(18.5, 0)

جدول میں پانچویں ستون میں دیے ہوئے محددین سے نظیری نقاط ترسیمی کاغذ پر مرتسم کرتے ہیں۔ انھیں ترتیب سے جوڑیں تو تعددی کثیر ضلعی حاصل ہوتا ہے۔ یہ کثیر ضلعی شکل 6.3 میں دِکھائی گئی ہے۔ اس کا مشاہدہ کیجیے۔



شکل 6.3

حل کردہ مثالیں

مثال (1) متصلہ شکل میں دِکھائے ہوئے تعددی کثیر ضلعی کی مدد سے ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔

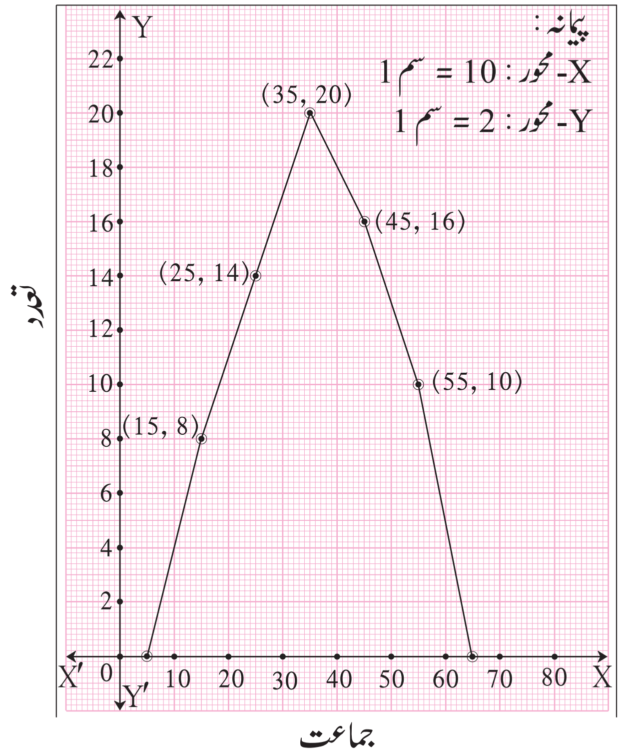
(1) جماعت 60-50 کا تعدد لکھیے۔

(2) جس جماعت کا تعدد 14 ہے، اس جماعت کو لکھیے۔

(3) وسط جماعت 55 والی جماعت لکھیے۔

(4) سب سے زیادہ تعدد والی جماعت لکھیے۔

(5) صفر تعدد والی جماعتوں کو لکھیے۔



شکل 6.4

حل :

(1) وسط جماعت X- محور پر دِکھایا گیا ہے۔ جماعت 50-60 کا وسط جماعت 55 ہے۔ ترسیم میں 55 کے نشان سے Y - محور پر عمود کھینچیں تو وہ 10 عدد کو ظاہر کرتا ہے۔ لہٰذا جماعت 50-60 کا تعدد 10 ہے۔

(2) Y- محور پر تعدد دِکھایا گیا ہے۔ Y - محور پر 14 کے عدد کا نشان دیکھیے۔ اس نقطہ سے X - محور پر عمود کھینچیں تو وہ جماعت 20-30 کے وسط جماعت پر X - محور سے ملتا ہے۔ اس لیے 14 تعدد والی جماعت 20-30 ہے۔

(3) جماعت 50-60 کا وسط جماعت 55 ہے۔

(4) Y- محور پر تعدد دِکھایا گیا ہے۔ تعددی کثیر ضلعی کی سب سے بڑی قیمت 20 ہے۔ اس سے متعلقہ x محدد 35 ہے جو جماعت 30-40 کا وسط جماعت ہے۔ لہٰذا جماعت 30-40 کا تعدد سب سے زیادہ ہے۔

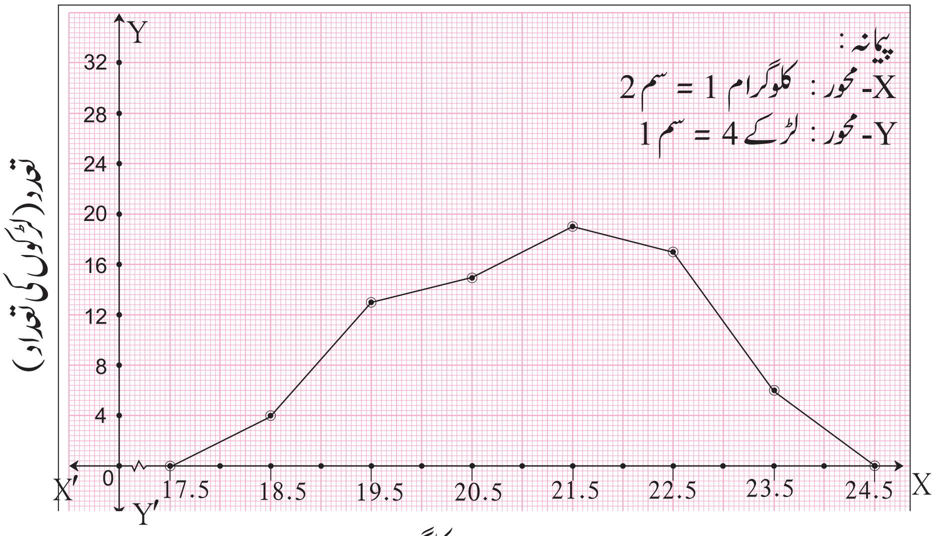
(5) صفر تعدد والی جماعتیں 0-10 اور 60-70 ہیں۔

مثال (2) ذیل کی جدول میں لڑکوں کا وزن اور اس کی تعداد دی ہوئی ہے۔ اس معطیات کی مدد سے تعددی کثیر ضلعی بنائیے۔

لڑکوں کا وزن (کلوگرام)	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
لڑکوں کی تعداد	4	13	15	19	17	6

تعددی کثیر ضلعی بنانے کے لیے ضروری نقاط کے ساتھ ذیل کی جدول بنا کر تعددی کثیر ضلعی بنائیں گے۔

جماعت	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
وسط جماعت	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5
تعدد	4	13	15	19	17	6
نقاط کے محددین	(18.5, 4)	(19.5, 13)	(20.5, 15)	(21.5, 19)	(22.5, 17)	(23.5, 6)

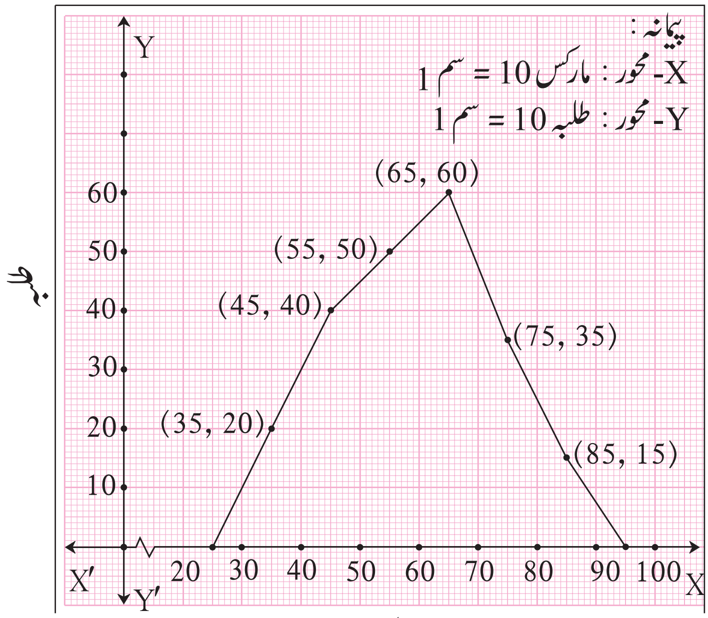


جماعت (وزن - کلوگرام)

شکل 6.5

مشقی سیٹ 6.5

.1 اوپر دی ہوئی تعددی کثیر ضلعی کا مشاہدہ کرکے ذیل کے سوالوں کے جواب لکھیے۔



شکل 6.6

(i) زیادہ سے زیادہ طلبہ کس جماعت میں ہیں؟

(ii) صفر تعدد والی جماعت لکھیے۔

(iii) 50 طلبہ کی تعداد والی جماعت کا وسط جماعت کتنا ہے؟

(iv) وسط جماعت 85 والی جماعت کی نچلی اور اوپری حد لکھیے۔

(v) 80-90 مارکس حاصل کرنے والے طلبہ کتنے ہیں؟

.2 ذیل کی معطیات کے لیے تعددی کثیر ضلعی بنائیے۔

بجلی بل (روپے)	0-200	200-400	400-600	600-800	800-1000
خاندان	240	300	450	350	160

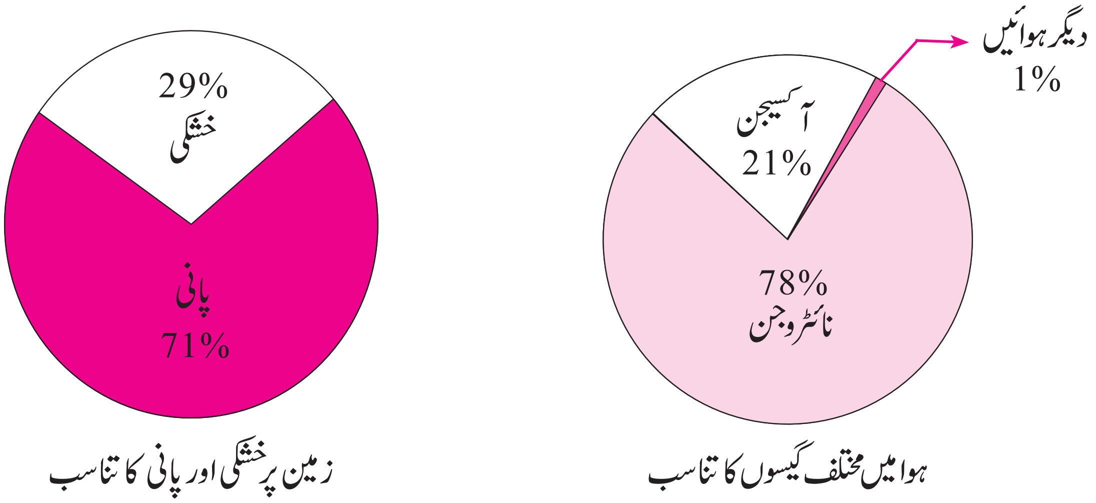
.3 ایک امتحان کے نتیجے سے متعلق معطیات ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہے۔اس معطیات کے لیے تعددی کثیر ضلعی بنائیے۔

نتیجہ (فی صد)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
طلبہ کی تعداد	7	33	45	65	47	18	5

آیئے، ذرا یاد کریں۔

دائروی ترسیم (Pie diagram)

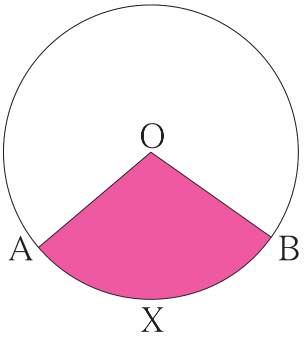
گزشتہ جماعت میں ہم نے جغرافیہ اور سائنس مضامین میں ذیل کی ترسیم دیکھی ہے۔ ایسی ترسیمات کو دائروی ترسیم یا پائے ڈائیگرام کہتے ہیں۔



شکل 6.7

دائروی ترسیم میں شماریاتی معطیات مکمل دائرے میں دِکھائے جاتے ہیں۔

معطیات میں مختلف اجزا تناسب میں دائروی تراشوں کے ذریعے دِکھائے جاتے ہیں۔



شکل 6.8

شکل 6.8 میں دائرے کا مرکز O ہے۔ OA اور OB دائرے کے نصف قطر ہیں۔

$\angle AOB$ مرکزی زاویہ ہے۔

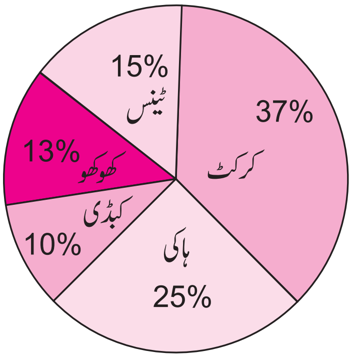
O − AXB یہ خط کشیدہ علاقہ، دائرہ کا تراشہ (sector of a circle) ہے۔

آیئے، سمجھ لیں۔

دائروی ترسیم پڑھنا (Reading of Pie diagram)

دائروی ترسیم کی مدد سے بیک نظر معلومات کس طرح حاصل ہوتی ہے، یہ ذیل کی مثال کی مدد سے سمجھ لیجیے۔

دسویں جماعت میں 120 لڑکوں کو 'تمھارا پسندیدہ کھیل کون سا ہے؟' سوال پوچھا گیا۔ حاصل ہونے والی معلومات کو دائروی ترسیم سے دِکھایا گیا۔ کون سا کھیل سب سے زیادہ پسندیدہ ہے؟ کتنے فی صد لڑکے کھوکھو پسند کرتے ہیں؟ کبڈّی پسند کرنے والوں کا کتنا فی صد ہے؟ ایسے سوالوں کے جواب ہمیں ایک نظر میں دائروی ترسیم سے مل جاتے ہیں۔

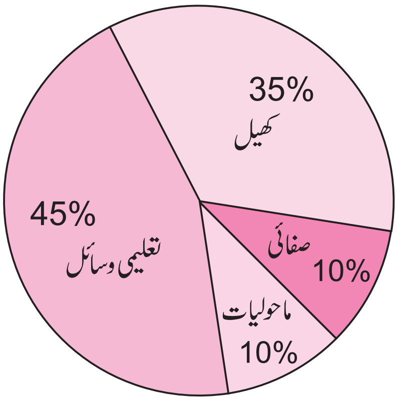


شکل 6.9

مزید ایک دائروی ترسیم دیکھیے۔

متصلہ شکل میں دائروی ترسیم، ایک اسکول کے سالانہ مالیاتی کو ظاہر کرتی ہے۔ اس دائروی ترسیم سے ہمیں یہ سمجھ میں آتا ہے کہ ،

- 45% رقم تعلیمی وسائل کے لیے محفوظ کی گئی ہے۔
- 35% رقم کھیل کے سامان ولوازمات کے لیے دی گئی ہے۔
- 10% رقم صاف صفائی کے سامان کے لیے رکھی گئی ہے۔
- 10% رقم ماحولیات کے تحفظ کے لیے رکھی گئی ہے۔



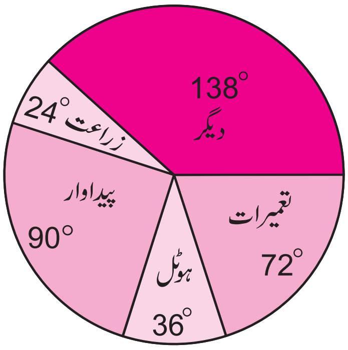
شکل 6.10

اب ہم دائروی ترسیم کی مزید معلومات حاصل کریں گے۔

بسا اوقات مختلف قسم کی مختلف معلومات دائروی ترسیم کے ذریعے دی ہوئی ہوتی ہے، اسے ہم اخبارات میں دیکھتے ہیں، جیسے سالانہ بجٹ، اولمپک مقابلوں میں مختلف ممالک کی کارکردگی، ملک میں روپیہ کیسے آتا ہے؟ اور کیسے جاتا ہے؟ وغیرہ۔
اس کے لیے ہم معلومات کس طرح تلاش کریں، یہ مثالوں کے ذریعے سمجھیں گے۔

تشریحی مثالیں

ایک سروے میں حاصل کردہ ہنرمند افراد کی جماعت بندی ذیل کے دائروی ترسیم میں دِکھائی گئی ہے۔ اگر پیداواری شعبے میں کام کرنے والے افراد 4500 ہوں تو ذیل کے سوالوں کے جواب دیجیے۔



شکل 6.11

(i) تمام شعبوں میں کل ہنرمند افراد کتنے ہیں؟

(ii) تعمیراتی شعبے میں ہنرمند افراد کی تعداد کتنی ہے؟

(iii) زراعت کے شعبے میں ہنرمند افراد کتنے ہیں؟

(iv) پیداواری اور تعمیراتی شعبے میں ہنرمند افراد کی تعداد کے درمیان کتنا فرق ہے؟

حل : (i) فرض کیجیے، تمام شعبوں میں ہنرمند افراد کی کل تعداد x ہے۔

$\therefore$ x افراد کے لیے مرکزی زاویہ $= 360^\circ$

پیداواری شعبے میں ہنرمند افراد کے لیے مرکزی زاویہ $= \dfrac{\text{پیداواری شعبے میں ہنرمند افراد}}{\text{کل ہنرمند افراد}} \times 360$

$$90 = \frac{4500}{x} \times 360$$

$\therefore$ $x = 18000$

$\therefore$ تمام شعبوں میں ہنرمند افراد کی کل تعداد $= 18000$

(ii) تعمیراتی شعبے کے لیے مرکزی زاویہ 72° دیا ہوا ہے۔

$$72 = \frac{\text{تعمیراتی شعبے میں ہنرمند افراد}}{18000} \times 360$$

تعمیراتی شعبے کے ہنرمند افراد $= \dfrac{72 \times 18000}{360} = 3600$

(iii) زراعت کے شعبے کے لیے مرکزی زاویہ 24° ہے۔

$\therefore$ $24 = \dfrac{\text{زراعت کے شعبے میں ہنرمند افراد}}{18000} \times 360$

$\therefore$ زراعت کے شعبے میں ہنرمند افراد $= \dfrac{24 \times 18000}{360}$

$\therefore$ زراعت کے شعبے کے ہنرمند افراد $= \dfrac{24 \times 18000}{360} = 1200$

(iv) $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$ = پیداواری اور تعمیراتی شعبہ کے لیے مرکزی زاویوں میں فرق

$$\therefore \quad \text{مرکزی زاویوں میں فرق} = \frac{\text{دونوں شعبوں میں افراد کی تعداد کا فرق}}{\text{کل ہنرمند افراد}} \times 360$$

$$18 = \frac{\text{دونوں شعبوں میں افراد کی تعداد کا فرق}}{18000} \times 360$$

$$\therefore \quad \text{پیداواری اور تعمیراتی شعبوں میں ہنرمند افراد کی تعداد میں فرق} = \frac{18 \times 18000}{360}$$

$$= 900$$

اسے ذہن میں رکھیں۔

- معطیات میں موجود ہر مَد کو ایک تراشے کے ذریعے دِکھایا جاتا ہے۔
- تراشے کے مرکزی زاویے کی پیمائش، اس مخصوص مَد کے تناسب میں ہوتی ہے۔
- $$\text{مرکزی زاویے کی پیمائش } (\theta) = \frac{\text{منسلک مد میں موجود تعداد}}{\text{تمام مدوں میں موجود کل تعداد}} \times 360$$
- مناسب نصف قطر کا دائرہ بنا کر مدوں کی تعداد کے مطابق مرکزی زاویے معلوم کرتے ہیں اور مرکزی زاویوں کے مطابق دائرے کو تراشوں میں تقسیم کرنا چاہیے۔

آیئے، سمجھ لیں۔

دائروی ترسیم بنانا (To draw Pie diagram)

1. دائروی ترسیم بناتے وقت پورے دائرے کی تقسیم تناسب کے مطابق تراشوں میں کرتے ہیں۔
2. ہر مَد سے متعلق تراشے کے مرکزی زاویے کی پیمائش ذیل کے ضابطے سے معلوم کرتے ہیں۔

$$\text{تراشے کے مرکزی زاویے کی پیمائش } (\theta) = \frac{\text{اُس مَد میں تعداد}}{\text{تمام مدوں میں موجود کل تعداد}} \times 360$$

مناسب نصف قطر کا دائرہ کھینچ کر، معطیات میں مَدوں کی جتنی تعداد ہے اتنے ہی تراشوں میں دائرے کو تقسیم کرتے ہیں۔

دائروی ترسیم بنانے کا عمل ذیل کی مثال سے سمجھ لیجیے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) دو پہیہ سواریوں کی ایک دکان میں دو پہیہ سواریوں کی خریدی کے لیے رنگوں کی پسند ذیل کے مطابق تھی۔ اس معلومات سے دائروی ترسیم دِکھانے کے لیے ہر مَد کے تراشے کے مرکزی زاویے کی پیمائش طے کیجیے۔

رنگ	دو پہیہ سواریوں کا رنگ	تراشے کا مرکزی زاویہ
سفید	10	$\frac{10}{36} \times 360 = 100^\circ$
سیاہ	9	$\frac{9}{36} \times 360 = 90^\circ$
نیلا	6	60°
سرمئی	7	70°
سرخ	4	40°
کل	36	360°

حل: دو پہیہ سواریوں کی کل مانگ 36 ہے۔ ان میں سے 10 دو پہیہ سواریاں سفید ہیں۔

∴ سفید دو پہیہ سواریوں کو دِکھانے والے تراشے کے مرکزی زاویے کی پیمائش

$$= \frac{\text{سفید دو پہیہ سواریوں کی تعداد}}{\text{دو پہیہ سواریوں کی کل تعداد}} \times 360$$

$$= \frac{10}{36} \times 360 = 100$$

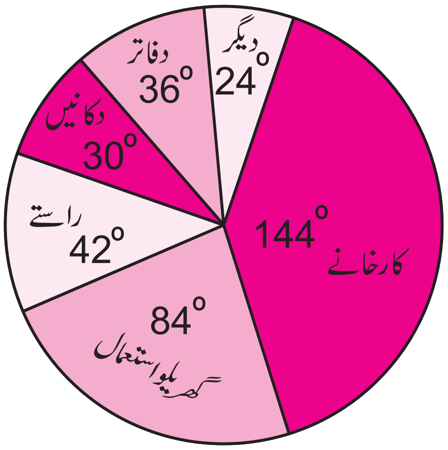
اس طرح دیگر رنگوں کی دو پہیہ سواریوں کے لیے نظیری تراشوں کے مرکزی زاویوں کی پیمائش معلوم کرکے جدول میں دِکھائی گئی ہے۔

مثال (2) ایک گاؤں میں مختلف مقامات پر روزانہ ہونے والی بجلی کی بہم رسانی ذیل کی جدول میں دِکھائی گئی ہے۔ اس معلومات کا دائروی ترسیم بنائیے۔

مقامات	کارخانے	گھریلو استعمال	راستے	دکانیں	دفاتر	دیگر
بجلی کی بہم رسانی (ہزار یونٹ)	24	14	7	5	6	4

حل: کل بجلی کی بہم رسانی 60 ہزار یونٹ ہے۔ اس کی مدد سے مرکزی زاویوں کی پیمائش معلوم کرکے جدول میں دِکھائیں گے۔

بجلی کی بہم رسانی	یونٹ	مرکزی زاویوں کی پیمائش
کارخانے	24	$\frac{24}{60} \times 360 = 144^\circ$
گھریلو استعمال	14	$\frac{14}{60} \times 360 = 84^\circ$
راستے	7	$\frac{7}{60} \times 360 = 42^\circ$
دکانیں	5	$\frac{5}{60} \times 360 = 30^\circ$
دفاتر	6	$\frac{6}{60} \times 360 = 36^\circ$
دیگر	4	$\frac{4}{60} \times 360 = 24^\circ$
کل	60	360°



شکل 6.12

دائروی ترسیم بنانے کے مراحل :

(1) پہلی شکل میں دِکھائے ہوئے کے مطابق دائرہ بنا کر ایک نصف قطر بنایا۔ بعد میں جدول میں معلوم کیے ہوئے مرکزی زاویوں کی پیائشوں کے تراشے ایک کے بعد ایک $(144^\circ, 84^\circ, 42^\circ, 30^\circ, 36^\circ, 24^\circ \rightarrow)$ اس طرح گھڑی کی سوئی کے غیر ساعت دار سمت میں بنایا۔ (تراشوں کو ایک ہی سمت میں ایک کے بعد ایک بناتے وقت اگر اُن کی ترتیب تبدیل بھی ہوجائے گی تو کوئی ہرج نہیں۔)

(2) ہر تراشے میں متعلق مد کا اندراج کریں۔

عملی کام :

ایک خاندان کے مختلف مدوں پر ہونے والا ماہانہ خرچ ذیل میں دیا ہوا ہے۔ اس کی مدد سے مرکزی زاویوں کی پیائش معلوم کر کے دائروی ترسیم بنائیے۔

مختلف مدیں	فی صدی اخراجات	مرکزی زاویوں کی پیائش
اناج	40	$\frac{40}{100} \times 360 = \square$
کپڑے	20	$\square \times \square = \square$
گھر کا کرایہ	15	$\square \times \square = \square$
تعلیم	20	$\square \times \square = \square$
دیگر اخراجات	05	$\square \times \square = \square$
کل	100	360°

مشقی سیٹ 6.6

1. ذیل کی جدول میں خون کا عطیہ کے ایک کیمپ میں مختلف عمروں کی جماعت میں سے 200 افراد نے خون کا عطیہ دیا۔ اس کی مدد سے دائروی ترسیم بنائیے۔

عمروں کی جماعت (سال)	20-25	25-30	30-35	35-40
افراد کی تعداد	80	60	35	25

2. ذیل کی جدول میں ایک طالب علم نے مختلف مضامین میں 100 میں سے حاصل کردہ مارکس دیے ہوئے ہیں۔ اس معلومات کو دائروی ترسیم کے ذریعے دِکھائیے۔

مضمون	انگریزی	اُردو	سائنس	ریاضی	سماجی علوم	ہندی
مارکس	50	70	80	90	60	50

.3 شجرکاری مہم کے تحت ایک اسکول میں مختلف جماعتوں کے طلبہ کے ذریعے لگائے گئے درختوں کی تعداد ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہے۔ یہ معلومات دائروی ترسیم کے ذریعے دِکھائیے۔

جماعت	پانچویں	چھٹی	ساتویں	آٹھویں	نویں	دسویں
درختوں کی تعداد	40	50	75	50	70	75

.4 ایک پھل فروش کے پاس مختلف پھلوں کی مانگ فی صدی میں ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہے۔ اس معلومات کی دائروی ترسیم بنائیے۔

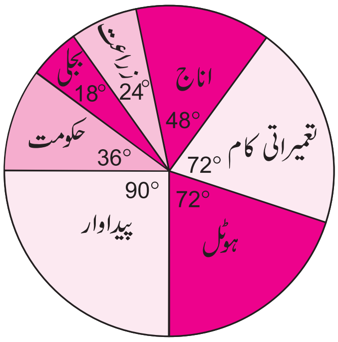
پھل	آم	موسمبی	سیب	چیکو	سنترے
مانگ کا فی صد	30	15	25	20	10

.5 ایک گاؤں کے مختلف پیشہ وروں کا تناسب ظاہر کرنے والا دائروی ترسیم 6.13 میں دیا ہوا ہے۔ اس کی مدد سے درج ذیل سوالوں کے جواب لکھیے۔

(1) کل پیشہ وروں کی تعداد 10000 ہو تو تعمیراتی شعبے میں کتنے افراد ہیں؟

(2) سرکاری شعبہ میں کتنے افراد کام کرتے ہیں؟

(3) پیداواری شعبہ میں کتنے فی صد افراد ہیں؟



شکل 6.13

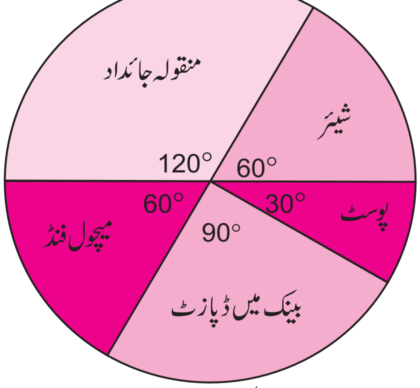
.6 ایک خاندان کی سالانہ سرمایہ کاری کی دائروی ترسیم متصلہ شکل میں دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے ذیل کے سوالوں کے جواب دیجیے۔

(1) شیئر میں سرمایہ کاری کی ہوئی رقم 2000 روپے ہو تو کل سرمایہ کاری کتنی ہے؟

(2) بینک میں امانت کی ہوئی رقم کتنی ہے؟

(3) میچول فنڈ کی بہ نسبت منقولہ جائداد میں کتنی رقم زائد سرمایہ کاری کی گئی ہے؟

(4) پوسٹ میں سرمایہ کاری کتنی ہے؟



شکل 6.14

مجموعۂ سوالات 6

.1 ذیل میں دیے ہوئے سوالوں کے کثیر متبادل جواب دیے ہوئے ہیں۔ اُن میں سے صحیح متبادل منتخب کیجیے۔

(1) مختلف خون کے گروپ کے افراد کا خون کے گروپ کے مطابق جماعت بندی کرکے دائروی ترسیم میں دِکھانا ہے۔ O - خون کے گروپ والے افراد 40% ہوں تو O - خون کے گروپ والے افراد کے لیے دائروی ترسیم میں مرکزی زاویہ کتنا لیں گے؟

(A) 114° (B) 140° (C) 104° (D) 144°

(2) ایک عمارت کے تعمیراتی کام کے مختلف اخراجات دائروی ترسیم کے ذریعے دِکھائے جائیں تو سیمنٹ کا خرچ °75 کے مرکزی زاویے سے دِکھایا گیا ہے۔ سیمنٹ کا خرچ 45,000 روپے ہو تو عمارت کی تعمیر کا کل خرچ کتنے روپے ہیں؟

(A) 2,16,000 (B) 3,60,000 (C) 4,50,000 (D) 7,50,000

(3) جماعت بند تعددی جدول میں اجتماعی تعدد کا استعمال ....معلوم کرنے کے لیے ہوتا ہے۔

(A) میانیہ (B) وسطانیہ (C) کثیریہ (D) ان میں سے سب

(4) جماعت بند تعددی جدول میں معطیات کا میانیہ معلوم کرنے کے لیے ذیل کے ضابطے میں،

$$\overline{X} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times g$$

u_i = ...

(A) $\frac{x_i + A}{g}$ (B) $(x_i - A)$ (C) $\frac{x_i - A}{g}$ (D) $\frac{A - x_i}{g}$

(5)

فی لٹر طے کردہ فاصلہ (کلومیٹر)	12-14	14-16	16-18	18-20
کار کی تعداد	11	12	20	7

اوپر دی ہوئی معطیات کے لیے کار کا فی لٹر طے کردہ فاصلے کا وسطانیہ .... جماعت میں ہے۔

(A) 12-14 (B) 14-16 (C) 16-18 (D) 18-20

(6)

ہر طالب علم کے ذریعے لگائے گئے درخت	1-3	4-6	7-9	10-12
طلبہ کی تعداد	7	8	6	4

اوپر کی تعددی جدول میں معطیات کے لیے تعددی کثیرضلعی بنائیے۔ جماعت 6-4 میں طلبہ کو دِکھانے کے لیے نقطہ کے محددین ....

(A) (4, 8) 0 (B) (3, 5) (C) (5, 8) (D) (8, 4)

2. ایک مرتبہ انگور کے موسم میں باغبانوں کو حاصل ہونے والی پیداوار کی جماعت بند تعددی جدول ذیل میں دی ہوئی ہے۔ اس کی مدد سے پیداوار کا میانیہ معلوم کیجیے۔

پیداوار (ہزار روپے)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
باغبان	10	11	15	16	18	14

3. ذیل کی جماعت بند تعددی جدول میں کھیتی کے تالاب کے لیے ایک بینک کے ذریعے دیے گئے قرض ہیں تو بینک سے دی ہوئی رقم کا میانیہ معلوم کیجیے۔

قرض (ہزار روپے)	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
کھیتی کے تالاب کی تعداد	13	20	24	36	7

.4 ذیل میں ایک کارخانے کے 120 مزدوروں کے ایک ہفتے کی مزدوری جماعت بند تعددی تقسیمی جدول میں دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے مزدوروں کے ایک ہفتے کی مزدوری کا میانیہ معلوم کیجیے۔

ہفتہ واری مزدوری (روپے)	0-2000	2000-4000	4000-6000	6000-8000
مزدوروں کی تعداد	15	35	50	20

.5 ذیل کی جماعت بند تعددی جدول میں 50 سیلاب زدہ خاندانوں کو دی گئی امداد کی رقم دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے رقم کا میانیہ معلوم کیجیے۔

امداد کی رقم (ہزار روپے)	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
خاندانوں کی تعداد	7	13	20	6	4

.6 ذیل کی جماعت بند تعددی جدول میں عوامی بس خدمت کی 250 بسوں کا ایک دن میں طے کردہ فاصلہ دیا ہوا ہے۔اس کی مدد سے ایک دن میں طے شدہ فاصلے کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

فاصلہ (کلومیٹر)	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
بسوں کی تعداد	40	60	80	50	20

.7 ایک جنرل اسٹور میں مختلف اشیا کی قیمت اور اُن اشیا کی مانگ کی جماعت بند تعددی جدول دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے قیمتوں کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

قیمت (روپے)	20 سے کم	20-40	40-60	60-80	80-100
اشیا کی تعداد	140	100	80	60	20

.8 ذیل کی جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول میں ایک مٹھائی کی دکان میں مختلف اوزان کی مٹھائی کی مانگ دی ہوئی ہے۔اس کی مدد سے وزن کی مانگ کا کثیریہ معلوم کیجیے۔

مٹھائی کا وزن (گرام)	0-250	250-500	500-750	750-1000	1000-1250
گاہکوں کی تعداد	10	60	25	20	15

.9 ذیل کی تعددی جدول کے لیے مستطیلی ترسیم بنائیے۔

بجلی کا استعمال (یونٹ)	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170
خاندانوں کی تعداد	150	400	460	540	600	350

.10 ایک ہاتھ کرگھا کارخانے میں مزدوروں کو ساڑی بُننے کے لیے درکار دنوں اور مزدوروں کی تعداد کی جماعت بند تعددی جدول دی ہوئی ہے۔اس معطیات کے لیے تعددی کثیر ضلعی بنائیے۔

دن	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
مزدوروں کی تعداد	5	16	30	40	35	14

.11 ایک جماعت کے طلبہ کو سائنس کا تجربہ کرنے کے لیے درکار وقت کی جماعت بند تعددی تقسیم کی جدول دی ہوئی ہے۔اس معلومات کے لیے مستطیلی ترسیم بنا کر تعددی کثیر ضلعی بنائیے۔

تجربہ کے لیے درکار وقت (منٹ)	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32
طلبہ کی تعداد	8	16	22	18	14	12

.12 ذیل کی جماعت بند تعددی جدول کے لیے تعددی کثیر ضلعی بنائیے۔

خون کا عطیہ دینے والوں کی عمر (سال)	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
خون کا عطیہ دینے والوں کی تعداد	38	46	35	24	15	12

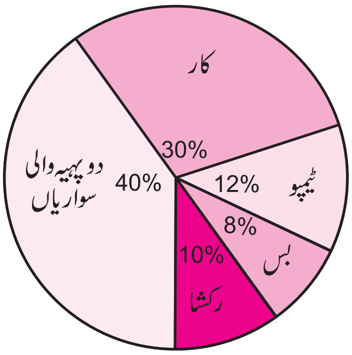
.13 ذیل کی جدول میں 150 گاؤں میں سالانہ بارش کے اوسط کا اندراج دیا ہوا ہے۔اس کے لیے تعددی کثیر ضلعی بنائیے۔

بارش کا اندراج (سم)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
گاؤں کی تعداد	14	12	36	48	40

.14 صبح 8 بجے سے 10 بجے کے درمیان ایک شہر کے ایک چوک کے سگنل سے گزرنے والی مختلف سواریوں کا فی صد دائروی ترسیم میں دیا ہوا ہے۔

(1) ہر قسم کی سواریوں کے لیے مرکزی زاویہ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

(2) دو پہیہ والی سواریوں کی تعداد 1200 ہو تو کل سواریوں کی تعداد معلوم کیجیے۔



شکل 6.15

.15 ذیل کی جدول میں صوتی آلودگی پیدا کرنے والے ذرائع دیے ہوئے ہیں۔اس کے لیے دائروی ترسیم بنائیے۔

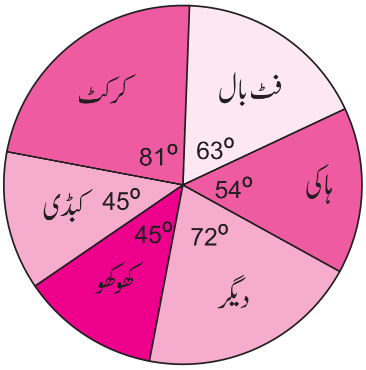
تعمیراتی کام	راہداری/رہگذر	ہوائی جہاز کی پرواز	صنعتی	ریلوے
10%	50%	9%	20%	11%

16. ایک سروے میں اسکول کے طلبہ کی مختلف کھیلوں سے متعلق دلچسپی ذیل کے دائروی ترسیم میں دِکھائی گئی ہے۔طلبہ کی کل تعداد 1000 ہو تو،

(1) کرکٹ پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد کتنی؟

(2) فٹ بال کتنے طلبہ پسند کرتے ہیں؟

(3) دیگر کھیلوں کو پسند کرنے والے طلبہ کی تعداد کتنی؟



شکل 6.16

17. ایک گاؤں میں صحت کے مرکز (دواخانے) میں 180 خواتین کی طبّی جانچ ہوئی۔اُن میں سے 50 خواتین کا ہیموگلوبن کم تھا۔ 10 خواتین کو موتیابند کی تکلیف تھی۔ 25 خواتین کو سانس کی تکلیف تھی۔ باقی ماندہ خواتین صحت مند تھیں۔اس معلومات کو دِکھانے والا دائروی ترسیم بنائیے۔

18. جنگل کی آبادکاری کے منصوبے میں ایک اسکول کے طلبہ نے 'یومِ ماحولیات' کے موقع پر 120 درخت لگائے۔اس کی معلومات ذیل کی جدول میں دی ہوئی ہے۔اس معلومات کو دِکھانے والا دائروی ترسیم بنائیے۔

نیم	گل مہر	ارجُن	دیودر	بانس	درختوں کے نام
26	22	24	28	20	درختوں کی تعداد

NJ25AM

جوابات کی فہرست

1. دو متغیروں کی خطی مساوات

مشقی سیٹ 1.1

2. (1) (2, 4)   (2) (3, 1)   (3) (6,1)   (4) (5, 2)
(5) (−1, 1)   (6) (1, 3)   (7) (3, 2)   (8) (7, 3)

مشقی سیٹ 1.2

1. (1)

x	3	−2	0
y	**0**	5	3
(x, y)	(3, 0)	**(−2, 5)**	(0, 3)

(2)

x	**4**	−1	0
y	0	**−5**	−4
(x, y)	**(4, 0)**	**(−1,−5)**	(0,−4)

2. (1) (5, 1)   (2) (4, 1)   (3) (3, −3)   (4) (−1, −5)   (5) (1, 2.5)   (6) (8, 4)

مشقی سیٹ 1.3

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \boxed{5} - \boxed{2} \times 4 = \boxed{15} - 8 = \boxed{7}$

2. (1) −18   (2) 21   (3) $-\frac{4}{3}$

3. (1) (2, −1)   (2) (−2, 4)   (3) (3, −2)   (4) (2, 6)   (5) (6, 5)   (6) $(\frac{5}{8}, \frac{1}{4})$

مشقی سیٹ 1.4

1. (1) $(\frac{1}{9}, 1)$ (2) (3, 2)   (3) $(\frac{5}{2}, -2)$ (4) (1, 1)

مشقی سیٹ 1.5

1. وہ اعداد 5 اور 2   2. $x = 12$, $y = 8$, رقبہ = 640 مربع اکائی, احاطہ = 112 اکائی

3. بیٹے کی عمر 15 سال، والد کی عمر 40 سال   4. $\frac{7}{18}$

5. A = 30 کلوگرام , B = 55 کلوگرام   6. 150 کلومیٹر

مجموعہ سوالات 1

1. (1) B (2) A (3) D (4) C (5) A

2.

x	−5	$\frac{3}{2}$
y	$-\frac{13}{6}$	0
(x, y)	$(-5, -\frac{13}{6})$	$(\frac{3}{2}, 0)$

3. (1) (3, 2) (2) (−2, −1) (3) (0, 5) (4) (2, 4) (5) (3, 1)

4. (1) 22 (2) −1 (3) 13

5. (1) $(-\frac{2}{3}, 2)$ (2) (1, 4) (3) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ (4) $(\frac{7}{11}, \frac{116}{33})$ (5) (2, 6)

6. (1) (6, −4) (2) $(-\frac{1}{4}, -1)$ (3) (1, 2) (4) (1, 1) (5) (2, 1)

7. (2) چائے کا نرخ 300 ₹ روپے فی کلوگرام
شکر کا نرخ 40 ₹ فی کلوگرام

(3) 100 ₹ کے نوٹوں کی تعداد 20
50 ₹ کے نوٹوں کی تعداد 10

(4) منیشا کی موجودہ عمر 23 سال ہے
سویتا کی موجودہ عمر 8 سال

(5) ہنر مند مزدوروں کی مزدوری 450 ₹
بے ہنر مزدوروں کی مزدوری 270 ₹

(6) حامد کی رفتار 50 کلومیٹر فی گھنٹا
جوزف کی رفتار 40 کلومیٹر فی گھنٹا

2. مربعی مساوات

مشقی سیٹ 2.1

1. $m^2 + 5m + 3 = 0$, $y^2 - 3 = 0$ (اس جیسی کوئی بھی)
2. (1)، (2)، (4)، (5) یہ مربعی مساواتیں ہیں۔
3. (1) $y^2 + 2y - 10 = 0$, $a = 1, b = 2, c = -10$
(2) $x^2 - 4x - 2 = 0$, $a = 1, b = -4, c = -2$
(3) $x^2 + 4x + 3 = 0$, $a = 1, b = 4, c = 3$
(4) $m^2 + 0m + 9 = 0$, $a = 1, b = 0, c = 9$
(5) $6p^2 + 3p + 5 = 0$, $a = 6, b = 3, c = 5$
(6) $x^2 + 0x - 22 = 0$, $a = 1, b = 0, c = -22$
4. (1) 1 ہے ، −1 نہیں (2) $\frac{5}{2}$ ہے ، 2 نہیں
5. $k = 3$
6. $k = -7$

مشقی سیٹ 2.2

1. (1) 9, 6 (2) −5, 4 (3) $-13, -\frac{1}{2}$ (4) $5, -\frac{3}{5}$
(5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (6) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$ (7) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$ (8) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
(9) 25, −1 (10) $-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}$ (11) 0, 3 (12) $-\sqrt{11}, \sqrt{11}$

مشقی سیٹ 2.3

1. (1) 4, −5 (2) $(\sqrt{6}-1), (-\sqrt{6}-1)$ (3) $\frac{\sqrt{13}+5}{2}, \frac{-\sqrt{13}+5}{2}$

(4) $\frac{\sqrt{2}+2}{3}, \frac{-\sqrt{2}+2}{3}$ (5) $-2, -\frac{5}{2}$ (6) $\frac{2+\sqrt{39}}{5}, \frac{2-\sqrt{39}}{5}$

مشقی سیٹ 2.4

1. (1) 1, −7, 5 (2) 2, −5, 5 (3) 1, −7, 0
2. (1) −1, −5 (2) $\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ (3) $\frac{-1+\sqrt{22}}{3}, \frac{-1-\sqrt{22}}{3}$

(4) $\frac{2+\sqrt{14}}{5}, \frac{2-\sqrt{14}}{5}$ (5) $\frac{-1+\sqrt{73}}{6}, \frac{-1-\sqrt{73}}{6}$ (6) $-1, -\frac{8}{5}$

3. $-\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

مشقی سیٹ 2.5

1. (1) 5 جذر ہو تو مختلف حقیقی اعداد ہیں۔ ، −5 جذر ہو تو حقیقی عدد نہیں ہیں۔

(2) $x^2 + 7x + 5 = 0$ (3) $\alpha + \beta = 2, \alpha \times \beta = -\frac{3}{2}$

2. (1) 53 (2) −55 (3) 0
3. (1) حقیقی اور مساوی (2) حقیقی اور غیر مساوی (3) حقیقی اعداد نہیں ہیں
4. (1) $x^2 - 4x = 0$ (2) $x^2 + 7x - 30 = 0$

(3) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ (4) $x^2 - 4x - 1 = 0$

5. k = 3 6. (1) 18 (2) 50
7. (1) k = 12 یا k = −12 (2) k = 6

مشقی سیٹ 2.6

1. 9 سال 2. 10 اور 12 3. عمودی قطار میں 10 اور اُفقی قطار میں 15
4. دانش کی موجودہ عمر 10 سال اور ندیم کی موجودہ عمر 15 سال
5. نمبر 10 6. برتنوں کی تعداد 6 اور ہر برتن کی پیداواری قیمت 100 روپے
7. 6 کلومیٹر فی گھنٹہ 8. شاہد کو 6 دن اور ڈیوڈ کو 12 دن
9. مقسوم علیہ = 9, مقسوم = 51 10. AB = 7 سم, CD = 15 سم, AD = BC = 5 سم

مجموعہ سوالات 2

1. (1) B (2) A (3) C (4) B (5) B (6) D (7) C (8) C
2. (1) اور (3) مربعی مساواتیں ہیں۔

3. (1) −15 (2) 1 (3) 21

4. $k = 3$ 5. (1) $x^2 - 100 = 0$ (2) $x^2 - 2x - 44 = 0$ (3) $x^2 - 7x = 0$

6. (1) حقیقی عدد نہیں ہے (2) حقیقی اور غیر مساوی (3) حقیقی اور مساوی

7. (1) $\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}$ (3) 1, −4

(4) $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ (5) جذر حقیقی عدد نہیں ہے (6) $(2 + \sqrt{7}), (2 - \sqrt{7})$

8. $m = 14$ 9. $x^2 - 5x + 6 = 0$ 10. $x^2 - 4pqx - (p^2 - q^2)^2 = 0$

11. ساگر کے پاس ₹100 اور مکند کے پاس ₹150

12. 12 اور $\sqrt{24}$ یا 12 اور $-\sqrt{24}$ 13. طلبہ کی تعداد 60

14. چوڑائی 45 میٹر، لمبائی 100 میٹر، کھیتی کے تالاب کا ضلع 15 میٹر

15. بڑے نل کے لیے 3 گھنٹے اور چھوٹے نل کے لیے 6 گھنٹے

3. حسابی تصاعد

مشقی سیٹ 3.1

1. (1) ہاں ، $d = 2$ (2) ہاں، $d = \frac{1}{2}$ (3) ہاں ، $d = 4$ (4) نہیں

(5) ہاں، $d = -4$ (6) ہاں، $d = 0$ (7) ہاں، $d = \sqrt{2}$ (8) ہاں، $d = 5$

2. (1) 10, 15, 20, 25, . . . (2) −3, −3, −3, −3, . . . (3) −7, −6.5, −6, −5.5, . .

(4) −1.25, 1.75, 4.75, 7.75, . . .(5) 6, 3, 0, −3 . . . (6) −19, −23, −27, −31

3. (1) $a = 5, d = -4$ (2) $a = 0.6, d = 0.3$ (3) $a = 127, d = 8$ (4) $a = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{2}$

مشقی سیٹ 3.2

1. (1) $d = 7$ (2) $d = 3$ (3) $a = -3, d = -5$ (4) $a = 70, d = -10$

2. ہاں، 121 3. 104 4. 115 5. −121 6. 180

7. 55 8. 55 9. 60 10. 1

مشقی سیٹ 3.3

1. 1215 2. 15252 3. 30450 5. 5040

5. 2380 6. 60 7. 4, 9, 14 یا 14, 9, 4 8. −3, 1, 5, 9

مشقی سیٹ 3.4

1. 70455 روپے 2. پہلی قسط 1000 روپے، آخری قسط 560 روپے 3. 1,92,000 روپے

4. 48, 1242 5. −20°, −25°, −30°, −35°, −40°, −45° 6. 325

مجموعہ سوالات 3

1. (1) B (2) C (3) B (4) D (5) B (6) C (7) C (8) A (9) A (10) B

2. 40 3. 1, 6, 11, . . . 4. −195 5. 16, −21 6. −1 7. 6, 10

8. 8 9. 67, 69, 71 10.3, 7, 11, ... 147. 14. 2000 روپے

4. معاشی منصوبہ بندی

مشقی سیٹ 4.1

1. CGST 6%, SGST 6% 2. SGST 9%, GST 18%
3. CGST ₹ 392 اور SGST ₹ 392
4. وہ بیلٹ گاہک کو 691.48 روپے میں ملے گا۔
5. کھلونوں میں کار کی قابل ٹیکس قیمت 1500 ₹، اس پر ₹135 CGST ₹135 SGST
6. (1) 14% کی شرح SGST (2) AC پر GST کی شرح 28%
   (3) AC کی قابل ٹیکس قیمت ₹ 40,000 (4) GST کی کل رقم ₹ 11,200
   (5) CGST ₹ 5600 (6) SGST ₹ 5600
7. پرساد کو وہ واشنگ مشین 48,640 روپے میں ملے گی اور بل پر CGST ₹ 5320 اور SGST ₹ 5320

مشقی سیٹ 4.2

1. چیتنا اسٹور کو ₹ 22,000 GST ادا کرنا ہے۔
2. نجمہ کو ₹ 12,500 اِن پٹ ٹیکس کریڈٹ ملے گا۔ اسے GST کے ₹ 2250 ادا کرنے ہوں گے۔
3. امیر انٹر پرائزیز کو ₹ 300 GST ادا کرنا ہے۔ اس میں سے مرکز کو ₹ 150 اور ریاست کو ₹ 150
   اکبری برادرس کو ₹ 400 GST کے ادا کرنا ہے اس میں سے مرکز کو ₹ 200 اور ریاست کو ₹ 200 ادا کرنے ہیں۔
4. ₹ 100 GST ادا کرنا ہے جس میں سے ₹ 50 CGST اور ₹ 50 UTGST ادا ہوں گے۔
5. واپس ادائیگی کی شرح 5.83% 6. کمپنی A میں شراکت منافع بخش ہے

مشقی سیٹ 4.3

1. (1) بازار بھاؤ 100 روپے، (2) درشنی قیمت 75 روپے، (3) قیمت میں 5 روپے تخفیف
2. 25% 3. 37,040 روپے 4. 800 شیئرس
5. واپس ادائیگی کی شرح 5.83% 6. کمپنی A میں شراکت منافع بخش ہے۔

مشقی سیٹ 4.4

1. 200.60 روپے 2. 999 روپے
3.

شیئرس کی تعداد	شیئرس کا بازار بھاؤ	شیئرس کی قیمت	دلالی کی شرح 0.2%	دلالی پر CGST 9%	دلالی پر SGST 9%	شیئرس کی کل قیمت
100 B	₹ 45	₹ 4500	₹ 9	₹ 0.81	₹ 0.81	₹ 4510.62
75 S	₹ 200	₹15000	₹ 30	₹ 2.70	₹ 2.70	₹ 14964.60

4. 100 شیئرس فروخت کیے 5. نقصان 8560 روپے

مجموعہ سوالات 4A

1. (1) C (2) B (3) D (4) B (5) A (6) B
2. کل بل 28,800 روپے، CGST 3150 روپے، SGST 3150 روپے

3. ₹ 997.50 4. ₹ 12,500 5. ₹ 250 منہا کیا جانے والا ٹیکس ، ادا کیا جانے والا ٹیکس ₹ 4250

6. منہا کیا جانے والا ٹیکس ₹ 1550 ، مرکز کا ٹیکس ₹ 5030 ، SGST ₹ 5030 ادا کرنا ہے۔

7. قابل ٹیکس قیمت ₹ 75,000 ، مرکز کا ٹیکس ₹ 4500 ، ریاست کا ٹیکس ₹ 4500

8. (1) تھوک بیوپاری کی ٹیکس بیجک CGST ₹ 16200 ، SGST ₹ 16200
خردہ فروش ٹیکس بیجک میں CGST ₹ 19,800 ، SGST ₹ 19800
(2) تھوک بیوپاری : CGST ₹ 2700 اور SGST ₹ 2700 ٹیکس ادا کرتا ہے۔
خردہ فروش : CGST ₹ 3600 اور SGST ₹ 3600 ٹیکس ادا کرتا ہے۔

9. (1) انعام قریشی کو دی گئی بل اِنوائس میں CGST ₹ 1960 ، SGST ₹ 1960
(2) وسئی کے بیوپاری کے ذریعے گاہک کو تحسیب کیا گیا CGST ₹ 2352 اور SGST ₹ 2352
(3) وسئی کے بیوپاریوں کا ادا کیے جانے والا CGST ₹ 392 اور SGST ₹ 392

10.

(1)

افراد	CGST کی ادائیگی (₹)	SGST کی ادائیگی (₹)	کل GST (₹)
صنعت کار	300	300	600
تقسیم کار	360−300 =60	60	120
خردہ فروش	390−360 = 30	30	60
کل ٹیکس	390	390	780

(2) آخر میں گاہک کو وہ چیز 7280 روپے میں ملے گی۔
(3) صنعت کار سے تقسیم کار B2B، تقسیم کار سے خردہ فروش B2B، خردہ فروش سے گاہک B2C

مجموعہ سوالات 4B

1. (1) B (2) B (3) A (4) C (5) A
2. ₹ 130.39 3. 22.2% 4. 21,000 روپے ملیں گے
5. 500 شیئرس ملیں گے 6. نفع 1058.52 روپے 7. کمپنی B
8. 1000 شیئرس ملیں گے 9. ₹ 118
10. (1) ₹ 1,20,000 (2) ₹ 360 (3) ₹ 64.80 (4) ₹ 120424.80
11. 1% نفع

5. احتمال

مشقی سیٹ 5.1

1. (1) 8 (2) 7 (3) 52 (4) 11

مشقی سیٹ 5.2

1. (1) S = {1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T} , n(S) = 12

(2) S = {23, 25, 32, 35, 52, 53} , n(S) = 6

2. S = { سبز، نیلا، زرد، کیسری، جامنی، سرخ } , n (S) = 6

3. S = { سنیچر، پیر، بدھ، جمعہ، اِتوار، منگل } , n (S) = 6

4. (1) B_1B_2 (2) G_1G_2 (3) B_1G_1 B_2G_1 B_1G_2 B_2G_2

(4) S = {B_1B_2, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, G_1G_2,}

مشقی سیٹ 5.3

1. (1) S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} , n(S) = 6

A = {2, 4, 6} n(A) = 3, B = {1, 3, 5} n(B) = 3, C = {2, 3, 5} n(C) = 3

(2) S = {(1,1), . . ., (1, 6), (2,1), . . ., (2, 6), (3, 1), . . .,(3, 6),
(4, 1), . . .,(4,6),(5, 1), . . .,(5, 6),(6, 1), . . .,(6, 6)} n(S) = 36

A = {(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1) (6, 6)} , n(A) = 6

B = {(4, 6) (5, 5) (5, 6) (6, 4) (6, 5) (6, 6)} , n(B) = 6

C = {(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 5) (6, 6)} , n(C) = 6

(3) S = {HHH, HHT, HTT, HTH, THT, TTH, THH, TTT} n(S) = 8

A = {HHH, HHT, HTH, THH} , n(A) = 4

B = {TTT} , n(B) = 1

C = {HHH, HHT, THH, THT} , n(C) = 4

(4) S = {10, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 34, 35, 40, 41, 42, 43, 45, 50, 51, 52, 53, 54} , n(S) = 25

A = {10, 12, 14, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 42, 50, 52, 54} , n(A) = 13

B = {12, 15, 21, 24, 30, 42, 45, 51, 54} , n(B) = 9

C = {51, 52, 53, 54} , n(C) = 4

(5) S = {M_1M_2, M_1M_3, M_1F_1, M_1F_2, M_2M_3, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2}
n(S) = 10

A = {M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2} , n(A) = 7

B = {M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2} , n(B) = 6

C = {M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3} , n(C) = 3

(6) S = {H1, H2, H3, H4, H5, H6 T1, T2, T3, T4, T5, T6} , n(S) = 12

A = {H1, H3, H5} , n(A) = 3

B = {H2, H4, H6, T2, T4, T6} , n(B) = 6

C = { } , n(C) = 0

مشقی سیٹ 5.4

1. (1) $\frac{3}{4}$, (2) $\frac{1}{4}$ 2. (1) $\frac{1}{6}$ (2) 0 (3) $\frac{5}{12}$

3. (1) $\frac{7}{15}$ (2) $\frac{1}{5}$ 4. (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{1}{5}$ 5. (1) $\frac{1}{13}$ (2) $\frac{1}{4}$

مجموعہ سوالات 5

1. (1) B (2) B (3) C (4) A (5) A 2. وسیم کی 3. (1) $\frac{1}{11}$ (2) $\frac{6}{11}$

4. $\frac{5}{26}$ 5. (1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{4}{9}$ 6. $\frac{1}{2}$ 7. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$

8. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{6}$ 9. $\frac{1}{25}$ 10. (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) 1

11. (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) 1 (4) 0 12. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ 13. $\frac{2}{11}$

14. $\frac{13}{40}$ 15. (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{1}{5}$ 16. $\frac{11}{36}$

6. شماریات

مشقی سیٹ 6.1

(1) 4.36 گھنٹے (2) 521.43 روپے (3) 2.82 لٹر (4) 35310 روپے

(5) 987.5 روپے یا 985 روپے (6) ₹ 3070 یا ₹ 3066.67

مشقی سیٹ 6.2

(1) 11.4 گھنٹے (2) 184.4 یعنی اندازاً 184 آم (3) 74.558 ≈ 75 سواریاں (4) 52.75 ≈ 53 بلب

مشقی سیٹ 6.3

1. 4.33 % 2. 72 یونٹ 3. 9.94 لٹر 4. 12.31 سال

مشقی سیٹ 6.5

1. (1) 60-70 (2) 20-30 اور 90-100 (3) 55 (4) 80 اور 90 (5) 15

مشقی سیٹ 6.6

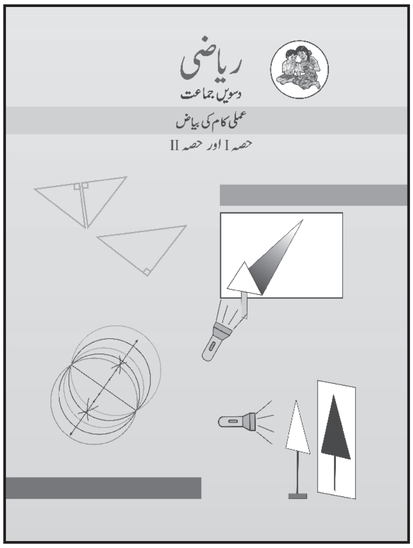
5. (1) 2000 (2) 1000 (3) 25%
6. (1) 12000 روپے (2) 3000 روپے (3) 2000 روپے (4) 1000 روپے

مجموعہ سوالات 6

1. (1) D (2) A (3) B (4) C (5) C (6) C
2. 52,500 روپے 3. 65,400 روپے 4. 4250 روپے
5. 72,400 روپے 6. 223.13 کلومیٹر 7. 32 روپے 8. 397.06 گرام
14. (1) کار - 108°, ٹیمپو - 43°, بس - 29°, رِکشا - 36°, دو پہیہ سواری - 144°
(2) سواریوں کی کل تعداد - 3000
16. کرکٹ پسند کرنے والے - 225, (2) فٹ بال پسند کرنے والے - 175, (3) دیگر کھیل پسند کرنے والے - 200

عملی کام کی بیاض دسویں جماعت

ریاضی (حصہ I اور حصہ II)



اُردو
ذریعۂ تعلیم

قیمت
۵۴ روپے

- حکومت سے منظور شدہ نصاب اور درسی کتاب پر مبنی۔
- قدر پیمائی کے طریقے کے مطابق تمام اسباق پر مبنی عملی کاموں کی شمولیت۔
- مختلف سرگرمیوں، تصویروں، شکلوں وغیرہ سے مزین۔
- معروضی اور کثیر متبادل سوالوں کے ساتھ۔
- زبانی امتحان کے لیے کارآمد سوالوں کی شمولیت۔
- مشق کے لیے مزید سوالوں کے جواب لکھنے کے لیے زیادہ سے زیادہ جگہ دستیاب۔

پاٹھیہ پستک منڈل کے تمام علاقائی ڈپو میں عملی بیاض برائے فروخت دستیاب ہیں۔

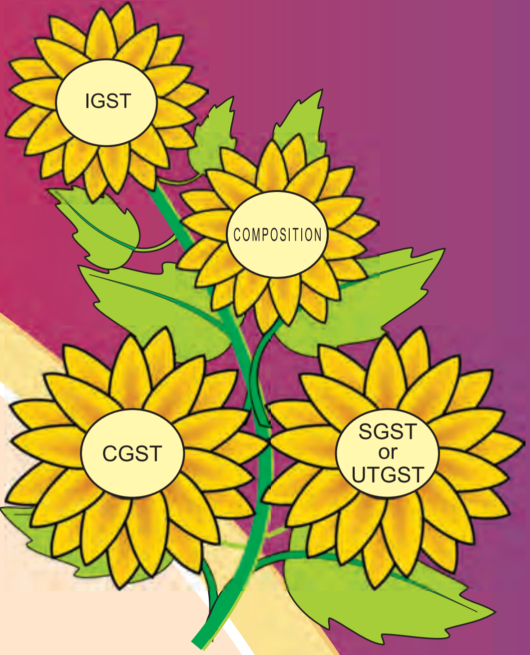
(1) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Senapati Bapat Marg, Pune 411004 ☎ 25659465 (2) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, P-41, Industrial Estate, Mumbai - Bengaluru Highway, Opposite Sakal Office, Kolhapur 416122 ☎ 2468576 (3) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, 10, Udyognagar, S. V. Road, Goregaon (West), Mumbai 400062 ☎ 28771842 (4) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, CIDCO, Plot no. 14, W-Sector 12, Wavanja Road, New Panvel, Dist. Rajgad, Panvel 410206 ☎ 274626465 (5) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Near Lekhanagar, Plot no. 24, 'MAGH' Sector, CIDCO, New Mumbai-Agra Road, Nashik 422009 ☎ 2391511 (6) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, M.I.D.C. Shed no. 2 and 3, Near Railway Station, Aurangabad 431001 ☎ 2332171 (7) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Opposite Rabindranath Tagore Science College, Maharaj Baug Road, Nagpur 440001 ☎ 2547716/2523078 (8) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Plot no. F-91, M.I.D.C., Latur 413531 ☎ 220930 (9) Maharashtra State Textbook Stores and Distribution Centre, Shakuntal Colony, Behind V.M.V. College, Amravati 444604 ☎ 2530965

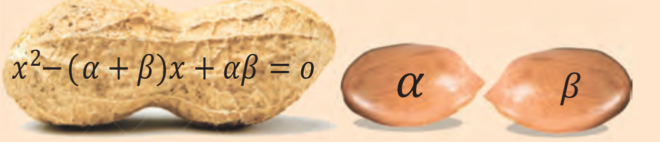
پاٹھیہ پستک منڈل، بال بھارتی کے توسط سے دسویں جماعت کے لیے
ای-لرننگ (Audio-Visual) مواد دستیاب

- بازو میں دیا ہوا Q.R. کوڈ اسکین کر کے ای-لرننگ مواد حاصل کرنے کے لیے اندراج کریں۔
- Google Play Store سے ebalbharati ایپ ڈاؤن لوڈ کر کے ای-لرننگ مواد کے لیے مطالبہ درج کریں۔

ebalbharati

www.ebalbharati.in | www.balbharati.in





مہاراشٹر راجیہ پاٹھیہ پستک نرمتی
وابھیاس کرم سنشودھن منڈل،
پونہ۔

₹ 80.00

उर्दू गणित इ.१० वी भाग-१